Die Aufsuchung gewisser Gesetze nach graphischer Methode und die Verwendung des logarithmischen Koordinatenpapiers.

Von P. Luckey in Elberfeld.

Mit 2 Tafeln.

Die Tabelle 1, die z. B. aus Schülkes Tafel vierstelliger Logarithmen zu entnehmen ist, zeigt, daß die Umlaufszeit (T) der Planeten

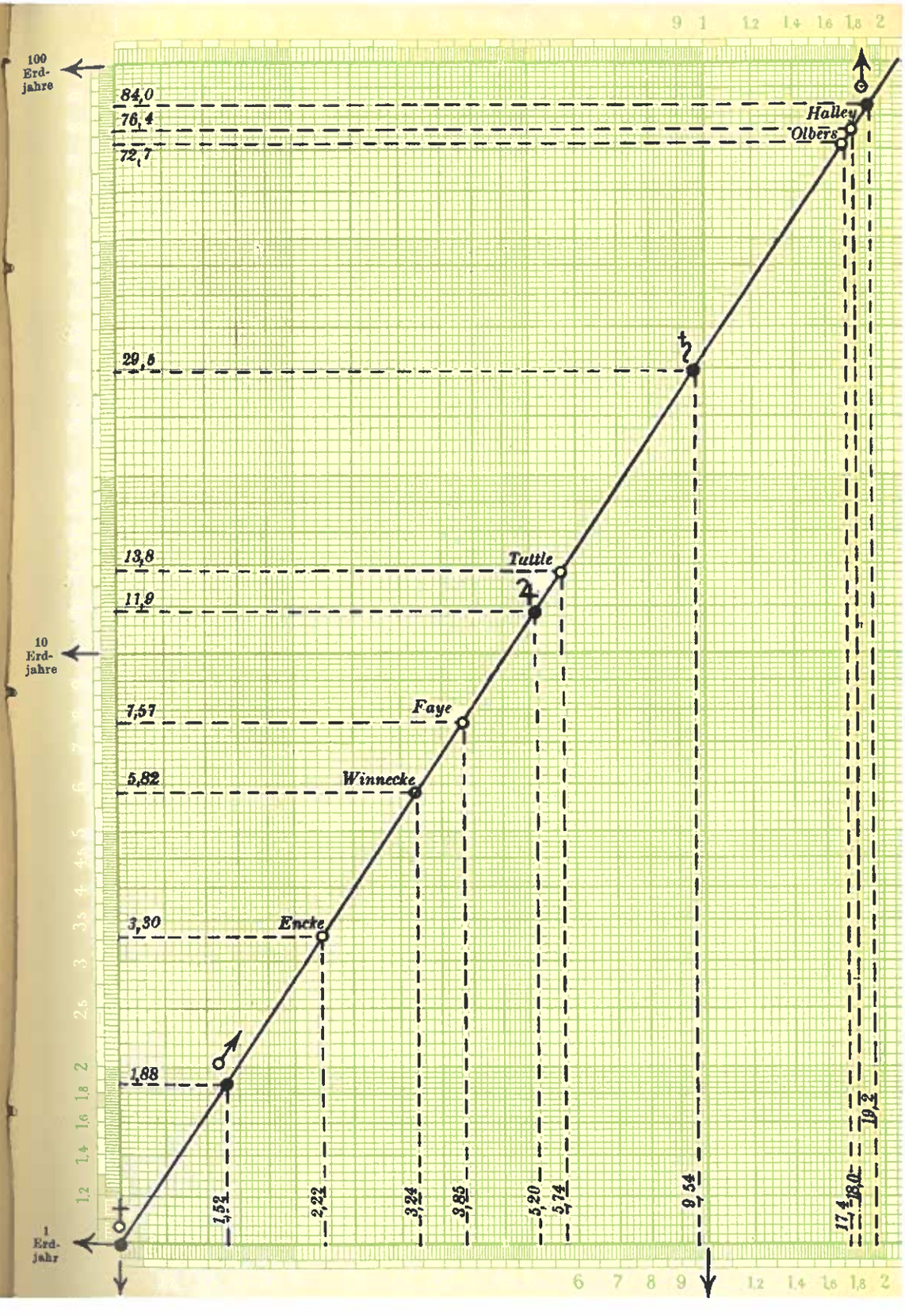
Tabelle 1.

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅	♆
Halbe große Achse (a)	0,3871	0,7233	1	1,524	5,203	9,539	19,19	30,07
Siderische Umlaufszeit in Jahren (T)	0,2408	0,6152	1	1,881	11,86	29,46	84,02	164,8

mit der Entfernung von der Sonne (halbe große Achse a) wächst, und reizt zu untersuchen, nach welchem Gesetz dies erfolgt.[1]) Der Schüler kann die großen Halbachsen a als Abszissen, die zugehörigen Umlaufszeiten T als Ordinaten nach einem geeigneten Maßstabe zu einer graphischen Darstellung zusammentragen. Hierzu ist ein großer Zeichenbogen zu wählen, andernfalls müssen die beiden ersten oder die beiden letzten Planeten fortgelassen werden. Die Kurve, die sich nach dem Augenmaß durch die acht Punkte legen läßt, erinnert den Schüler an eine Parabel; er kann aber leicht feststellen, daß die Umlaufszeiten sich nicht wie die Quadrate der Halbachsen verhalten.

Nun wird ein moderner Mathematikunterricht dem Schüler zum Bewußtsein gebracht haben, daß durch Übergang zu den Logarithmen nicht nur Rechenoperationen, sondern damit auch funktionale Beziehungen vereinfacht werden können. Während z. B. die Gleichungen $y = x^2$, $x \cdot y = 1$ die bekannten krummen Linien darstellen, sind $\log y = 2 \log x$ und $\log x + \log y = 0$ lineare Gleichungen zwischen den Logarithmen und die graphischen Darstellungen, in denen die Logarithmen der x als Abszissen und die Logarithmen der zugehörigen y als Ordinaten auftreten, sind gerade Linien. Eine derartige Vereinfachung tritt ein, wenn die beiden Veränderlichen durch keine anderen Operationen als Multiplikation, Division, Potenzierung und Radizierung zusammenhängen.

1) Nachträglich verdanke ich Herrn Direktor Dr. Schülke in Tilsit die Mitteilung, daß er zuerst 1895 die Aufsuchung des dritten Keplerschen Gesetzes mit Hilfe von Logarithmen vorgeschlagen hat. (Diese Zeitschr. XXVI, S. 247.)



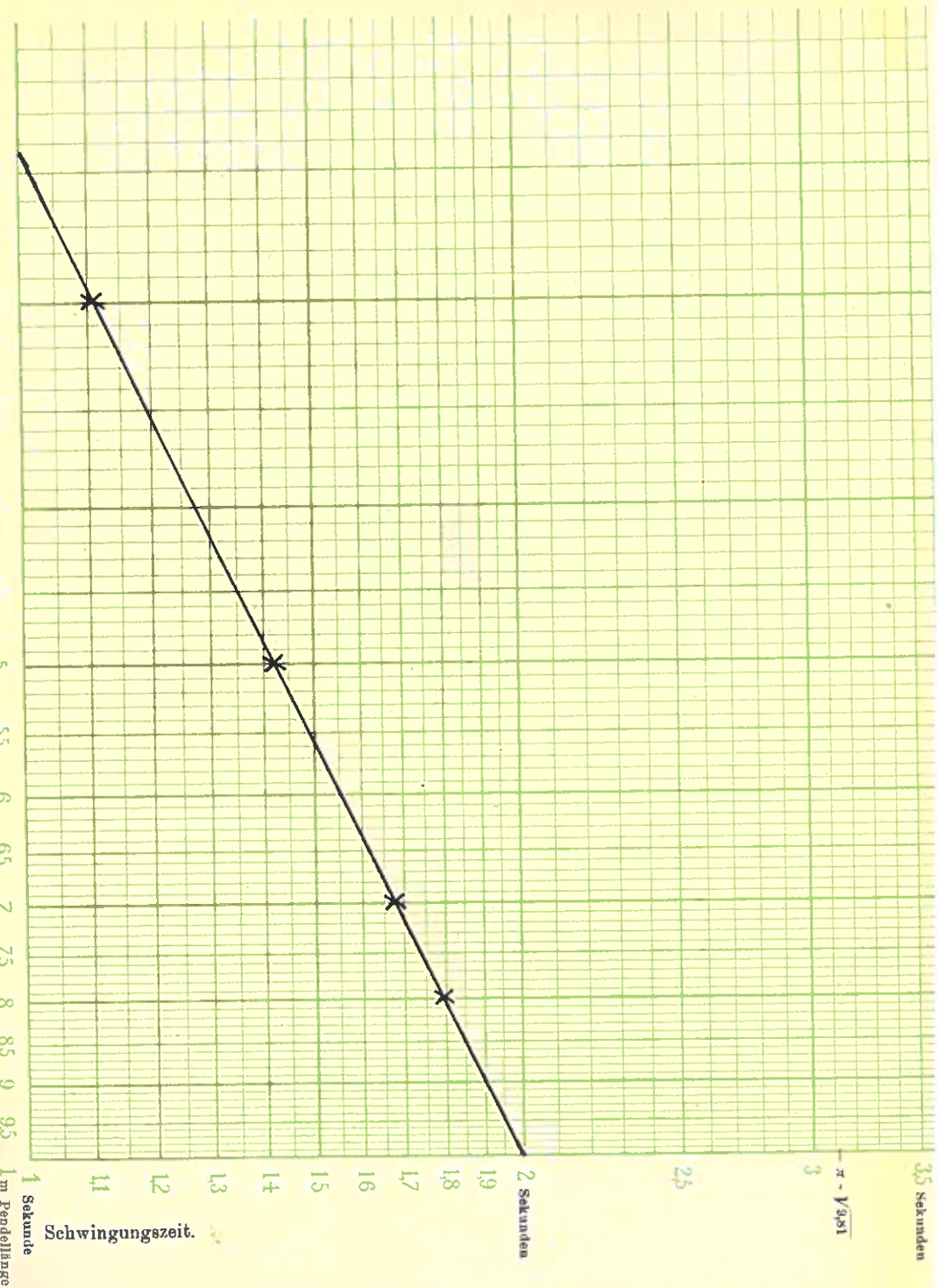


Fig. 2. Abhängigkeit der Schwingungszeit von der Länge eines Pendels.

Viele Naturgesetze drücken sich durch diese und nur durch diese Operationen aus, und es erscheint daher nicht aussichtslos, die Logarithmen zu den Werten von a und T auf ihren Zusammenhang zu untersuchen. Die graphische Darstellung, in der die (aufzuschlagenden) Logarithmen der a (Tabelle 2) als Abszissen, die Logarithmen der T

Tabelle 2.

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅	♆
log a	0,5878—1	0,8593—1	0	0,1830	0,7162	0,9795	1,2 31	1,4781
log T	0,3816—1	0,7890—1	0	0,2744	1,0741	1,4692	1,9244	2,2170

als Ordinaten gezeichnet werden, ergibt eine durch den Nullpunkt gehende gerade Linie mit dem Richtungsfaktor $\frac{3}{2}$. Jetzt zeigt die Tafel 2 noch genauer, daß wirklich

$$\log T = \tfrac{3}{2} \log a$$

ist. Hieraus folgt durch Rückkehr zu den Numeri das dritte Kepplersche Gesetz

$$T = a^{\frac{3}{2}}.$$

In der genannten Logarithmentafel sind die entsprechenden Tabellen für einige Kometen und für die Jupitermonde enthalten. An sie läßt sich dieselbe Übung anknüpfen. Für die Kometen ist zunächst a als arithmetisches Mittel der dort angegebenen Entfernungen in Sonnennähe und Sonnenferne auszurechnen. Bei den Jupitermonden erhält man als Kurve für die Logarithmen zwar eine gerade Linie mit dem Richtungsfaktor $\frac{3}{2}$, aber diese geht nicht durch den Nullpunkt, da die gewählten Längen- und Zeiteinheiten, eine Million Kilometer und Tag, dem System fremd sind. Die Schüler kommen selbst auf den Gedanken, die halbe große Achse der Bahn eines beliebigen der Monde als Längeneinheit und die zugehörige Umlaufszeit als Zeiteinheit zu wählen. Wird aber diese Umrechnung, die natürlich mit den Logarithmen vorzunehmen ist und sich dann als Verschiebung des Koordinatensystems erweist, nicht vorgenommen, so ist es eine gute Übung, die Gleichung der nicht durch den Nullpunkt gehenden Geraden aufzufinden. Das dritte Kepplersche Gesetz erscheint dann mit einer multiplikativen Konstanten.

Das angegebene Verfahren der Aufsuchung eines Gesetzes kann in der Physik in vielen Fällen angewandt werden. Im Klassenunterricht und erst recht in Schülerübungen sucht man nicht mehr, wie es wohl der alte Demonstrationsunterricht liebte, die Versuche oder gar den Bau der Apparate so einzurichten, daß möglichst einfache, wohl gar ganze Zahlen als Beobachtungsergebnisse herauskommen, aus denen dann dem Lernenden das Gesetz sozusagen in die Augen springt.

Die methodischen Bedenken solcher allzusehr zurechtgemachten Versuche brauchen nicht erörtert zu werden. Erfahrungsgemäß fällt es dem Schüler aber nun anfangs schwer, aus einer nicht zubereiteten Zahlenreihe ein Gesetz zu erkennen, und sei dies auch eine einfache Proportionalität. Es müssen also Methoden gesucht und geübt werden, nach denen der Schüler unbekannte Gesetze aus den Zahlenreihen induzieren kann, ohne daß der Lehrer den entscheidenden Ruck gibt, etwa durch die Aufforderung: Bilde die Quadrate der Stromstärken und vergleiche sie mit den entwickelten Wärmemengen! Das oben angegebene Verfahren führt insbesondere in den zahlreichen Fällen zum Ziel, in denen eine Größe dem Quadrate einer andern direkt oder umgekehrt proportional ist.[1])

Wenn man in dieser, durch das Aufschlagen der Logarithmen immerhin etwas mühsamen Weise einigemal vorgegangen ist, auch eine Eichung der Koordinatenachsen auf die Logarithmen wenigstens der ganzen Einer und der ganzen Zehner hat vornehmen lassen, kann man einen Schritt weiter gehen und unmittelbar die Numeri an die Eichstriche schreiben lassen. Schließlich kann man die äußerst bequemen logarithmischen Koordinatenpapiere benutzen lassen. Da die Verwendbarkeit dieser Papiere besonders für die graphische Auswertung von Beobachtungsergebnissen und für die graphische Lösung von Aufgaben mehr Beachtung verdient, als ihr anscheinend bisher geschenkt wurde, sei hierüber einiges mitgeteilt. Das logarithmische Papier wird in verschiedenen Einteilungsmaßstäben und Formaten von der Firma Carl Schleicher & Schüll in Düren in den Handel gebracht. (Die Firma stellt auch Papiere her, auf denen die eine Koordinatenachse logarithmisch, die andere gleichmäßig geteilt ist, auf denen sich also die Exponentialkurve oder der Logarithmus, also auch z. B. die Darstellung der Höhe als Funktion des Luftdrucks, zu einer geraden Linie streckt.) Erstrecken sich die höchsten Stellen der auf einer Koordinatenachse darzustellenden Zahlen über mehrere Wertstellen, wie in Figur 1 über Einer und Zehner, so ist ein Format mit entsprechend vielen logarithmischen Einheiten (hier 2) zu verwenden; haben dagegen die Ziffern vom höchsten Stellenwert alle denselben Stellenwert, so empfiehlt sich, wie in Figur 2, ein weitmaschigeres System mit nur einer logarithmischen Einheit.

Um den Schüler mit der Benutzung des Papiers vertraut zu machen, kann man ihn zunächst auf einer Abszissenachse, die mehrere solche logarithmische Einheiten nebeneinander hat, Multiplikationen, Divisionen, Potenzierungen und Radizierungen vornehmen lassen. Diese Operationen sind mit dem Stechzirkel ausführbar als Antragungen,

1) Zu dem nun folgenden Teil meines Aufsatzes regte mich eine Vorlesung über graphische Methoden an, die Herr Privatdozent Dr. Timpe auf dem letzten mathematisch-naturwissenschaftlichen Fortbildungskursus in Münster hielt.

Abtragungen, Vervielfältigungen und Teilungen von Strecken, die stets vom Anfangspunkt 1 aus zu messen sind. Für die Multiplikationen und Divisionen wird sich der Schüler bald einen beweglichen logarithmischen Maßstab von dem Papier abschneiden, der nichts anderes ist als die Zunge des logarithmischen Rechenschiebers. Überhaupt werden diese Übungen auf dem festen Zeichenbogen eine gute Vorübung für die Benutzung des Rechenschiebers sein. Gegenüber der sofortigen Benutzung des Rechenschiebers besteht für die erste Einführung ein Vorteil darin, daß mehrere logarithmische Einheiten nebeneinander gezeichnet daliegen und so der Schüler ruhig in eine benachbarte logarithmische Einheit hinüberrechnen kann, wenn die Aufgabe eine Erhöhung oder eine Erniedrigung des Stellenwertes der höchsten Stelle mit sich bringt. Als weitere Übung ziehe der Schüler durch den Anfangspunkt eine gerade Linie mit ganzzahligem Richtungsfaktor. Er kann dann sehr einfach graphisch potenzieren, indem er zu gegebenen Abszissen die Ordinaten, und radizieren, indem er zu gegebenen Ordinaten die Abszissen zeichnet. Dann ist er hinreichend vorbereitet, um eine Aufgabe wie die im Anfang dieses Aufsatzes gestellte zu lösen.

Von den beiden erwähnten Figuren stellt die erste das dritte Kepplersche Gesetz für die Planeten von der Erde bis zum Uranus und für die sechs Kometen dar, für die Schülke die Daten angibt. Die zweite Figur ist folgendermaßen entstanden zu denken. Versuche, die etwa in Schülerübungen angestellt wurden, mögen die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Ergebnisse gebracht haben:

Pendellänge l in m	0,3	0,5	0,7	0,8
Schwingungszeit t in sec	1,1	1,42	1,67	1,79

Werden diese Ergebnisse in das logarithmische Koordinatensystem eingetragen, so sieht man, daß die erhaltenen vier Punkte auf einer Geraden liegen, die zu ziehen ist. Aus der so gewonnenen Darstellung kann man z. B. entnehmen, daß ein Pendel von 0,65 m Länge eine Schwingungszeit von etwa 1,62 sec haben muß, oder umgekehrt, daß z. B. zu einer Schwingungszeit von 2 sec eine Pendellänge von ungefähr 1 m gehört (Sekundenpendel), dagegen das Halbsekundenpendel ($t = 1$ sec) etwa 24,8 cm lang sein muß. Weiter läßt sich mit dem Stechzirkel feststellen, daß der Richtungsfaktor der Geraden $\frac{1}{2}$ ist. Demnach sind die Schwingungszeiten den Quadratwurzeln aus den Pendellängen proportional:

$$t = A\sqrt{l},$$

wo A eine Konstante ist. Wir sahen schon, daß für $l = 1$ m die Zeit t rund gleich 2 sec ist, daß also die Konstante A, die als Ab-

schnitt der über der Stelle 1 m der Abszissenachse errichteten Ordinatenachse auftritt, rund gleich 2 ist. Daß in Wirklichkeit die Konstante den Wert

$$A = 2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{g}}$$

hat, kann natürlich nicht gezeigt werden; doch sieht man, wenn man mit dem Stechzirkel die Strecke $g = 9{,}81$ halbiert, daß der Wert von $\sqrt{g}$ nahezu auf die Stelle $\pi = 3{,}14$ fällt, daß also $\pi : \sqrt{g}$ angenähert gleich 1 ist.

Die Verwendung von Vektoren für die elementare Behandlung von Aufgaben aus der Mechanik, insbesondere der Mechanik des Himmels.

Von E. Höhnemann in Landsberg a. W.

Mit 5 Figuren im Text.

In den meisten Lehrbüchern der Physik wird darauf hingewiesen, daß der Satz vom Parallelogramm der Kräfte einer Erweiterung und Verallgemeinerung fähig ist, sofern Kräfte, Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Drehungen, überhaupt alle gerichteten Größen durch Strecken dargestellt und geometrisch addiert, d. h. durch Aneinanderfügen nach Richtung und Größe zu einer Resultierenden vereinigt werden können. Anwendungen dieses Verfahrens, das in der modernen theoretischen Physik, ins Rechnerische übertragen, als Vektoranalysis eine so große Bedeutung erlangt hat, finden sich in den für die Schule bestimmten Lehrbüchern selten, obgleich die Vektormethode sich durch Anschaulichkeit auszeichnet und in vielen Fällen das unübersichtliche, ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde legende Verfahren wesentlich zu vereinfachen imstande ist.

Am häufigsten wird noch der Hamiltonsche Hodograph bei der Ableitung der Gesetze der Kreisbewegung angewendet, und die Maxwellsche Ableitung des Gravitationsgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen (Maxwell, Substanz und Bewegung. Verl. v. Vieweg u. Sohn), die ebenfalls die Hodographenmethode benutzt, ist in einige Lehrbücher der Physik, z. B. in das bekannte von Höfler, übernommen worden.

Im folgenden soll an einigen bekannten Aufgaben aus der Mechanik gezeigt werden, wie anschaulich sich durch Verwendung von Vektoren die Untersuchung mancher Bewegungsvorgänge gestaltet, und wie man durch sie imstande ist, an die Stelle von Integrationen elementare Summationen zu setzen.

1. Der schräge Wurf.

Stellt in Figur 1 $AB = c$ nach Richtung und Größe die Anfangsgeschwindigkeit eines unter dem Winkel α schräg aufwärts geworfenen Körpers dar, $BC = gt$ den in der Zeit t infolge der Erdbeschleunigung g hinzukommenden Geschwindigkeitszuwachs in vertikaler Richtung, so ist $AC = v$ nach Richtung und Größe die in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit. Sie ändert sich wie der Vektor AC, während C auf der Senkrechten AE hinabgleitet, und erhält ihren kleinsten Wert, wenn $AC = AE$ und horizontal gerichtet ist, der Körper also die größte Höhe erreicht. In gleichen Zeitabständen von diesem Moment hat die Geschwindigkeit gleiche Werte und gleiche Neigungen gegen die Horizontale. Der Zusammenhang zwischen der Anfangsgeschwindigkeit c und der Geschwindigkeit nach der Zeit t ergibt sich im ΔABC: $v^2 = c^2 + g^2t^2 - 2gt \sin \alpha$.

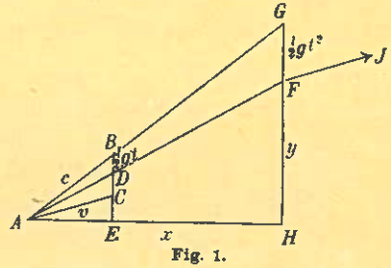


Fig. 1.

Da die Geschwindigkeit in Richtung der Vertikalen gleichförmig wächst, so ist für die Zeit t der mittlere Geschwindigkeitszuwachs $AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}gt$, also die „mittlere Geschwindigkeit“ AD gleich der geometrischen Summe von AB und BD, woraus der in der Zeit t durchlaufene „mittlere Weg“ $AF = AD \cdot t$ folgt.

Die Vertikale durch F schneide die Horizontale in H, die Verlängerung von AB in G. Dann ist $AG = ct$ und $GF = BD \cdot t = \frac{1}{2}gt^2$. AF ist also die geometrische Summe des in der Anfangsrichtung und mit der Anfangsgeschwindigkeit zurückgelegten Weges AG und der Fallstrecke GF. Sowohl durch die mittlere Geschwindigkeit wie durch geometrische Addition der Wege erhält man also denselben Punkt der Flugbahn. Der Zustand der Bewegung in diesem Punkte ist gegeben durch die Strecke FJ, die nach Länge und Richtung gleich dem Geschwindigkeitsvektor AC ist.

Alle Aufgaben über die Wurfbewegung, in denen neben g drei der Stücke c, α, t, v und β, der Winkel zwischen der Richtung der Endgeschwindigkeit und der Horizontalen, gegeben sind, wozu noch die Komponenten x und y des Weges kommen, lassen sich mit Hilfe der erläuterten Figur konstruktiv und rechnerisch lösen. Dieses Ineinandergreifen von geometrischem und analytischem Verfahren ist zweifellos didaktisch von großem Werte.

Wichtig für die Einführung in das Energieprinzip ist der Nachweis, daß bei der Wurfbewegung die Summe der kinetischen und potentiellen Energie unveränderlich ist: Im Punkte F ist, wie sich aus $\triangle AEC$ ergibt,

$$v^2 = c^2 \cos^2 \alpha + (c \sin \alpha - gt)^2 = c^2 - 2gt \sin \alpha + g^2t^2,$$