

Beiträge zur Erforschung der islamischen Mathematik

P. LUCKEY – Gönningen (Württemberg)

Drei um die Erschliessung der mathematischen Wissenschaften im Bereich des Islam verdiente Männer deutscher Zunge traten in den zwanziger Jahren vom Schauplatz der Forschung ab. Im Jahre 1922 verschied Heinrich Suter, 1925 raffte eine tückische Krankheit den rührigen Carl Schoy allzufrüh hinweg und 1928 starb auch Eilhard Wiedemann. Während Wiedemann und seine Schüler sich mehr der islamischen Physik, praktischen Astronomie und Technik zuwandten, galt die Arbeit der beiden zuerst Genannten hauptsächlich der Mathematik und mathematischen Astronomie, Gebieten, auf die ich mich in den folgenden Ausführungen meist beschränken werde. Im Jahrzehnt vor dem Hitlerkriege und während desselben zeigten sich die Früchte neuer Arbeit. Das, was hiervon zu meiner Kenntnis gelangte, nenne ich, soweit es mir bemerkenswert erscheint. Was in und nach dem Kriege jenseits des deutschen Machtbereichs veröffentlicht wurde, ist mir auch bei Abfassung dieser Arbeit noch nicht bekannt.

Im Jahre 1930 veröffentlichten G. Junge und W. Thomson eine mit einer Übersetzung und wertvollen Erläuterungen versehene Ausgabe des uns nur arabisch erhaltenen Kommentars von Pappos zum zehnten Buch der Elemente Euklids⁽¹⁾. G. Junge, J. Raeder und W. Thomson brachten 1932 die 1897 von Besthorn und Heiberg begonnene Ausgabe des Textes und der lateinischen Übersetzung der Leidener Handschrift 399, 1 zum Abschluss⁽²⁾. Das ganze Werk enthält die ersten 6 Bücher der Elemente Euklids in der Übersetzung von al-Ḥaǧǧāg mit den Erläuterungen von an-Nairīzī. 1934 erschien

⁽¹⁾ G. Junge und W. Thomson, *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*. Cambridge 1930.

⁽²⁾ *Codex Leidensis 399*, 1. ... arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt R. O. Besthorn et J. L. Heiberg. Ad finem perduxerunt G. Junge, J. Raeder, W. Thomson. Pars III. Kopenhagen 1932.

eine Ausgabe von al-Bīrūnī's *Taḥṣīm*⁽¹⁾, d. i. seinem Lehrbuch der Elemente der Astrologie, das ausser der eigentlichen Astrologie als Vorbereitung auf sie eine Fülle von Angaben aus der Geometrie, der Arithmetik, der Astronomie und der Geographie enthält. Sein Herausgeber R. R. Wright, ehemals Professor der Biologie an der Universität Toronto, also, wie so mancher andere Arbeiter auf dem Gebiet der islamischen Mathematik und Astronomie, für die Orientalistik ursprünglich ein Aussenseiter, starb kurz vor dem Erscheinen dieses leider nur in 100 Exemplaren erschienenen Buches, in welchem er dem in Faksimile (*Replika Process*) wiedergegebenen Text einer guten arabischen Handschrift seine mit gründlichem Fleiss ursprünglich nach einer persischen Handschrift angefertigte, 333 Seiten starke englische Übersetzung gegenübergestellt hat.

Wer auf dem noch so unvollkommen bearbeiteten Gebiet der islamischen mathematischen Wissenschaften aus den Quellen forschen will, muss vielseitig sein. Er sollte sich mit mathematischem und historischem Verständnis in den antiken exakten Wissenschaften, vor allem den griechischen, aber auch den ägyptischen, babylonischen und indischen, umgesehen haben und diese Wissenschaften, zumal die hellenistischen, möglichst aus den Quellen schöpfen können, wozu mancherlei Sprachkenntnisse gehören. Er muss dann insbesondere den Schwierigkeiten der arabischen Sprache gewachsen sein. Die allgemeinen Wörterbücher versagen meist gegenüber der Fachsprache, und es gibt bisher nur wenige kleine Sonderverzeichnisse von Fachwörtern. Und da auch nur eine kleine Zahl von Textausgaben vorliegt, von denen nur ein paar neuzeitlichen Anforderungen genügen, muss er einen schweren Kampf um die Handschriften und mit den Handschriften aufnehmen. Was das bedeutet, zeigt das Beispiel Schoys, dem es in seinem zu kurzen Leben nicht vergönnt war, auf dem Gebiete der Textübersetzung Vollkommenes zu leisten. Oft verstand er nur durch richtiges Ahnen des mathematischen Zusammenhangs die ihm vorliegende Handschrift, manchmal aber, und dies besonders bei seinem Ringen mit der schwierigen Sprache al-Bīrūnī's, griff er fehl.

Max Krause, 1909 geboren und der Hamburger islamischen Forschungsstätte angehörig, stellte sich die Lebensaufgabe, den Mathematikhistorikern durch Bekämpfung solcher Schwierigkeiten die

⁽¹⁾ *The Book of Instruction in the Elements of the Art of Astrology by al-Bīrūnī*. Reproduced from Brit. Mus. MS. Or. 8349. The Translation facing the Text by R. Ramsay Wright. London 1934.

Wege zu ebnen. Sein 1936 erschienenes Verzeichnis *Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker* ⁽¹⁾, das er unter Anleitung und Mitarbeit seines Lehrers H. Ritter an der Quelle aufstellte, erschliesst dem Forscher eine Fülle guter Handschriften mathematischer, astronomischer und astrologischer Werke, von denen eine Anzahl wertvoller Stücke nur in diesen Handschriften bekannt ist und erst durch diesen Katalog einem weiteren Kreise mitgeteilt wurde. Krause ging auch an die Herstellung von Textausgaben mit Übersetzungen. 1936 veröffentlichte er *Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Naṣr Maṣṣūr b. 'Alī b. 'Iṣāq* ⁽²⁾. Neben Text und Übersetzung bringt dieses 365 Seiten starke Buch ausführliche Untersuchungen zur Geschichte des Textes. Der junge Forscher fiel 1944 in Russland. Möge das, was er gesammelt und erarbeitet hat, darunter seine Vorarbeiten zu einer Ausgabe des Mas'ūdischen Kanons von al-Bīrūnī, der Wissenschaftsgeschichte nicht verloren gehen! Einem anderen Schüler Ritters, K. Garbers, verdanken wir eine ebenfalls 1936 erschienene, mit Übersetzung und Erläuterungen versehene Ausgabe der Schrift von Ṭābit b. Qurra *Über die Stundeninstrumente* (Sonnenuhren), welche 'Ruchamen' (ruḥāmāt) heissen (Köpr.: 948, 1) ⁽³⁾ ⁽⁴⁾. Eine kürzere stereometrische Schrift von 'Omar al-Karābīsī ⁽⁵⁾ und eine ebensolche von Ṭābit b. Qurra ⁽⁶⁾ bearbeiteten O. Spies und Erich Bessel-Hagen (geb. 1898), ein feinsinniger Mathematiker und Mathematikhistoriker, dessen kranker Körper 1946 dem grausamen Hunger erlag. Dem arabischen Euklid galten Studien von Cl. Thaer ⁽⁷⁾ und von Claire Baudoux ⁽⁸⁾, während S. Pines ⁽⁹⁾

⁽¹⁾ *Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math., Astronomie u. Physik* B, 3, 1936, S. 437-532.

⁽²⁾ *Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, phil.-hist. Kl.* (3) 17, 1936.

⁽³⁾ Handschriftenkataloge zitiere ich mit den Abkürzungen in C. Brockelmann, *Gesch. d. arab. Litt.*, I, 2. Aufl., Leiden 1944, und *Supplement* I, Leiden 1937.

⁽⁴⁾ *Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math. usw.* A, 4, 1936.

⁽⁵⁾ *Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math. usw.* B, 1, 1931, S. 502-540. — Vgl. dazu S. Gandz B, 2, 1933, S. 81-97 u. S. 98-105.

⁽⁶⁾ *Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math. usw.* B, 2, 1933, S. 186-198.

⁽⁷⁾ *Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math. usw.* B, 3, 1936, S. 116-121; *Hermes*, 77, 1942, S. 197-205.

⁽⁸⁾ Vgl. A. Mieli, *La science arabe*, Leiden 1939, S. 86.

⁽⁹⁾ S. Pines, *Beiträge zur islam. Atomenlehre*, Dissertation Berlin 1936; *Revue des études juives* (2) 3, 1938, S. 3-64; (2) 4, 1938, S. 1-33; *Archeion* 21, 1939, S. 298-306.

die islamischen Atomenlehren und Bewegungslehren aus handschriftlichen Quellen untersuchte. Arbeiten von S. Gandz über die älteste arabische Algebra sollen weiter unten genannt werden. Mehr literaturgeschichtlicher Natur ist die Dissertation von A. G. Kapp *Arabische Übersetzer und Kommentatoren Euklids auf Grund der Gelehrtenbiographien von Ibn al-Qifṭī* ⁽¹⁾. Bei dieser Gelegenheit sei auch auf die zusammenfassenden Werke von Sarton ⁽²⁾ und von Mieli ⁽³⁾ hingewiesen.

Im Folgenden berichte ich über die Ergebnisse eigener Untersuchungen auf dem Gebiete der arabischen Mathematik und sphärischen Astronomie. Diese Arbeiten waren durch die Zeitverhältnisse sehr erschwert. Insbesondere konnte ich mir schon vor dem Kriege infolge der deutschen Währungsnot nur unter Schwierigkeiten einige Handschriftenkopien aus dem Ausland verschaffen. Als dann während des Krieges die deutschen Bibliotheken ihre Schätze verlagerten, waren Handschriften und Kopien fast nur noch durch die Hilfsbereitschaft einzelner Personen zu erlangen ⁽⁴⁾. Meine Ergebnisse wären vollstän-

⁽¹⁾ *Isis* 22, 1934, S. 150-172, 23, 1935, S. 54-99, 24, 1935, S. 39-79.

⁽²⁾ G. Sarton, *Introduction to the History of Science* I. II. Baltimore 1927 u. 1931.

⁽³⁾ Vgl. S. 492, Anm. 8.

⁽⁴⁾ Vor dem Kriege verdanke ich mehrere Kopien Stambuler Handschriften der Güte von Professor H. Ritter in Istanbul. Durch das grosszügige Entgegenkommen von Professor Diepgen und Professor Ruska in Berlin durfte ich verschiedene Handschriften und Kopien, die aus dem Nachlass von C. Schoy in den Besitz des Instituts für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften zu Berlin übergegangen waren, während des Krieges und über sein Ende hinaus entleihen. Bis Ende 1942 konnte ich noch aus der Reichsbibliothek zu Leiden und durch die Société des Amis de la Bibliothèque Nationale aus der Pariser Nationalbibliothek Kopien erhalten. 1943 erwirkte mir Professor van der Waerden in Leipzig bei der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften die Gewährung eines Guthabens zur Anschaffung von Photokopien. Er verhalf mir dann durch die Sächsische Akademie der Wissenschaften zu den Devisen für die Kopie des weiter unten erwähnten Badī' von al-Karāḡī, die in der Vatikanischen Bibliothek mit gütiger Erlaubnis ihres Herrn Präfekten R. P. Anselmo M. Albareda, O. S. B., hergestellt wurde. Im selben Jahre verschaffte mir Herr van der Waerden durch die freundliche Vermittlung von Herrn Dr. Sencer in Ankara mit Genehmigung des Türkischen Unterrichtsministeriums Lichtbilder des ebenfalls weiter unten erwähnten, in Istanbul befindlichen Rechenbuchs von Kūṣyār. Den Personen, Gesellschaften und Behörden, die mir unter schwierigen Verhältnissen halfen, nicht zumindest meinem Vetter Walter A. Erley in Chicago, der wiederholt mit kaufkräftiger Währung einsprang, schulde ich grössten Dank.

diger und umfassender ausgefallen, wenn mir eine Anzahl einschlägiger Handschriften, deren Titel mich in den Katalogen lockten, erreichbar gewesen wäre. Die Früchte meiner Arbeit konnte ich bisher nur zum geringsten Teil veröffentlichen. Da ich mich im Rahmen des vorliegenden Berichts meist auf die Angabe der Ergebnisse beschränken muss und die Einzelheiten des Materials und der Begründungen nicht ausbreiten kann, führe ich auch diejenigen meiner druckfertig abgefassten Arbeiten an, deren Veröffentlichung ich erst von der Zukunft erhoffe. Einige Erläuterungen und Übersetzungen, die dem Orientalisten überflüssig erscheinen mögen, sollen dazu dienen, die Ausführungen auch dem des Arabischen nicht kundigen Mathematikhistoriker verständlich zu machen.

Der Bericht zerfällt in zwei Teile. Der erste handelt von der älteren Gnomonik und der in ihr zum Ausdruck kommenden Kunst der Konstruktion und Berechnung sphärischer Grössen, der zweite vom Zahlenrechnen und der Algebra.

I. Die ältere Gnomonik

Aus dem 987 von Ibn an-Nadīm verfassten *Fihrist* ersehen wir, dass mit den Schriften über das (ebene) Astrolab, das auf der stereographischen Projektion der Kugeloberfläche beruht, diejenigen über die Sonnenuhren zu den ältesten in arabischer Sprache geschriebenen Werken der Mathematik und Astronomie gehören. Bei den Herstellungsmethoden der Sonnenuhren spielen die senkrechten Parallelprojektionen der Sphäre auf Hauptebenen die wichtigste Rolle. Schriften gnomonischen Inhalts verfassten im neunten Jahrhundert al-Ḥwārizmī, al-Māhānī, al-Kindī, Muḥammad b. 'Omar b. al-Farruhān, al-Fargānī und Muḥammad b. aṣ-Ṣabbāḥ. Zu den älteren Schriftstellern über die Sonnenuhren rechne ich weiter die beiden grossen Šābier Ṭābit b. Qurra (starb 901) und al-Battānī (starb 929), ferner Habaš, von dem noch nicht endgültig entschieden ist, ob er, wie Nallino annimmt, ein Zeitgenosse al-Battānī's oder etwa ein Jahrhundert älter als dieser ist⁽¹⁾.

Unsere noch lückenhaften Kenntnisse in der arabischen Gnomonik wurden zunächst aus jüngeren Werken geschöpft. J. J. Sédillot untersuchte in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts die grosse,

⁽¹⁾ Vgl. J. Tropfke, *Gesch. d. Elementarmathematik* V², 1923, S. 7, Anm. 16.

1230 verfasste Schrift von al-Marrākušī, und Schoy bearbeitete insbesondere gnomonische Abschnitte aus dem Tafelwerk des 1009 gestorbenen Ibn Yūnus. Aus der älteren Zeit war lange kaum mehr als die gnomonischen Teile des von Nallino herausgegebenen Tafelwerks von al-Battānī⁽¹⁾ bekannt. Da übersetzten 1922 E. Wiedemann und J. Frank die Schrift des Ṭābit b. Qurra *Über die Formen der Linien, auf denen das Ende des Schattens des Gnomons läuft*⁽²⁾, und dann erschloss 1936 Garbers die schon (oben S. 3) erwähnte andere gnomonische Schrift des Ṭābit.

Von den Werken der oben genannten ältesten gnomonischen Autoren scheint nur sehr wenig auf uns gekommen zu sein. Und doch wäre uns gerade der Einblick in diese Schriften besonders erwünscht, nicht zum mindesten auch deshalb, weil sie uns vielleicht Aufschluss über die Einflüsse geben könnten, welche die indische, die griechisch-hellenistische und etwa eine persische Behandlungsweise der antiken Sonnenuhr — um diese und allein um sie handelt es sich — auf die islamischen Methoden genommen haben. Weniges ist doch noch erreichbar. Die im Jahre 1926 aus Istanbul erworbene und noch in keinem gedruckten Katalog aufgeführte Sammelhandschrift Ms. or. oct. 2294 der ehemaligen Pr. Staatsbibliothek zu Berlin enthält, worauf mich M. Krause freundlichst aufmerksam machte, auf fol. 31 b bis 33 a zwei kleine gnomonische Artikel al-Kindī's: *Herstellung der Richtung auf einer Kugel* ('amal as-samt 'alā kura) und *Geometrische Herstellung der Ruchame* ('amal ar-ruḥāma bil-handasa)⁽³⁾. Diese Titel sind uns in derselben Form im *Fihrist* für al-Kindī bezeugt.

Der Gegenstand ist in einer schlichten, primitiven Art und in einer Sprache behandelt, die in einigen Fachausdrücken von derjenigen der späteren Zeit abweicht. Ganz handwerksmässig und rezeptartig werden Konstruktionsvorschriften ohne jeden Beweis und ohne jede Erläuterung mitgeteilt. Ein Beispiel möge zeigen, wie in der

⁽¹⁾ Al-Battānī, *Opus astronomicum*, ed. C. A. Nallino. Mailand I, 1903; II, 1907; III, 1899.

⁽²⁾ Kgl. Danske Vid. Selsk., *Mathem.-fysiske Medd.* 4, 9. Kopenhagen 1921/22.

⁽³⁾ Text, Übersetzung und Erläuterungen dieser beiden Schriftchen von al-Kindī sowie eines kurzen, weiter unten erwähnten gnomonischen Artikels von al-Māhānī über die Bestimmung des Azimuts sind meiner Arbeit über Ibrāhīm b. Sinān, die ich später (S. 504) anführen werde, als Anhang beigegeben.

zweiten Schrift die einzelnen Handgriffe ebener Konstruktionen sehr umständlich geschildert sind. Berlin, Ms. or. oct. 2294, 31 b25 - 32 a1:

..... ثم تركز رجل البركار على علامة ه وتدير رجله الاخرى حتى تقع على خط ا ح وتعلم هنالك ح وتأخذ من العلامة التي قاطع عليها خط ه وخط ا ح البعد الذي (*) بين ط وح بالبركار وتتركز احد قطبي البركار على علامة ط وتديره الى جهة المشرق خط ا ب فحيث وقع من قوس ا ب فهو مشرق تلك الدرجة وتفرض مشرق الدرجة علامة ي

..... "Dann setzest du den [einen] Fuss des Zirkels auf das Zeichen h und drehst seinen anderen Fuss, bis er auf die Linie ag trifft, bezeichnest hier [mit] h, nimmst von dem Zeichen [t] ab. in dem die Linie hw die Linie ag schneidet, den Abstand, der zwischen t und h besteht, in den Zirkel, setzest den einen der Pole (so!) des Zirkels in das Zeichen t und drehst ihn nach der Ostseite [bis zur] Linie abg. Dann ist [die Stelle], wo er auf den Bogen abg trifft, der Aufgang[spunkt] jenes Grades, und du nimmst als Aufgang[spunkt] des Grades das Zeichen i an

In den meisten geometrischen arabischen Texten sind wir eine knappere und abstraktere Sprache nach Euklidischem Vorbild gewöhnt. Obwohl Zirkel und Lineal die Geräte sind, mit denen die Konstruktionen der Euklidischen Geometrie sinnlich und praktisch ausgeführt werden, finden wir bekanntlich bei Euklid nirgends eines dieser Geräte genannt. Denn hier macht sich das Bestreben der Platonischen Philosophie geltend, die Geometrie rein und abgewandt von Sinnlichen zu lehren. Man muss sich in der umfangreichen mathematischen und astronomischen Literatur der Griechen schon etwas umsehen, um Worten wie 'Zirkel' und 'Lineal' zu begegnen. In seiner Schrift *Über das Analemma* (*) nennt und verwendet Ptolemäus neben einem rechten Winkel, der zum Errichten von Senkrechten dient, einen Zirkel mit zwei Spitzen zum Abgreifen und Übertragen von Bögen und Strecken. Und hier wie bei al-Kindī handelt es sich um möglichst genaue Herstellung von Bögen, die für die Konstruktion von

(*) Vor الذي steht التي durchgestrichen.

(1) *Cl. Ptolemaei opera* ed. Heiberg, II, Leipzig 1907, S. 187-223. — Vgl. P. Luckey, *Das Analemma von Ptolemäus. Astron. Nachr.* 230, 1927, Nr. 5498.

Sonnenuhren verwendet werden sollen, also um Aufgaben der angewandten, praktischen Geometrie.

Für den 'Punkt' finden wir an anderen Stellen dieses al-Kindī-Textes auch das in der arabischen geometrischen Sprache übliche, schon vor al-Kindī vom Euklidübersetzer al-Ḥaḡḡāg gebrauchte Wort *nuqṭa* verwendet; mit dem in der Textprobe vorkommenden 'alāma = Zeichen ist wohl ursprünglich die Markierung des Punktes gemeint, dann aber auch dieser selbst. Ob bei diesem Gebrauch des Wortes 'alāma eine wörtliche Übersetzung von σημείον vorliegt oder eingewirkt hat?

In der ersten kurzen Abhandlung ist unter Richtung (*samt*) die Richtung im Raume vom Beobachter (Kugelmittelpunkt) zur Sonne zu verstehen. Es werden zwei Methoden angegeben um an einem Orte für einen gegebenen Tag und für volle Stunden Zahlen den Sonnenstand auf einer als Abbild der Himmelskugel zu denkenden Kugel zu verzeichnen. Der Punkt wird als Schnittpunkt zweier Kreise gewonnen, die mit einem Zirkel auf der erhabenen Seite der Kugel gezogen werden. Der eine dieser beiden Kreise ist bei beiden Methoden der um den Zenitpunkt (d. h. mit dem Zenitpunkt als Einsatzzpunkt der einen Zirkelspitze) gezogene Parallelkreis zum Horizont, der andere ist bei der ersten Methode ein Kreis um den Aufgangspunkt, bei der zweiten ein solcher um den Nordpol des Himmels. Durch die so gewonnenen Stundenpunkte auf der Kuppel (*qubba*) sollen Löcher gebohrt werden, durch die dann zu der betreffenden Stunde der Sonnenstrahl zum Kugelmittelpunkt geht. Es handelt sich also um eine sphärische Sonnenuhr oder um ein Modell für eine solche.

In der Schrift über die geometrische Herstellung der *Ruchame*, d. h. hier der horizontalen ebenen Sonnenuhr, sind, wie stets bei Herstellung von Sonnenuhren für einen gegebenen Ort, die Schiefe ϵ der Ekliptik und die Ortsbreite φ als gegeben zu betrachten. Als gegeben werden ferner angesetzt die Sonnenlängen $\lambda = 0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ$ für die Anfangspunkte der Tierkreiszeichen und die Zeitpunkte $\tau = 0, 1, \dots, 6$ antiker Zeitmessung, d. h. die Zeitpunkte, für die der jeweilige Tagbogen der Sonne in 6 gleiche Teile zerfällt, deren jeder in einer temporalen oder antiken Stunde des betreffenden Tages durchlaufen wird. Die gesuchten Größen sind Aufgangsweite, Deklination und Mittagshöhe, Sonnenhöhe und Schattenlänge, Azimut. Aus den zuletzt gefundenen Größen, Schattenlänge und Azimut, kann, worauf der Text nicht eingeht, für die gegebene Sonnenlänge und

die gegebene Stunde das Ende des Gnomonschattens in der Ebene der Horizontaluhr gezeichnet werden.

Die gesuchten Grössen werden nach einem Verfahren gefunden, das wir am ehesten als Lösung der betreffenden sphärisch-trigonometrischen Aufgabe durch ein Mittelding zwischen darstellender Geometrie und graphischem Rechnen bezeichnen können. Grundsätzlich besteht dieses Verfahren darin, dass wie beim Analemma des Ptolemäus von Hause aus stereometrische Konstruktionen von Bögen und Sehnen der Kugel auf Folgen von Teilkonstruktionen in der Ebene zurückgeführt werden. Alle diese Konstruktionen bei al-Kindī werden nach Möglichkeit in einem durch zwei Durchmesser in Quadranten zerlegten Kreis vorgenommen und so eingerichtet, dass die Eintragung aller gegebenen und die Messung aller gefundenen Bögen auf einer ein für allemal sorgfältig hergestellten Einteilung des genannten Fundamentalkreises in 360 Grad erfolgen kann. Es wird eben kein beweglicher Winkelmesser ('Transporteur') verwandt. Man vergleiche damit das Verfahren des Ptolemäus, der im *Analemma* gegebene und gefundene Bögen auf einem auf der Zeichentafel ein für allemal entworfenen, in 90 Grad geteilten Quadranten abgreift. Eine unmittelbare Anlehnung an das *Analemma* von Ptolemäus zeigen die Konstruktionen und ihre Beschreibung nicht. Insbesondere gewinnt al-Kindī das Azimut ganz anders als Ptolemäus. Aber das analemmatische Verfahren war schon lange vor Ptolemäus in uns nicht erhaltenen hellenistischen Schriften behandelt. Wir wissen, dass Pappus einen Kommentar zum *Analemma* des Diodor schrieb⁽¹⁾, der als ein Zeitgenosse Cäsars und Ciceros gelten darf. Was mag das *Buch Analemma* gewesen sein, dem al-Kindī's Zeitgenosse Abū Sa'īd ad-Darīr al-Ġurgānī die Auffindung der Mittagslinie⁽²⁾ entnahm?

Natürlich muss man auch die Möglichkeit anderer, insbesondere indischer und persischer Einflüsse auf die früh-arabische Gnomonik im Auge behalten. Bei der Bestimmung des Schattens nimmt al-Kindī sowohl auf diejenigen Leser Rücksicht, die den *ġaib des Ptolemäus* zugrunde legen und den Kreishalbmesser in 60 Einheiten teilen, wie auf diejenigen, die mit dem *ġaib der Inder* arbeiten und den Halb-

⁽¹⁾ Pappus ed. Hultsch, Buch IV, S. 246, 1.

⁽²⁾ Vgl. C. Schoy, *Abhandlung über die Ziehung der Mittaglinie, dem Buche über das Analemma entnommen, samt dem Beweise dazu, von Abū Sa'īd ad-Darīr. Annalen d. Hydrographie u. marit. Meteor.* 50, 1922, S. 265-271.

messer zu 150 Teilen ansetzen. Wir sehen hier im Ausdruck *ġaib des Ptolemäus* das Wort *ġaib*, der eigentlichen Bedeutung des zugrundeliegenden indischen Wortes *jīva* entsprechend, als Bezeichnung der Vollsehne gebraucht, für die man später nur die Bezeichnung *walar* zugelassen hätte. Dagegen ist mit dem *ġaib der Inder* der Sinus, also die Halbsehne gemeint. Ein Gegenstück zu al-Kindī's *ġaib des Ptolemäus* bildet al-Battānī's Gebrauch von *walar* für die Halbsehne, die später nur *ġaib* hiess.

Die beiden gnomonischen Traktate al-Kindī's erscheinen mir auch für die al-Kindī-Forschung von Interesse, weil uns in ihnen mathematische Ausführungen des vielseitigen Mannes erhalten sind, von dessen zahlreichen kleinen Schriften — auch über Gnomonik sind uns noch weitere bezeugt — so viel verloren ging. Al-Kindī war, wie Ibn al-Qiftī sagt, "im islamischen Volk berühmt, weil er in den Zweigen der griechischen, persischen und indischen Wissenschaft zuhause war". Zu seiner Würdigung führt man gern an, dass ihn Cardano in seiner Schrift *De Subtilitate* ⁽¹⁾ zu den zwölf Männern der Wissenschaft zählt, die er für die scharfsinnigsten hielt (*virī duodecim subtilitate praestantes*). Aber dem Cardano standen die Quellen der Wissenschaftsgeschichte nicht genügend offen. Er rechnet auch *Geber*, d. i. Ġābir b. Aflaḥ, zu jenen zwölf Grossen des Geistes. Heute wissen wir, dass Ġābir's 'Regel der vier Grössen', eine Formel der sphärischen Rechenkunst, die Cardano als seinen ersten Ruhmes-titel nennt, lange vor Ġābir im Osten der islamischen Welt gefunden wurde, und man hat Grund zu dem Verdacht, dass Ġābir, der in so überheblichem Ton den Ptolemäus herabzusetzen sucht, sich mit fremden Federn schmückte. Hinsichtlich der Frage, ob wir es bei dem gepriesenen al-Kindī mit einem schöpferischen Geist oder vielmehr mit einem für jene Zeit so wertvollen überaus empfänglichen und hochgelehrten Sammler zu tun haben, der zugleich ein geschickter Darsteller und Verbreiter des aufgenommenen älteren Gutes war, wird der Mathematiker geneigt sein, neben den philosophischen und den meteorologisch-optischen die im eigentlichen Sinne mathematischen Leistungen als Prüfsteine der Originalität heranzuziehen. An-Nasawī (um 1000 n. Chr.) charakterisierte ein Rechenbuch von al-Kindī als "sich [auf allerhand Dinge] einlassend und übermässig weitschweifig" (*متداخلا مفراطاً في الاطالة*).

⁽¹⁾ Hieronymi Cardani *de Subtilitate libri* 21. Lugduni 1554, p. 596-597; Basilea 1554, p. 445.

Bei den vorliegenden gnomonischen Rezepten al-Kindī's habe ich den Eindruck, dass jemand wertvolles übernommenes Lehrgut mit aller Umständlichkeit und Deutlichkeit darlegt, ohne das Bedürfnis nach Richtigenachweisen beim Leser vorauszusetzen oder bei sich selbst an den Tag zu legen. Andere vor und nach seiner Zeit verfahren auf diesem ins Handwerk einmündenden Gebiet der Gnomonik ähnlich. Dass sein Verfahren zur Bestimmung der Höhe nur näherungsweise für kleine Breiten gilt, sodass seine Sonnenuhr beim Gebrauch in Bagdad mit einem damals praktisch tragbaren Fehler behaftet ist — ich habe ihn berechnet —, verschweigt er, und es ist fraglich, ob er sich dieses Fehlers bewusst war. Sehr befremdend wirkt eine Einzelheit im ersten Traktat: Während er beim zweiten Verfahren den Komplementbogen der Sonnenhöhe h aus h ganz natürlich dadurch findet, dass er h von 90° abzieht, soll beim ersten Verfahren dieselbe primitive Subtraktionsaufgabe durch eine, anscheinend mit Hilfe der Tabellen der Funktionen Sinusversus und Sinus auszuführende Rechnung gelöst werden, die wir durch $90^\circ - h = \arcsin(r - \text{Sinvers } r)$ ausdrücken können. Das erscheint ungeheuerlich. Sollte es beim einen Verfahren um jeden Preis anders gemacht werden, als beim anderen?

Die angekündigte Veröffentlichung von al-Kindī's *Buch über die Chemie des Parfüms und die Destillation* durch K. Garbers⁽¹⁾ verspricht weitere Aufschlüsse über die anziehende und immer noch rätselhafte Gestalt des "Philosophen der Araber", von dem der *Fihrist* eine Kette von nicht weniger als 25 Vorfahren rein arabischen Bluts aufzählt, während al-Baihaqī (starb 1169) über seine Herkunft sagt: "Man ist über seine Volkszugehörigkeit (مِلَّة) verschiedener Meinung. Einige sagen: er war ein Jude, der dann zum Islam übertrat; andere sagen: er war ein Christ" (2).

Ein anderes Zeugnis der Gnomonik des neunten Jahrhunderts ist uns in Istanbul auf zwei Blättern (Seray 3342, 3) erhalten. Es ist ein Traktat von al-Māhānī unter dem Titel: *Abhandlungen* (so!) *über die Bestimmung der Richtung für jede beliebige Stunde und an jedem beliebigen Ort*. Über die Person und die Werke al-Māhānī's, des Zeitgenossen al-Kindī's, hat Krause in seiner oben (S. 492) erwähnten Ausgabe von Abū Naṣr's Bearbeitung der Sphärik des Menelaos (S. 24-25) das wenige Erreichbare gesammelt, dem ich nur hinzuzufügen weiss,

(1) Vgl. ZDMG 97, 1943, S. *7*.

(2) Al-Baihaqī, *Talimma* ed. Muḥammad Šāfi' I, Lahore 1935, S. 25.

dass Ibrāhīm b. Sinān, von dem wir noch hören werden, in der Einleitung seiner *Schrift über die Schatteninstrumente* (66 b 17) angibt, al-Māhānī solle eine Arbeit über die Bestimmung des Aszendenten aus der *Ruchame* — auch dies ein Thema der Gnomonik — verfasst haben. Da die Mehrzahl der uns überlieferten oder bezeugten Schriften al-Māhānī's an die Werke griechischer Mathematiker anknüpft, so besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Gnomonik sich im Fahrwasser griechisch-hellenistischer Überlieferung bewegt.

Die Schrift über die Bestimmung der Richtung lehrt die Ermittlung für die Gnomonik in Betracht kommender Bögen nach einem zeichnerischen Verfahren, das grundsätzlich von derselben Art ist, wie das von al-Kindī in seiner *Geometrischen Herstellung der Ruchame* angewandte. Wie al-Kindī arbeitet al-Māhānī mit einem Fundamentalkreis. Dieses graphische Verfahren wurde in späterer Zeit weiter ausgebildet. Der Kreis begegnet uns wieder in der *Geometrischen Bestimmung der Richtung der Qibla* von Ibn al-Haiṭam⁽¹⁾ (starb 1038) und in desselben Verfassers Schrift *Über die horizontalen Ruchamen*⁽²⁾. Hier ist der in Grade und Quadranten eingeteilte Kreis auf einer besonderen Platte aus festem Material gezeichnet und heisst *dustūr* (etwa: Handbehelf, Muster, Modell, Vorlage). Auch Ibn Yūnus benutzt den Dustur. Mehr noch als bei al-Kindī hat sich bei al-Māhānī das Verfahren äusserlich von dem der darstellenden Geometrie entfernt und ist zu einem reinen graphischen Rechnen geworden. Dem mathematischen Inhalt nach aber stimmt speziell die Bestimmung des Azimuts, deren Text ich mit Übersetzung und Erläuterungen in meiner Arbeit über Ibrāhīm b. Sinān als Gegenstück zu al-Kindī's Azimutbestimmung wiedergegeben habe⁽³⁾, mit derjenigen überein, die wir im Analemma des Ptolemäus und bei den Indern ausgeführt sehen, während al-Kindī anders vorgeht.

Bemerkenswert ist, dass al-Māhānī der zeichnerischen Lösung zweier seiner Aufgaben eine rechnerische Lösung, eingeleitet durch Worte wie: "Verfahren hierzu durch Rechnung" (*bāb dālik min al-*

(1) Vgl. dazu C. Schoy, *Abhandlung des ... ibn al-Haiṭam (Alhazen) über die Bestimmung der Richtung der Qibla*. ZDMG 75, 1921, S. 242-253. Diese Schrift (Bodl. I 877, 4) wirft Brockelmann (I², S. 618, Nr. 22) irrtümlich mit desselben Verfassers Schrift über die rechnerische Bestimmung der Qibla (Fatih 3439, 12; Atif 1714, 1; Berlin Ms. or. oct. 2970, 1) zusammen.

(2) Berlin Ms. or. oct. 2970, 153 a-161 b.

(3) Vgl. S. 495, Anm. 3.

hisāb), beigt. Hier sehen wir die aufeinander folgenden Schritte der zeichnerischen Lösung ins Rechnerische übertragen. Dem Ziehen einer Halbsehne entspricht das Aufschlagen eines Sinus in der Sinustafel. Al-Māhānī rechnet nämlich mit Sinussen, nicht mit Sehnen. Bekanntlich stellt auch Ptolemäus im *Analemma* dem konstruktiven Verfahren das entsprechende rechnerische zur Seite. Dem al-Kindī ist offenbar ebenfalls die rechnerische Lösung der von ihm geometrisch behandelten Aufgaben bekannt. Sonst spräche er nicht in der Überschrift der oben behandelten Traktate wie auch anderer, deren Titel uns überliefert sind, ausdrücklich von der Lösung "durch (praktische) Geometrie" (*bil-handasa*). Al-Māhānī gibt einer seiner rechnerischen Lösungen sogar einen "Beweis" (*burhān*) bei; doch ist dies nur der Nachweis, dass die Rechnung dem unbewiesen mitgeteilten graphischen Verfahren entspricht.

Ein historischer Ausblick: Bei der Bestimmung des Azimuts handelt es sich, modern gesprochen, um die Aufgabe, aus den Seiten des Kugeldreiecks Zenit-Pol-Stern, das *ZPS* heißen möge, seinen Winkel bei *Z* zu ermitteln. Al-Kindī's graphische Lösung, die wie gesagt von derjenigen des *Analemmas* von Ptolemäus verschieden ist, lässt sich auf die Konstruktion des ebenen Dreiecks *Z'P'S'* zurückführen, das die senkrechte Projektion des Kugeldreiecks *ZPS* auf die Ebene des Horizonts ist. Dieses Dreieck *Z'P'S'* wird aus seinen Seiten hergestellt, und sein Winkel bei *Z'* ist gleich dem gesuchten Azimut. Eine derartige Konstruktion liegt der Methode zugrunde, nach der Regiomontanus am Ende des vierten Buches seines Werks *De triangulis* in Aufgabe 34 aus den Seiten eines Kugeldreiecks einen Winkel berechnet. Delambre⁽¹⁾ und von Braunmühl⁽²⁾ glaubten, Regiomontanus habe hierin unter den "Arabern" keinen Vorgänger gehabt.

Überträgt man dagegen al-Māhānī's mit derjenigen des Ptolemäus übereinstimmende Konstruktion des Azimuts *a* Schritt für Schritt ins Rechnerische, so erhält man die Formel

$$\sin a = \frac{r \left| \frac{r \sin \delta}{\cos \varphi} \pm \frac{\sin h \sin \varphi}{\cos \varphi} \right|}{\cos h},$$

⁽¹⁾ J. B. J. Delambre, *Histoire de l'astronomie du moyen-âge*. Paris 1819, S. 310.

⁽²⁾ A. von Braunmühl, *Vorles. üb. Gesch. d. Trigonometrie*. Leipzig 1900, I, S. 129.

die wir bei Anwendung des sphärischen Cosinussatzes auf das Dreieck *ZPS* als richtig erkennen. Zu derselben Formel gelangt man, wenn man durch Einsetzen der Werte die Vorschriften (Formeln) zusammenfasst, nach denen al-Battānī im elften Kapitel seines astronomischen Werks das Azimut berechnet. In wie weit das Studium al-Battānī's Regiomontanus zur Entdeckung des sphärischen Cosinussatzes angeregt haben mag, kann hier nicht erörtert werden.

Da die in eine etwas spätere Zeit fallenden gnomonischen Schriften des Tābit b. Qurra und die wohl noch späteren Ausführungen al-Battānī's über diesen Gegenstand veröffentlicht und eingehend erläutert worden sind⁽¹⁾, sei zu ihrer Kennzeichnung nur Folgendes gesagt: Die für die punktweise Konstruktion der Sonnenuhren erforderlichen Werte von Azimut und Schattenlänge für die einzelnen temporalen Stunden werden nicht mehr zeichnerisch, wie bei al-Kindī und al-Māhānī, sondern nur noch rechnerisch gewonnen, wie wir das teilweise schon bei al-Māhānī ausgeführt sahen. Die Rechnungen sind nach beweislos mitgeteilten Vorschriften — Formeln — zu vollziehen, in denen die Sinusfunktion zur Verwendung kommt. Fragen wir nach der Herkunft dieser Formeln, so erweisen sie sich als die rechnerischen Übertragungen oder wenigstens als die Äquivalente ebener Konstruktionen von der Art, wie al-Kindī und al-Māhānī sie uns vorführen. Diese ebenen Konstruktionen aber sind Teilkonstruktionen derjenigen geradlinigen Konstruktionen in der Kugel, die erforderlich sind, um von gegebenen Bögen über deren Sehnen oder Sinusse zu den Sehnen oder Sinussen der gesuchten Bögen und damit zu diesen selbst zu gelangen. In vielen Fällen lassen sich die Konstruktionen mit Hilfe der von Ptolemäus im *Analemma* gelehrt Orthogonalprojektionen und Umklappungen auf die drei Hauptebenen ausführen.

Al-Battānī behandelt in seinem Tafelwerk nur die Horizontalsonnenuhr, Tābit dagegen lehrt die Herstellung der drei Uhren, deren Ebenen in den Horizont, den Meridian und den ersten Vertikal fallen, ferner der drei Uhren, deren Ebenen beliebig durch die Achsen der genannten Fundamentebenen gehen, und endlich einer Uhr, deren Ebene eine beliebige Stellung zum Horizont des Benutzers hat. Durch Umrechnungsformeln von der Art, die wir als Koordinatentransformationsformeln bezeichnen, kann Tābit die Berechnungsformeln gewisser der Uhren aus denjenigen anderer ableiten.

⁽¹⁾ S. oben S. 495. — Vgl. auch P. Luckey, *Tābit b. Qurra's Buch über die ebenen Sonnenuhren. Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math. usw.* B, 4, 1938, S. 95-148.

Ṭābit b. Qurra besass einen Enkel Abū Ishāq Ibrāhīm b. Sinān b. Ṭābit, auf den sich die mathematische Begabung des Grossvaters übertragen hatte, wie denn überhaupt die Generationen der Nachkommen der Sabier Ṭābit b. Qurra und Ibrāhīm b. Zahrūn schöne Beispiele dafür bieten, wie durch Vererbung und Tradition hochbegabte Familien eine Reihe von Geschlechtern hindurch blühen und ihrem Volke hervorragende Philosophen, Astronomen, Mathematiker, Ärzte und Geschichtsschreiber schenken. Ṭābit's Enkel Ibrāhīm wurde nach Ibn Abī Uṣaibi'a im Jahre 296 d. H., d. i. 908-909 n. Chr. geboren und starb schon am 16. August 946, ziemlich genau ein Jahrtausend, bevor ich dies niederschreibe, an einer Lebergeschwulst. Seine Schriften, von denen uns glücklicherweise Wertvolles erhalten ist und besonders in Bankipore neuerdings Verschiedenes ans Licht kam, befassen sich mit Geometrie und Astronomie und knüpfen dabei meist an die unvergänglichen griechischen Werke über diese Gegenstände an. Mit Apollonius hat er sich besonders beschäftigt. Im Druck veröffentlicht wurde bisher nur seine Parabelquadratur, und zwar durch eine gut erläuterte Übersetzung von Suter⁽¹⁾. Uns soll hier seine *Schrift über die Schatteninstrumente* (*kitāb fī ālāt al-aẓlāl*) beschäftigen⁽²⁾.

Die einzige uns erhaltene Handschrift (Aya Sofya 4832. 15. 66 b-75 b) ist leider unvollständig und umfasst von den drei Büchern des Werkes nur das erste und den Anfang des zweiten. Aber auch dieser Torso enthält genug des Anziehenden. Die Schrift ist, wie der Verfasser im Vorwort selbst ausführt, die verbesserte und erweiterte Fassung eines Werkes, das er schon in sehr jugendlichem Alter verfasste. Die Biographen berichten, es sei in seinem 16. oder 17. Lebensjahr gewesen. Ohne eingehendes Studium der Schriften seiner Vorgänger, deren Leistungen er vom Hören kannte, berichtet Ibrāhīm, habe er damals die erste Fassung seines Werkes niedergeschrieben.

⁽¹⁾ *Vierteljahrsschrift d. naturforsch. Ges. Zürich* 63, 1918, S. 214-228. — In Hyderabad erschienen 1943-47 die Textausgaben von 6 Schriften des Ibrāhīm b. Sinān. S. *Catalogue of the Arabic Publications of the Dairat-ul-Maarif-il-Osmania*. Hyderabad 1948, S. 19-20.

⁽²⁾ Vgl. P. Luckey, *Die Schrift des Ibrāhīm b. Sinān b. Ṭābit über die Schatteninstrumente*. Als Dissertation in 6 maschinenschriftlich vervielfältigten Stücken 1944 der Philosophischen Fakultät der Universität Tübingen überreicht. Die Arbeit besteht aus 85 Seiten Übersetzung, 114 Seiten Einleitung und Erläuterungen und 37 Figurentafeln. Eine Ausgabe des arabischen Textes ist vorbereitet.

Wie weit er bei der Umarbeitung von den Errungenschaften der älteren Gnomoniker Kenntnis nahm, erfahren wir nicht genau. Ein Anzeichen dafür, dass er im Ausstrahlungsbereich der hellenistischen Gnomonik steht, ist seine Bemerkung, er setze ebenso wie Diodor und andere in ihren Schriften über die Instrumente die Gnomonspitze als Mittelpunkt der Kugel an, ebenso der Umstand, dass er an einer Stelle seiner Schrift Alexandrien beispielsweise als Ort für eine zu entwerfende Uhr nennt.

Das erste Buch behandelt die ebenen Sonnenuhren, das zweite in 17 Abschnitten, deren Überschriften uns erhalten sind, eine Anzahl Fragen, die mit den ebenen Sonnenuhren zusammenhängen, und Aufgaben, zu deren Lösung diese Instrumente sich einrichten lassen. Auch kugel- und kegelförmige Uhren werden hier behandelt. Nach den Andeutungen der Einleitung brachte das dritte Buch weitere Ausführungen über nicht-ebene Uhren. Fast alles, was er im zweiten und dritten Buch darbot, glaubte er neu, oder wenigstens unabhängig von den Leistungen etwaiger Vorgänger, deren Werke er wenig und nur vom Hörensagen kannte, gefunden zu haben.

Ibrāhīm schlägt in der Gnomonik neue Töne an. In frischem Angriffsgestus tadelt er an seinen Vorgängern, sie hätten die einzelnen Sonnenuhren, Horizontaluhr, Mittagsuhr, Ostwestuhr usw. isoliert und ohne organischen Zusammenhang behandelt, während er die Behandlung aller Uhren unter ein einheitliches Prinzip bringe. Ferner wirft er den bisherigen Gnomonikern vor, sie hätten ihre Lehren und Vorschriften — von einigen ganz leichten Gegenständen abgesehen — ohne Beweise dargeboten.

Der erste Vorwurf mag auf die Mehrheit von Ibrāhīm's Vorgängern zutreffen. Ungerecht erscheint er aber gegenüber Ibrāhīm's Grossvater Ṭābit b. Qurra. Denn dieser zeigt nicht nur, wie wir oben erwähnten, dass man die eine Uhr aus der anderen durch eine Transformation der sphärischen Koordinaten ableiten kann, sondern wir finden auch an einer Stelle seiner Schrift über die Ruchamen (Handschriftseiten 48-50 oben) gerade den Gedanken als Prinzip einer systematischen Behandlung aller ebenen Sonnenuhren ausgesprochen, den Ibrāhīm für sich in Anspruch nimmt: Eine Sonnenuhr, deren Ebene zum System unseres Horizonts eine beliebige Stellung hat, ist Horizontaluhr für einen gewissen anderen Ort der Erde. Man kann sie also wie eine Horizontaluhr berechnen. Die Linien, die das Ende des Gnomonschattens durchläuft, sind für unseren Ort dieselben wie für jenen. Nur die Stundenpunkte sind auf die tempo-

ralen Stunden unseres Ortes umzurechnen. Bei Tābit aber wird das auf diesem Gedanken beruhende Berechnungsverfahren aller Sonnenuhren nur skizziert und nicht rechnerisch durchgeführt. Denn Tābit sagt, das von ihm befolgte Verfahren der Ableitung aller Uhren durch Transformation aus den drei Hauptuhren sei leichter und näherliegend (Handschriftseite 50 oben).

Sollen wir nun Ibrāhīm für so charakterlos und dumm halten, dass er das in einem Werke seines Grossvaters ausgesprochene Prinzip als eigene Erfindung ausgibt? In diesem Zusammenhang ist zu beachten, dass er die gnomonischen Schriften seines Grossvaters nicht erwähnt, — er betont ja, er habe die Leistungen anderer auf diesem Gebiet zumeist durch Hören kennengelernt — während er in seiner Schrift über die Parabelquadratur gewissenhaft angibt: "Schon mein Grossvater, Tābit b. Qurra, hat eine Schrift über diesen Gegenstand verfasst, ebenso al-Māhānī". Der Grossvater Tābit war acht Jahre vor Ibrāhīm's Geburt gestorben. Über seine Bücher und Dusture (Handexemplare) wusste Ibrāhīm's älterer Bruder Tābit b. Sinān Auskunft zu geben (Ibn al-Qiftī ed. Lippert 120, 11), und wir können mit Chwolsohn⁽¹⁾ (I, S. 605) vermuten, dass dieser Enkel den literarischen Nachlass Tābit b. Qurra's verwaltete. Daraus folgt nicht, dass er seinem jüngeren Bruder Ibrāhīm Einblick in des Grossvaters Schrift über die Ruchamen gab. Die uns vorliegende Fassung dieser Schrift wurde, wie aus ihrem Kolophon hervorgeht (Handschriftseite 89), erst im Jahre 981 n. Chr., fast 35 Jahre nach Ibrāhīm's Tode, hergestellt, und zwar vom Schwiegervater der Schwester des Ibrāhīm und des Tābit b. Sinān. Dies war Ibrāhīm b. Hilāl b. Ibrāhīm b. Zahrūn, also der Enkel des Stammvaters jener anderen geistig hervorragenden Sabierfamilie. Er, der gepriesene Verfasser der "Sendschreiben", der eine politische Rolle spielte, war nach Ibn al-Qiftī auch ein guter Geometer und Astronom. Wenn uns auch in dem genannten Kolophon versichert wird, dass die Fassung der Schrift über die Ruchamen mit dem Dustur Tābit b. Qurra's übereinstimmt, so erscheint es mir bei den literarischen Gepflogenheiten jener Zeit doch als möglich, dass die Bemerkung der Handschriftenseiten 48-50 über die andere Ableitbarkeit aller Ruchamen eine Hinzufügung, etwa des sachkundigen Herausgebers, ist, zumal man in der Bemerkung oben auf der Handschriftseite 50 eine leichte

(1) D. Chwolsohn, *Die Sabier und der Sabismus*. I. II. Petersburg 1856.

polemische Spitze gegen unseren Ibrāhīm b. Sinān b. Tābit sehen kann. Heutzutage wäre eine solche Bemerkung als Fussnote des Herausgebers erschienen.

Nun zum anderen Vorwurf des Ibrāhīm, die Gnomoniker hätten ihre Vorschriften ohne Beweise gegeben. Dieser Tadel wäre in der älteren Zeit, als man die gesuchten Grössen konstruierte, kaum berechtigt gewesen, solange die Konstruktionen noch in unmittelbarer Beziehung zu der ursprünglichen räumlichen Konfiguration standen, für deren Richtigkeit man sich auf die Anschauung berufen konnte. Als dann aber die darstellende Geometrie immer mehr in graphisches Rechnen überging und der Zusammenhang mit der Stereometrie verloren ging, und als weiter statt graphischer Rechnungen numerische Rechnungen vorgenommen wurden, für die zur Lösung jeder Aufgabe knappe, formelartige Vorschriften entstanden, wie bei Tābit und al-Battānī, ist Ibrāhīm's Ruf nach Beweisen verständlich.

Er bringt solche Beweise, und anziehend ist, dass er die Beweise der Richtigkeit seiner gnomonischen Berechnungen nicht mehr durch Zurückgehen auf die direkte konstruktive Erzeugung der gesuchten Sehnen und Bögen erbringt, sondern sich derjenigen sphärischen Rechenkunst bedient, mit der Ptolemäus im Almagest gesuchte Bögen sphärischer Figuren aus gegebenen berechnet. Diese Rechenkunst können wir nicht eigentlich als Kugeldreiecksrechnung (sphärische Trigonometrie) bezeichnen, denn nicht Formeln mit den Funktionen von Seiten und Winkeln sphärischer Dreiecke werden benutzt, sondern eine Formel mit den Sehnen von Bögen des vollständigen sphärischen Vierseits, der Satz des Menelaos, den die islamischen Mathematiker "Schneidefigur" oder "Schneidelehre" (*šakl al-qaffāʿ*, *aš-šakl al-qaffāʿ*) nannten. Mit diesem schweren Geschütz zwingt Ibrāhīm alle für die Konstruktion seiner ebenen Sonnenuhren erforderlichen sphärischen Rechnungen und erweist sich hierin griechischer als sein Meister und Vorbild Ptolemäus, der zwar in seiner grossen Syntax mit dem Menelaosatz arbeitet, dagegen bei den gnomonischen Aufgaben im *Analemma* der ursprünglicheren und für den Zweck geschmeidigeren direkten Methode seiner Vorgänger treu bleibt. Ibrāhīm scheint mit seinen Beweisen keinen Anklang gefunden zu haben. Spätere Autoren, wie Ibn al-Haiṭam, Ibn Yūnus und al-Marrākusi, erbringen gewöhnlich keine Beweise, jedenfalls nicht solche mit Hilfe des Satzes von Menelaos.

Ohne hier auf Ibrāhīm's Berechnung der einzelnen Sonnenuhren einzugehen, hebe ich hervor, dass er unter anderen Uhren die Aqua-

torealuhr behandelt, deren Ebene dem Himmelsäquator, und deren Schattenstab der Weltachse parallel ist. Diese einfachste Sonnenuhr war dem Altertum bekannt. Das Britische Museum bewahrt unter Nr. 2546 eine rechteckige Marmorplatte mit oberer und unterer Äquatorealuhr. In der islamischen Gnomonik ist sie meines Wissens vor Ibrāhīm nicht nachgewiesen. Der zur Weltachse parallele Schattenstab ist als wesentliches Merkmal der sogenannten abendländischen Sonnenuhr besonders bedeutsam. Erst in der spätarabischen Gnomonik entdeckten Schoy und Drecker die Berechnung von Uhren mit dieser Gnomonrichtung⁽¹⁾. Gewiss kommt als weiteres Kennzeichen dieser abendländischen Uhr hinzu, dass sie gleiche Stunden anzeigt, aber die Eintragung der Linien gleicher Stunden in die Äquatorealuhr musste zwangsläufig erfolgen, als diese dem Astronomen geläufigen Zeiteinheiten im bürgerlichen Leben an die Stelle der ungleichen antiken Stunden traten. Die zum Äquator parallele Uherebene durch eine solche beliebiger anderer Stellung unter Beibehaltung der Weltachsenrichtung des Gnomons zu ersetzen, was eine für die islamischen Gnomoniker lösbare geometrische Aufgabe.

Ibrāhīm gibt auch Vorschriften für die technische Herstellung und Aufstellung ebener Sonnenuhren. Die Platten sollen aus *isfidāg* gegossen werden. Man pflegt dieses Wort mit "Bleiweiss" zu übersetzen. Ich möchte an Gips denken.

In dem uns noch erhaltenen Anfang des zweiten Buches schneidet Ibrāhīm eine interessante theoretische Frage an. Auf der gewöhnlichen sphärischen Sonnenuhr erhält man die mit 0, 1, ..., 5, 6 zu beziffernden Punkte der vollen antiken Stunden eines Tages, indem man das auf ihr durch Zentralprojektion vom Mittelpunkt aus gewonnene verkleinerte Abbild des betreffenden Tagbogens der Sonne in 6 gleiche Teile teilt. Die Stundenlinien aber erhält man, indem man die mit derselben Tagesstunde bezifferten Stundenpunkte der verschiedenen Tagbögen des Jahres miteinander verbindet. Die so punktweise konstruierten Stundenlinien sind auf den in Betracht kommenden Teilen zwischen den Wendungen praktisch nicht von Grosskreisbögen zu unterscheiden. Sind sie Grosskreisbögen? Für die ebenen Uhren, die ja gnomonische Projektionen der sphärischen Uhr sind, lautet diese Frage: Sind die Stundenlinien gerade Linien? Ibrāhīm wirft seinen Vorgängern vor, die Stundenlinien der ebenen

⁽¹⁾ Vgl. die oben S. 492, Anm. 4 angeführte Arbeit von Garbers, S. 8-11.

Uhren fälschlich als Geraden angesehen zu haben, und er tritt einen mühseligen geometrischen Beweis dafür an, dass sie keine Geraden sind. Der letzte Teil des Beweises fehlt in unserer verstümmelten Handschrift, lässt sich aber so ergänzen, dass die behauptete Krümmlichkeit erwiesen wird.

Das Problem der Natur der Stundenlinien hat eine lange Geschichte, die bis in die Neuzeit reicht. Ibrāhīm tadelt seine Vorgänger zu Unrecht. Ptolemäus berechnet im *Analemma* die Stundenpunkte für alle 7 Parallelkreise der Anfänge der Tierkreiszeichen. Schon hier kann man vermuten, dass der Verfasser sich der Krümmlichkeit der Stundenlinien bewusst war. Auf jeden Fall scheint Ibrāhīm's Grossvater Tābit die Krümmlichkeit zu kennen, denn er empfiehlt, die Stundenpunkte nicht nur für die Sonnenwenden, sondern auch für die Parallelkreise der Anfänge der übrigen Tierkreiszeichen zu berechnen, "sodass die Stundenlinien richtiger hinkommen, die nicht geradlinig sind" (Textseite 8). Auch aus anderen Stellen der Schrift des Tābit über die Ruchamen schliessen wir mit Garbers (S. 7), dass ihr Verfasser von der Krümmlichkeit der Linien der temporalen Stunden überzeugt war. Angesichts der Verhältnisse Ibrāhīm's stehen wir hier vor einem ähnlichen Problem der literargeschichtlichen Beziehung des Enkels zum Grossvater, wie bei der Frage der Ableitung aller ebenen Uhren als Horizontaluhren.

Ibn al-Haiṭam sagt in der Einleitung seiner Schrift *Über die horizontalen Ruchamen* (vgl. oben S. 501), dass die alten Gnomoniker die Krümmlichkeit der Stundenlinien der ebenen Uhren vermuteten. Derselbe Gelehrte knüpft in seiner Schrift *Über die Stundenlinien* an Ibrāhīm an⁽¹⁾. Von diesem Werk, das ich leider noch nicht einsehen konnte, kann man ebenfalls einen Beweis der Krümmlichkeit der Stundenlinien und vielleicht auch weitere Aufschlüsse zur Geschichte dieser Frage erhoffen. Jedenfalls wird dem Ibrāhīm wohl der Ruhm bleiben, den ältesten uns bekannten Beweis für die Krümmlichkeit erbracht zu haben. Die spätere Geschichte des Problems zeigt, wie leicht auch kluge Menschen bei einer Frage irren, in der sorgfältige Zeichnungen trügen können, und nur der Verstand rettet. Commandinus gab infolge mangelnder Raumanschauung einen Scheinbeweis für die Geradlinigkeit, an den fast alle älteren abendländischen Gnomoniker glaubten, und trotzdem später Clavius die Krümmli-

⁽¹⁾ Vgl. das oben (S. 492) erwähnte Handschriftenverzeichnis von Krause, S. 476. — S. auch Ibn Abi Uṣaibi'a II, S. 94.

nigkeit nachwies, ging nach ihm lange Zeit kaum jemand daran, seinen elementaren aber nicht sehr glücklichen Beweis zu verbessern. Ja, noch ein so aufs Kritisieren eingestellter Geist wie Delambre konnte 1817 wieder die Geradlinigkeit behaupten, um dann allerdings bald darauf zur endgültigen Klärung der Frage beizutragen.

Das, was hier über die ältere islamische Gnomonik ausgeführt wurde, ist zugleich ein Beitrag zur älteren Geschichte der sphärischen Rechnungen. Auf keine jener älteren Berechnungsmethoden passt der Name 'Kugeldreiecksrechnung'. Man arbeitete nicht mit Formeln für Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln von Kugeldreiecken, sondern entweder nach der alten, darstellend-geometrischen Konstruktionsmethode, die zu graphischen Methoden und formelhaften Rechenvorschriften führte, oder, wie Ibrāhīm nach dem Vorbild des Almagest, mit dem Satz des Menelaos. Die früher von dieser oder jener Seite vorgebrachte Meinung, ein Mann wie al-Battānī habe den sphärischen Cosinussatz oder wenigstens den Sinussatz besessen, geht fehl. Er hat überhaupt nicht mit sphärischen Dreiecken gerechnet.

Der Ruhm, die eigentliche Kugeldreiecksrechnung erfunden zu haben, gebührt erst Männern wie Abul-Wafā', Abū Naṣr und al-Ḥuḡandī, die um das Jahr 1000 lebten. Durch Übersetzung und Erläuterung eines Lehrbriefs, den Abū Naṣr auf Anregung seines Schülers al-Bīrūnī schrieb⁽¹⁾, habe ich Material zum Beweise dafür beigebracht, dass als erster Begründer der eigentlichen Kugeldreiecksrechnung und als Entdecker des sphärischen Sinussatzes Abul-Wafā' al-Būzāḡānī anzusehen ist⁽²⁾.

(Fortsetzung folgt)

⁽¹⁾ Bankipore, Katalogband 22, S. 72, Nr. 2468, 18 (fol. 100 b-103 a).

⁽²⁾ P. Luckey, *Zur Entstehung der Kugeldreiecksrechnung. Deutsche Mathematik* 5, 1941, S. 405-446.