als ordnende Prinzipien der Erfahrung betont, und gegenüber dem Logizismus erklärt man sich für den synthetischen Charakter der Mathematik.

Der Konventionalismus wurde z. B. von H. Poincaré (24.—26.) und wird in der Gegenwart von H. Dingler (7.—8.) vertreten. Die Auffassung Poincarés über die Zahlen, die nicht ganz klar ausgesprochen ist, scheint allerdings mehr zum Intuitionismus zu neigen. Hier greift er besonders die Logiker an. Er wirft ihnen vor, daß sie bei der Handhabung ihrer logischen Symbole, mit denen sie doch den Zahlbegriff erst erklären wollen, schon eine Reihe von primitiven mathematischen Sätzen anwenden. Desto deutlicher äußert sich der Konventionalismus bei Poincaré in seiner Auffassung der Grundlagen der Geometrie. Hier führt er des Näheren aus, daß die Erfahrung nie zur Begründung oder Kontrolle von geometrischen Grundsätzen dienen kann, da ja die aus der Erfahrung durch die induktive Methode gezogenen Schlüsse ganz verschieden ausfallen, je nachdem welche geometrischen Prinzipien zugrunde gelegt werden, und daß prinzipiell eine Naturerklärung auf Grund einer beliebigen Geometrie möglich ist. Ähnliche Gedankengänge verfolgt Dingler, der sich besonders mit dem Begriff des starren Körpers in der Geometrie befaßt. Aus dem Verhalten des starren Körpers sollte man ja nach dem Empirismus erst die im Raume geltende Metrik ableiten können. Dingler sucht zu begründen, daß umgekehrt die Annahme einer bestimmten Geometrie uns erst die Möglichkeit einer Realisation des starren Körpers gibt. — Die Auswahl der zugrunde gelegten mathematischen Prinzipien erscheint bei den Konventionalisten in gewissem Grade willkürlich, jedoch soll bei der Auswahl dieser Prinzipien vor allen Dingen das Moment der Einfachheit berücksichtigt werden. Aus diesem Grunde verteidigt denn auch Dingler hartnäckig die Euklidische Geometrie als das einfachste System von Konventionen, das aufgestellt werden kann. — Die Schwierigkeiten des Konventionalismus liegen darin, die innere psychologische Nötigung zu erklären, die den mathematischen Sätzen nun einmal anzuhaften scheint.

Literaturverzeichnis.

(Dieses Verzeichnis erhebt auf Vollständigkeit keinen Anspruch; es sollen hier nur einige Schriften und Aufsätze genannt werden, die sich für eine weitere Vertiefung in den Gegenstand zunächst eignen.)

1. R. Baldus, Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik. Sammlung „Wissen und Wirken". Karlsruhe 1924.
2. P. Bernays, Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Mathematik. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 31. 1921.
3. ——, Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik. Hilbert-Festschrift der Naturwissenschaften. 1922.
4. L. E. I. Brouwer, Intuitionism and Formalism. Bulletin of the Amer. Math., Soc. XX. 1913.
5. ——, Intuitionistische Mengenlehre. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 28. 1919.
6. R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? 3. Aufl. Braunschweig 1911.
7. H. Dingler, Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Leipzig 1911.
8. ——, Relativitätstheorie und Ökonomieprinzip. Leipzig 1922.
9. A. Einstein, Geometrie und Erfahrung. Berlin 1921.
10. A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre. 2. Aufl. Berlin 1923.
11. G. Frege, Die Grundlagen der Arithmetik. Breslau 1884.
12. ——, Die Grundgesetze der Arithmetik. (Einleitung.) Jena 1893.
13. J. F. Fries, Die mathematische Naturphilosophie. Heidelberg 1822.
14. H. v. Helmholz, Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Ges. Wiss. Abhandl., Bd. II. Leipzig 1883.
15. G. Hessenberg, Vom Sinn der Zahlen. Leipzig 1922.
16. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. 5. Aufl. Leipzig 1922.
17. ——, Neubegründung der Mathematik. Abhandl aus d. math. Seminar d. Hamb. Universität 1922.
18. ——, Die logischen Grundlagen der Mathematik. Math. Ann., Bd. 88. 1922.
19. ——, Über das Unendliche. Math. Ann., Bd. 95. 1925.
20. L. Nelson, Bemerkungen über die nichteuklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit. Abhandl. d. Friesschen Schule. Neue Folge. 1. Bd., 3. Heft. 1906.
21. ——, Des fondements de la géométrie. (Abgedruckt in „Die Reformation der Philosophie".) Leipzig 1918.
22. M. Pasch, Die Begriffswelt des Mathematikers in der Vorhalle der Geometrie. Leipzig 1922.
23. ——, Der Ursprung des Zahlbegriffs. Teil I, Archiv d. Math. u. Phys. 1919. Teil II, Math. Zeitschr. Bd. 11. 1921.
24. H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese. 2. Aufl. Leipzig 1906.
25. ——, Der Wert der Wissenschaft. 2. Aufl. Leipzig 1910.
26. ——, Wissenschaft und Methode. Leipzig 1914.
27. B. Russell, Einführung in die mathematische Philosophie. München 1923.
28. A. Voß, Über das Wesen der Mathematik. 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1913.
29. ——, Über die mathematische Erkenntnis. Kultur der Gegenwart. III. Teil. Abt. 1. 3. Lieferung. Leipzig 1914.
30. H. Weyl, Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. Math. Zeitschr. Bd. 20. 1924.
31. ——, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. Math. Zeitschr. Bd. 10. 1921.

Zur Geschichte der Nomographie.[1])

Von P. Luckey in Marburg a. L.

Mit 3 Figuren im Text.

Die Verwendung nomographischer Konstruktionsmittel reicht bis ins Altertum hinauf. Die von den Griechen in mannigfaltigen Formen ausgebildeten Sonnenuhren bestehen wie Nomogramme aus Scharen von bezifferten Kurven oder von bezifferten Punkten (also Leitern) und unterscheiden sich von den eigentlichen graphischen Rechentafeln nur dadurch, daß sie in eine bestimmte Lage zu Erde und Sonne gebracht werden müssen und daß als Ablesegerät oder „Weiser" der Schattenstrahl des Gnomons dient.

Die Griechen hatten aber auch schon eigentliche graphische Rechentafeln. Eine solche war das *„Analemma"* in der von Ptolomäus (um 150 n. Chr.) beschriebenen Form. Man stelle sich in kleinem Maßstabe auf der Ebene des Horizonts stehend die hohle Halbkugel des Taghimmels vor, mit Meridian, erstem Vertikal und den Parallelkreisbögen, die die Sonne an einzelnen Tagen des Jahres nach antiker Vorstellung durchläuft und denke sich an diesen Sonnenbahnen Teilstriche in den einzelnen Stundenpunkten angebracht und mit den

1) Dieser Aufsatz sollte ursprünglich das Schlußkapitel zu des Verfassers kürzlich erschienener „Nomographie, Prakt. Anleitung zum bewerten graph. Rechentafeln" (Math.-phys. Bibl. 59/60) bilden, die als selbständiges Doppelbändchen von erheblich erweitertem Inhalt an die Stelle der „Einführung in die Nomographie, II" getreten ist, mußte aber, um den Umfang nicht zu überschreiten, weggelassen werden.

Z. math. nat. Unterricht 58 (1927)

Stundenzahlen beziffert. Diese Kreise samt ihren bezifferten Teilstrichen projiziere man nun durch parallele Strahlen senkrecht auf die Ebene des Meridians und klappe außerdem noch dieselben geteilten und bezifferten Kreise in diese Ebene um. Dann hat hat man die wesentlichen Teile dieser ptolemäischen Rechentafel, die also aus geraden und krummen, gleichförmigen und ungleichförmigen „Funktionsleitern" besteht. Unter diesen ist die Projektion der Sonnenbahn für die Tag- und Nachtgleichen eine echte Sinusleiter, was um so bemerkenswerter ist, als die Griechen statt des Sinus die Sehne als Funktion des Bogens benutzten. Die Rechnungen führte Ptolemäus durch Einstellungen eines platten, unbezifferten rechten Winkels und durch Abgreifungen mit einem Zirkel aus. War die Rechentafel einmal hergestellt, so wurde also, was Ptolemäus selbst hervorhebt, nichts mehr gezeichnet; es wurden nur noch Einstellungen mit den beiden Ablesegeräten vorgenommen. Bei den mit dem Analemma zu lösenden Aufgaben handelt es sich z. B. um die Bestimmung von Zenitdistanz und Azimut der Sonne in einer gegebenen Stunde eines gegebenen Tages für eine gegebene geographische Breite.[1]) In moderner Behandlung ist das die Berechnung eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks und führt auf Gleichungen mit vier Veränderlichen, wie den sphärischen Kosinussatz, für den ich in dem S. 455 genannten Büchlein eine nomographische Lösung gegeben habe.[2])

Ein anderes Nomogramm des Altertums ist *das ebene Astrolabium.* Es ist wohl zu unterscheiden von der auch als Astrolabium bezeichneten Armillarsphäre zur Bestimmung von Längen und Breiten der Gestirne, die Ptolemäus in seinem großen astronomischen Handbuch beschreibt. Das ebene Astrolab ist wie das Analemma eine Projektion von Himmelskreisen auf eine Ebene, doch ist es eine Zentralprojektion, und zwar die stereographische, deren Eigenschaften wir in der Schrift „Planisphärium" von Ptolemäus[3]) entwickelt finden. Von ihrem Südpol aus wird die Himmelskugel auf die Ebene projiziert, die sie im Nordpol berührt, und zwar stellt man zwei solcher Projektionsbilder her.

Auf dem *ersten* werden dargestellt: 1. der Himmelsäquator und die Wendekreise, 2. der Horizont und die ihm parallelen immer kleiner werdenden Kreise bis hinauf zum Zenit, die von 0^0 bis 90^0 bezifferten „Höhenkreise", 3. unter dem Horizont die Stundenlinien der Nacht, in antiker Weise jeden Sonnenlauf vom Untergang bis zum Aufgang in zwölf gleiche Teile teilend und von 1 bis 12 beziffert.

Das *andere* Projektionsbild enthält die Sonnenbahn (Ekliptik) mit ihren zwölf Tierkreiszeichen von je 30 Grad und eine Auswahl der bekanntesten Fixsterne.

1) Die bis in die Gegenwart immer wieder auftretenden Lösungen sphärischer Aufgaben durch Zeichnung gehen oft, ohne daß es den Autoren selbst bekannt ist, auf das Analemma zurück, so z. B. die dem „Sonnenstandsmesser" von H. Willig (Weinheim 1905, Fr. Ackermann) zugrunde liegende Konstruktion. Diese hat der Verfasser übrigens auch zu einem, allerdings umständlichen, nomographischen Verfahren weitergebildet, das zu einem Vergleich mit dem ptolemäischen anreizt. — Auch bei H. Stohler (diese Zeitschr., 58, 1927, S. 162—163), der den Zusammenhang mit dem Analemma scheinbar ablehnt, liegt die analemmatische Lösung des sphärischen Kosinussatzes durch Projektion und Umklappung vor.

2) Ausführlich habe ich das Analemma des Ptolemäus behandelt in den Astronomischen Nachrichten, Band 230, Nr. 5498, Sp. 17—46, Kiel 1927.

3) Das Planisphärium des Claudius Ptolemäus. Deutsche Übersetzung von J. Drecker. Isis IX, S. 255—278. Juni 1927.

Dadurch nun, daß wir das zweite Projektionsbild konzentrisch und um den Pol drehbar auf das erste legen, entsteht ein „Nomogramm mit beweglichen bezifferten Systemen". Das Instrument erinnert lebhaft an unsere drehbaren Sternkarten. Während sich aber bei diesen das den Sternhimmel darstellende Blatt *unter* dem Rahmensystem mit der Horizontöffnung dreht, ist beim Astrolabium die Reihenfolge umgekehrt. In der vereinfachten, ohne die Bezifferungen und Sternnamen wiedergegebenen Abbildung eines arabischen Astrolabs (Fig. 1a) erkennt man die *untere* Platte mit der Darstellung des Horizontsystems. Der größte der einander umgebenden bezifferten Höhenkreise ist der Horizont. Unten, auf der Nachtseite, sieht man die Stundenlinien. Der kleinere der beiden konzentrischen Kreise ist der nördliche Wendekreis, der größere der Äquator. Da für andere Polhöhen (Klimata) die Projektion dieses Horizontsystems anders ausfällt, liegt die Platte auswechselbar in einer flachen runden Metallkapsel.

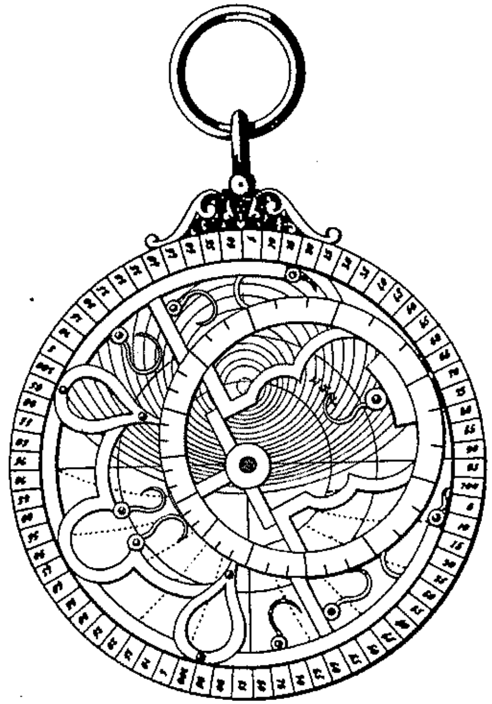

Fig. 1a. Ebenes Astrolab. Vorderseite.

Darüber ist nun drehbar als Darstellung des Fixsternhimmels mit der Sonnenbahn (Ekliptik) die *„Spinne"* angebracht, eine vielfach durchbrochene Deckplatte. Die Spitzen der krummen Haken bezeichnen bestimmte Fixsterne.

Dreht man die Spinne im Uhrzeigersinne, so spiegelt das Gerät die tägliche Drehung des Fixsternhimmels relativ zum System des Horizonts wieder — die äußere Gradeinteilung kann zur Messung der Äquinoktialzeiten dienen —, und da man, im Gegensatz zu unseren unvollkommeneren drehbaren Sternkarten, die Sonne oder ein anderes Gestirn auch auf eine beliebige, in Graden angegebene *Höhe* über dem Horizont einstellen konnte, indem man es über den mit der betreffenden Gradzahl bezifferten Höhenkreis brachte, so ließen sich mit dem Instrument zahlreiche fundamentale Aufgaben der praktischen Himmelskunde zahlenmäßig lösen. In erster Linie stand die Aufgabe der Zeitbestimmung aus der Höhe des Gestirns, die vorher auf einem Teilkreis der Rückseite des Geräts (Fig. 1b) mit Hilfe eines diametralen, drehbaren Lochvisiers beobachtet wurde. (Daher auch der Ring, mit dem das Astrolab zum Zwecke der Beobachtung in einer mit der Hand zu haltenden Schnur hing.) Den Fixstern, dessen Höhe man nachts mit dieser Visiervorrichtung gemessen hatte, suchte man auf der „Spinne" auf und stellte ihn auf den betreffenden Höhenkreis, entweder über dem Aufgangshorizont (links) oder über dem Untergangshorizont (rechts) ein. Nun wußte man aus einem auf der Rückseite befindlichen graphischen Kalender, in welchem Zeichen die Sonne an dem betreffenden Tage stand und in welchem Grad dieses Zeichens. Die Stundenlinie, über der dieser Punkt der Ekliptik stand, gab dann die Nachtstunde an, wobei selbstverständlich meist eine einfache Einschätzung der Bruchteile stattzufinden hatte. Ebenso leicht konnte man aber auch am Tage die Uhrzeit aus der Höhe der Sonne bestimmen, ferner z. B. die Länge eines beliebigen Lichttages.[1])

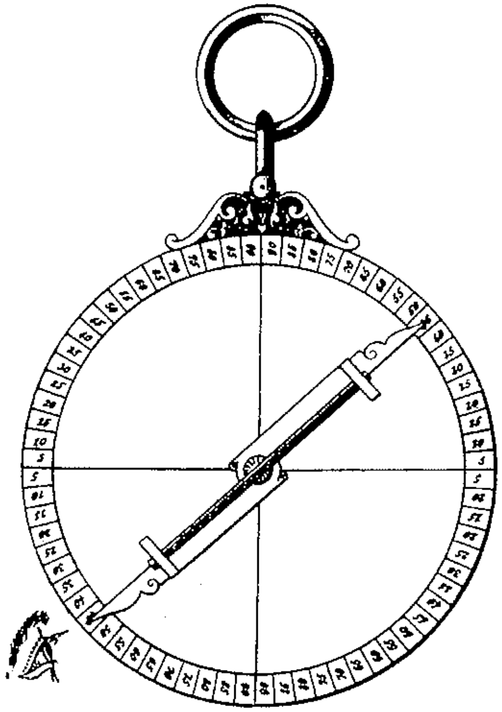

Fig. 1b. Ebenes Astrolab. Rückseite.

Schon die Griechen hatten das ebene Astrolabium mit allen seinen wesentlichen Teilen ausgebildet. Das erfahren wir aus der von dem Philosophen und Theologen Johannes Alexandrinus, genannt Philoponus um 550 n. Chr., abgefaßten kleinen Schrift über Gebrauch und Konstruktion des Astrolabs.[2]) Man erkennt beim Lesen dieses Werkchens, das nächst dem „Analemma“ von Ptolemäus wohl das älteste Denkmal praktisch-nomographischer Literatur ist, sich aber auf die Arbeiten einer weit älteren, schöpferischen Zeit gründet, daß das Astrolabium ein in verschiedenen Ausführungsformen verbreitetes, technisch gut durchgebildetes Instrument gewesen sein muß. Der Verfasser handelt u. a. von der Bezifferung der Gradleiter und

1) Das noch vor wenigen Jahrhunderten verbreitete ebene Astrolabium ist heute fast in völlige Vergessenheit versunken. Und doch verdiente es, auch jetzt noch in den Händen der Liebhaber der Himmelskunde und der lernenden Jugend eine Rolle zu spielen, die über diejenige der drehbaren Sternkarte weit hinausgeht. Die moderne Industrie könnte das Gerät einschließlich der Visiervorrichtung hinreichend genau viel billiger herstellen, als dies früher möglich war, und es ist wohl auf Absatz zu rechnen, wenn sich die Führer der Astronomiefreunde der Sache annehmen. Bei Herstellung aus Pappe könnte das eine System auf Zellhorn oder durchsichtigem Papier gedruckt werden. Natürlich müßten, um genauere Arbeit zu ermöglichen, wie früher mehrere auswechselbare „Klimata“ (Horizontplatten) beigegeben werden. Die antiken krummen Stundenlinien wären durch moderne radiale, die Zeichen und Grade des Tierkreises durch Monate und Tage zu ersetzen. Ferner wäre für eine Umrechnungsmöglichkeit der wahren Sonnenzeit in mitteleuropäische Zeit zu sorgen und endlich — für einen werbenden Namen, etwa „Sternenuhr“.

2) Den Text dieser Schrift gab H. Hase im Rheinischen Museum, 6, 1839, S. 127—171 heraus.

der Höhenkreise, er spricht von verschiedenen Teilstrichlängen, und wir erfahren, daß bei den genauesten Instrumenten die Teilstriche und Kreise von Grad zu Grad, bei anderen von 2 zu 2 oder von 3 zu 3 Grad eingetragen waren.

Die Araber, denen vielfach die erste Ausbildung des ebenen Astrolabiums fälschlich zugeschrieben wird, haben eine außerordentliche Betriebsamkeit in der Herstellung und weiteren Ausgestaltung dieser Geräte entfaltet, die dem frommen Moslem zur Bestimmung der Gebetsstunden dienten. Auch gelangten verwandte Geräte, wie die Universalscheibe, die zarqalische Scheibe und ferner die Quadranten zur Ausbildung, alles Instrumente, die ebenso wie die Sonnenuhren mehr und mehr zu einer allgemeinen Nomographie des sphärischen Dreiecks überleiten mußten. Diese Betätigung ging auf das Abendland über und fand im 16. und 17. Jahrhundert ihren Niederschlag in einer Masse von Schriften über Herstellung und Gebrauch des Astrolabiums.[1]) Auch im Entwurf der mannigfaltigsten Sonnenuhren und anderer Instrumente der angewandten Astronomie von ausgesprochen nomographischem Charakter[2]) traten die Mathematiker der Renaissance frischen Geistes das Erbe der Griechen und Araber an und bildeten die nomographische Kunst der bezifferten Netze und Leitern weiter aus. Noch heute kann man die graphischen Tafeln jener Gnomoniker mit ihren als Ablesegeräte dienenden Seidenfäden, oft mit verschiebbaren Perlen, bewundern. Peter Apian, d. h. Benewitz (1495—1552) war besonders eifrig in der Herstellung solcher „Instrumente“, und sein Zeitgenosse Rheticus, der von der Originalität dieses Ingolstädter Professors anscheinend keine hohe Meinung hatte, sprach einmal in spottendem Doppelsinn von seiner „faden kunst“.

Man wird fragen, ob denn nicht in älterer Zeit auch in anderen Anwendungsgebieten der Mathematik nomographische Methoden entwickelt wurden. Denn in der angewandten Astronomie stellt sich ja das nomographische Gefüge mehr oder weniger von selbst ein als Abbildung des Himmels mit seinem Netz bezifferter Kreise. Das graphische Kleid ist hier älter als die Rechnung, und ähnlich ist es bei den bezifferten Kurvenscharen der Kartenprojektionen, ganz zu schweigen von den einer späteren Zeit angehörigen magnetischen Deklinationslinien und den bezifferten Höhenkurven der Topographie, die sich überhaupt nicht auf eine Formel bringen lassen. Sehen wir uns nach alten nomographischen Methoden auf anderen Gebieten um, so können wir zunächst an die graphischen und mechanischen Lösungen denken, die die Griechen gewissen ihrer

1) In dem an prächtigen Abbildungen älterer und neuerer astronomischer Instrumente reichen Werke von Joh. A. Repsold, Zur Geschichte der astronomischen Meßwerkzeuge (Leipzig 1908, Wilhelm Engelmann), findet man neben einem schönen arabischen Astrolab ein solches von Regiomontan wiedergegeben. — Als prächtiges Quellenwerk, das uns den Übergang aus dem arabischen in das christliche Abendland miterleben läßt, nenne ich die auch die „Alphonsinischen Tafeln“ enthaltenden „Libros del Saber del Rey D. Alfonso X de Castilla“, herausgegeben von Don Manuel Rico y Sinobas I—V, Madrid 1863—67.

2) Vgl. meinen Aufsatz: Zur älteren Geschichte der Nomographie, Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw., 29, S. 54—59, 1923 Nr. 5 u. 6. In dieser Arbeit wies ich zum erstenmal auf die Verwandtschaft der modernen Nomographie mit der alten Gnomonik hin und untersuchte aus dem Gesichtspunkt der Nomographie das „Quadratum horarium generale“ des Regiomontan. M. d'Ocagne hat nunmehr zu meiner Arbeit Stellung genommen in dem Aufsatz: Le calcul nomographique avant la nomographie. Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, volume jubilaire, 1926, S. 55—66.

Natur nach algebraischen Problemen gaben, wie der Dreiteilung des Winkels und der Verdoppelung des Würfels. Aber diese verschiedenen Lösungen waren keine graphischen Rechentafeln, sondern graphische Einzelkonstruktionen und Mechanismen, denen die Kennzeichen des Nomogramms, bezifferte Leitern oder Linienscharen, fehlte. Und selbst wenn sich eigentliche nomographische Lösungen dieser algebraischen Aufgaben dritten Grades in der älteren Literatur nachweisen lassen sollten, bliebe die Tatsache bestehen, daß es Einzelleistungen wären, wie die astronomischen Nomogramme, die sich gerade dadurch verdächtig machen, daß sie verhältnismäßig kompliziert sind.

Es ist nämlich sehr die Frage, ob man aus dem Vorkommen dieser Einzelleistungen folgern darf, daß die allgemeine Aufgabe der Nomographie, so wie wir sie heute verstehen, voll und bewußt erfaßt war. Nach dem modernen Begriff der Nomographie ist die *Rechenaufgabe* mit veränderlichen Zahlen das ursprünglich gegebene, und zu dieser Rechenaufgabe, um nicht zu sagen „Formel", ist die graphische Tafel zu suchen. Wer von dieser Idee der Nomographie erfüllt ist, wird aber zunächst nicht zu den kompliziertesten Problemen greifen, sondern sich an die nomographische Lösung der elementarsten und am häufigsten vorkommen Aufgaben machen, die dem ausführenden Rechner bei numerischer Behandlung fort und fort Mühsal und Zeitverlust bereiten. Das sind aber *die Multiplikationen und Divisionen.*

Unser Suchen nach den Wurzeln der neuzeitlichen Nomographie spitzt sich also auf die konkrete Frage zu: *Wo treten die ersten Multiplikationstafeln auf,* d. h. die ersten Rechentafeln zu der Gleichung $\alpha = \beta \cdot \gamma$? Da die ältere Mathematik die Multiplikationen und Divisionen meist in die Form von Proportionen kleidet, können wir auch fragen: Wo finden sich die ersten Nomogramme zu der Gleichung $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, aus der die vorige Multiplikationsformel als Sonderfall dadurch hervorgeht, daß man eine der vier Größen gleich 1 setzt?

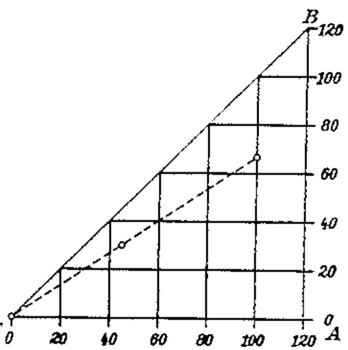

Fig. 2. Werners Proportionaldreieck.

Eine in nomographischer Hinsicht sehr bemerkenswerte Erscheinung sind die sechs Bücher *„De Meteoroscopiis"*[1]) des nürnbergischen Priesters, Mathematikers und Astronomen Johannes Werner (1468—1528). In diesem Werke, das man als eine Nomographie der sphärischen Dreiecke mit zahlreichen Anwendungen auf Himmels- und Erdkunde bezeichnen kann, erfordert die 90. Proposition des dritten Buches die numerische Lösung einer Proportion mit unbekannter vierter Proportionale: $\alpha : \beta = \gamma : x$. „Zu ihrer leichteren Lösung und damit den in den Elementen der Arithmetik nicht genug Geübten keine Irrtümer unterlaufen" bringt Werner in der folgenden 91. Proposition ein besonderes „geradliniges Instrument", das „Proportionaldreieck" ABC, dessen Gerippe unsere Fig. 2 wiedergibt. Wir würden heute diese Rechentafel als ein beziffertes kartesisches Netz von Koordinatenparallelen gleichen Abstandes bezeichnen.

1) Herausgegeben von J. Würschmidt, Leipzig und Berlin 1913.

Der Verfasser beruft sich beim Richtigkeitsnachweis auf Euklid VI, 3, den Satz von einer Parallelen zu einer Dreiecksseite und seine Umkehrung. Um zu den Größen 45, 30, 100 die vierte Proportionale zu finden, legt man nach Werner ein Lineal durch den Nullpunkt C und den Punkt mit den Koordinaten 45, 30, wie wir heute sagen würden. Dieses Lineal schneidet dann die mit 100 bezifferte Ordinatenparallele im Punkt mit der Ordinate $66\,^2/_3$. Heute könnten wir dieses Nomogramm zu der Gleichung $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ in die Gattung der *Fluchtentafeln mit drei Netzen* eingliedern.[1]) Das erste Netz ist auf einen Punkt $C \equiv (0, 0)$ reduziert und die beiden anderen Netze (α, β), (γ, δ) werden durch ein und dasselbe kartesische Netz dargestellt. Die Gleichung ist dann und nur dann erfüllt, wenn die Netzpunkte $(0, 0)$, (α, β), (γ, δ) auf einer Geraden liegen. Werner bemerkt übrigens auch, daß der Winkel CAB kein rechter zu sein braucht.

Ohne behaupten zu wollen, hiermit die älteste vorkommende Rechentafel zu der Proportion $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ in dem noch wenig erforschten älteren Schrifttum entdeckt zu haben[2]), möchte ich auf diese Vorläuferin der modernen Multiplikationstafeln das Augenmerk lenken. Merkwürdig ist, daß man noch vor wenigen Jahren für den Gebrauch des Ingenieurs dieselbe, in großem Format ausgeführte Rechentafel herausgab, die doch sicher nicht den Wettbewerb mit dem kleinen logarithmischen Rechenschieber aushält, ebensowenig wie der von anderer Seite herausgebrachte „Nomograph", ein Instrument, dem ebenfalls diese Tafel als Prinzip zugrunde liegt.

Während Werner nur im Vorübergehen, aus Anlaß einer besonderen Aufgabe, sein Proportionaldreieck beschreibt, tauchen in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts zwei nomographische Instrumente für die Proportion $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ mit dem vollen Anspruch auf, als *allgemeine Rechengeräte* zu gelten. Es sind dies der Proportionalzirkel und der logarithmische Rechenschieber. Beiden war eine lange Geschichte und große Verbreitung beschieden.

Der *Proportionalzirkel*[3]), dessen Erfindungsgeschichte an Namen besten Klangs, wie Bürgi, Clavius, Galilei geknüpft ist, darf nicht mit dem gegenwärtig diesen Namen führenden *Zeichen*gerät verwechselt werden, das zum Abgreifen und gleichzeitigen Verkleinern oder Vergrößern von Strecken dient und früher Reduktionszirkel hieß. Wie dieses Zeichengerät aber und ebenfalls wie Werners Proportionaldreieck beruht der nomographische Proportionalzirkel auf Euklid VI, 3. Auf jedem seiner platten Schenkel (Fig. 3), die infolge der Gelenkreibung bei jeder Spreizung stehen bleiben, ist vom Nullpunkt ausgehend eine gleichförmige Leiter entworfen. Um die Proportion $5 : 2 = 8 : x$ zu lösen, greift man mit dem besonders erforderlichen Handzirkel, der als Ablesegerät dient, von einer dieser Leitern die Strecke

1) Vgl. z. B. P. Luckey, Nomographie, S. 81 (Math.-phys. Bibl. Nr. 59/60, Leipzig 1927).

2) Über Benutzung des Astrolabs zu Rechnungen siehe Eilhard Wiedemann, Einleitungen zu arabischen astronomischen Werken. Das Weltall **20**, S. 131. Berlin 1920, Heft 15. Über Verwendung des Sinusquadranten zu Multiplikationen, Divisionen und Proportionsrechnungen bei Arabern siehe Eilhard Wiedemann, Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften XVIII. Sitzungsber. d. phys.-med. Sozietät in Erlangen **41** (1909), S. 58.

3) Vgl. Michael Scheffelts Unterricht vom Proportionalzirkel, neue, mit einer historischen Einleitung versehene Auflage J. E. Scheibel, Breslau 1781.

$0 \to 2$ ab und gibt dem Proportionalzirkel dann eine solche Spreizung, daß die Öffnung des Handzirkels ($= 0 \to 2$) die Basis des gleichschenkligen Dreiecks $0; 5; 5$ bildet. Die gesuchte Größe x greift man nun mit dem Handzirkel als Basis des gleichschenkligen Dreiecks $\overline{0; 8; 8}$ ab und findet ihren Zahlenwert $x = 3{,}2$ dadurch, daß man die Handzirkelöffnung auf einer der Leitern vom Nullpunkt aus absetzt.

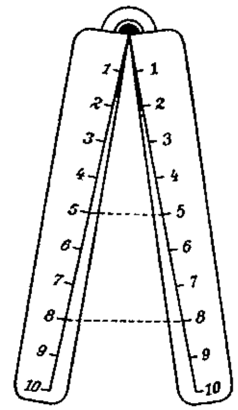

Fig. 3. Proportionalzirkel.

Von Anfang an wurde aber der Umfang der mit dem Proportionalzirkel ausführbaren Rechnungen dadurch wesentlich erweitert, daß man außer der gleichförmigen Leiter („linea arithmetica") auf jedem der Schenkel noch eine Anzahl weiterer, strahlenförmig vom Drehpunkt ausgehender Leitern anbrachte, wie z. B. für Flächenrechnungen die „linea geometrica" $x = \sqrt{\alpha}$, für Körperberechnungen die „linea solidorum" oder „linea cubica" $x = \sqrt[3]{\alpha}$, für trigonometrische Rechnungen die „linea chordarum" $x = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$. Die *eindimensionale Anamorphose* war also da, und dieser wichtige Fortschritt darf uns nicht überraschen, da wir schon hundert Jahre vorher Werner Rechnungen an einer Doppelleiter ausführen sehen, von der die eine Teilung gleichförmig, die andere eine Sinusteilung ist. Man konnte also mit dem Proportionalzirkel grundsätzlich alle Gleichungen mit vier Veränderlichen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von der Form

$$f_1(\alpha) : f_2(\beta) = f_3(\gamma) : f_4(\delta)$$

auflösen. Die heute wie früher in der Technik weitaus am häufigsten vorkommenden Formeln sind von der Form

$$F_1(\alpha) \cdot F_2(\beta) \cdot F_3(\gamma) \ldots = 1$$

und lassen sich bei höchstens vier Veränderlichen auf die Form der obigen Proportion bringen. Ist die Zahl der Veränderlichen größer als 4, so läßt sich die Formel unter Einführung einer oder mehrerer Hilfsveränderlichen in Gleichungen von der Proportionsform zerlegen. Diese Gleichungen konnte man dann mit dem Proportionalzirkel lösen, wobei ein Zwischenergebnis (der Wert der Hilfsveränderlichen) nicht abgelesen zu werden brauchte, sondern als Spreizung des Handzirkels in die neue Rechnung eingehen konnte.

Der Proportionalzirkel, dessen Ausführung man besonders den Bedürfnissen der damaligen Militäringenieure anpaßte, hatte also ein großes Anwendungsfeld. Dieser Umstand und seine anschauliche geometrische Verständlichkeit läßt uns begreifen, daß er sich so stark verbreitete und daß im 17. und 18. Jahrhundert eine Flut von Schriften über ihn erschien.

Damit wird uns aber auch schon eher verständlich, warum das andere allgemeine Multiplikations- und Proportionsrechnungsgerät des 17. Jahrhunderts, *der logarithmische Rechenschieber*, etwa zwei Jahrhunderte gebrauchte, bis er den endgültigen Sieg über den besonders auf dem Festlande so fest eingenisteten Proportionalzirkel davontrug. Auf der von Edmund Gunter im Jahre 1620, also kurz nach den Anfängen der Briggsschen Zahlenlogarithmen, herausgegebenen logarithmischen Leiter, der Gunters *Scale* der Engländer, wurden die Rechnungen anfangs ebenso wie auf dem Proportionalzirkel durch Abgreifen mit einem Zirkel ausgeführt. William Oughtred erfand dann bald darauf die Schieberform, und auch die weitere Ausgestaltung des Rechenstabes zu der heute verbreiteten Form erfolgte hauptsächlich in England und Frankreich, zum Teil erst im neunzehnten Jahrhundert.

Auch der Rechenschieber löst Gleichungen mit vier Veränderlichen von der obigen Form

$$f_1(\alpha) : f_2(\beta) = f_3(\gamma) : f_4(\delta).$$

Er löst sie genauer und bequemer als der Proportionalzirkel, nämlich mit einer einzigen Einstellung. Während aber auf jedem Proportionalzirkel für die Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 eine Auswahl von sechs und mehr Funktionen ohne weiteres zur Verfügung stand, war die Auswahl beim logarithmischen Schieber beschränkter, und selbst in seiner modernen Form sind auf der Vorderseite nur die Funktionen α und α^2 und ihre Reziproken vorhanden, wozu dann noch die bekannten Funktionen der Rückseite der Zunge kommen. Vielleicht ist es aber gerade diese Beschränkung, die neben seinen sonstigen Vorzügen, zu denen auch die überall gleiche relative Genauigkeit zählt, dem Rechenstab auf die Dauer zum Siege[1]) verhelfen mußte. Schon aus psychologischen Gründen sollte man eine Überlastung nomographischer Instrumente mit allzu mannigfaltigen Anwendungseinrichtungen vermeiden. Besser ist es da eben, für Sonderzwecke eigene Schieber mit anderen Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 herzustellen. Die Mannigfaltigkeit und Nützlichkeit solcher *Sonderschieber* habe ich wiederholt hervorgehoben.

Im neunzehnten Jahrhundert hat die Nomographie den *Franzosen* ihre wichtigsten Fortschritte zu verdanken. Es ist bezeichnend, daß die Revolutionsregierung in einem Artikel des Gesetzes vom Germinal des Jahres IV dekretierte: „An Stelle der Tabellen der Verhältnisse zwischen den alten und neu eingeführten Maßen sollen graphische Leitern hergestellt werden, um diese Verhältnisse ohne jede Rechnung abzuschätzen." Frankreich war ein günstiger Boden. Bildete doch die von der Revolution gegründete polytechnische Schule zu Paris, an der auch die darstellende Geometrie zur Entfaltung kam, viele Jahrzehnte lang das größte Kraftzentrum für die angewandte Mathematik. Seitdem Pouchet 1795 in seiner „Arithmétique linéaire" die Tafeln mit gleichförmigem kartesischen Netz behandelt hatte, wurde die *Methode der Netztafeln* weiter und weiter ausgebildet und in der Praxis angewandt. Hatte man auch in dem alten Erbgute der Himmels- und Erdkartennetze, in den topographischen und magnetischen Karten bewußt oder unbewußt Vorbilder für Tafeln mit bezifferten Scharen, so wollte man doch jetzt mit vollem Bewußtsein *Rechen*tafeln entwerfen. Das bringt schon Pouchet klar zum Ausdruck, wenn er sagt: „Der Vorteil des graphischen Rechnens liegt in der Möglichkeit, schnell und ohne Feder, Papier und Tinte zu rechnen, da es gewissermaßen eine allgemeine Tabelle ausgeführter Rechnung darbietet ... Diese Linienarithmetik kann allgemein werden wie das gewöhnliche Rechnen." Was Pouchet hier „graphisches

1) Ob es zu einem offenen Wettstreit zwischen Proportionalzirkel und Rechenstab gekommen ist, oder dieser kampflos das Erbe des ersteren angetreten hat, müßte erst untersucht werden.

Rechnen" nennt, ist Nomographie. Unser heutiges „graphisches Rechnen", d. h. die zeichnerische Lösung einer Aufgabe durch Ausführung der Einzelkonstruktion mit den jeweilig gegebenen Werten, bildete sich im 19. Jahrhundert aus, hauptsächlich im Anschluß an Cousinerys „Calcul par le trait" (1839) und an die Wirksamkeit Culmanns in Zürich („Die graphische Statik", Zürich 1866).

Eine wichtige Etappe in der Entwicklung der Nomographie bildete 1843 die Erfindung der *Anamorphose* (Verstreckung) der kartesischen Tafeln durch Lalanne, der übrigens vorschlug, seine geradlinigen Multiplikationstafeln an öffentlichen Stellen in Form von Plakaten anzuschlagen, um dem Volk das Multiplizieren und Dividieren zu ersparen. Ein Wendepunkt war 1884 die Umwandlung der geradlinigen Netztafeln in *Fluchtentafeln* durch M. d'Ocagne. Beide Fortschritte geben Beispiele dafür, wie man an der *Formung* der Rechentafeln arbeitete. Das theoretische Werkzeug bei dieser Arbeit wurden immer mehr die allgemeinen Prinzipien und Methoden, die die Analysis und die neuere Geometrie fertig darreichten. So kann man nach dem *Dualitätsprinzip* jede geradlinige Netztafel in eine Fluchtentafel verwandeln, und *projektive Transformationen* dienen dann dazu, den Fluchtentafeln wie auch den Netztafeln eine möglichst zweckmäßige Form zu geben. In den einfachsten und wichtigsten Fällen macht man von dieser projektiven Formbarkeit der Tafeln dadurch Gebrauch, daß man den nutzbaren Leiterstücken eine für die Genauigkeit und Schönheit des Nomogramms erwünschte Länge und Stellung gibt. Planmäßig untersucht man ferner heute eine Gleichung oder Formel auf ihre Darstellbarkeit durch die verschiedenen Tafeltypen, die durch „Schlüsselgleichungen" gekennzeichnet sind. So hat der Amerikaner Gronwall 1912 die theoretischen Bedingungen dafür aufgesucht, daß eine Gleichung mit drei Veränderlichen *verstreckbar* ist, d. h. auf die Form der Schlüsselgleichung einer aus drei Geradenscharen bestehenden Netztafel oder einer aus drei Leitern bestehenden Fluchtentafel gebracht werden kann.

Von besonderer Wirkung war das 1899 erschienene Lehrbuch der Nomographie von M. d'Ocagne. Es bot eine treffliche Überschau der verschiedenen Methoden, die an der Hand ausgeführter Beispiele erläutert wurden. Es suchte ferner das Wesen eines Nomogramms in seiner Allgemeinheit zu erfassen und abzugrenzen. Klar prägte sich nun die Nomographie als besonderer Zweig der angewandten Mathematik heraus. Auch in der Schaffung eines Namens für diesen Wissenszweig kommt dies zum Ausdruck. Wer die berückende Wirkung würdigt, die ein neues Wort nicht nur auf die Massen ausübt, wird auch daran nicht vorübergehen. „Nomogramme" nannte d'Ocagne die Rechentafeln auf Vorschlag von Fr. Schilling, damals in Göttingen, und so entstand das Kennwort „Nomographie".

Das Werk von d'Ocagne kam einem Bedürfnis entgegen. Techniker aller Länder begannen nun eifrig, graphische Rechentafeln, insbesondere Fluchtentafeln, für alle möglichen Sonderformeln zu entwerfen. Die Hochflut dieser Betätigung entstand ebenso, wie es mit dem Eindringen der Radiobetätigung in weitere Kreise der Fall war, früher in Amerika und England als in Deutschland, wo aber schon lange vorher Männer wie Ch. A. Vogler, A. Adler, H. Fürle, F. Klein, F. Schilling, R. Mehmke, C. Runge schaffend und werbend für die graphischen Rechentafeln eingetreten waren. Wie die deutschen

Nomographen im 16. und 17. Jahrhundert der Konstruktion von ebenen Astrolabien, im 17. und 18. der Erfindung und Ausgestaltung der Proportionalzirkel oblagen, so entwerfen sie jetzt Netztafeln, Leitertafeln und Schieber. Aber in der Werkstatt des neuzeitlichen Ingenieurs begegnen und vereinigen sich diese nomographischen Arbeiten mit allen den Bestrebungen, die der gegenwärtigen Technik das Gepräge aufdrücken: Die Nomographie gliedert sich ein in die auf Grund exakter Untersuchungen erstrebte planmäßige Organisation der auf höchsten Wirkungsgrad eingestellten physischen und geistigen Arbeit. Allerdings ist das „Mechanisierung", aber eine solche, die Hand, Gehirn und Zeit frei macht für neue Aufgaben.

Die Formel, an deren nomographischer Bewältigung den Praktikern der Technik am meisten gelegen ist, ist die schon genannte Gleichung

$$F_1(\alpha) \cdot F_2(\beta) \cdot F_3(\gamma) \cdots = 1.$$

Meistens sind in ihr die Funktionen Potenzen der Veränderlichen, deren Exponenten kleine ganze positive oder negative Zahlen, wie ± 1, ± 2, ± 3 oder einfache Brüche wie $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ usw. sind. Man kann sagen, daß sich schon die ganze Nomographie der letzten 300 Jahre um die Bewältigung dieser Gleichung bemühte. Nachdem der Proportionalzirkel aus dem Wettbewerb ausgeschieden ist, bleiben noch Netztafeln, Fluchtentafeln und Schieber auf den Plan. Für Gleichungen mit einer größeren Zahl von Veränderlichen dürften wohl in Zukunft die zusammengesetzten Fluchtentafeln nicht so beliebt bleiben. Haben solche Gleichungen die oben genannte weitverbreitete Form, so kommen für die Lösung auch Schieber mit mehreren Zungen in Frage. Sind sie aber komplizierter gebaut, so bieten die *zweidimensionalen Tafeln mit beweglichen bezifferten Systemen* (die natürlichen Verallgemeinerungen der Rechenschieber auf die Ebene) viele fruchtbare Anwendungsmöglichkeiten. Für diese Nomogramme, zu denen schon das ebene Astrolabium zu rechnen ist, haben nach mancherlei älteren Vorarbeiten in jüngster Zeit besonders die Anregungen von W. Margoulis in Frankreich und W. Kretschmer in Deutschland eine allgemeinere Behandlung und die Anwendung auf technische Formeln angebahnt.

Es ist sehr wohl denkbar, daß jede der heutigen nomographischen Darstellungsformen an ihrem Platze lebensfähig ist, je nach Umfang und Natur der Herstellung und der Verwendung des Nomogramms, auch nach der Art von Personen, denen man es in die Hand gibt.

Zur Methodik der Elektrizitätslehre.

Von Rudolf Mayer in Berlin-Tempelhof.

Mit 8 Figuren im Text.

II. Abschnitt. (Fortsetzung von S. 418.)

Der Übergang zur Differentialdarstellung.

Die im I. Abschnitt gebrachte Elektrizitätslehre kann als Fernwirkungstheorie bezeichnet werden. Z. B. scheint bei dem Begriff der Spannung nur der Zustand in zwei voneinander entfernten Punkten maßgebend zu sein. Durch den Übergang von den primären Integralbegriffen zu den abgeleiteten gewinnen wir die Nahewirkungstheorie Maxwells.