

Tābit b. Qurra's Buch über die ebenen Sonnenuhren.

Von P. Luckey in Tübingen.

(Eingegangen 6. 4. 1937).

1. Die sphärischen Polarkoordinatensysteme und ihre Transformation.

Im Folgenden soll hauptsächlich von demjenigen Teil des von Herrn Garbers bearbeiteten und herausgegebenen Textes¹⁾ die Rede sein, den der Herausgeber (S. 11) „den Hauptteil, die eigentliche Abhandlung“ nennt. Diesen von 1 bis 82²⁾ reichenden Teil wollen wir mit I bezeichnen. Um einen Überblick über die vielen von Tābit gegebenen Berechnungsvorschriften ('Formeln') zu gewinnen, versuche ich den wesentlichen mathematischen Inhalt der Schrift mit modernen Mitteln auszudrücken.

Wir unterscheiden 3 sphärische Polarkoordinatensysteme:

1. Das System H des Horizonts. Es ist das naturgegebene Grundsystem.
2. Das System A des Äquators³⁾.
3. Das Uhrsystem U , d. h. das System, in dessen Grundkreis die Uhrebene ('der Uhrkreis') gelegt werden soll.

¹⁾ Ein Werk Tābit b. Qurra's über ebene Sonnenuhren (كتاب ابى الحسن ثابت بن قرة في آلات الساعات التى تسمى رخامات) herausgegeben, übersetzt und erläutert von Karl Garbers. Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math., Astr. u. Physik, Abt. A: Quellen, 4. Band, Berlin 1936.

Bemerkungen von Prof. Neugebauer führten zur Verbesserung verschiedener Stellen der vorliegenden Arbeit und der Figuren. Prof. Littmann in Tübingen half mir bei den arabischen Zitaten des vorletzten Abschnitts, und Prof. Paret in Heidelberg ging mit mir den letzten Abschnitt durch. Dr. Raff von der Universitätsbibliothek in Tübingen gab stets Rat und Hilfe bei der Beschaffung der Literatur. Ich schulde diesen Herren größten Dank.

²⁾ In der Bezeichnung 62, 3 soll 62 die Manuskriptseite, 3 die von oben gezählte Zeile dieser Manuskriptseite in der Ausgabe von Garbers bedeuten. In 62, -2 bedeutet -2 die zweite Zeile von unten. Da die Manuskriptseiten bei Garbers in der Regel etwa 8 Zeilen haben, findet man die ungefähre Stelle in der Übersetzung leicht durch Einschaltung nach dem Augenmaß.

³⁾ Was ich hier 'System des Äquators' nenne, dreht sich nicht mit der Fixsternsphäre, sondern ist mit dem System des Horizonts fest verbunden.

Quellen u. Studien Math. B, Bd. 4.

Die Lage jedes der beiden Systeme A , U_i in bezug auf das Grundsystem H ist in der aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlichen Weise gegeben. Diese Zusammenstellung enthält auch die übrigen eingeführten Bezeichnungen.

1. Grundsystem.

System	Azimutbogen	Höhe	Grundkreis
H	a	h	$\mathfrak{H}$ = Horizont

2. System des Äquators.

System	(Azimutbogen)	(Höhe)	Grundkreis
A	t = Stunden- bogen	δ = Dekli- nation	$\mathfrak{A}$ = Himmelsäquator. Sein nördlicher Pol liegt in der Höhe φ über dem Nordpunkt des Horizonts.

3. Uhrsysteme (Fig. 1).

System	Azimutbogen	Höhe	Grundkreis (Uhrkreis)
$U_1 \equiv H$	$\alpha_1 \equiv a$	$\eta_1 \equiv h$	$K_1 \equiv \mathfrak{H}$ = Horizont
U_2	α_2	η_2	K_2 = Meridian
U_3	α_3	η_3	K_3 = Ostwestkreis (1. Vertikal)
U_4	α_4	η_4	K_4 senkrecht zu K_3 mit der Neigung $\alpha_3^{(4)}$ gegen $K_2^{(5)}$
U_5	α_5	η_5	K_5 senkrecht zu K_2 mit der Neigung $\alpha_2^{(4)}$ gegen K_3
U_6	α_6	η_6	K_6 senkrecht zu K_1 mit der Neigung $\alpha_1^{(4)}$ gegen K_3
U_7	α_7	η_7	K_7 senkrecht zu K_4 mit der Neigung $\alpha_3^{(6)}$ gegen K_1

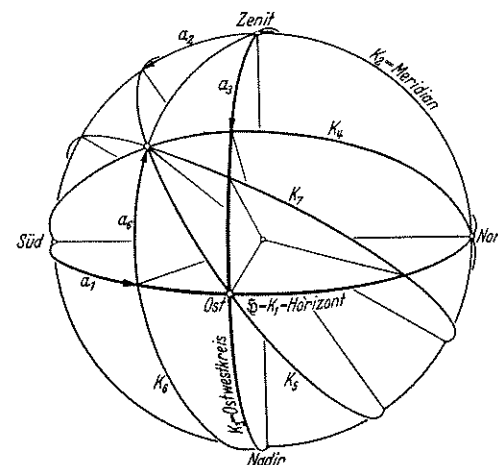
Auch Täbit bezeichnet α_i als den Azimutbogen in der betreffenden Sonnenuhr. η_i bezeichnet er für $i = 1$ als die Höhe, für die übrigen Systeme als den Bogen, der in der betreffenden Sonnenuhr die Stelle der Höhe einnimmt.

Die Uhrkreise K_1 , K_2 , K_3 fallen in die Hauptebenen des Grundsystems, die Uhrkreise K_4 , K_5 , K_6 gehen durch dessen Achsen. Das Uhrsystem U_7 stellt den allgemeinen Fall dar. Täbit selbst kenn-

⁴⁾ heißt bei Garbers ξ .

⁵⁾ „ K_4 hat gegen K_3 die Neigung $\alpha_3^{(4)}$ “ soll bedeuten: die Ebene von K_4 bildet mit derjenigen von K_3 nach der einen oder der anderen Seite den spitzen Winkel α_3 .

⁶⁾ $90^\circ - \alpha_6$ heißt bei Garbers ζ .



Figur 1. Die Uhrkreise.

bei der Berechnung der Horizontaluhr (System U_1) als Nullpunkte für die Azimute der Süd- und der Nordpunkt des Horizonts, sonst auch der Ost- und der Westpunkt. Um ein einheitliches Bezeichnungssystem zu erhalten, bezeichne ich mit $\alpha_i = a$ das vom Ost- oder Westpunkte aus gemessene Azimut. In den von Herrn Garbers entsprechend dem Text gegebenen Formeln ist dann a durch $90^\circ - a$ zu ersetzen, wo die Azimute vom Nord- oder Südpunkte aus gemessen sind. Bei A und den Uhrsystemen U_2 bis U_7 werden die Azimute vom höchsten oder tiefsten Punkte des Uhrkreises aus gemessen. Hiernach wäre in Herrn Garbers' zweiter Formel zu 21 das Azimut α_2 durch $|\varphi \mp \alpha_2|$ zu ersetzen.

Ebenso wird der Sinn, in dem die Koordinaten gemessen werden, auf das Grundsystem H bezogen. Er kann stets durch Ausdrücke wie z. B. 'auf' oder 'nach der Ostseite' (nämlich von der Mittagslinie), oder z. B. 'auf derselben Seite' (vom Äquator) 'wie die Ortsbreite' gekennzeichnet werden. Hierdurch und durch die Wahl von 2 diametral gegenüberliegenden Nullpunkten auf ein- und demselben Azimutkreis wird erreicht, daß in der Regel alle Koordinaten ≥ 0 und $\leq 90^\circ$ sind. Der Durchmesser durch die beiden Nullpunkte eines Azimutkreises heiße Nulllinie.

Die erste Hauptaufgabe der Schrift ist:

Für einen Ort von gegebener Breite φ sind aus den sphärischen Koordinaten t , δ der Sonne im System des Äquators ihre sphärischen Koordinaten α_i , η_i in bezug auf ein Uhrsystem U_i von gegebener Lage zu berechnen.

Oder: Das sphärische Koordinatensystem $A = (t, \delta)$ ist in das sphärische Koordinatensystem $U_i = (\alpha_i, \eta_i)$ zu transformieren.

Eine solche Transformation sei mit $A \rightarrow U_i$ oder $U_i \leftarrow A$ bezeichnet.

Die zweite Hauptaufgabe ist folgende:

Gegeben sind die sphärischen Koordinaten α_i, η_i der Sonne im System U_i . Ferner ist gegeben die Lage der Gnomonspitze P_i über der Ebene des Kreises K_i (z. B. durch den Fußpunkt und die Länge s des Gnomons, wenn dieser senkrecht auf der Ebene von K_i stehen soll). Gesucht ist der Ort des Schattens von P_i in der Ebene von K_i .

Die dritte Hauptaufgabe lautet:

Den Ort des Schattens von P_k in der Ebene von K_k aus demjenigen von P_i in der Ebene von K_i zu bestimmen.

Die erste Hauptaufgabe löst Tābit durch Ausführung folgender Transformationen:

Erste Abteilung:

$A \rightarrow U_1$ (K_1 schief zu $\mathcal{Q}$)	$A \rightarrow U_2$ ($K_2 \perp \mathcal{Q}$)	$A \rightarrow U_3$ (K_3 schief zu $\mathcal{Q}$)
--	--	--

Zweite Abteilung:

$U_1 \rightleftharpoons U_3$	$U_1 \rightleftharpoons U_2$	$U_2 \rightleftharpoons U_3$
------------------------------	------------------------------	------------------------------

Dritte Abteilung:

$U_3 \rightarrow U_4$	$U_2 \rightarrow U_5$	$U_1 \rightarrow U_6$
-----------------------	-----------------------	-----------------------

Vierte Abteilung:

$U_6 \rightarrow U_7$

Die hier als 'erste Abteilung' bezeichnete Zusammenstellung von Transformationen scheidet sich dadurch scharf von den folgenden, daß die Koordinaten der drei Uhrsysteme — es sind die Systeme der Horizontaluhr, der Morgen-und-Abenduhr und der Mittagsuhr — unmittelbar aus den gegebenen Größen φ, t, δ berechnet werden. Von der zweiten Abteilung ab wird ein ganz neuer Gedanke wirksam. Ein Uhrsystem wird jetzt aus einem anderen abgeleitet. Derjenige, der zuerst diesen klugen Gedanken hatte, sei es Tābit, sei es einer seiner Vorgänger, wo immer diese zu suchen seien, mag etwa folgendes mehr oder weniger klar erkannt haben: Unter den 3 Transformationen der ersten Abteilung ist eine leichtere, d. h. eine solche, die auf leichtere Rechenvorschriften ('Formeln') führt, nämlich die Transformation $A \rightarrow U_2$, bei der die beiden Grundebenen auf einander senkrecht stehen. Die beiden anderen, bei deren jeder die beiden Grundebenen schief zu einander stehen, haben kompliziertere Berechnungsvorschriften. Ferner

mag ihm, etwa bei dem Versuch, die Systeme U_4, U_5, U_6 abzuleiten, in irgend einer Weise zum Bewußtsein gekommen sein, daß das System A seinem mathematischen Wesen nach auch nichts anderes sei, als ein solches Uhrsystem, nämlich ein System von der Art U_2 .⁷⁾ So war denn der Gedanke da, Uhrsystem aus Uhrsystem abzuleiten, ebenso wie früher ein Uhrsystem aus dem System A abgeleitet wurde, und dabei war es dann praktisch, immer eine Transformation der leichteren Art zu wählen, d. h. eben eine solche, bei der die neue Uhrebene auf der alten senkrecht steht. Daß Tābit diesen Vorteil bewußt ausnutzt, zeigen seine Bemerkungen 50, 2 bis 51, 3. Als ganz besonders einfach erweisen sich unter diesen Transformationen der leichteren Art diejenigen Transformationen T_i bei denen, wie bei der Transformation $U_3 \rightarrow U_2$, die Nullpunkte der Azimutskalen des alten und neuen Systems auf der Schnittgeraden der beiden Uhrebenen K_3 und K_2 zusammenfallen. Hier liegt eben nur eine 90° -Drehung des Systems um die Nulllinie der Azimutebene vor. Wo das nicht der Fall ist, wie z. B. bei $U_3 \rightarrow U_1$, ist vorher das alte Uhrsystem (U_3) um die Verbindungslinie seiner eigenen Pole zu drehen, bis die Nulllinie seiner Azimutebene in die Schnittgerade dieser alten mit der neuen Azimutebene fällt. Das ist die lineare Transformation z. B. der α_3 in $\alpha_3 \pm \alpha_2$, die uns in der Formel zu 52 entgegentritt. Oder es ist auch nachher das neue Uhrsystem um die Verbindungslinie seiner eigenen Pole so zu drehen, daß die Nullpunkte des neuen Uhrkreises zum höchsten und tiefsten Punkte dieses Kreises werden, wie dies z. B. 21, -2 bis 22, 3 im Text geschieht.

Tābit ist also schließlich imstande, die Transformationen der unangenehmen Art $A \rightarrow U_1, A \rightarrow U_3$ ganz zu vermeiden, und jedes System der Gruppe durch Zusammensetzung aus Transformationen der bequemen Art zu gewinnen. Z. B. ist $A \rightarrow U_1 = A \rightarrow U_2 \rightarrow U_1$, und das Uhrsystem allgemeiner Lage U_7 könnte erhalten werden durch die Transformationen $A \rightarrow U_2 \rightarrow U_1 \rightarrow U_6 \rightarrow U_7$.

Wir dürfen einem mittelalterlichen Mathematiker nicht leichtfertig moderne Gedanken unterschieben. Die Konsequenz aber, mit der Tābit bei der Zusammensetzung der Transformationen vorgeht, zeigt,

⁷⁾ Allerdings enthält diese Schrift des Tābit keinerlei Hinweis auf den Sonderfall der antiken Uhr, deren Ebene derjenigen des Äquators parallel ist, und deren Gnomon wie der Polos der abendländischen Uhr die Richtung der Weltachse hat. Das „Buch über die Schatteninstrumente“ von Tābit's Enkel Ibrāhīm b. Sinān b. Tābit hat nach M. Krause (diese Ztschr. B 3, 1936, S. 461) ein Kapitel III mit der Überschrift „Über das Instrument, bei dem der Schatten nicht länger und nicht kürzer wird“. Bisher habe ich noch keine Kopie dieser Handschrift, deren Untersuchung für die Klärung der Fragen, die Tābit's Schrift aufkommen läßt, nützlich sein könnte. Die Hoffnung freilich, hier Beweise zu Tābit's unbewiesenen Formeln zu finden, dürfte nicht groß sein.

daß er etwas von dem angewandt hat, was wir Gruppenbegriff nennen. Er hat erkannt, daß er schwierigere Transformationen aus einfacheren zusammensetzen kann. Natürlich brauchen wir nicht anzunehmen, daß er sich seine Transformationen als Bewegungen, als Drehungen aus der alten in die neue Lage vorgestellt habe. Auch bleibe dahingestellt, ob er seine Formeln stets neu entwickelte, oder soviel Überblick hatte, daß er mutatis mutandis die neuen Formeln gleich niederschrieb. Wir kommen auf diesen Punkt noch einmal zurück.

2. Des Ptolemäus Schrift „Über das Analemma“.

Ihren schon angedeuteten scharfen Einschnitt hat die Schrift I an der Spitze von 33. Wir wollen den Abschnitt vor diesem Einschnitt mit Ia und den Rest von I mit Ib bezeichnen. In Ia sind die drei Hauptsonnenuhren, Horizontaluhr, Morgen-und-Abend-Uhr und Mittagsuhr jede für sich aus den gegebenen Werten von φ , δ , t abgeleitet. Ib bringt die allgemeineren Uhrsysteme U_1 , U_2 , U_3 und das allgemeinste U_4 und lehrt die oben geschilderte Ableitung der Elemente der Gruppe durch Komposition aus den bequemsten elementaren Transformationen. Bemerkenswerter Weise ist der Einschnitt durch eine Basmala gekennzeichnet, d. h. den Spruch „Im Namen Gottes, des barmherzigen Erbarmers“ (33, 1). Der frommen Zauberkraft dieser Formel haben sich natürlich auch die Schriften Tābit's, dieses abtrünnigen Šābiers, nicht entziehen können. Je eine solche Basmala (83, 1 u. 89, 1) trennt später auch die beiden anderen Teile II und III ab, die Herr G. (S. 11) als „zwei kleinere Traktate“ anspricht. Hat die erste Basmala 33, 1 die Bedeutung eines Ordnungszeichens der Stoffeinteilung, oder kann sie auch historische Bedeutung haben? Freilich bezieht sich die Einleitung (1b bis 3, -2) auf Ia und Ib. Trotzdem könnte aber z. B. in der Individualentwicklung Tābit's Ib eine spätere Hinzufügung sein, indem ihm sozusagen bei der 2. Auflage die neuen, in Ib enthaltenen Gedanken gekommen wären. Oder es könnte dem Teil Ia als Vorbild eine Schrift zugrunde liegen, die nur die drei fundamentalen Uhren behandelt, und Ib könnte die neuen Gedanken und Entwicklungen Tābit's oder eines seiner Vorläufer enthalten. Daß in Ia die Azimute im Horizont vom Süd- und Nordpunkt aus, in Ib aber zunächst nach der bei den Arabern⁸⁾ üblichen Weise vom Ost-

⁸⁾ Unter „Arabern“, „arabischen Mathematikern“ oder „Astronomen“ verstehe ich im Folgenden arabisch schreibende Mathematiker und Astronomen des Mittelalters. Bekanntlich waren die Besten unter ihnen größtenteils Perser und sonstige Angehörige des iranischen Stammes, z. B. Hwārizmī. Auch Juden waren beteiligt, wie Sanād („Sind“) b. 'Alī. Die völkische Zugehörigkeit der Šābier von Harrān, zu denen Männer wie Tābit b. Qurra und al-Battānī gehörten, scheint noch nicht genügend geklärt zu sein. Ibn Yūnus gehört einer altberühmten Familie an, deren sagenhafter Ursprung

und Westpunkt aus gemessen sind, braucht nichts zu beweisen, da bei der Horizontaluhr Rechnung und Sinustafel zunächst das vom Süd- oder Nordpunkt aus gerechnete Azimut liefern konnte, das auch für die Konstruktion der Uhr geeignet ist. Auch sind auf den Manuskriptseiten 57, 58, 59, 60 die Azimute wieder von der Süd- und Nordrichtung aus genommen.

Aus der hellenistischen Wissenschaft ist eine Schrift auf uns gekommen, die die Lösung der ersten Hauptaufgabe, nämlich die Bestimmung der Bögen α_i und η_i nur für die fundamentalen Uhrsysteme U_1 , U_2 , U_3 enthält, also dem Teile Ia der Abhandlung Tābit's entspricht. Diese Schrift ist die Abhandlung des Ptolemäus über das Analemma. Herr G. hat (S. 3) die Methode dieses Werks erwähnt, ohne darauf hinzuweisen, daß es auch denselben Gegenstand behandelt, wie die Schrift des Tābit.

In der Abhandlung über das Analemma⁹⁾ zeigt Ptolemäus die Bestimmung der gesuchten Bögen nach 3 Methoden:

1. durch darstellende Geometrie,
2. durch Rechnung,
3. durch ein Nomogramm, das 'Analemma'.

Leider kommt es immer wieder vor, daß solche, die über dieses Werk schreiben, nicht aus ihm selbst schöpfen, sondern nur aus dem, was v. Braunmühl¹⁰⁾ und Zeuthen¹¹⁾ darüber geschrieben haben. Dies ist gewöhnlich schon an immer wiederholten Irrtümern und zu weit getriebener Modernisierung der Darstellung erkennbar. So meinen manche mit v. Braunmühl, Ptolemäus habe nur ein graphisches Verfahren mitgeteilt. Oder man benutzt mit Zeuthen zur Deutung der rechnerischen Methode des Ptolemäus Tangensfunktionen. Auch wurde in neuester Zeit noch einmal der Irrtum wiederholt, die lateinische Übersetzung des Wilhelm von Moerbeke, die auch jetzt noch unsere einzige Quelle für den größten Teil der Schrift ist, sei eine Übersetzung aus dem Arabischen. In Wirklichkeit hat Moerbeke aus dem Griechischen übersetzt.

J. Heiberg¹²⁾ hat bekanntlich nicht nur den Text des Wilhelm nach dem Yemen verlegt wird. In neuerer Zeit spricht man auch von „muslimischen“ oder „islamischen“ Mathematikern, weil sie im Bereich des Islam ihre Werke schufen.

⁹⁾ Näheres über das Analemma, auch Angabe der wichtigeren Literatur, bei P. Luckey, Das Analemma von Ptolemäus. *Astronom. Nachr.* **230** (1927), Sp. 17–46.

¹⁰⁾ A. v. Braunmühl, Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie. *Abh. d. Kais. Leop.-Carol. Deutschen Ak. d. Naturf.* **71** (1898), Nr. 1. — A. v. Braunmühl, Vorles. über Gesch. d. Trigonometrie, I, Leipzig 1900.

¹¹⁾ H. G. Zeuthen, Note sur la trigonométrie de l'antiquité. *Bibliotheca mathematica*, 3. Folge, **1** (1900), S. 20.

¹²⁾ Claudii Ptolemaei opera, Vol. II. Opera astronomica minora, ed. J. L. Heiberg, Leipzig 1907, S. 187–223. Siehe auch J. L. Heiberg, *Abh. z. Gesch. d. Math.* **V**, S. 3–4 und **VII**, S. 1–30.

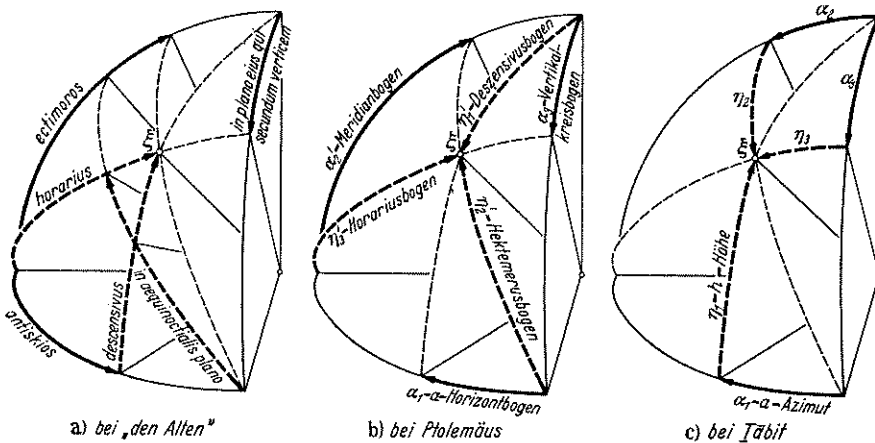
von Moerbeke bequem zugänglich gemacht, sondern auch einen Teil des griechischen Textes retten können.

Ptolemäus unterscheidet drei feste Kreise: den Meridian (ὁ μεσημβρινός), den Horizont (ὁ ὀρίζων) und den ersten Vertikal (ὁ κατὰ κορυφήν κύκλος) und drei durch die Sonne gehende, mit ihr bewegliche Kreise: den durch die Westostlinie des Horizonts gelegten Hektemoruskreis (ὁ ἐκτῆμορος κύκλος), den durch die Nordsüdlinie des Horizonts gelegten Horariuskreis (ὁ ὥριατος κύκλος) und den durch die Scheitellinie gelegten Descensivuskreis (ὁ καταβατικός κύκλος).

Diese 6 Kreise dienen zur Bildung von drei Systemen sphärischer Polarkoordinaten des Himmelspunktes ξ , die in Fig. 2b für den oberen südöstlichen Oktanten dargestellt sind. Der Vergleich mit Fig. 2c und die folgende tabellarische Zusammenstellung zeigen, daß es im wesentlichen die drei Uhrsysteme U_1 , U_2 , U_3 des $\overline{\text{Täbit}}$ b. Qurra sind.

Koordinaten bei Ptolemäus (Fig. 2b).

Uhrsystem	Bogen im festen Kreis	Bogen im beweglichen Kreis
$U_1 \equiv H$	Horizontbogen = $\alpha'_1 = \alpha_1 = a$ ἡ τοῦ ὀρίζοντος (περιφέρεια)	Descensivusbogen = $\eta'_1 = 90^\circ - \eta_1 = 90^\circ - h$ ἡ τοῦ καταβατικοῦ
U_2	Meridianbogen = $\alpha'_2 = 90^\circ - \alpha_2$ ἡ τοῦ μεσημβρινοῦ	Hektemorusbogen = $\eta'_2 = 90^\circ - \eta_2$ ἡ τοῦ ἐκτῆμορίου
U_3	Vertikalkreisbogen = $\alpha'_3 = \alpha_3$ ἡ τοῦ κατὰ κορυφήν	Horariusbogen = $\eta'_3 = 90^\circ - \eta_3$ ἡ τοῦ ὥριαίου κύκλου



Figur 2. Die sechs Bögen.

Ptolemäus benutzt also für die Azimute im Horizont und im 1. Vertikal dieselben Bögen α_1 und α_3 wie $\overline{\text{Täbit}}$. Für den Meridianbogen dagegen nimmt er das Komplement des von $\overline{\text{Täbit}}$ gewählten Bogens. Ebenso nimmt er statt der „Höhen“ η_i deren Komplemente $\eta'_i = 90^\circ - \eta_i$, die wir im Sinne $\overline{\text{Täbit}}$'s die „Zenitdistanzen“ für die betreffenden Uhrsysteme nennen könnten. Ptolemäus bestimmt die 6 Bögen abweichend von $\overline{\text{Täbit}}$ in der Reihenfolge $\eta'_2, \eta'_3, \eta'_1$ — das sind die Bögen auf den drei beweglichen Kreisen — und $\alpha'_2, \alpha'_3, \alpha_1$ — das sind die drei Bögen auf den festen Kreisen. Wir werden sehen, warum er die Bögen auf den beweglichen Kreisen vor denen auf den festen Kreisen bestimmt.

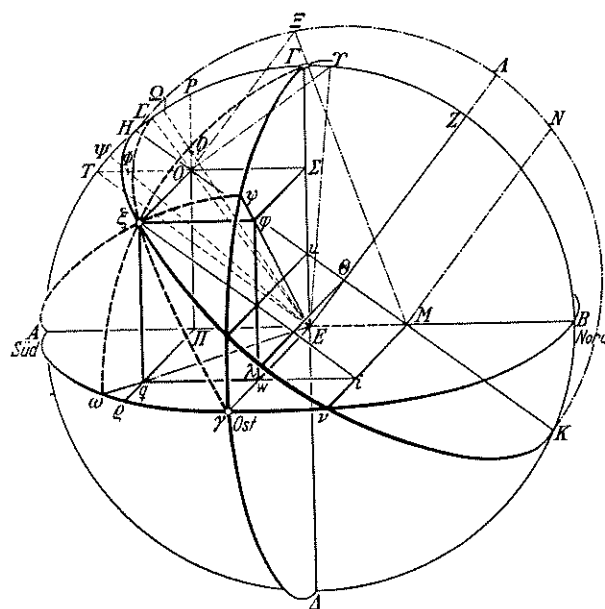
Die Terminologie ist eine andere, insbesondere fehlt auch die Angabe, daß α'_i, η'_i im Uhrsysteme U_i die Rolle des Azimuts und der Höhe spielen. Vielmehr ist z. B. der Descensivusbogen η'_1 der vom Zenit aus bis zur Sonne gemessene Bogen auf dem Descensivuskreis, und dieser wird als der um den Betrag des Bogens α_1 aus seiner Ruhelage herausgedrehte Vertikalkreis (1. Vertikal) betrachtet. Betont wird (*Analemma*^{12a}), S. 191, Z. 9), daß durch Angabe eines Bogenpaares α'_i, η'_i die Lage des zum Gestirn gezogenen Radius bestimmt ist.

Wertvoll ist der kleine Einblick, den uns Ptolemäus in das gibt, was er über diesen Gegenstand vorfand. Der Vergleich der Figuren 2a und 2b zeigt, daß er das von seinen Vorgängern, die er „die Alten“ (οἱ παλαιοί) nennt, verwandte System von Bögen — ursprünglich spricht Ptolemäus von den Zentriwinkeln dieser Bögen — durch ein vernünftigeres ersetzt hat. Hätte uns doch auch $\overline{\text{Täbit}}$ etwas über seine Vorgänger verraten! Den als Koordinatenbogen ungeeigneten 'Bogen in der Äquatorebene' (ἡ ἐν τῷ τοῦ ἰσημερινοῦ ἐπιπέδῳ) hat Ptolemäus durch den Hektemorusbogen ersetzt. Er nimmt seine Bestimmung als siebente Aufgabe der Abhandlung gewissermaßen aus historischen Gründen ebenfalls vor. Wir wollen diese Bestimmung im folgenden nicht berücksichtigen. Die anderen Bögen werden bei den Vorgängern zum Teil anders benannt oder durch das Komplement ersetzt. Der Horizontbogen, antiskios = contraumbralis = Gegenschattenbogen genannt, wird wie in $\overline{\text{Täbit}}$'s Teil Ia vom Süd- oder Nordpunkt aus gemessen.

Man sieht, wie Ptolemäus das Problem aus einer niederen Sphäre angewandt-mathematischer Betätigung, deren ursprüngliche Heimat wir kennen möchten, zu einer reineren und konsequenteren Behandlung erhoben hat. Abgesehen von der Frage des vorptolemäischen *Analemmas*, über das wir auch bei Vitruv^{12a}) etwas hören, ist die Sache

^{12a}) Vitruv, De architect. IX, 8. — Prof. Neugebauer macht auf Herons Dioptra, Kap. 35 aufmerksam, wo bei der konstruktiven Bestimmung des Großkreisbogens Alexandria-Rom mit dem „Analemma von Rom“ (und dem von Alexandria) gearbeitet

auch deshalb von Interesse, weil sie uns ein kleines Licht auf die vielfach umstrittene mathematische Fähigkeit des Ptolemäus wirft, insofern wir sehen, was er aus der Arbeit der Vorgänger gemacht hat.



Figur 3.

ist der Ort ξ der Sonne durch den Bogen $\nu\xi$ gegeben, den sie auf dem Parallelkreis seit ihrem Aufgang zurückgelegt hat. Gesucht sind die Bögen

$$\begin{aligned} \eta'_2 &= \widehat{\gamma\xi} = \text{Hektemorusbogen}, & \alpha'_2 &= \widehat{AL} = \text{Meridianbogen}, \\ \eta'_3 &= \widehat{A\xi} = \text{Horariusbogen}, & \alpha'_3 &= \widehat{\Gamma\psi} = \text{Vertikalkreisbogen}, \\ \eta'_1 &= \widehat{\Gamma\xi} = \text{Descensivusbogen}, & \alpha'_1 &= \widehat{\gamma\omega} = \text{Horizontbogen}. \end{aligned}$$

Um sie darzustellen, klappt Ptolemäus den Halbparallel $H\xi K$ um HK in die Meridianebene, wobei derselbe in die Lage $H\xi K$ kommt. Der Punkt Ξ , auf den ξ fällt, ist durch den Bogen $N\xi = \nu\xi$ gegeben. Von Ξ fällt Ptolemäus das Lot ΞO auf HK , von O das Lot $O\Sigma$ auf $\Gamma\Delta$ und von O das Lot $O\Pi$ auf AB .

Damit hat er die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten

$$x = O\Sigma, \quad y = O\xi, \quad z = O\Pi$$

der Sonne konstruiert.

wird. — Herr Neugebauer weist auch auf Kap. 18 hin. Hier baut der Verfasser eine Kugel als Rotationskörper dadurch auf, daß er eine Anzahl der Achsenschnitte sozusagen in rechtwinkligen Koordinaten punktweise herstellt.

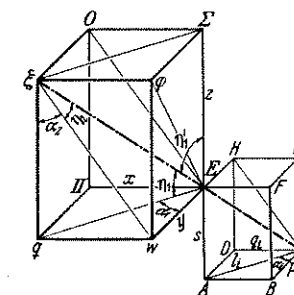
Jetzt kennt er also (Fig. 4) die Kanten x, y, z des Quaders $E\xi$. Die gesuchten Größen α'_i und η'_i sind Winkel, welche die von E ausgehenden drei Kanten x, y, z des Quaders mit seinen von E ausgehenden drei Flächendiagonalen $Eq, EO, E\varphi$ und mit seiner von E ausgehenden Raumdiagonale $E\xi$ bilden. Z. B. ist in Fig. 4 $\angle vEq = \alpha_1$ und $\angle \Sigma E\xi = \eta'_1$. Diese sechs Winkel können also durch Umklappungen in die Zeichenebene gewonnen werden. So klappt denn Ptolemäus (Fig. 3) den Halbhorizont $A\gamma B$ samt dem Horariusquadranten $A\xi\psi$ nach oben in die Meridianebene um und den Halbvertikal $\Gamma\gamma\Delta$ samt dem Descensivusquadranten $\Gamma\xi\omega$ nach links in die Meridianebene. Es wird also $\Pi Q = \Pi q = O\xi = y$ und $\Sigma\Phi = \Sigma\varphi = O\xi = y$. Ferner klappt er das Dreieck $EO\xi$ um EO in die Lage $EO\Gamma$. Nachdem er dann einige aus der Figur ersichtliche Verlängerungen und Verbindungslinien gezogen hat, sind die gesuchten Bögen folgendermaßen gefunden:

$$\begin{aligned} \text{Hektemorusbogen} &= \eta'_2 = \widehat{\gamma\xi} \text{ wird gebildet von } \angle \gamma E\xi = \\ &\quad \angle E\xi O = \angle E\Gamma O. \text{ Also Hektemorusbogen} = \eta'_2 = 90^\circ - \widehat{\Gamma\Gamma}, \\ \text{Horariusbogen} &= \eta'_3 = \widehat{A\xi} = \widehat{AP}, \\ \text{Descensivusbogen} &= \eta'_1 = \widehat{\Gamma\xi} = \widehat{\Gamma T}. \\ \text{Meridianbogen} &= \alpha'_2 = \widehat{AL}, \\ \text{Vertikalkreisbogen} &= \alpha'_3 = \widehat{\Gamma\psi} = \widehat{\Gamma\Psi}, \\ \text{Horizontbogen} &= \alpha'_1 = \widehat{\gamma\omega} = \widehat{\Gamma\Omega}. \end{aligned}$$

Beim Hektemorusbogen η'_2 wird die Umklappung um EO (Fig. 3 und Fig. 4) vorgenommen, da die Quaderkante y nicht in der Zeichenebene liegt.

Die körperliche Figur 3 habe ich rekonstruiert. Ptolemäus entwirft nur die nach den Umklappungen entstandene ebene Figur (Fig. 5), da er den Richtigkeitsnachweis für die in ihr schon von seinen Vorgängern vollzogenen graphischen Bestimmungen der gesuchten Winkel als bekannt voraussetzt. Nur für den von ihm neu eingeführten Hektemorusbogen η'_2 führt er den Richtigkeitsnachweis. Er fordert zu diesem Zweck (*Analemma* S. 196, griech. 25 ff.) den Leser auf, sich den Parallelkreis in seine natürliche Lage, d. h. in die Lage senkrecht zur Ebene des Meridians, zurückgedreht zu denken. Auch deutet er in dieser nun räumlich gedachten Figur die Ostwestlinie an (ep in der Figur von S. 196)¹³.

¹³) Ptolemäus zeichnet 2 Figuren für das darstellend-geometrische (S. 198, S. 200) und 2 für das rechnerische Verfahren (S. 203, S. 207). Die erste behandelt jedesmal



Figur 4.

Das Wesentliche an dem Lösungsweg, den Ptolemäus beschrieben hat, sehe ich in der Bestimmung der rechtwinkligen kartesischen Koordinaten x, y, z als Durchgangstation. Bei der Frage, bis zu welchem Grade er bewußt zu diesen Koordinaten übergeht, muß man die Betrachtungen im Auge halten, die Ptolemäus, wohl im Anschluß an die Philosophen, in seiner Schrift *Περὶ διαστάσεως* (de dimensione)¹⁴ anstellt. Er geht hier von einem Punkt aus, dem er einen „Fluß“ (ῥόσις) nach der Länge, der Breite und der Tiefe zuerteilt. Es gebe 3 und nur 3 Dimensionen, da nur 3 in einem Punkte auf einander senkrechte Geraden möglich seien. Die Schrift über das Analemma beginnt ebenfalls mit solchen Betrachtungen über die notwendige Dreizahl der aufeinander senkrecht stehenden Dimensionen eines Körpers, um dann auf die Beschreibung des für die Himmelssphäre in Anwendung kommenden natürlichen Dimensionssystems überzugehen, dessen Grundebenen Horizont, Meridian und erster Vertikal sind. Dann erst schreitet er zur Einführung seiner 3 Polarkoordinatensysteme, wobei er, wie schon erwähnt, ausdrücklich sagt, daß in jedem derselben durch Angabe zweier Bögen α', η' die Lage des zum Gestirn gezogenen Radius bestimmt wird. Eine entsprechende Bemerkung darüber, daß die Lage des Gestirns auch durch die kartesischen Koordinaten „Länge“, „Breite“ und „Höhe“ oder bei gegebenem Radius durch 2 dieser Koordinaten bestimmt ist, fehlt aber, und wir würden vielleicht zuviel in seine Schrift hineinlegen, wenn wir für die drei Strecken, die tatsächlich die kartesischen Koordinaten sind, eine ebenso deutlich bewußte Heraushebung ihres Koordinatencharakters annähmen, wie sie bei den sphärischen Polarkoordinaten vorliegt. Immerhin hebt Ptolemäus am Schluß seiner Schrift (S. 222 Z. 31 bis S. 223 Z. 6) hervor, daß die Lage des Radius auch durch je 2 Bögen der beweglichen Kreise, d. h. durch je zwei der Größen $\text{arc Cos } x, \text{arc Cos } y, \text{arc Cos } z$ festgelegt werden kann.

Nach v. Braunmühls Vorgang pflegt man die Methode der Schrift über das Analemma als ein Verfahren der Orthogonalprojektion zu bezeichnen. Das ist nur insofern richtig, als die Bildungen der kartesischen Koordinaten x, y, z des Kugelpunktes ξ Orthogonalprojektionen sind und Ptolemäus x und y in der yx -Ebene zeichnet. Freilich kann man den Ersatz einer Quaderkante durch eine ihr par-

den Sonderfall $\delta = 0$. Ich kann mich damit begnügen, in Fig. 5 seine Figur von S. 207 für das rechnerische Verfahren des allgemeinen Falles wiederzugeben, da die Figuren des darstellend-geometrischen Verfahrens sich nicht wesentlich von denen des rechnerischen unterscheiden. Diese Figur habe ich aber im Gegensatz zu Ptolemäus für nördliche Deklination gezeichnet, um den Vergleich von Fig. 3 mit der Figur zu erleichtern, die v. Braunmühl (Vorl. I, S. 39) für die indische Methode, und die Herr G. (S. 50) für Täbit benutzt.

¹⁴) Vgl. Ptol. op. ed. Heiberg II, S. 265—266.

allele als Projektionsverfahren bezeichnen. Der Gebrauch des Ausdrucks „Orthogonalprojektion“ ist aber hier irreführend. Man darf nämlich nicht meinen, die Figur des Analemmas (Fig. 5) sei als Ganzes eine Projektion. Wenn Delambre, an dessen ausführliche Behandlung des Analemmas¹⁵ v. Braunmühl offenbar anknüpft, (S. 485) von orthographischer Projektion beim Analemma spricht, so meint er damit die Benutzung rechtwinkliger Koordinaten eines Sphärenpunktes und die Darstellung eines Bogens durch seinen Sinus oder Sinusversus, d. h. durch die Halbsehne oder den Pfeil des doppelten Bogens. Jene rechtwinkligen Koordinaten treten ja auch als solche Halbsehnenauf. Die ebene Figur des Analemmas ist weder nach ihrem Wesen noch nach dem Sprachgebrauch oder der Absicht des Ptolemäus als Abbildung der Punkte und Kreise der Kugel durch Orthogonalprojektion auf eine Ebene aufzufassen, auch nicht als Übereinanderlagerung der Projektionen auf drei Ebenen. Vielmehr ist sie aus der räumlichen Figur durch Umklappungen der nicht in die Meridianebene fallenden Kreise in diese hergestellt. Hier besteht ein Unterschied gegenüber dem Planisphärium, das Ptolemäus ausdrücklich als eine Abbildung der Punkte und Kreise der Sphäre auf die Ebene erzeugt, nämlich durch stereographische Projektion. Die Schrift über das Planisphärium setzt den Begriff dieses Abbildungsverfahrens an die Spitze, die Schrift über das Analemma den Begriff rechtwinkliger Raumkoordinaten.

Wenn z. B. al-Birūnī an mehreren Stellen seiner Schriften die planmäßige Abbildung von Punkten und Kreisen der Sphäre durch Orthogonalprojektion auf die Ebene behandelt und für dieses Projektionsverfahren als Abbildungsmethode die Priorität in Anspruch nimmt, so darf M. Fiorini¹⁶ diesen Anspruch nicht mit Berufung auf das Analemma des Ptolemäus zurückweisen.

Will man schon den mathematischen Kern der Methode des Analemmas in der Sprache der modernen Mathematik kennzeichnen, so sollte man von der Umwandlung sphärischer Koordinaten (t, δ) in kartesische x, y, z und dieser kartesischen wieder in sphärische (z. B. α', η') reden. Die darstellend-geometrische Ausführung des an der körperlichen Figur gedachten Verfahrens in der ebenen Umklappungsfigur ist etwas Sekundäres, durch die technische Ausführungsmöglichkeit Bedingtes.

3. Das rechnerische Verfahren des Ptolemäus.

Die Weiterbildung des darstellend-geometrischen Verfahrens zu einem Nomogramm, dem eigentlichen Analemma, braucht hier nicht

¹⁵) J. B. L. Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, II, S. 458—504, Paris 1817.

¹⁶) M. Fiorini, *Le proiezioni cartografiche di Albiruni*. Boll. della soc. geogr. it. Ser. 3, Vol. 4, S. 287—294, Roma 1891.

behandelt zu werden. Ich habe dieses Nomogramm in der oben angeführten Arbeit⁹⁾ im Anschluß an den Text und die Skizze bei Ptolemäus (Analemma S. 213) wiederherzustellen versucht.

Ehe ich nun zu dem rechnerischen Verfahren des Ptolemäus übergehe, um sein Ergebnis dann mit den Formeln des *Ṭābit* zu vergleichen, erscheint es mir unumgänglich, einiges über die Methoden vorauszuschicken, nach denen Aufgaben der Gnomonik und der sphärischen Astronomie im Bereich der griechischen, indischen und arabischen Mathematik rechnerisch gelöst werden konnten.

Die angewandten Funktionen, Sehne bei den Griechen und Arabern, Sinus (Cosinus) und Sinusversus bei Indern und Arabern und die später^{16a)} bei Ostarabern in beschränktem Gebrauch gekommene Schattenfunktion Tangens sind bekanntlich Strecken, werden als Funktionen des Bogens angesehen und bei den Griechen und den älteren Arabern gemessen in „Abschnitten“ oder „Teilen“ (τμήματα, partes, aḡzā), d. i. Sechzigstel des Radius r . Letzterer wird als Maximalwert des Sinus „der größte Sinus“ oder „der ganze Sinus“, „Sinus totus“, genannt. Ich bezeichne diese Funktionen mit Chord, Sin, Cos, Sinvers. Es geht nicht an, den indisch-arabischen Sinus¹⁷⁾ durch sin zu bezeichnen, wie es z. B. auch Herr G. nach v. Braunmühls Vorgang tut, denn die berechnete Absicht, die Homogenität der Formeln dem Text entsprechend wiederzugeben, erheischt, daß der Sinus für das Argument 90° gleich dem Sinus totus, also gleich r und nicht gleich 1 wird. Also: $\sin 90^\circ = r$, $\sin 90^\circ = 1$. Kommen in ein- und derselben Rechnung oder Ableitung die Sehnen oder Sinusse der Bögen von Kreisen verschiedener Radien r und ρ vor, so kann man z. B. schreiben $\overset{(r)}{\text{Sin}}$ und $\overset{(\rho)}{\text{Sin}}$.

Soweit ich sehe, behandeln die Araber der älteren Zeit im Sprachgebrauch und in der sinnlichen Vorstellung den Sinus nur als Funktion des Bogens, und erst später scheint man davon abzugehen; so sprechen z. B. Ibn Yūnus und al-Bīrūnī auch vom Sinus eines Winkels, wobei der Sinus des bei gegebenem Radius zu diesem Winkel als Zentriwinkel gehörigen Bogens gemeint ist. Diese trivial erscheinende Änderung des Sprachgebrauchs und der sinnlichen Vorstellung steht im Zusammenhang mit einer durchgreifenden Wandlung in der Möglichkeit, Sätze der ebenen und sphärischen „Trigonometrie“ zu formulieren und neue derartige Sätze aufzustellen.

Die Methoden, nach denen man mit den gekennzeichneten Funktionen arbeitete, sind folgende:

^{16a)} Das Vorkommen der Tangensfunktion bei Ḥabāš bedarf noch der näheren Untersuchung.

¹⁷⁾ Das von jetzt ab über den Sinus Gesagte gilt meist sinngemäß auch für Cos $b = \sin(90^\circ - b)$ und Sinvers $b = r - \cos b$.

Erste Methode: die direkte Methode. Zu den Bögen auf der Kugel, die durchaus nicht Bögen größter Kugelkreise zu sein brauchen, werden die Sehnen oder die Sinusse (Linien!) konstruiert. An der so entstandenen gradlinigen stereometrischen Figur wird die Aufgabe nach den Lehrsätzen und Berechnungsmethoden der ebenen und räumlichen Geometrie gelöst.

Zweite Methode: die Methode der Seitenlehrsätze. Man verwendet Lehrsätze über Funktionen von Bögen in sphärischen Figuren, die aus größten Kugelkreisen gebildet werden. Solche Lehrsätze bietet das dritte Buch der Sphärik des Menelaos¹⁸⁾ dar. In erster Linie ist es der Satz Menelaos III, 1, d. i. der sogenannte Satz des Menelaos. Wir unterscheiden die beiden Fälle:

a) Es kommt nur der Satz des Menelaos zur Anwendung, wie z. B. im *Almagest* des Ptolemäus.

b) Es kommen weitere Sätze zur Anwendung, in erster Linie Menelaos III, 2 und III, 3.

Dritte Methode: die eigentliche sphärische Trigonometrie. Es werden Lehrsätze verwandt, welche, wie der Sinussatz, Beziehungen zwischen den Funktionen von Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks aussprechen.

Die zweite und dritte Methode stehen natürlich nicht selbständig neben der ersten, weil die in ihnen aufgestellten gebrauchsfertigen sphärischen Sätze ursprünglich nach der ersten bewiesen werden müssen¹⁹⁾. Man kann wohl annehmen, daß auch die Griechen die einzelnen Berechnungsaufgaben ursprünglich nach der direkten Methode lösten²⁰⁾. Rein und vielleicht ausschließlich scheint die erste Methode bei den Indern vorzuliegen. Bei den Arabern findet sie sich neben den anderen Methoden.

Für die zweite Methode, eine echte Schöpfung der Griechen, ist kennzeichnend, daß ausschließlich die Funktionen von Bögen, nicht

¹⁸⁾ Vgl. Axel Anthon Björnbo, Studien über Menelaos' Sphärik, Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. 14 (1902) und Max Krause, Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Naṣr Maṣṣūr b. 'Alī b. 'Irāq, Abh. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, Phil.-hist. Kl., 3. Folge Nr. 17, Berlin 1936. Zugleich Diss. Hamburg 1936.

¹⁹⁾ Daß beim Beweise des Satzes von Menelaos (Menelaos III, 1), wie Menelaos und Ptolemäus ihn geben, nicht mehr die Sehnen der doppelten Bögen selbst hergestellt werden, sondern nur Strecken, die diesen Sehnen proportional sind, ist natürlich nur eine formale Änderung, da in dem vorausgeschickten Hilfssatz die Sehnen selbst hergestellt werden. In dem Beweis, den Ṭābit vom Satz des Menelaos bringt, werden die Sinusse selbst gebildet. Vgl. Traité du quadrilatère, attribué à Nassiruddin-el-Toussy . . . traduit par Alexandre Pacha Caratheodory, Constantinople 1891, S. 200—202 u. Ṭābit's Werk über den Transversalsatz, herausg. von H. Bürger und K. Kohl, Abh. z. Gesch. d. Naturw. u. d. Med. 7, Erlangen 1924, S. 31—33.

²⁰⁾ Vgl. hierzu Zeuthen¹¹⁾, S. 20—21 und Björnbo¹⁸⁾, S. 124—135.

also sowohl ΛE wie $E H$ gegeben sein. Nun unterspannt aber das Doppelte der Strecke $E O$ das Doppelte des Bogens $H E$, und das Doppelte der Strecke $O \Theta$ das Doppelte des Bogens $E \Lambda$. Deshalb wird auch das [S. 209] Verhältnis von $E O$ und von $O \Theta$ zum Durchmesser $H K$ gegeben sein, hierdurch aber auch zum Durchmesser des *Meridians. Da aber auch das Verhältnis von ΘM gegeben ist, so wird auch das Verhältnis von $M O$ gegeben sein. Nun verhält sich wie $E M$ zu $M O$, so ΘM zu $M H$ und $E \Theta$ zu $O H$. Die Dreiecke $E M \Theta$ und $O H M$ sind nämlich gleichwinklig. Also wird auch das Verhältnis von $M H$ und dasjenige von $O H$ zum Durchmesser des Meridians gegeben sein, und deswegen aber auch das Verhältnis von $E \Sigma$ und das Verhältnis der ganzen Strecke $E M H$ ³⁴⁾, d. i. von $O \Sigma$.

Nachdem dies also bewiesen ist, nehme man mit dem Mittelpunkt O und der Entfernung $O E$ auf dem Meridian den Punkt Υ , schneide ebenfalls der Strecke $O E$ gleich die Strecken ΠQ und $\Sigma \Phi$ ab und ziehe die Verbindungslinien $E \Upsilon$, $E P$, $E T$ und $E M$, ferner $E O$, $E \Phi \Psi$ und $E Q \Omega$. Weil nun im Vorhergehenden bewiesen wurde, daß der Winkel $E O \Upsilon$ ein rechter ist, die Hypotenuse $E \Upsilon$ aber als Radius des Meridians und $O \Upsilon$ als gleich $O E$ gegeben sind, so wird auch der Winkel $E \Upsilon O$, der den Bogen des Hektemoruskreises enthält, gegeben sein. In ähnlicher Weise aber wird, da von dem rechtwinkligen Dreieck $E M O$ gegeben sind $E O$ und $O M$, auch die Hypotenuse $M E$ und der Winkel $M E O$ gegeben sein, der denjenigen macht, der in der Ebene des Äquators ist. Wiederum, da von dem rechtwinkligen Dreieck $E H P$ gegeben sind $E H$ und $H P$, so wird auch sowohl die Hypotenuse $E P$, wie auch der Winkel $H E P$ und der Bogen ΓP gegeben sein. Wiederum, da von dem rechtwinkligen Dreieck $E \Sigma T$ gegeben sind $E \Sigma$ und die Hypotenuse $E T$, so wird auch der Winkel $T E \Sigma$ und der Descensivbogen $\Gamma \Gamma$ gegeben sein. Da ferner aber von dem rechtwinkligen Dreieck $E O H$ gegeben sind $O H$ und $E H$, so werden auch die Hypotenuse $E O$ und der Winkel $O E H$, der den Meridianbogen macht, gegeben sein. Da wiederum von dem rechtwinkligen Dreieck $\Sigma \Phi E$ gegeben sind $E \Sigma$ und $\Sigma \Phi$, so wird auch die Hypotenuse $E \Phi$ und ferner der Winkel $\Sigma E \Phi$ und der Vertikalkreisbogen $\Gamma \Psi$ gegeben sein. Da aber schließlich von dem rechtwinkligen Dreieck $E H Q$ gegeben sind $E H$ und $H Q$, so werden auch die Hypotenuse $E Q$ und ferner der Winkel [S. 210] $E Q H$, das ist der Winkel $Q E \Gamma$ und der Horizontbogen $\Gamma \Omega$ gegeben sein.“

Diese nur dem Gang nach angedeuteten Rechnungen führe ich nun in Gleichungen aus. Hierbei ersetze ich die Sehnenfunktion $\frac{1}{2}$ Chord 2b durch die indisch-arabische Funktion $\sin b$ und drücke die berech-

³⁴⁾ Bei Ptolemäus fällt M zwischen E und H .

neten Stücke in indisch-arabischer Weise explizit aus. Bei den Bezeichnungen $\sin$ und $\cos$ ist stillschweigend der Sinus totus r vorausgesetzt. $\sin$ und $\cos$ sind Sinusse und Cosinusse im Tageskreis der Sonne, der den Radius $\rho = \frac{H K}{2} = \cos \delta$ hat. t_0 sei (Fig. 3) der halbe Tagbogen $\nu \xi H$, d die Aszensionaldifferenz $\nu \lambda$, t' der vom Aufgangspunkt ν an vorwärts oder vom Untergangspunkt an rückwärts gemessene Stundenbogen $\nu \xi$, der in τ' Temporalstunden zurückgelegt wird. Bei Doppelzeichen gilt das obere für Fig. 3 und Fig. 5, das untere für den auf südliche Deklination passenden Text des Ptolemäus³⁵⁾.

$$H O K = 2 \cos \delta, \quad z' = E \Theta = \sin \delta$$

$$E M = \frac{r}{\cos \varphi} E \Theta = \frac{r \sin \delta}{\cos \varphi}$$

$$M \Theta = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} E \Theta = \frac{\sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi}$$

$$\sin d = \sin \Lambda \widehat{N} = M \Theta = \frac{\sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi}$$

$$\sin d = \frac{\sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} = \text{Sinus der Aszensionaldifferenz}$$

$$t_0 = 90^\circ \pm d = \text{halber Tagbogen}$$

$$t' = \widehat{N E} \text{ gegeben }^{35)}$$

$$90^\circ - t = \widehat{\Lambda E} = \widehat{N E} \mp \widehat{\Lambda N} = t' \mp d$$

$$t = 90^\circ - \widehat{\Lambda E} (= 90^\circ - t' \pm d) = \text{Stundenbogen}$$

$$(y) \quad y = E O = \sin t = \frac{\sin t \cos \delta}{r}$$

$$x' = O \Theta = \cos t = \frac{\cos t \cos \delta}{r}$$

Es sind also jetzt der halbe Tagbogen t_0 und der Stundenbogen t gefunden. Ferner hat Ptolemäus die sphärischen Polarkoordinaten t, δ des Gestirns im System des Äquators in die kartesischen Koordinaten

$$x' = O \Theta, \quad y = O \xi, \quad z' = E \Theta$$

in demselben System übergeführt.

$$(z) \quad z = O H = \frac{E \Theta}{E M} M O = \frac{E \Theta}{E M} (O \Theta \pm \Theta M) \\ = \frac{\cos \varphi}{r} \left(\frac{\cos t \cos \delta}{r} \pm \frac{\sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi} \right),$$

³⁵⁾ So sagt Ptolemäus. t' ist aus der gegebenen Zahl τ' der temporalen Stunden als Bruchteil des soeben gefundenen halben Tagbogens t_0 zu berechnen: $t' = \frac{\tau'}{6} t_0$.

$$(x) \quad x = E\Pi = M\Pi \mp EM = \frac{M\Theta}{EM} MO \mp EM \\ = \frac{\sin \varphi}{r} \left(\frac{\cos t \cos \delta}{r} \pm \frac{\sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi} \right) \mp \frac{r \sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Hiermit sind die kartesischen Koordinaten x, y, z des Gestirns im System des Horizonts gefunden. $x = E\Pi$ ist für Ptolemäus „die ganze Strecke“, das heißt, die Summe der beiden Strecken EM und MΠ. Da er MΠ und EM berechnet hat, ist anzunehmen, daß er die Berechnung $x = M\Pi \mp EM$ voraussetzt. Unter Benutzung von $0u = 0\Theta \mp u\Theta$ hätte er, wie auch Zeuthen andeutet, für x einen dem Ausdruck für z analogen Ausdruck erhalten.

Jetzt sind drei der gesuchten Bögen gefunden:

$$(\eta_i) \quad \begin{cases} \text{Cos Hektemorusbogen} = \cos \eta'_2 = y = \frac{\sin t \cos \delta}{r} \\ \text{Cos Horariusbogen} = \cos \eta'_3 = x \\ \text{Cos Descensivusbogen} = \cos \eta'_1 = z. \end{cases}$$

Um auch die anderen drei Bögen zu berechnen, bestimmt Ptolemäus (Figuren 3, 4 und 5) die Flächendiagonalen

$$(d_i) \quad EO = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad E\varphi = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad Eq = \sqrt{x^2 + y^2}$$

des Quaders der kartesischen Koordinaten.

Dann ist:

$$(\alpha'_i) \quad \begin{cases} \text{Sin Meridianbogen } A\Gamma = \sin \alpha'_2 = \frac{O\Pi \cdot r}{EO} = \frac{zr}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \text{Sin Vertikalkreisbogen } \Gamma\Psi = \sin \alpha_3 = \frac{\Sigma\Phi \cdot r}{E\varphi} = \frac{yr}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \\ \text{Sin Horizontbogen } \Gamma\Omega = \sin \alpha_1 = \frac{E\Pi \cdot r}{Eq} = \frac{xr}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Wir würden natürlich einfacher $\tan \alpha'_2 = \frac{z}{x}$ usw. ansetzen. Da Ptolemäus nur mit der Sehnenfunktion arbeitet, gibt die von Zeuthen gebrauchte Tangensfunktion des unbekannten Bogens nicht die wirklichen Rechnungsschritte wieder. Nach dem Text müssen vielmehr die Flächendiagonalen (d_i) nach dem pythagoreischen Lehrsatz berechnet werden³⁶⁾.

³⁶⁾ Es ist sehr bemerkenswert, daß die Aufgabe, nur die Winkel eines ebenen rechtwinkligen Dreiecks aus den Katheten a und b zu berechnen, von arabischen Mathematikern immer so ausgeführt wird, daß sie zuerst die Hypotenuse $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ausrechnen und dann mit Hilfe der Sinustafel die Winkel suchen. So geschieht es auch dann noch, als die Tangensfunktion als Rechenhilfsmittel eingeführt war und hin-

Zusammenfassung. Wir haben hiermit die Koordinatenumwandlungen des Ptolemäus in folgende 3 Schritte zerlegt:

1. Übergang von den sphärischen Koordinaten t, δ zu den zugehörigen kartesischen Koordinaten x', y, z' .

2. Transformation der kartesischen Koordinaten: Das System x', y, z' wird um die Y -Achse im Drehsinne Zenit-Südpunkt um den Winkel $90^\circ - \varphi$ gedreht und hierdurch in das kartesische System des Horizonts x, y, z übergeführt.

3. Übergang von dem kartesischen Koordinatensystem x, y, z zu den zugehörigen 3 sphärischen Systemen α'_i, η'_i .

Ich behaupte nicht, daß Ptolemäus sich dieser Einzelschritte und ihres wahren Wesens als Koordinatenumwandlungen bewußt war. Er berechnet einfach unbekannte Stücke schrittweise aus bekannten. So ist auch z. B. die Gleichung (z) die von uns vorgenommene Zusammenfassung seiner Rechnungsschritte, nicht aber im modernen Sinne eine „Formel“ für eine Koordinatentransformation und noch weniger für den sphärischen Kosinussatz.

4. Wie wurden die Formeln Tābit's gefunden?

Nun kehren wir zum Teil Ia von Tābit's Werk zurück. Wie wurden Tābit's beweislos mitgeteilte Formeln gefunden? Herr Garbers nimmt (S. 3) an, daß Tābit „Sätze der sphärischen Trigonometrie“ verwendet, die „im wesentlichen“ auf die „indische Projektionsmethode“, „andererseits auf den Transversalensatz“, d. h. den sphärischen Satz des Menelaos zurückgehen. Herr Sengupta würde hier bestreiten, daß „the elegant Hindu method“ (S. 184) eine Projektionsmethode sei. Statt an „Sätze der sphärischen Trigonometrie“ zu denken, muß man aber doch auch damit rechnen, daß Tābit ausschließlich die direkte Methode selbst anwendet, die keine „Sätze der sphärischen Trigonometrie“ kennt, sondern nur den Sinusbegriff und Sätze der ebenen und räumlichen Geometrie. Herr G. rechnet dann (S. 4—5) mit der Möglichkeit, daß Tābit mit dem Sinussatz für beliebige Dreiecke und besonders oft mit seiner Sonderform $\sin a = \sin c \sin A$ für das bei C rechtwinklige Dreieck gearbeitet habe. Wir hätten hiernach entweder ein Gemisch von Sätzen auf Grund der Methoden, die ich oben als die erste und zweite bezeichnet habe, oder auf Grund der ersten und der dritten Methode, deren Sätze G. dann als aus solchen der zweiten folgert annimmt.

reichend gute Tabellen dieser Funktion zur Verfügung standen. Die rechnerische Verwendung der Tangensfunktion scheint sich einseitig auf die Tangentenregel beschränkt zu haben. Das fällt in al-Bīrnis Rechnungen im Taḥdīd und im M. Kanon auf, und noch at-Tūsī scheint nicht an die Verwendung der Tangensfunktion für die ebene Trigonometrie zu denken.

Aus den Gründen, auf die ich noch eingehen will, halte ich das Vorhandensein der dritten Methode, also des eigentlichen Sinussatzes, bei Tābit für sehr unwahrscheinlich. Ist nun eine wechselweise Anwendung der ersten, direkten und der zweiten Methode, nämlich derjenigen der fertigen Lehrsätze über Seitensinuse bei Tābit möglich? In späterer Zeit beobachten wir freilich in ein- und demselben Werk einen Wechsel dieser beiden Methoden. Al-Bīrūnī, bei dem wir sicher gehen, weil er in seiner Gründlichkeit zu allen Formeln die Beweise gibt, wechselt, wie wir noch sehen werden, dauernd mit diesen beiden Methoden. Darum braucht das jedoch in der frühen Zeit des Tābit nicht der Fall zu sein. Vor allem aber sind uns doch in diesen gnomonischen Aufgaben höchstwahrscheinlich mehr als irgendwo sonst älteste Konstruktions- und Berechnungsmethoden erhalten. Ptolemäus sowohl wie die Inder arbeiteten an diesen Aufgaben nach der direkten Methode. Wäre es nicht merkwürdig, wenn der Harrāner Tābit b. Qurra griechischer als der hellenistische Astronom Ptolemäus sein sollte, der alle sechs Bögen nach der direkten Methode berechnet? Daß Tābit über den Menelaosatz ein Buch³⁷⁾ geschrieben hat, beweist nicht, daß er diesen Satz in der Gnomonik benutzen mußte. Arbeitet doch auch Ptolemäus im *Almagest* mit der hohen Formel der griechischen sphärischen „Trigonometrie“, d. h. dem Satze des Menelaos, beim Analemma aber nach dem direkten Verfahren. Beachtlich ist, daß Tābit in jenem Buch über den Menelaosatz anscheinend³⁷⁾ fast ausschließlich die „Sehne des doppelten Bogens“ gebraucht, in der uns vorliegenden Schrift aber die Sinusfunktion. Auf jeden Fall muß man, ehe man bei Tābit für einen Teil der Formeln auf den Satz des Menelaos oder eine Folgerung daraus zurückgreift, zusehen, ob nicht auch er wie Ptolemäus alle Formeln nach der direkten Methode ableiten konnte.

Alle sieben Formeln Tābits für die sechs Bögen können ungezwungen aus der direkten Methode hervorgehen. Das soll jetzt unter Vergleich zwischen Tābit und Ptolemäus gezeigt werden.

Während Ptolemäus nur mit temporalen Stunden arbeitet, deutet Tābit an, wie man sowohl von gleichen wie von ungleichen Stunden ausgehen kann. Ich nehme an, daß Tābit für t und t_0 nach dem naturgemäßen direkten Verfahren im wesentlichen zu derselben Berechnungsvorschrift kommt, wie Ptolemäus und übrigens auch die Inder. Auch für y nehme ich dieselbe Ableitung an:

$$(\eta_2) \quad y = \sin \eta_2 = \frac{\sin t \cos \delta}{r} \quad (\text{Tābit } 21).$$

³⁷⁾ Die Angabe (vgl. Björnbo, Suter, Bürger und Kohl¹⁹⁾ S. 5, 12, 13 und Garbers S. 6) stützt sich auf die Übersetzung des Gerhard von Cremona und ist natürlich in den arabischen Handschriften nachzuprüfen.

z berechnet Tābit etwas anders als Ptolemäus und zwar auf zwei Arten (vgl. Garbers S. 42, S. 3—4): Fällt man in Fig. 5 den Sinus der Mittagshöhe $Hab = \sin h_m = \sin(90^\circ - \varphi + \delta)$, so ergibt sich die erste Art folgendermaßen:

$$z = q\xi = O\Pi = Hb - Ha = Hb - HO \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Nun ist

$$HO = \text{Sinvers } t = \text{Sinvers } t \frac{\cos \delta}{r},$$

also

$$(\eta_1) \quad z = \sin \eta_1 = \sin h_m - \text{Sinvers } t \frac{\cos \delta}{r} \frac{\cos \varphi}{r} \quad (\text{Tābit } 9).$$

Für die zweite Art ist (Figuren 3 und 5)

$$\xi q : \xi i = Hb : HM,$$

$$z = \xi q = \xi i \frac{Hb}{HM}.$$

Nun ist

$$HM = \text{Sinvers } t_0,$$

$$\xi i = OM = HM - HO = \text{Sinvers } t_0 - \text{Sinvers } t,$$

also

$$z = (\text{Sinvers } t_0 - \text{Sinvers } t) \frac{\sin h_m}{\text{Sinvers } t_0}.$$

Da die Pfeile zweier Bögen eines Kreises sich wie diejenigen zweier den ersten Bögen ähnlicher Bögen eines anderen Kreises verhalten, so folgt

$$(\eta_1)^* \quad z = \sin \eta_1 = (\text{Sinvers } t_0 - \text{Sinvers } t) \frac{\sin h_m}{\text{Sinvers } t_0} \quad (\text{Tābit } 10).$$

Fällt man in Fig. 5 auch das Lot von H auf $E\Gamma$, so findet man für $E\Pi = x$ zwei Ausdrücke, die sich von denen für z nur dadurch unterscheiden, daß die Funktionen der Breite φ und der Mittagshöhe h_m durch ihre Kofunktionen ersetzt werden. Tābit gibt nur die eine dieser beiden Formeln an:

$$(\eta_2) \quad x = \sin \eta_2 = \cos h_m - \text{Sinvers } t \frac{\cos \delta}{r} \frac{\sin \varphi}{r} \quad (\text{Tābit } 28).$$

Nachdem η_1, η_2, η_3 gefunden sind, lassen sich die Flächendiagonalen d_i , statt durch die lästigen Wurzelformeln (d_i), auch folgendermaßen berechnen:

$$(d_i)^* \quad E q = \cos \eta_1, \quad EO = \cos \eta_2, \quad E \varphi = \cos \eta_3,$$

denn diese Flächendiagonalen liegen als Katheten den Winkeln η_1, η_2, η_3 in rechtwinkligen Dreiecken an, deren Hypotenuse der Sinus totus r ist.

$CDHG$ den Schatten HC mit den Komponenten $HG = q_i$, $HD = s$. Denkt man sich nun den neuen Gnomon $HE = p_i$ im Verhältnis $\frac{s}{p_i}$ vergrößert, sodaß er gleich s wird, so wirft er einen Schatten l_k mit den Komponenten⁴⁰⁾

$$p_k = \left(\frac{s}{p_i}\right) \cdot q_i, \quad q_k = \left(\frac{s}{p_i}\right) \cdot s. \quad (\text{Tabit } 37, 38, 42, 46, 47).$$

Natürlich sind die Kanten s, p_i, q_i des Quaders EC denjenigen x, y, z des Quaders ξE proportional. Am einfachsten und direktesten sagt man also so: Wenn man irgend eine der 3 Koordinaten x, y, z als Gnomon betrachtet, so sind die beiden anderen die Schattenkomponenten. Aber die Bestimmung des Schattenpunktes durch die ebenen Polarkoordinaten scheint die ältere zu sein, sodaß aus diesen erst sekundär die kartesischen Komponenten abgeleitet wurden. Übrigens könnte bei Indern jene direktere Methode vorgelegen haben. Nach Sengupta²⁶⁾ (S. 179) wurde das Lot von der Sonne auf die Horizontebene, also unsere Koordinate z , als *śanku* = Gnomon bezeichnet.

Für die zum Horizont geneigten Uhrebenen K_1, K_s, K_i werden auch die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten p_i, q_i des Schattenendes eines dem Horizont parallelen und zur Horizontspur der Uhrebene senkrechten Gnomons ausgerechnet, und zwar auf mehrere Arten:

1. (65, -2 bis 70, 5). Die Aufgabe wird auf diejenige für den zur selben Uhrebene senkrechten Gnomon zurückgeführt.
2. (70, -4 bis 79). Die Koordinaten werden aus denjenigen in U_i berechnet. Dies geschieht auch für U_s . Die Lösung für U_i führt Tabit, wie auch Herr G. andeutet, auf diejenige für U_s oder U_1 zurück, indem er in der Horizontebene zu einem neuen rechtwinkligen Koordinatensystem übergeht, dessen eine Achse in die Horizontspur der Uhrebene fällt.
3. (80 bis 81). Die Koordinaten werden aus denen in derjenigen Uhrebene berechnet, auf der die neue Uhrebene senkrecht steht.

Herr G. hat die zugehörigen Formeln abgeleitet.

Wenn ich hier ausgeführt habe, wie nahe der erste Teil von Tabits Schrift über die Ruchāmen derjenigen des Ptolemäus über das Analemma steht, so soll das keineswegs heißen, daß ich darum eine unmittelbare oder mittelbare Abhängigkeit des Tabit von Ptolemäus annehme. Tabit war ein großer Kenner griechischer astronomischer und mathematischer Literatur, aber eine Erwähnung des Analemmas

⁴⁰⁾ Es wäre zweckmäßig gewesen, wenn Herr G. hier und auch sonst manchmal bei seinen Buchstabenformeln, wie er es stellenweise tut, die tatsächlichen Vorschriften Tabit's wiedergegeben hätte, z. B. $\left(\frac{s}{p_i}\right)s = p_3$.

von Ptolemäus ist mir weder in den Titeln seiner Werke, noch denen anderer arabischer Werke und Übersetzungen begegnet. Auf eine griechische Analemmaschrift dürfte ein Werkchen deuten, das Schoy übersetzte mit dem Titel: „Abhandlung über die Ziehung der Mittagslinie, dem Buche über das Analemma entnommen, samt dem Beweis dazu von Abū Sa'īd ad-Darīr“⁴¹⁾. Der genannte Verfasser hat in der Mitte des 9. Jahrhunderts gelebt⁴²⁾. Nach dem Inhalt seiner Schrift kann keine Entnahme aus der Schrift des Ptolemäus vorliegen, es müßte denn von dieser noch mehr als die Zahlentabellen am Schluß verloren gegangen sein.

Nichts von den Fachausdrücken des Ptolemäus für die 6 Bögen begegnet uns bei Tabit, nichts von der Betonung des Koordinatencharakters der Bögen, nichts auch von der graphischen und nomographischen Methode. Wenn die Schrift des Ptolemäus ihn trotzdem angeregt haben sollte, so kann seine eigene Abhandlung nur das Ergebnis einer reifen, eigenen Verarbeitung sein^{42a)}. Blicken wir andererseits nach der Möglichkeit indischer Anregungen, so ist bei der eigenartigen Form, der unvollkommenen Erschließung und der unsicheren Datierung der indischen Schriften nur von weiterer Quellenforschung durch sanskritkundige kritische Forscher Klarheit zu erwarten. Das dritte Kapitel des Sūrya-Siddhānta⁴³⁾ zeigt die verwandten indischen Methoden. Ich finde hier nur das, was die Horizontaluhr betrifft. Die schon erwähnte Benutzung der Sinusfunktion durch Tabit, mehr noch seine Verwendung der Sinusversusfunktion scheint mir auf indische Anregung hinzudeuten. Auch die von Tabit angewandte Festlegung der Schattenpunkte in ebenen kartesischen Koordinaten findet sich bei den Indern⁴⁴⁾, aber diese Koordinaten könnten ja auch in der griechischen Gnomonik vorhanden gewesen sein. Die indische Berechnung der Sonnenhöhe h aus t, φ, δ , wie sie v. Braunmühl (Vorlesungen I S. 41) nach dem Sūrya-Siddhānta kennzeichnete, steht der Lösung des Ptolemäus näher als der des Tabit, da sie von der Mittagshöhe keinen Gebrauch macht.

Wie die Fäden laufen, ist noch nicht zu entscheiden. Schließlich braucht ja auch, wie Sengupta betont, die indische Methode nicht notwendig aus griechischen Schriften von der Art des ptolemäischen Ana-

⁴¹⁾ Ann. d. Hydr. u. mar. Met. 50 (1922) S. 265—271.

⁴²⁾ Vgl. H. Suter, Die Mathematiker u. Astronomen d. Arab. usw., Leipzig 1900, S. 27.

^{42a)} Auch das Analemma des Diodorus oder der Kommentar des Pappus dazu, zwei uns nicht erhaltene Werke, könnten Tabit vorgelegen haben.

⁴³⁾ Kaye setzt „the later Sūrya-Siddhānta“ — und das ist der von Burgess und Whitney bearbeitete Text²⁸⁾ — auf etwa 1000 n. Chr. an. Vgl. Kaye, Ancient Hindu Spherical Astronomy, Journal of the Asiat. Soc. of Bengal, New Series, 15 (1919) S. 153.

⁴⁴⁾ Übersetzung des Sūrya-Siddhānta²⁸⁾, S. 240 und S. 253. — Vgl. Kaye⁴²⁾ S. 158.

lemmas hervorzugehen. Denn die geometrische Grundlage der gnomonischen Aufgabe ist so alt und mußte so notwendig immer auf dieselben Zusammenhänge führen, daß man es sehr wohl für möglich halten kann, daß beide, die hellenistische Methode des Ptolemäus und anderer Analemmaschriften und die indische Behandlung unabhängig voneinander aus einem Boden älterer gnomonischer Betätigung erwachsen.

Die Untersuchung unseres Gegenstandes warf ein Licht auf die Bedeutung der sphärischen Astronomie und insbesondere der Gnomonik für die Entstehung und Entwicklung des Koordinatengebrauchs und der analytischen Geometrie im Altertum und im Mittelalter. Polarkoordinatensysteme und rechtwinklige kartesische Koordinatensysteme der Ebene und für die Kugeloberfläche begegneten uns, die zur Bestimmung der mit t und δ veränderlichen Lage eines Punktes dienten und ineinander transformiert wurden. Das Netz der Stunden- und Deklinationenkurven auf der Sonnenuhr, gegeben in der Darstellung der Polarkoordinaten oder der kartesischen Koordinaten eines Kurven- oder Netzpunktes als Funktionen der Parameter t und δ wurde punktweise nach den Formeln dieser Parameterdarstellung in das Koordinatennetz gezeichnet. Bei nicht ebenen Sonnenuhren, ferner beim ebenen Astrolab, einem auf der stereographischen Projektion (Plani-sphärium) beruhenden Instrument zur Transformation sphärischer Koordinaten, das schon die Griechen hatten, und anderen nomographischen Instrumenten des Mittelalters wurden Kurvenscharen in noch andere Koordinatennetze als die polaren oder kartesischen eingezeichnet oder über sie gedeckt.

Während bei den Kegelschnitten und anderen in kartesischen Koordinaten algebraischen Kurven und den Spiralen die Gleichungen zwischen den Koordinaten im Vordergrund standen, führte die Gnomonik durch die punktweise Berechnung von Sonnenuhren in natürlicher Weise zur Parameterdarstellung von Kurven, Kurvenscharen und Netzen. Dabei traten trigonometrische Funktionen auf.

Bei all dem liegt die analytische Geometrie nicht als allgemeine, rein mathematische, abstrakte und für sich bestehende Theorie vor, sondern die Koordinaten und die sie verknüpfenden Formeln treten gebunden an die besonderen Anwendungen auf.

5. Zur Geschichte des sphärischen Sinussatzes.

Die bekannte Erfahrung in der Geschichte der Wissenschaft, daß Entdeckungen sehr oft älter sind, als sie herkömmlicherweise angenommen werden, oder daß sie wenigstens Vorläufer haben, hat dazu

geführt, daß man für die Auffindung des sphärischen (und ebenso auch des ebenen) Sinussatzes nach immer früheren Daten gesucht hat. Die Schwierigkeit besteht darin, daß manche arabische Mathematiker, wie al-Battānī und Tābit b. Qurra, die Lösungen gnomonischer oder sphärisch-astronomischer Aufgaben unbewiesen mitteilen, sodaß die Gefahr vorliegt, ihnen beim Versuch der Rekonstruktion der Beweise Vorstellungsweisen unterzuschieben, die uns geläufig sind, ihnen aber fern lagen. Man muß sich darüber klar sein, was es bedeutet, für Tābit oder al-Battānī den sphärischen Sinussatz zu beanspruchen oder solche Formeln wie den sogenannten „Fundamentalfall I, II usw. für das rechtwinklige sphärische Dreieck“. Es bedeutet, daß diese Männer bei ihren Berechnungen nicht mehr nach der Weise der Indier die Sinusse und Sinusversusse ihrer Deklinationen, Längen, Azimute usw. konstruiert und an stereometrischen Figuren berechnet hätten, und daß sie auch nicht mehr mit den Sätzen über Seitenfunktionen der griechischen Transversalenfiguren gearbeitet hätten. Sie müßten vielmehr mit sphärischen Dreiecken operiert und nicht nur von den Funktionen ihrer Seiten, sondern auch von den Sinussen ihrer Winkel gesprochen haben, was für die griechische wie die indische Vorstellungsweise etwas gänzlich Neues war. Ich möchte einiges zur Begründung dafür vorbringen, daß sich aller Wahrscheinlichkeit nach diese große Wandlung erst um das Jahr 1000 in den führenden Köpfen vollzog, in der breiten Praxis aber kaum durchsetzte. Die Forschung müßte schon ganz Überraschendes zutage fördern, wenn sie zeigen sollte, daß der Sinussatz bei Tābit vorhanden war und dann verloren ging.

Mir scheint, daß in dem Versuch der Vordatierung des Sinussatzes noch immer Reste von Delambre's Art stecken, das Alte mit moderner Brille anzuschauen. Hinsichtlich des Kosinussatzes ist man vorsichtig geworden, aber beim Sinussatz sollte man es ebenso sein.

Das wichtigste zeitgenössische Zeugnis zur Frage der Entdeckung des sphärischen Sinussatzes ist noch immer dasjenige von al-Bīrūnī, das uns at-Tūsī bewahrt hat. At-Tūsī nennt den Sinussatz für das beliebige sphärische Dreieck bekanntlich das „Ersatztheorem“. Der fünfte Abschnitt des fünften Buches seines aufschlußreichen trigonometrischen Werkes¹⁹⁾ beginnt so:

„Fünfter Abschnitt.

Über das Ersatztheorem und die Erklärung seiner Folgerungen und Arten.

Die Wurzel seiner Behauptungen ist: Die Verhältnisse der Sinusse der Seiten der Dreiecke, welche aus dem gegenseitigen Schneiden größter Kugellkreise auf der Kugelfläche entstehen, sind gleich den Verhältnissen der Sinusse der von ihnen unterspannten Winkel. Es

ist nun üblich, diese Behauptung zunächst für das rechtwinklige Dreieck zu beweisen. Bei der Aufstellung ihres Beweises schlug man (verschiedene) Wege ein, die der Meister Abu'r-Raiḥān al-Bīrūnī in einem von ihm verfaßten Buche sammelte, das er betitelte: „Die Schlüssel der Wissenschaft von den Gestalten dessen, was auf der Kugeloberfläche und anderen (Flächen) entsteht“⁴⁵⁾. Bei einem Teil von jenem⁴⁶⁾ Verfahren findet sich aber Unregelmäßigkeit. Deshalb ließ ich von ihnen das weg, was schwieriger zu beweisen war, damit das vorliegende Buch zusammenfassend sei bei Rücksicht auf die Bedingung der Knappheit. Ich beginne aber mit den Methoden des Fürsten Abū Naṣr 'Alī b. 'Irāq ('Arrāq?), denn das Ausschlaggebende (*al-ḡalīb*, das Siegende) nach der Meinung von Abu'r-Raiḥān (d. i. al-Bīrūnī) ist, daß er der Voranschreitende zum Sieg dadurch war, daß er diese Regel (*qānūn*, Kanon) an allen Stellen anwandte, obschon jeder der beiden Ausgezeichneten Abu'l-Wafā' Muḥammad b. Muḥammad al-Buḡḡānī und Abū Maḥmūd Ḥamid b. al-Ḥiḍr al-Ḥuḡandī ebenfalls die Priorität (das Voranschreiten) hinsichtlich dieser Regel beanspruchte ...“

Man erkennt hieraus, daß dieses fünfte Kapitel von al-Bīrūnī's Werk „Die Schlüssel ...“ enthält, von dem bisher meines Wissens keine Handschrift ans Licht gekommen ist⁴⁷⁾. Diese Schrift wäre von hohem Interesse für die Geschichte der Trigonometrie. Denn wir können uns keinen gründlicheren, weiterblickenden und literaturkundigeren Zeugen wünschen, als al-Bīrūnī, dessen historisches Interesse und dessen kritische Urteilsfähigkeit für einen Mann des Mittelalters erstaunlich ist. Wir dürfen annehmen, daß al-Bīrūnī in diesem Werk zu dem sphärischen Sinussatz, als dessen wahren Entdecker er seinen Lehrer Abū Naṣr betrachtet, alles ihm erreichbare Material ebenso sorgfältig und vollständig gesammelt hat, wie er es in seinem „Sehnenbuch“⁴⁸⁾ für die Archimedische Prämisse getan hat, und daß er es wahrscheinlich zugleich an der kritischen Sichtung des Stoffes und der Herausarbeitung und Weiterbildung des Wesentlichen nicht hat fehlen lassen. Was wahrscheinlich gefehlt hat, wird die Untersuchung der Bedeutung sein, die sein äl-

⁴⁵⁾ مقاليد علم هيئات ما يحدث في بسيط الكرة وغيره. Wie al-Bīrūnī in dem von ihm selbst angefertigten Verzeichnis seiner Werke (al-Bīrūnī, Chronologie ed. Sachau S. XXXX) angibt, hatte die Schrift 155 Blätter. An der angegebenen Stelle steht الهيئات statt الهيئات. Letzteres Wort fehlt bei al-Bīrūnī S. 125 ar.

⁴⁶⁾ Richtiger wohl: „jenen“.

⁴⁷⁾ Suter⁴⁸⁾ (S. 99) scheint für wahrscheinlich zu halten, daß dieses Werk in der Handschrift Paris 2497 enthalten ist. Nach den Bemerkungen bei de Slane (Man. arab. de la Bibl. Nat., p. 443) liegt aber ein „manuel d'astronomie“ vor.

⁴⁸⁾ Übersetzt und erläutert von Suter, Bibl. math., 3. Folge, 11 (1910) S. 11–78.

terer Zeitgenosse Ibn Yūnus für die Entdeckung und Anwendung dieses Satzes möglicherweise hat. Denn es scheint keine Verbindung zwischen den zeitgenössischen iranischen Astronomen und Ibn Yūnus, dieser Zierde des Fātimidenhofes bestanden zu haben⁴⁹⁾.

Jedenfalls aber würde sich vielleicht mehr noch als aus sonstigen Schriften al-Bīrūnī's ergeben, daß vieles von dem, was man an al-Bīrūnī's trigonometrischem Werk bewundert hat, schon al-Bīrūnī und seiner Zeit angehört.

Mit dem Ersatztheorem für das rechtwinklige Dreieck meint al-Bīrūnī den Satz

$$\sin a : \sin c = \sin A : \sin 90^\circ$$

für das bei C rechtwinklige sphärische Dreieck. Wir wollen diesen Satz kurz den speziellen Sinussatz nennen. Die von al-Bīrūnī offenbar nach al-Bīrūnī beigebrachten 8 Beweise des speziellen Sinussatzes sind 8 Beweise für die Regel der vier Größen. Nach dieser ist in der aus Großkreisen gebildeten Fig. 7

$$(\text{Reg } 4) \quad \sin AB : \sin AB' = \sin BC : \sin B'C',$$

wenn $\angle C = \angle C' = 90^\circ$ ist. Hierbei kommt es auch vor, daß die Winkel bei A Scheitelwinkel sind, oder daß C und B' einerseits und B und C' andererseits je auf demselben Großkreis durch A liegen. Für den Sonderfall, in welchem an die Stelle von AB' und AC' die Bögen $AB'' = AC'' = 90^\circ$ treten, geht die Regel bei der Einführung des neuen Begriffs vom Sinus eines Winkels in den speziellen Sinussatz

$$\sin BC : \sin AB = \sin A : \sin 90^\circ$$

über. Von den 8 Beweisen ist der letzte (Tūsī S. 154–155) die Deduktion aus dem sphärischen Satz des Menelaos. Die übrigen sind Beweise nach der direkten Methode. Der vierte⁵⁰⁾ (S. 148–149), ein Beweis von Abu'l-Wafā', ist eine Übertragung der Methode des Beweises des Menelaosatzes, wie wir ihn in der Sphärik des Menelaos und im Almagest finden, auf den Beweis der Regel der 4 Größen.

Von den übrigen 6 Beweisen wird der erste (S. 142–145) dem Abū Naṣr und dem Abu'l-Wafā' zugeschrieben⁵¹⁾, der zweite (S. 145

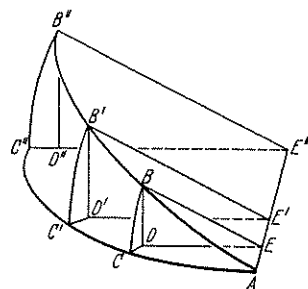
⁴⁹⁾ Überraschend ist aber, daß al-Bīrūnī in seinen Werken Aufgaben behandelt, die, wie φ aus $a_1, h_1; a_2, h_2$, wohl bei Ibn Yūnus, meines Wissens aber bisher nicht anderswo vor al-Bīrūnī gefunden wurden.

⁵⁰⁾ Denselben Beweis bringt al-Bīrūnī nach Bürger und Kohl⁵²⁾ (S. 88) in seinem Almagestkommentar. Bürger und Kohl sagen irrtümlich, er sei im Werk über den „Transversalsatz“ nicht enthalten.

⁵¹⁾ Es ist derselbe Beweis, den Bürger und Kohl (S. 82) in der Handschrift des Almagest von Abu'l-Wafā' sahen und den al-Bīrūnī auch an anderer Stelle für Abū Naṣr bezeugt. Vgl. Suter, Zur Trigonometrie der Araber, Bibl. math. 10 (1910), S. 158.

Quellen u. Studien Math. B, Bd. 4.

bis 146) und der dritte (S. 146—148) dem Abū Naṣr und der fünfte (S. 149—150) den Astronomen an-Nairīzī und Abū Ġa'far al-Ḥāzin. Als Urheber des sechsten (S. 151—152), von dem der Verfasser sagt, daß er sich kaum von dem fünften unterscheide, wird al-Ḥuḡandī angegeben⁵²). Als siebter und letzter Beweis nach der direkten Methode folgt ein Beweis von al-Bīrūnī (S. 152—154). Man sieht also, daß at-Tūsī's Auszug auch in der Reihenfolge offenbar mit seinem Urbild al-Bīrūnī übereinstimmt, denn auch im Sehnensbuch bringt al-Bīrūnī seine eigenen Beweise zuletzt.



Figur 7.

Diese sechs Beweise sind nun im Grunde alle Spielarten ein- und derselben Grundform⁵³), die sich folgendermaßen darstellen läßt. Man konstruiert (Fig. 7) die in der Behauptung (Reg 4) vorkommenden vier Sinusse $BE = \sin AB$, $B'E' = \sin AB'$, $BD = \sin BC$ und $B'D' = \sin B'C'$. Der Nachweis, daß sich nun $BE : B'E'$ wie $BD : B'D'$ verhält, wird meist mit Hilfe der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Neigungsdreiecke BDE und $B'D'E'$ geführt, wobei die Hilfslinien zum Beweise der Ähnlichkeit verschieden sein können. Im dritten Beweis (Abū Naṣr) werden statt dessen BD und $B'D'$ aufgefaßt als Sinusse ähnlicher, in Fig. 7 nicht gezeichneter Bögen von Parallelkreisen um E mit EB und um E' mit $E'B'$ als Halbmesser. Im zweiten Beweis fallen die Scheitelpunkte der rechten Winkel auf verschiedene Großkreise durch A , aber auch hier wird mit den ähnlichen Neigungsdreiecken gearbeitet, ein Fall, den nach Bürger und Kohl (S. 83) auch Abu'l-Wafā' vorsah. In den Beweisen von an-Nairīzī, al-Ḥāzin und al-Ḥuḡandī liegt der Sonderfall $AC' = AC'' = 90^\circ$, $AB' = AB'' = 90^\circ$ vor, ferner ist in diesen Beweisen und dem von al-Bīrūnī herrührenden siebten Beweise das Dreieck BDE in die Ebene des Dreiecks $B'D'E'$ hineinprojiziert. Die einfachste Form der Ableitung, die darin besteht, daß man auf das rechtwinklige Dreieck BDE den Sinussatz für die Ebene anwendet, findet sich nicht unter den uns bisher überlieferten Beweisen. Es erscheint hiernach gar nicht ausgemacht, daß der Sinussatz der Ebene vor dem auf der Kugel da war. Zugleich sieht man wieder, wie schwer sich noch

⁵²) In der Tat ist dies im wesentlichen derselbe Beweis, den Schoy (Isis VIII, 1926, S. 260—263) in einer Kairener Sammelhandschrift als „Originalbeweis des Ḥuḡandī“ fand.

⁵³) Dasselbe gilt für die beiden Beweise, die Bürger und Kohl (S. 68) bei Muḥyi ad-Dīn fanden.

zu der Zeit, als der sphärische Sinussatz bewiesen wurde, die Sinusvorstellung von den konkreten Bögen trennte.

Wir fragen nun nach der Entstehung dieser direkten Beweise der Regel der vier Größen. V. Braunmühl hat (I S. 47) den Keim der Regel der vier Größen in einem Hilfssatz gesehen, den Ṭābit b. Qurra aufstellte, um durch seine dreimalige Anwendung den sphärischen Satz des Menelaos zu beweisen⁵⁴). Dieser Hilfssatz ist die soeben an Fig. 7 bewiesene Proportion

$$\sin AB : \sin AB' = BD : B'D'.$$

Aber die Lote BD und $B'D'$ unserer Figur, die Ṭābit dann eliminiert, sind nicht als $\sin BC$ und $\sin B'C'$ gedeutet. Ja, die zugehörigen Bögen BC und $B'C'$ sind nicht gezogen! Deshalb bin ich im Gegensatz zu v. Braunmühl nicht der Meinung, daß hieraus die Regel der vier Größen „unmittelbar in die Augen springt“. Auch hat sich v. Braunmühls Vermutung, daß Ṭābit den Schritt zur Regel der vier Größen in seiner eigenen Schrift über den Transversalsatz sehr wahrscheinlich schon tat, nicht bestätigt, wie Björnbo's Veröffentlichung dieser Schrift⁵⁵) beweist.

Neben der Arbeit an abstrakteren Teilen der griechischen Sphärik werden die Fortschritte der arabischen Trigonometrie aus der Beschäftigung mit lebendigen und konkreten Einzelaufgaben der sphärischen Astronomie entspringen. Für die direkten Beweise der Regel der vier Größen ist dies bei einem Teil der Urheber aus dem Bericht von at-Tūsī ersichtlich. Von den beiden ältesten dieser Urheber, den einzigen, die vor dem Ausgang des 10. Jahrhunderts lebten, hat der eine, an-Nairīzī, seinen Beweis in seinem Almagestkommentar gebracht, al-Ḥāzin aber in einem Buche, dessen Titel die Übersetzung Caratheodorys nicht richtig wiedergibt. Dieser Titel heißt etwa: „Teiluntersuchungen über das Wesen der partiellen Deklinationen und die Rectascension“⁵⁶). Die „partiellen Deklinationen“ der Sonne sind beliebige Werte δ der Sonnendeklination zum Unterschied von der „totalen“ oder „größten Deklination“ ϵ , d. i. der Schiefe der Ekliptik. Dem Nairīzī wie dem Ḥāzin wird die Berechnung der partiellen Deklination δ aus der Länge λ und der größten Deklination ϵ Gelegenheit gegeben haben, die schon bei al-Battānī ausgesprochene Formel

$$(\text{Dekl}) \quad \sin \delta : \sin \lambda = \sin \epsilon : \sin 90^\circ$$

⁵⁴) At-Tūsī S. 150: *مطالب جزوية ميل الميول الجزوية والمطالع في الكرة المستقيمة*.

Möglicherweise ist das Wort *جزوية* oder es sind die beiden Wörter *جزوية* *ميل* zu streichen. Dann ist statt „Teiluntersuchungen“ zu sagen „Untersuchungen“ und statt „über das Wesen der partiellen Deklinationen“ einfach „über die partiellen Deklinationen“. — Zu *مَطَالَع* vgl. al-Battānī II S. 342—43.

nach der direkten Methode zu beweisen. Hierbei wird es sich aber wahrscheinlich nur um den direkten Beweis dieser speziellen Formel der sphärischen Astronomie handeln, nicht um eine allgemeine Proklamierung der Regel der vier Größen zum Ersatz des Satzes von Menelaos. Die Stelle „avant que ces deux savants aient entendu substituer la figure supplémentaire à celle du segment“⁵⁵⁾ enthält einen sehr irreführenden Übersetzungsfehler. Nicht „ces deux savants“, nämlich an-Nairīzī und al-Ḥāzin bezeichnet at-Ṭūsī oder sein Gewährsmann al-Bīrūnī in diesem Ausspruch als diejenigen, die das Ersatztheorem an die Stelle des Satzes von Menelaos gesetzt haben, sondern „jene Ausgezeichneten“, d. h. die an der Spitze des Abschnitts als Entdecker des Ersatztheorems genannten drei Männer Abū Naṣr, Abū'l-Wafā' und al-Ḥuḡandī. An-Nairīzī und al-Ḥāzin sind bloß Vorläufer. Auf ihre Arbeitsweise fällt bei Behandlung der Folgerungen aus dem Ersatztheorem ein Licht. Hier (Ṭūsī S. 159) hören wir bei der Folgerung (Fig. 7)

$$\cos BC : \cos AB = \sin 90^\circ : \cos AC,$$

daß jeder dieser beiden Gelehrten, als er zum *Almagest* ein Theorem (ṣakl) zur Bestimmung der Ascension kommentierte, ein Verfahren beibrachte, aus dem „dieser“, d. h. der dann von at-Ṭūsī ausgeführte „Beweis“ obiger Folgerung erhellt. Vermutlich handelte es sich um den Beweis der Beziehung $\cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta$ zwischen Länge, Rektaszension und Deklination. Jedenfalls scheint hier der allgemeine Satz noch an die Lösung der Einzelaufgabe gebunden zu sein. Man muß sich immer vor Augen halten, daß es ein schwerer Schritt war, aus der Einzellösung der sphärisch-astronomischen Aufgabe eine neue methodische Regel zum allgemeinen Gebrauch zu abstrahieren. Wie schon erwähnt, wendet an-Nairīzī in der Schrift über die Gebetsrichtung²²⁾ nicht die Regel der vier Größen, sondern den Satz des Menelaos an.

Gerade die Berechnung der Deklination nach der Formel (Dekl) mußte immer wieder einen Anreiz zum direkten Beweis der Regel der vier Größen bieten. Obwohl at-Ṭūsī doch abstrakte Dreieckssätze bringt, erinnert uns sein Sprachgebrauch noch an jene Beziehung des Theorems zur konkreten Deklinationsaufgabe. Denn die (Ṭūsī S. 144) mitgeteilten allgemein gebrauchten Fachwortpaare „Deklination“⁵⁶⁾ und „Breite“ bzw. „erste“ und „zweite Deklination“ weisen auf die Bezeichnung der Abstände von Himmelspunkten vom Himmelsäquator und von der Ekliptik hin. Das erste Paar von Fachwörtern wird im 2. Kapitel des 4. Buches des Mas'ūdischen Kanons noch in dieser kon-

⁵⁵⁾ At-Ṭūsī S. 150, ar. S. 115: قبل ان اقامه هؤلاء الفصلاء مقام الشكل القطاع

⁵⁶⁾ mail. Caratheodory übersetzt das Wort mit inclinaison.

kreten Bedeutung eingeführt. Das andere Paar gehört der Terminologie Abū'l-Wafā's an. Anscheinend findet es sich in dessen *Almagest* schon in dem erweiterten abstrakten Gebrauch, soweit dies aus Carra de Vaux's Auszug²³⁾ (S. 425—26) zu ersehen ist. Bei der „ersten Deklination“ ist hier aber, anscheinend als Beispiel, auf die Deklination eines Himmelspunktes vom Äquator hingewiesen.

Eben die Beziehung zwischen Ekliptikschiefe, Deklination und Länge kann auch einen gewissermaßen naturgegebenen und vorherbestimmten Anlaß geboten haben, Dreiecke zu betrachten und von der Vorstellung des Bogensinus zu der des Winkelsinus überzugehen. Die Schiefe der Ekliptik ist der einzige, für diese Rechnungen konstante Winkel der Ebenen fundamentaler Himmelskreise, der nicht gleich 90° ist. Bei den Himmelsgloben, den kugelförmigen Astrolabien und den Armillarsphären war sie als Winkel auf der Kugeloberfläche stofflich und sichtbar verwirklicht.

Wie neu aber der Übergang zu Dreieckslehrsätzen noch nach dem Jahre 1000 war, sieht man auch daran, daß al-Bīrūnī seinem Beweis des sphärischen Sinussatzes im Mas'ūdischen Kanon (Buch III, Kap. 9) noch die Überschrift gibt: „Über die sphärische Transversalenfigur“ (d. i. das vollständige Vierseit des Satzes von Menelaos) „und die für ihre Sinusse gültigen Verhältnisse“. Auch seine Figur geht nicht vom rechtwinkligen Dreieck, sondern von einem speziellen vollständigen Vierseit aus⁵⁷⁾.

Daß der Sinus eines Winkels in der Ebene um die Wende des 10. Jahrhunderts noch etwas Neues war, zeigt die Mitteilung al-Bīrūnīs über den Beweis des ebenen und sphärischen Sinussatzes durch seinen Lehrer Abū Naṣr⁵¹⁾. Hier hält der Schreiber noch folgende Erklärung für nötig: „Es ist in erster Linie notwendig, daß man wisse, daß unsere Worte 'Sinus eines beliebigen Winkels in einem geradlinigen Dreieck' bedeuten: den Sinus des Bogens, der über diesem Winkel beschrieben wird, wenn derselbe im Mittelpunkt des beschriebenen Bogens (gedacht) wird“ (Suters Übersetzung S. 159). Für den Sinus eines Winkels auf der Kugel hat der Verfasser keine Erklärung für nötig gehalten. Natürlich wird beim Beweis wie immer der

⁵⁷⁾ Der Vorwurf von Bürger und Kohl (S. 65 unten), al-Bīrūnī habe die Voraussetzungen seiner Figur unvollständig angegeben, ist nicht gerechtfertigt. Der die Figur einführende Satz ist sowohl bei Bürger und Kohl wie bei Schoy falsch übersetzt. Er heißt, mit den Buchstaben von Bürger und Kohl übersetzt: „Es sei die Transversalenfigur AC, PT aus Großkreisquadranten zusammengesetzt“ (فليكن قطاع AC, PT من اربع دوائر عظام مركبا Velieddin 95b). AC, PT ist eine abgekürzte Bezeichnung des vollständigen Vierseits. Der obige Satz will sagen, daß in der Figur 22 von Bürger und Kohl sämtliche vier Bögen AC, AD, PC, PB Quadranten sind, und hieraus folgen die von Bürger und Kohl vermiften Voraussetzungen.

Winkel auf der Kugel durch den entsprechenden Bogen des größten Kugelkreises ersetzt, zu dem der Scheitel des Winkels Pol ist. Auch hier hat man den Eindruck, daß der Sinussatz der Ebene nicht vor demjenigen der Kugel gefunden wurde. In der Darstellung Abū Naṣr's folgt der Beweis des Satzes für die Ebene demjenigen für die Kugel.

Wie wenig Aufmerksamkeit man aber dem Übergang vom Bogen-sinus zum Winkelsinus geschenkt hat, zeigt die Art, wie v. Braunmühl über die Ableitung des sphärischen Sinussatzes für das beliebige Dreieck berichtet. Sowohl Abū Naṣr wie Abū'l-Wafā' zerspalten das beliebige Dreieck durch eine sphärische Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke. V. Braunmühl (I S. 58—59) bestreitet dies für Abū'l-Wafā'. In Wirklichkeit sind die Beweise beider Astronomen mathematisch völlig übereinstimmend. Nur macht Abū Naṣr bei den Teildreiecken schon von dem neuen Sinusbegriff Gebrauch und wendet den speziellen Sinussatz auf die rechtwinkligen Teildreiecke an, während Abū'l-Wafā' es noch für nötig hält, die Bögen zu den Winkeln zu konstruieren, um auf jedes Teildreieck die Regel der vier Größen anzuwenden. Bei dem Beweis des ebenen Sinussatzes beobachtet man dieselben beiden Ableitungsarten. Die damaligen Mathematiker waren sich natürlich voll bewußt, daß der spezielle Sinussatz und die Regel der vier Größen ihrem mathematischen Inhalt nach identisch sind⁵⁸⁾.

In derselben Zeit, in der man beginnt, von Sinussen der Winkel zu sprechen, vollzieht sich bei der Sinusfunktion eine zweite Wandlung. Der Sinus totus, d. h. $\sin 90^\circ = r$, wird nicht mehr gleich 60, sondern gleich 1 gesetzt, wobei man seine Tabellenwerte weiterhin sexagesimal niederlegt. Für jemanden, der Zahlen rein sexagesimal schreibt und alle Rechnungen rein sexagesimal ausführt, wird diese Verrückung des Sexagesimalsemkolons praktisch bedeutungslos sein, da ja eben 60 die nächst höhere Sexagesimaleinheit ist. In trigonometrischen Rechnungen der Araber beobachten wir das unglückliche Mischsystem, in welchem die ganzen Zahlen dezimal, die Brüche sexagesimal ausgedrückt, und die Multiplikationen, Divisionen und Quadratwurzelausziehungen dezimal ausgeführt wurden. Wenn mit einem Sinus multipliziert oder durch ihn dividiert werden sollte, wurde er in eine Dezimalzahl, nämlich die Einheiten der niedrigsten Sexagesi-

⁵⁸⁾ In der Bemerkung, die in Abū Naṣr's Menelaosausgabe zu dem Satze III, 2 gemacht ist, meint der Verfasser dieser Stelle aber nicht, wie der Herausgeber M. Krause¹⁸⁾ sagt, mit „Ersatztheorem“ die Regel der vier Größen, sondern den wirklichen sphärischen Sinussatz. Wendet man diesen auf jedes der beiden Dreiecke AGB und DZE an, so folgt aus der gegebenen Proportion die Proportion $\sin A : \sin G = \sin D : \sin Z$, und da $\sin A = \sin D$ ist, so folgt $\sin G = \sin Z$, also $G = Z$ oder $G + Z = 180^\circ$. Daß mit der arabischen Regel der vier Größen diese Umkehrung von Menelaos III, 2 so leicht zu beweisen wäre, bezweifle ich.

malstelle verwandelt. Hatte die Rechnung einen Sinus ergeben, so wurde die zunächst als Dezimalzahl gefundene Anzahl der Einheiten der niedrigsten Sexagesimalstelle wieder in einen Sexagesimalbruch verwandelt⁵⁹⁾. Dieses unselige Hin und Her kann man in vielen ausgeführten Rechnungen von al-Bīrūnī's *Tahdīd* finden. Hierbei stellte man sich den Sinus totus 60 nicht als Einheit vor. Da geht nun al-Bīrūnī im Mas'ūdischen Kanon (wohl nach dem Vorbild von Abū'l-Wafā') zum Radius 1 über, „auf daß wir die mühselige Erwähnung der Multiplikation mit ihm (dem Sinus totus) und der Division durch ihn aus unseren Operationen herausfallen lassen, ebenso wie die Erschwerung der Sache dadurch, daß man ihn ganz in Minuten verwandelt oder ihn im Stellenwert senkt, wenn er 60 Teile beträgt.“ (Mas'ūd. Kan., III. Buch, 6. Kap.)⁶⁰⁾.

So tritt uns folgende bedeutsame Erscheinung entgegen: Al-Bīrūnī, der im *Tahdīd* (erschienen 1025) noch den Sinus totus 60 zugrunde legt und nur homogene Formeln bringt, wählt in dem später erschienenen Mas'ūdischen Kanon den Sinus totus 1 und setzt zwar die Ableitungen noch homogen in Proportionen an, bringt aber zum Schluß inhomogene explizite Endformeln als Rechenvorschriften, wie z. B. $\sin \delta = \sin \lambda \sin \epsilon$. Das erscheint mir als ein Wiederaufleben der alten babylonischen Inhomogenität und zugleich als ein Vorspiel zu der modernen Inhomogenität, bei der die trigonometrischen Funktionen Zahlen sind. Praktisch ist der moderne Zustand hier schon erreicht.

Man hat — dies gilt besonders für Bürger und Kohl — den Beweisen des Ersatztheorems in den Werken arabischer Astronomen nachgespürt. Mindestens ebenso wichtig ist es aber, zu untersuchen, bei welchen Gelegenheiten und in welchem Umfang sie den Sinussatz und die Sätze, die sich für das rechtwinklige Dreieck aus ihm folgern lassen, anwenden. Der *Tahdīd* von al-Bīrūnī bietet mit seinen verschiedenen vollständig bewiesenen und zum Teil an Beispielen durchgerechneten Einzelaufgaben der sphärischen Astronomie reichen Stoff zu der Frage, wie weit bei diesem begabten Schüler Abū Naṣr's dessen neue Dreiecksrechnung schon in die Praxis eingedrungen war. Da ist

⁵⁹⁾ Theon von Alexandrien schreibt in seinem Kommentar zum ersten Buch des *Almagest* ebenso wie Ptolemäus sexagesimal nur die Bruchteile der Einheiten, also das, was hinter dem Sexagesimalsemkolon folgt, führt aber Multiplikationen, Divisionen und Quadratwurzelausziehungen sexagesimal aus. Vgl. A. Rome, *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, tome II, *Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste* = Studi e Testi 72, Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana 1936.

⁶⁰⁾ لنسقط عن أعمالنا موزنة ذكر الصرب فيه والقسم عليه وتكلف الامر بتصميمه⁶⁰⁾
دقائق كله او حظه مرتبة اذا كان ستمين جزءا
Velieddin 84 r. Vgl. Schoy²³⁾ S. 34 unten.

es nun überraschend zu sehen, daß al-Bīrūnī fast nur entweder nach der direkten Methode oder nach der oben als IIb bezeichneten Methode arbeitet, nämlich mit der Regel der vier Größen. Man merkt zwar im letzteren Falle oft, daß er Dreiecke mit ihren Winkeln auf der Kugeloberfläche sieht und berechnet. Aber sein ständiges, kaum je mit einem Namen benanntes Requisit ist die Regel der vier Größen, deren Figur er jedesmal herstellt, indem er zu dem durch seinen Bogen zu ersetzenden Winkel den Kreis beschreibt, zu dem der Scheitelpunkt der Pol ist. Nur ganz vereinzelt (z. B. Taḥdīd S. 123) im Gang einer größeren Ableitung wendet er den Sinussatz ohne weiteres auf ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck an, auch hier, ohne den Satz zu nennen. Das direkte Verfahren benutzt er für Aufgaben, für die dieses sich besonders eignet, und bei denen ältere Vorbilder vorlagen, wie bei der Bestimmung der Ortsbreite φ aus Azimut und Höhe $a_1, h_1; a_2, h_2$ (S. 57—69) zweier demselben Parallelkreis angehöriger Punkte, oder z. B. bei der Bestimmung von δ aus h, a, φ (S. 119—120), die auf den Zusammenhang des sphärischen Kosinussatzes führt. Aufgaben, die wir mit rechtwinkligen sphärischen Dreiecken lösen, und bei denen auch er durch Anwendung des sphärischen Sinussatzes auf ein rechtwinkliges Dreieck zum Ziel hätte kommen können, löst er mit der Regel der vier Größen, z. B. die Bestimmung von δ oder φ aus $\sin \delta : \sin w = \cos \varphi : \sin 90^\circ$, wo w das Aufgangssazimut ist (S. 129—130). In anderen Fällen, so bei der Bestimmung der Breite φ aus δ und der Aszensionaldifferenz d (*ta'dil an-nahār*) gibt er sowohl die Lösung nach dem direkten Verfahren (S. 137—139) wie auch die nach der Regel der vier Größen (S. 131). Für diese sphärische Lösung gebraucht er im M. Kanon (Velieddin 121a), wo er die Aufgabe ebenfalls auf beide Arten löst, den Ausdruck „nach der sphärischen Figur“ (oder „nach dem sphärischen Theorem“, *bi's-šakl al-kurri*). Entweder, al-Bīrūnī hat mit Rücksicht auf seine rückständigen Leser noch nicht nach der neuen Art gearbeitet, oder aber — und das erscheint mir wahrscheinlicher — er konnte sich selbst nur schwer von der altgewohnten Methode der Bogenfunktionen freimachen. Im M. Kanon scheint sich der eigentliche Sinussatz etwas mehr durchgesetzt zu haben, doch bedarf dieses große Werk noch weiterer Durchforschung.

Ein eigenartiges Dokument zur Entdeckungsgeschichte des sphärischen Sinussatzes ist die Abhandlung von al-Ḥuḡandī „Über die Berichtigung der Deklination (d. h. der Schiefe der Ekliptik) und der Ortsbreite nach Erlangung der wahren Werte der Mittagshöhen bei den beiden Wendungen“⁶¹⁾.

⁶¹⁾ في تصحيح الميل وعرض البلد بعد حصول ارتفاعات نصف النهار المحققة عند الانقلابين. Der Text wurde herausgegeben von I. Cheikho in Al-Machriq 11

Mit seinem riesigen Meridianinstrument, dem Fahr-Sextanten (d. h. dem dem Būyidenherrscher Fahr ad-Daula gewidmeten Sextanten) hatte al-Ḥuḡandī an Mittagen dicht vor und nach der Sommer- und der Wintersonnenwende des Jahres 994 die Kulminationshöhen der Sonne über dem Horizont von ar-Raiy beobachtet. Die Aufgabe, hieraus die Schiefe der Ekliptik zu bestimmen, hatte er durch eine geschickte Interpolation, deren Feinheit leider in keinem Verhältnis zu einem groben und nur ungenau berichtigten Instrumentenfehler stand⁶²⁾, auf die Aufgabe zurückgeführt: Aus einer bekannten Deklination δ , und der bekannten zugehörigen Länge λ , die Schiefe ϵ der Ekliptik zu berechnen. Wenn al-Ḥuḡandī bei Niederschrift dieser Abhandlung, also Ende 994 oder etwas später, den sphärischen Sinussatz, für dessen Entdeckung er die Priorität beanspruchte, und den er (Tūsī S. 162) „den Kanon (die Regel) der Astronomie“ genannt hat, schon besaß, so hat er hier eine elementare Gelegenheit, ihn anzuwenden, versäumt. Er hat sich nicht einmal erinnert, daß in dem von ihm bei der erwähnten Interpolation benutzten und zitierten Tafelwerk von al-Battānī die Formel $\sin \delta : \sin \lambda = \sin \epsilon : \sin 90^\circ$ steht, freilich in der nach $\sin \delta$ aufgelösten Form. Die ungewohnte Art, in der sich seine Aufgabe darbot, scheint die Ursache zu sein, daß al-Ḥuḡandī nicht an jene Formel von al-Battānī anknüpft. Seine Figur und Rechnung lieferten nämlich zunächst $2\delta_1$; die Länge war vom Wendepunkt aus gemessen, und die Unbekannte war ϵ . Selbst das lineare Auflösen einer Formel nach einer anderen Variablen war diesen Astronomen noch nicht geläufig. Statt dessen lösten sie oft die Umkehrungsaufgabe neu an der Figur. Al-Ḥwārizmī's Algebra hatte eben noch nicht das Feld dieser astronomischen Formeln erobert.

Die direkte Lösung al-Ḥuḡandī's ist kennzeichnend dafür, wie dieser astronomische Praktiker und fähigste Astrolabbauer seiner Zeit, als den ihn auch al-Bīrūnī (Taḥdīd S. 99) rühmt, eine solche Sache anfaßt. Er konstruiert die Lösung, und setzt seine Konstruktion dann in Rechnung um, und zwar in einer Weise, die auf die oben erwähnten von al-Tūsī wiedergegebenen 6 Beweise an Fig. 7 für die Regel der vier Größen hinausläuft. Nur bringt es die Entstehungsweise der Aufgabe mit sich, daß der Beweis an einer Figur geführt wird, die man dadurch erhält, daß man in Fig. 7 B', C', D', E' , in die Sonderlage B'', C'', D'', E'' übergehen läßt, bei welcher $AB'' = AC'' = 90^\circ$ ist, und zu dieser Figur ihr Spiegelbild an der Ebene $E''AC''$ hinzufügt. AC'' ist eben ein Äquatorquadrant, AB'' ein Ekliptikquadrant

(1908) S. 60—69. — Übersetzung in: Schirmer, Oskar, Studien zur Astronomie der Araber, Sitzgsber. d. phys.-med. Soz. zu Erlangen, 58 u. 59, S. 33.

⁶²⁾ Von anderen Fehlerquellen, wie z. B. der Vernachlässigung der Refraktion, sehen wir hier ab.

im Augenblick der oberen Kulmination des Sommerwendepunktes und sein Spiegelbild der Ekliptikquadrant im Augenblick der oberen Kulmination des Winterwendepunktes. $C''B''$ ist der Meridianbogen ϵ . Ferner ist bemerkenswert, daß al-Ḥuǧandī den Bogen BC , also auch das sphärische Dreieck ABC gar nicht zeichnet, denn dieser geschickte Beobachter und Spezialist für Astrolabien denkt sich wie beim Kugelastrolab, wo ja auch für die Deklination BC eines beliebigen Ekliptikpunktes B nicht ein gezeichneter Großkreisbogen oder ein Drahtbogen vorhanden ist, den Punkt B auf dem Parallelkreis zu AC'' bis zum Meridian $B''C''$ herumgedreht, und entsprechend das Spiegelbild von B , sodaß dann die doppelte Deklination $2CB = 2\delta$, auf den Meridian fällt, ebenso wie die Mittagshöhen, aus denen sie gefunden wurde.

Nimmt man bei al-Ḥuǧandīs Figur die südliche, zum Äquator symmetrische Hälfte weg und ändert den Beweis auf die halbe Figur um, so gelangt man zu dem früher erwähnten Beweis, den al-Ḥuǧandī selbst für die Regel der vier Größen gegeben hat. Die natürlichste Annahme ist wohl, daß er selbst später darauf aufmerksam wurde oder gemacht wurde, daß seine Ableitung einen direkten Beweis der bekannten Regel $\sin \delta : \sin \lambda = \sin \epsilon : \sin 90^\circ$ enthält, und daß er dann von dieser Sache seinen direkten Beweis für die Regel der vier Größen abstrahierte, indem er zur halben Figur übergang und den Bogen BC zog. In der Figur des von Schoy⁵²⁾ mitgeteilten „Originalbeweises“ von al-Ḥuǧandī zum sphärischen Sinussatz, d. i. aber eben nur zum speziellen Sinussatz, ist bemerkenswerterweise noch wie in seiner Abhandlung⁶¹⁾ der in die Zeichenebene fallende Kreis voll ausgezeichnet, und in der Formulierung des Satzes braucht auch hier al-Ḥuǧandī das Wort *mail* (Deklination).

Auf jeden Fall zeigt auch diese Abhandlung von al-Ḥuǧandī, wie sehr ein Astronom um das Jahr 1000 eine spezielle sphärisch-astronomische Aufgabe noch nach der direkten Methode zu lösen gewohnt war, und wie wenig dieser Mitentdecker des sphärischen Sinussatzes bei einer solchen speziellen Aufgabe gewohnt war, sphärische Dreiecke zu sehen.

Al-Birūnī berichtet im *Tahdīd* (S. 93–99) über diese Abhandlung von al-Ḥuǧandī und gibt dessen Figur, die man als eine unter Zuhilfenahme von Bewegungen vollzogene räumliche Konstruktion des gesuchten Bogens bezeichnen kann, einfacher als Analysisfigur wieder. Dabei zeichnet er die Parallelkreisbögen, die den Punkt B und sein Spiegelbild zum Meridian führen, läßt aber wie al-Ḥuǧandī den Großkreisbogen BC weg. Den langatmigen Beweis von al-Ḥuǧandī faßt er knapper und klarer. Seltsam aber ist, daß auch al-Birūnī bei diesem Referat im *Tahdīd* nicht erkannt zu haben scheint, daß hier jene Beziehung $\sin \delta : \sin \lambda = \sin \epsilon : \sin 90^\circ$ vorliegt, von der er in dem-

selben *Tahdīd* (S. 151) sagt, daß sie in den Prinzipien der Astronomie bewiesen werde⁶³⁾.

Auch bei al-Birūnī möchte man annehmen, daß ihm später ein Licht aufgegangen ist, aber unabhängig von al-Ḥuǧandī. Denn im 9. Kapitel des 3. Buches des *M. Kanons*⁶⁴⁾ beweist er den speziellen Sinussatz an einer Figur, die im wesentlichen mit der aus zwei symmetrischen Hälften bestehenden Figur aus dem Traktat von al-Ḥuǧandī und aus al-Birūnīs Bericht über diese Sache im *Tahdīd* übereinstimmt. Nur ist hier auch die 3. Seite des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks gezeichnet. Die merkwürdige und unnötige Art, den speziellen Sinussatz an dieser aus 2 symmetrischen Hälften bestehenden Figur zu beweisen, kann ich mir nur durch die Herkunft aus dem Referat im *Tahdīd* erklären. So hätte denn sowohl al-Ḥuǧandī wie al-Birūnī aus der Lösung einer konkreten Einzelaufgabe den Beweis eines allgemeinen Satzes abstrahiert, wobei al-Birūnī die symmetrische Figurenhälfte beibehalten hätte, die al-Ḥuǧandī abwarf. In der Form liegt bei al-Birūnī noch eine Änderung vor: Wie in Abū Naṣr's drittem Beweis wird an Stelle der Ähnlichkeit der Dreiecke die für ähnliche Bögen geltende Proportion als Beweismittel verwandt⁶⁵⁾. Schließlich ist noch merkwürdig, daß in dem von at-Tūsī (S. 152–154) mitgeteilten Beweis al-Birūnī's zwar die spiegelbildliche Hälfte in Figur und Beweis wegfällt, der Parallelkreis (Fig. 7) durch B zum Äquator AC'' aber seine Auferstehung feiert.

Neben der direkten Ableitung der Regel der 4 Größen bestand natürlich auch immer die Möglichkeit, sie, wie at-Tūsī es zeigt, aus dem Satz des Menelaos zu deduzieren, wozu man bei Ptolemäus die

⁶³⁾ Die Ironie der Mathematikgeschichte hat es gewollt, daß auch der moderne Bearbeiter von al-Ḥuǧandīs Traktat den Kern der Ableitung, nämlich daß hier ein direkter Beweis der Formel $\sin \delta = \sin \lambda \sin \epsilon$ vorliegt, nicht erfaßt hat. Er erklärt sogar (Schirmer⁶¹⁾ S. 72 Anm. 32), das Verfahren des Ḥuǧandī sei ein Näherungsverfahren und wirft diesem vor, es sei ihm nicht gelungen, „einen einwandfreien geometrischen Beweis für sein Verfahren zu liefern, wie er es wohl ursprünglich beabsichtigt hatte“.

Die Erläuterungen Schirmers enthalten weitere wesentliche Mängel, z. B. ist der in Anm. 34 S. 73 gegen al-Ḥuǧandī zu Unrecht erhobene Vorwurf daraus entsprungen, daß der Erläuterer al-Ḥuǧandī's völlig einwandfreie, mit Bewegungen verbundene Konstruktion der gesuchten Ekliptikschiefe nicht verstanden hat. Al-Ḥuǧandī dreht (Figuren 11 und 12 von Schirmer) den Halbkreis $F\theta L$, dem das Lot ZT angehört, um $E\theta$, bis der Fußpunkt T dieses Lotes auf HN fällt. Die Erläuterungsfehler sind zum Teil durch Übersetzungsfehler verursacht und dadurch, daß der Übersetzer Textverderbnisse nicht richtig gewertet hat.

⁶⁴⁾ Vgl. Schoy²³⁾, S. 58 und Bürger und Kohl¹⁹⁾ S. 64–65.

⁶⁵⁾ Der zu diesem Zweck gezogene Parallelkreis ist bei Schoy in Figur und Text mit dem Großkreis durch dieselben beiden Punkte durcheinandergeworfen. Bürger und Kohl haben das richtig.

Praxis und in Menelaos III, 2 die Ausführung fand. Aber dieser Weg war nicht beliebt, denn man wollte einen Satz, dessen Ableitung die zusammengesetzten Verhältnisse entbehrlich machte. Auch haben die Araber anscheinend nie mit der in Menelaos III, 2 gegebenen allgemeinen Form der Regel der 4 Größen gearbeitet, bei der die Figur keine rechten Winkel zu haben braucht.

Die Einblicke, die wir nunmehr genommen haben, legen die Annahme nahe, daß die direkte Ableitung der Regel der 4 Größen und des mit ihr inhaltlich sich deckenden speziellen Sinussatzes größtenteils aus der direkten Lösung sphärisch-astronomischer Einzelaufgaben erwachsen ist⁶⁶⁾. Die sphärische Dreiecksrechnung, die, im strengen Sinne des Wortes genommen, von den Arabern geschaffen wurde, floß nicht in so einseitiger Deduktion aus dem Menelaosatz hervor, wie ich das bei Bürger und Kohl in der „Zusammenfassung“ dargestellt zu sehen glaube. Natürlich gab es über die aus der astronomischen Praxis hervorgehende und die direkte Methode befolgende Bildung der Sätze hinaus auch ein abstrakteres mathematisches Denken und ein Durchschauen der Zusammenhänge mit den theoretischen Sätzen des Menelaos und der Praxis des Ptolemäus. Dies wird besonders für die beiden Forscher gelten, von denen uns Beweise für den allgemeinen Sinussatz überliefert sind, Abū Naṣr und Abū'l-Wafā'. Es galt eben, aus den Bindungen an die Einzelaufgabe den abstrakten Satz herauszulösen und emporzuheben, um ihn dann auf alle entgegengesetzten Einzelfälle anwendbar zu machen. Diesen Gesichtspunkt erklärt al-Bīrūnī ja auch in den eingangs angeführten Worten für die Hauptsache.

Offen bleibt die Frage, ob der Zeitgenosse Abū Naṣr's und Abū'l-Wafā's, der fern in Kairo wirkende große Astronom Ibn Yūnus, bei der Aufstellung seiner unbewiesenen Formeln mit dem Sinussatz arbeitete. Für möglich muß man das nach den von Schoy übersetzten Texten, z. B. aus dem 20. Kapitel der Hākimitischen Tafeln⁶⁷⁾ halten. Während bei der 3. Methode der Azimutbestimmung (S. 101) die Formel $\sin a = \frac{\sin t \cos \delta}{\cos h}$, wie wir bei Tābit gesehen haben, zwanglos nach der direkten Methode erklärbar wäre, könnte z. B. bei der 5. Methode (S. 103) das Operieren mit einem Winkel auf der Kugeloberfläche, für den kein Bogen konstruiert ist, auf den Sinussatz hin-

⁶⁶⁾ In gewissem Sinne hätte sich also eine Entwicklung wiederholt, wie sie sich nach Björnbo's Vermutung²⁰⁾ erstmalig bei den Griechen vollzog. Die von Björnbo für die Griechen angenommene Ableitung seiner Gleichung 3 von Seite 132 entspricht der von uns an Fig. 7 betrachteten arabischen Ableitung der Regel der 4 Größen. Dieselbe Figur und Ableitung siehe bei Sengupta²⁰⁾ Seite 66 und Seite 175.

⁶⁷⁾ Ann. d. Hydr. u. mar. Met. 48 (1920).

deuten, mit dem Schoy („ad l“ S. 111) die Rechnung erklärt. Daß aber dem Ibn Yūnus „erwiesenermaßen“ (Garbers S. 10) der Sinussatz bekannt war, kann ich nach dem, was ich an Schriften hierüber gesehen habe, nicht anerkennen.

Von at-Tūsī erfahren wir, daß Abū Naṣr in seinem leider bisher nicht auf uns gelangten „königlichen“ (d. h. dem Schah gewidmeten) „Almagest“ nach Erwähnung von Tābit's Werk über den sphärischen Satz des Menelaos folgendermaßen fortfährt: „Er (Tābit) verfaßte auch eine Abhandlung über etwas, dessen Art ihn (den Satz des Menelaos) entbehrlich macht. Nur bräucht derjenige, der damit operiert, unbedingt das zusammengesetzte Verhältnis“⁶⁸⁾. Eine ungenaue Äußerung Suters⁶⁹⁾ über die Stelle hat Unheil angerichtet. Bürger und Kohl haben sie (S. 63) nicht richtig übersetzt.

Abū Naṣr hätte sich sehr merkwürdig ausgedrückt, wenn dieses Ersatztheorem des Tābit dasselbe sein sollte, wie sein eigenes, nämlich der Sinussatz, und wenn Tābit also schon eine eigentliche sphärische Dreiecksrechnung gehabt hätte. Es müßte dann auch diese Entdeckung Tābit's seiner eigenen und der Folgezeit vorangeeilt und fast in Vergessenheit geraten sein. Es liegt doch näher, daß es sich bei Tābit um ein Verfahren nach der direkten Methode oder um einen Satz über Seitensinuse handelt. Aus der Fassung von Abū Naṣr's Worten scheint hervorzugehen, daß jenes Ersatzverfahren Tābit's das zusammengesetzte Verhältnis nicht in der Formulierung des Satzes enthielt. Vielleicht ist es so gemeint, daß zum Beweis des Satzes das zusammengesetzte Verhältnis nötig war. Man könnte dann etwa an die aus dem Satz des Menelaos gefolgerte arabische oder griechische (Menelaos III, 2) Regel der vier Größen denken. Sollte die Proportion der oben besprochenen Formeln (T) für die Transformation der Uhrsysteme von Tābit zu einer allgemeinen, den Menelaosatz ersetzenden sphärischen Methode erhoben worden sein, so läge, wie wir sahen, ebenfalls der Sonderfall der arabischen Regel der vier Größen vor. Die von uns hierfür als wahrscheinlich angenommene Beweismethode ließe sich aber ohne zusammengesetzte Verhältnisse durchführen; sie läuft sogar auf dasselbe hinaus, wie die sonstigen von at-Tūsī mitgeteilten direkten Beweise der Regel der vier Größen. Dagegen kommt diese Regel wirklich in Frage, wenn Abū Naṣr meint, daß man bei einem Teil der Anwendungen des Theorems das zusammengesetzte Verhältnis unbedingt braucht.

⁶⁸⁾ at-Tūsī ar. S. 125: *وعمل أيضا رسالة فيما يعنى عنه جنسه (يعنى عن الشكل القطاع) الا انه لا بد لمن عمل بذلك من استعمال النسبة المولفة.*

⁶⁹⁾ Bibl. math., Neue Folge, 7 (1893) S. 7.

Bei den vorstehenden Ausführungen habe ich, abgesehen von einer Bemerkung⁵⁶⁾, die von M. Krause herausgegebene Sphärik des Menelaos in der (im Jahre 1008 beendeten) Verbesserung des Abū Naṣr¹⁶⁾ noch nicht berücksichtigt. In einer Anzahl von Zusätzen zum dritten Teil der Sphärik werden hier zu Lehrsätzen des Menelaos neue Beweise gegeben, und zwar auf „eine leichtere und schönere Weise“, nämlich mit Hilfe des sphärischen Sinussatzes, der als das Ersatztheorem bezeichnet wird. Hier sehen wir über die Sphärik des Menelaos, die eine Quelle der Anregungen war und in vielen Teilen ja auch in enger Beziehung zu Aufgaben der praktischen Astronomie stand, die neue sphärische Trigonometrie hereinbrechen. Man findet Stellen, in denen der neue Gedanke durchbricht, bequem heraus, indem man die Übersetzung nach den Stellen absucht, wo vom Sinus eines Winkels die Rede ist oder das Zeichen $\sin$ mit einem oder drei Buchstaben steht. Ich nehme an, daß diese Zusätze ein- und denselben Verfasser haben, und daß dieser Verfasser nur *Abū Naṣr* sein kann. Ist diese Annahme richtig, so haben wir hier eine Illustration zu al-Birūnī's Erklärung, daß sein Lehrer deshalb unter den zeitgenössischen Mitbewerbern der wahre Entdecker des Satzes sei, weil er ihn an allen Stellen anwandte.

Hier weise ich neben dem früher⁵⁸⁾ erwähnten Zusatz zu III, 2 nur auf zwei Stellen hin. Im Zusatz zu III, 15 steckt die Ableitung des allgemeinen Sinussatzes durch Ziehen der Höhe. Abū Naṣr könnte den allgemeinen Satz bei derartigen Aufgaben entdeckt haben. Im Zusatz zu III, 5 beweist der Schreiber die von Menelaos unbewiesen benutzte Gleichheit der Doppelsinusverhältnisse zweier perspektiver Punktwürfe auf der Kugel. (Statt der Doppelverhältnisse hat er natürlich wie Menelaos „zusammengesetzte Verhältnisse“, d. h. Produkte zweier Verhältnisse.) Er gibt zwei Beweise. Bei einem derselben führt er das zusammengesetzte Verhältnis (Doppelverhältnis) der Sinusse der Bögen auf der Punktreihe allein mit Hilfe des Sinussatzes auf das ihm gleiche zusammengesetzte Sinusteilverhältnis (Sinusdoppelverhältnis) der Winkel am Scheitel des Büschels zurück, wie man das heute noch macht.

Aus dem vom Herausgeber Krause in umfangreicher Arbeit beigebrachten Stoffe zur Textgeschichte nenne ich noch aus dem Kommentar at-Ṭūsī's zu III, 5 einen Beweis zum allgemeinen Sinussatz (Krause S. 64). Bei diesem auf uns wie ein Kuriosum wirkenden Beweis wird auf jede der durch die Höhe erzeugten Teilfiguren der Satz des Menelaos angewandt, entsprechend dem letzten der 8 Beweise Ṭūsī's für die Regel der vier Größen.

Eine zusammenfassende Untersuchung zur Geschichte des sphärischen Sinussatzes muß zur Zeit mangelhaft ausfallen. Die Schriften von Abū'l-Wafā' und Ibn Yūnus bedürfen weiterer Erforschung, und viele andere Texte können neue Aufschlüsse bringen. Es erschien mir aber nützlich, diese vorläufige Skizze von Gesichtspunkten zu den vorliegenden Fragen zu wagen.

6. Fachausdrücke, Text, Übersetzung.

Durch die sorgfältige Textausgabe, die genaue Übersetzung und richtige Erklärung hat Herr Garbers einen wichtigen mathematischen Text so einwandfrei erschlossen, wie wir es uns für manchen anderen der in den letzten 3 Jahrzehnten übersetzten arabischen mathematischen und astronomischen Texte wünschen möchten. Wenn ich stellenweise eine andere Meinung äußere, so geschieht es in dem vollen Bewußtsein, daß solche Bemerkungen für einen zweiten leicht sind, nachdem der erste die Hauptarbeit geleistet hat. Ich erlaube mir, zu Einzelheiten der Übersetzung andere Vorschläge zu machen, da ich glaube, daß liebevolle Kleinarbeit an der Sprache mathematischer Texte dazu beitragen kann, die mathematischen Vorstellungen und Begriffe des Verfassers und seiner Zeit zu klären.

Es ist zu begrüßen, daß Herr G. (S. 37—38) ein Verzeichnis von Fachausdrücken gibt. Auf diesem Gebiet ist noch viel zu tun. Nicht nur auf das Verständnis der Texte, sondern auch auf die Erkenntnis von historischen Zusammenhängen kann durch das genaue Studium der Fachausdrücke neues Licht fallen. Die Sache liegt nicht immer einfach, wie folgendes Beispiel zeigt:

Eine wichtige Rolle spielt das vom Gestirn aus konstruierte Neigungsdreieck der Ebene des Tageskreises zu derjenigen des Horizonts, also das Dreieck ξiq von Fig. 3. Al-Birūnī nennt dieses Dreieck 'das Dreieck der Zeit' oder auch 'das Dreieck der Höhe'. Die wagerechte Kathete iq dieses Dreiecks heißt

bei Indern nach Sengupta⁷⁰⁾ (S. 180) *śāṅkutala* = Gnomonsole,
bei al-Battānī⁷¹⁾ (III, S. 34, Z. 4) *watar iḥtilāf al-ufq* = Sehne⁷¹⁾ der
Horizontdifferenz,

bei Ibn Yūnus⁷²⁾ *iḥtilāf al-ufq* = Horizontdifferenz,
bei al-Birūnī (M. Kanon²³⁾, Velieddin 119 b) *'iyār* = Aichmaß, Ka-
liber,

„ „ („ „ „ 116 a) *ḍil'* = Seite,

⁷⁰⁾ Al-Battānī sive Albatēnī opus astronomicum ... ed. a Carolo Alphonso Nalino. Mailand III 1899, I 1903, II 1907.

⁷¹⁾ Al-Battānī bezeichnet wie die Inder den Sinus, d. h. die Halbsehne, als 'Sehne'.

⁷²⁾ Vgl. Schoy⁶⁷⁾, S. 98 u. S. 108.

bei Abu'l-Wafā' ⁷³⁾ ⁷⁴⁾ } *hiṣṣat as-samt* = Bruchteil, Anteil, des Azimuts.
 bei al-Marrākuṣī ⁷⁴⁾ }
 bei Ulūg Beg ⁷⁴⁾

Dagegen braucht al-Birūnī den letzteren Ausdruck *hiṣṣat as-samt* für die Koordinate $x = qw$ in Fig. 3, wie überhaupt das Wort *hiṣṣa* eine mannigfache Verwendung findet.

Sehr erwünscht wäre es gewesen, wenn Herr G. sein Fachwörterverzeichnis zu einem Stellenindex ausgestaltet hätte, der für die nicht allzuoft vorkommenden Ausdrücke alle Stellen nachweist, so wie das in dem wertvollen Glossarium der al-Battānī-Ausgabe von Nallino geschieht. So hätte man auch den Unterschied im Sprachgebrauch der verschiedenen Teilabhandlungen übersehen können (Ausdrücke für den Gnomon, den Ostwestkreis usw.). Auch wäre es willkommen gewesen, wenn man hierdurch den Gebrauch der Ausdrücke für Summe, Differenz, Produkt usw. statistisch hätte erfassen können.

Im einzelnen gebe ich nun zu dem Verzeichnis der Fachausdrücke einige Bemerkungen und Ergänzungen.

ma'il da'irat aš-šams ist wohl ein Schreibfehler des Herausgebers.

ma'il aš-šams (z. B. 11, 4) = Sonnendeklination.

ma'il daraġat aš-šams (z. B. 9, 4) = Deklination des Grades der Sonne, d. h. des Ekliptikpunktes, in dem sie sich befindet = Sonnendeklination.

gasama 'alā (z. B. 6, -3) = teilen durch ...

gasama bi (12, -3 zweimal) = teilen nach ... (nicht durch)

gasama ilā (14, -2) = teilen in ...

qisma (23, 4; 30, -4) besser Teilung als Einteilung.

'ūd für den schattenverfenden Stab (vgl. Garbers S. 11 und S. 77) findet sich bei al-Battānī ⁷⁵⁾ (12. Kapitel) und bei al-Birūnī, *Tafhīm* ⁷⁵⁾ S. 49. Während *miqyās* dem griechischen γῶμῶν sinnverwandt sein soll (vgl. Dozy ⁷⁶⁾ II S. 431), dürfte 'ūd der indischen Bezeichnung des Schattenstabes *śanku* = spitzer Pflock, Holzstab (vgl. Sūrya-Siddhānta ⁷⁸⁾ S. 239) entsprechen.

madār (5, -2; 6, 3; 9, 3; <10, 1>; 10, -1; 20, -2; 27, -3; 28, -2; 49, 4) ist bei den Astronomen der Kreis, den ein Punkt der Oberfläche einer rotierenden Kugel beschreibt (Techn. Terms ⁷⁷⁾ I, S. 478). Dem-

⁷³⁾ Vgl. Carra de Vaux ⁷⁸⁾, S. 429.

⁷⁴⁾ Vgl. Al-Battānī ed. Nallino ⁷⁹⁾ I S. 183.

⁷⁵⁾ The Book of Instruction in the Elements of the Art of Astrology by ... al-Birūnī (كتاب التفهيم لأوائل صناعة التنجيم). ... The Translation facing the Text by R. R. Wright. London 1934.

⁷⁶⁾ R. Dozy, Supplément aux dictionnaires arabes. 2. éd. 1927.

⁷⁷⁾ A Dictionary of the Technical Terms used in the Sciences of the Musalmāns. Bibliotheca Indica 17, I 1860, II 1862.

entsprechend ist *al-madār al-yaumī* (*Tafhīm* S. 56) der zum Himmelsäquator parallele Tageskreis des Gestirns. Das Wort *madār* wird allenthalben von den Astronomen für Parallelkreis auf der Sphäre, besonders Parallelkreis zum Äquator, gebraucht. Es nur mit 'Kreis' zu übersetzen, wie Schoy und Bürger und Kohl dies tun, ist nicht richtig. Von der Bedeutung Parallelkreis sind die Sonderfälle *madār as-saraṭān* der Wendekreis des Krebses und *madār al-ġady* der Wendekreis des Steinbocks auch in das Wörterbuch von Dozy ⁷⁸⁾ eingedrungen.

bu'd aš-šams min wasaṭ as-samā' bimadār al-falak wäre demnach 'die Entfernung der Sonne von der Himmelsmitte, (gemessen) an (bi) dem Parallelkreis der Sphäre'. Wenn man die Präposition *bi* mehr instrumental als räumlich nimmt (genauer gesagt: *li'l-muqābala* ⁷⁹⁾), heißt es: 'd. E. d. S. v. d. H., (gemessen oder ausgedrückt) durch den Drehweg (oder die Drehung) der Sphäre'. In diesem Falle könnte man unter *madār al-falak* statt eines vollen Parallelkreises den bei der betreffenden Drehung der Sphäre von dem Punkte des Parallelkreises oder dem entsprechenden Punkte des Äquators zurückgelegten Bogen verstehen, also dasselbe, was al-Battānī (III, S. 45, Z. 10) *mā dāra min al-falak* nennt, 'was', d. h. 'wieviel sich von der Sphäre drehte', oder 'um wieviel sich die Sphäre drehte'. (An der angegebenen Stelle rechnet al-Battānī den Betrag vom Sonnenaufgang an.) Den Gebrauch von *madār* für einen Bogen des Parallelkreises kann ich aber nicht belegen. Zu der Übersetzung 'durch die Drehung der Sphäre' kommt man indessen auch, wenn man *madār* als Verbalsubstantiv auffaßt (vgl. Lane ⁷⁹⁾ S. 932). Es ist ja auch nicht von dem *madār* eines Gestirns oder von einem *madār* der Sphäre, sondern von dem *madār* der Sphäre die Rede.

Der angedeutete Gebrauch von *bi li'l-muqābala* oder *li'ta'wīḍ* findet sich in mathematischen Texten häufig: *bu'd aš-šams ma'lām bimiqdār quṭr al-arḍ* 'the distance of the sun ... in terms of the earth radius' (*Tafhīm* S. 116). In unserem Text: *aġzā' at-ṭūl bi'aġzā' al-miqyās* 'die Teile der Länge, (gemessen, ausgedrückt) in den Teilen des Gnomons' (17, 2; vgl. auch 6, -2). In diesen Beispielen liegt die Sache nur insofern etwas anders, als die mit *bi* eingeführte Größe die Maßeinheit angibt, in der die zuerst genannte Größe gemessen wird. *madār* im Sinne der vollen Umdrehung bei Tābit als Maßeinheit des Drehwegs aufzufassen, wäre zu gesucht.

Wenn ich Herrn G. recht verstehe, meint er mit „*Angel der Kugel*“ so etwas wie die Rotationsachse der Sphäre. Daß aber bei Tābit *madār al-falak* eher eine Größe als ein Gebilde, wie die Achse, bedeuten muß, zeigt besonders die Stelle 49, 4: 'sodaß du hierdurch ermittelst, was an (min) Drehung (oder Drehweg) der Sphäre (d. h. welcher Be-

⁷⁸⁾ Vgl. Wright, Arabic Grammar, 3. ed. II, S. 164 A.

⁷⁹⁾ E. W. Lane, *Maddu-l-Ḳamoos*, an arabic-english Lexicon. London 1863—1893.

trag von Sphärendrehung oder welcher Betrag des Parallelkreises) zwischen jedem von dir gewünschten Zeitpunkte und dem Meridian-durchgang (der Sonne) im Orte dieser Leute vorhanden ist'. Auch 9, 3 steht *min*.

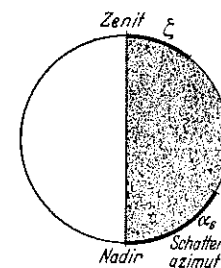
Obwohl nach Lane *madār* auch 'the axis of the firmament, or celestial orb' bedeuten soll, habe ich das Wort in astronomischen Texten als Bezeichnung der Achse der Sphäre nicht gefunden. Diese Achse nennt al-Birūnī *miḥwar* (*Taḥḥīm* S. 55), ebenso der arabische Glossist einer Handschrift des Bar-Hebraeus⁸⁰) und das *Dict. of Techn. Terms*, I, S. 297. Al-Battānī und al-Fargānī sprechen nur von den Polen, nicht von der Achse.

giha wird bekanntlich als Bezeichnung der 4 Haupthimmelsrichtungen Nord, Süd, Ost, West und der 6 Hauptseiten eines Körpers gebraucht: vor, hinter, rechts, links, über, unter. Mathematisch könnte man also etwa sagen: *giha* ist die Bezeichnung für jeden der 4 oder 6 Hauptstrahlen eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems von bevorzugter Lage in einem Körper, d. h. der 4 oder 6 mit einem Sinn versehenen Achsenrichtungen dieses Koordinatensystems. In unserem Text kommt das Wort wiederholt in der Bedeutung einer *Haupt-himmelsrichtung* vor (12, -1; 57, -2; 58, 2; 58, -4; 60, -4; 62, -2 usw.). Z. B. 60, -4: 'so nimm das Azimut von der Südrichtung aus'. 11, 3 und 78, 2 wird aber in derselben Bedeutung statt *giha* das Wort *nāḥiya* gebraucht.

In mathematischen Texten, und so auch in dem vorliegenden, dient das Wort *giha* überaus oft dazu, bei den ermüdenden Diskussionen der verschiedenen Fälle das zu kennzeichnen, was wir durch den Sinn der Richtung einer Koordinate zum Ausdruck bringen und durch ein Vorzeichen bezeichnen. Diesen Gebrauch beobachtet man besonders oft dann, wenn der Nullpunkt und die Größe der Koordinate schon bekannt sind. Beispiele: 73, 3: 'Die Seite, nach der sie (die Breitenkomponente) liegt, ist dieselbe, nach der die Teile (Einheiten) der Breite⁸¹) bei der ersten Ruchāme lagen'. — 11, 3: 'Willst du nun wissen, nach welcher Seite es liegt, d. h. nach welcher Seite das Azimut der Sonne liegt, so nimm zur Kenntnis: Liegt die Sonnendeklination nach der entgegengesetzten Seite, wie dein Ort, oder liegt sie nach derselben Seite wie dein Land und ist sie dabei größer als die Ortsbreite, so liegt das Azimut auf derselben Seite, wie die Deklination.' (Wir würden sagen: Hat $\delta - \varphi$ das Vorzeichen von δ , so hat das vom Ostpunkt aus gemessene α ($\leq 180^\circ$) dasselbe Vorzeichen). — 38, 2: 'und beide liegen auf (oder nach) derselben Seite'. — 21, -1 und 63, -4: *fī giha wāḥida* 'auf derselben Seite'. Die Übersetzung „hintereinander“ an der zweiten

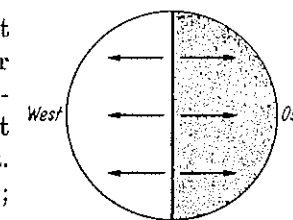
⁸⁰) Le livre de l'ascension de l'esprit, traduit par F. Nau, Paris 1899, II, S. 5.

dieser beiden Stellen ist sprachlich und sachlich nicht möglich. Tābit will sagen: wenn beide Bögen, nämlich das Schattenazimut α_s und die Zenitdistanz $\zeta = 90^\circ - \alpha_s$ des höchsten Punktes von K , auf derselben Seite der Linie Nadir-Zenit liegen (Fig. 8). Wenn Herr G. mit „hintereinander“ meint, daß die beiden Bögen aneinanderstoßen, so trifft das nicht zu, da Tābit ζ ausdrücklich vom Zenit aus und das Schattenazimut α_s notwendig vom Nadir aus mißt. In den Figuren 17–20 von Garbers ist α_s als Sonnenazimut gezeichnet.



Figur 8.

Ich halte es nicht für richtig, das bei diesen Diskussionen in ein- und demselben Sinne gebrauchte Wort *giha* mit den verschiedenen Wörtern 'Himmelsrichtung', 'Seite', 'Richtung' wiederzugeben, wie dies z. B. für die Manuskriptseite 11 geschehen ist. Das Wort 'Richtung' ist ganz zu vermeiden, da *giha* sich hier nicht mit unserem Begriff Richtung deckt⁸²). In Fig. 8 liegen die beiden Bögen auf derselben Seite, haben aber, modern gesprochen, verschiedenen Drehsinn. Als einzig mögliche Übersetzung erscheint mir 'Seite, auf (f) der', oder 'nach (ila) der etwas liegt'. Denn abgesehen davon, daß man 11, 4 an die beiden Seiten des Äquators auf der Sphäre denken kann, handelt es sich bei diesem Gebrauch stets um die beiden Halbebenen, in die eine Gerade eine Ebene, oder die beiden Halbkreise, in die ein Durchmesser, nämlich die Nulllinie, einen Kreis zerlegt (Fig. 9). Diese beiden Seiten liegen meist nach Haupthimmelsrichtungen, sodaß sich für den Schreiber meist *giha* = *Haupt-himmelsrichtung* mit *giha* = *Seite* deckt. Doch braucht dies nicht der Fall zu sein, wie 63, -4 zeigt. Auch an den oben angeführten Stellen (12, -1; 57, -2 usw.), wo wir *giha* die Bedeutung *Haupt-himmelsrichtung* geben, wird die *giha* stets in Korrespondenz mit der diametral gegenüberliegenden gebraucht.



Figur 9.

Daß man auch das für die beiden Seiten einer Ebene im Raum gebrauchte *wagh* mit 'Seite' übersetzen muß, stört nicht weiter, denn dies ist dieselbe Sache für die nächst höhere Dimension. 52, -2: 'so liegt er auf derselben Seite der (Uhrebene), nach der sie geneigt ist.' Ähnlich 55, 2.

⁸¹) Zur Übersetzung „Teile der Breite“ vgl. aber das weiter unten zu 17, -2 Gesagte.

⁸²) Freilich wird das Wort *giha* anderswo auch für die unendliche Menge der Raumrichtungen gebraucht, so *Tahḥīm* S. 82, wo gesagt wird, daß sich schwere Körper „von allen Seiten“ (*min jamā' al-ḡihāt*) auf den Erd- und Weltmittelpunkt zu bewegen.

Daß ein in demselben Sinne gebrauchter Terminus möglichst immer durch dasselbe Wort zu übersetzen ist, wurde schon bei *giha* gesagt. Wenn *miqyās* mit 'Maßstab' übersetzt wird (6, 5), so ist dieses Wort in Anführungszeichen zu setzen. Besser ist, immer 'Gnomon' zu sagen, und das Wort beim ersten Vorkommen zu erklären.

Herr G. gebraucht in der Übersetzung das Wort *ruhāma* und gibt ihm das sächliche Geschlecht und den arabischen Plural '*die ruhāmāt*'. In einer besonders auch für des Arabischen nicht kundige Leser bestimmten Übersetzung hätte ich statt dieser für das deutsche Ohr häßlichen Bildungen die Bezeichnung '*die Ruchāme*', Mehrzahl '*die Ruchāmen*' gewagt.