Wir dürfen uns recht von Herzen darüber freuen, daß bei der Schaffung des gewaltigen physikalisch-technischen Rüstzeuges, das in diesem Kriege zum ersten Male zu so ausgedehnter Anwendung gelangt, die deutschen Erfindungen mit in erster Linie, in vielen Fällen, wie in der Optik und im Luftschiffbau, unbestritten an der Spitze stehen. Soll der physikalische Unterricht dies als Anlaß nehmen, auch seinerseits ein „Gesinnungsunterricht“ in vaterländischer Hinsicht zu sein, so wird er sich nichts vergeben, wenn er als Unterricht in einer der exakten Wissenschaften dennoch die nötige Objektivität zu wahren bemüht bleibt. Gewiß ist diese Bemühung dem Feinde gegenüber im Augenblicke weniger wichtig als die, ihn mit aller Kraft zu bekämpfen. Aber es braucht unser Zorn gegen die Feinde nichts von seiner Gewalt zu verlieren, wenn wir, je nachdem wie sich im Unterrichte dazu Gelegenheit bietet, den Leistungen unserer Gegner auf naturwissenschaftlichem Gebiete die ihnen gebührende Anerkennung widerfahren lassen. Das ist in der letzten Zeit wohl nicht immer geschehen. Aber ich meine: Wir können es uns leisten, objektiv zu sein.

Aufgaben zur Himmelskunde.

Von

P. Luckey aus Elberfeld.

In dem Aufsatze „Denk- und Rechenaufgaben zur Himmelskunde“ (d. Zeitschr. *XXVI, S. 284*) wurde unter Anwendung schulmäßiger Vereinfachungen die Aufgabe gelöst: Den geozentrischen Lauf des Jupiter aus den „wahren“ Bewegungen des Jupiter und der Erde abzuleiten. Es sei hierzu noch einiges nachgetragen. Winkel, Zeit und Geschwindigkeit sind im folgenden ebenso gemessen wie in dem genannten Aufsatz.

1. Den geozentrischen Ort J' des Planeten zu einer beliebig gegebenen Zeit t durch Zeichnung und durch Rechnung zu finden. In dem Dreieck E_1SJ_1 (Fig. 4, Seite 286) sind SE_1, SJ_1 und der eingeschlossene Winkel $\alpha = 11\,t$ bekannt. Es läßt sich also der Winkel $SJ_1E_1 = \beta = t - l$ und damit auch l finden. Besonders einfach sind Fälle wie folgende: Wo befindet sich J' „um 1 Uhr“, „um 3 Uhr“? ($l = 36{,}9^0$; $l = 101{,}3^0$.) Die Aufgaben sind auch lösbar durch Einsetzen des gegebenen Wertes von t in die Gleichung 4) Seite 286, die das Wegzeitgesetz des geozentrischen Laufes des Planeten ausdrückt.

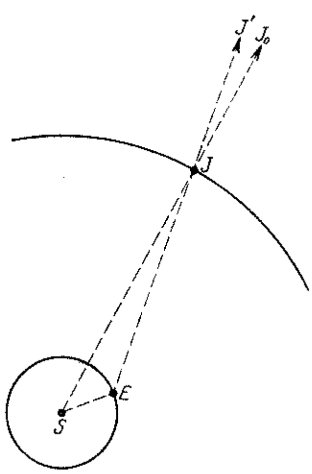

Fig. 1.

2. Der heliozentrische Ort von J werde mit J_0 bezeichnet (Fig. 1). J_0 läuft gleichförmig um, während J' um J_0 hin- und herpendelt. Man bestimme Zeiten und Örter des größten Bogenabstandes J_0J'. (JE ist dann Tangente an die Erdbahn und der Planet steht in Quadratur.) Welche Geschwindigkeit hat J' in den Augenblicken des größten Bogenabstandes von J_0? („Mittlere Bewegung“. Diese Stellungen hatten Seite 285 als rohe Annäherung der stationären Punkte gedient.) Was läßt sich dagegen von den Geschwindigkeiten bei der Konjunktion und bei der Opposition sagen? („Größte“ und „kleinste“ [d. h. stärkste rückläufige] „Bewegung“.)

3. Unter 5. des früheren Aufsatzes wurden die Orte und Zeitpunkte bestimmt, in denen J' stationär wird. Nachträglich sehe ich nun, daß Apollonius von Perga hierzu einen schönen geometrischen Satz fand, den Ptolemäus im Almagest, XII. Buch,

1. Kap. wiedergibt[1]). Ins Kopernikanische und auf den vorliegenden Fall übertragen läßt sich dieser Satz so aussprechen:

Verlängert man die Verbindungslinie JE (Jupiter—Erde, Fig. 2) bis zum zweiten Schnittpunkt mit der Erdbahn, welcher F heiße, und halbiert man die Sehne EF in G, so ist J' stationär, wenn sich die Entfernungen des Sehnenmittelpunktes G von den beiden Planeten wie deren Umlaufszeiten verhalten (also hier, wenn $GE:GJ = 1:12$).

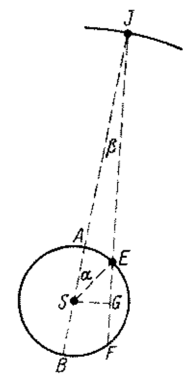

Fig. 2.

Wir können auch sagen: J' ist stationär, wenn sich die Halbsehne EG zum äußeren Sekantenabschnitt JE verhält, wie die Winkelgeschwindigkeit von J um die Sonne zur Differenz der Winkelgeschwindigkeiten beider Planeten um die Sonne, also hier wie 1:11. Die Richtigkeit dieses Satzes im vorliegenden Fall erkennt man, wenn man in dem Ausdruck für die geozentrische Geschwindigkeit (S. 287 oben, erste Gleichung)

$$\text{Geoz. Geschw.} = \frac{dl}{dt} = \frac{12\cos(12t-l) - 5\cos(t-l)}{\cos(12t-l) - 5\cos(t-l)} \qquad 1)$$

wieder nach 2) und 3) auf S. 286 die Werte

$$12t - l = \alpha + \beta = \sphericalangle SEG \text{ (Fig. 2)}$$
$$t - l = \beta \qquad = \sphericalangle SJG$$

einsetzt. Dann hat man, da $SE = 1$ und $SJ = 5$ ist:

$$\text{Geoz. Geschw.} = \frac{12\cos SEG - 5\cos SJG}{\cos SEG - 5\cos SJG} = \frac{12EG - JG}{EG - JG}$$
$$= 1 + \frac{11EG}{EG - JG} = 1 - \frac{11EG}{EJ}. \qquad 2)$$

Aus dieser Gleichung erhält man den zu beweisenden Satz, indem man die Geoz. Geschw. gleich Null setzt.

Es erscheint wünschenswert, die durch die Gleichung 2) ausgedrückte Verallgemeinerung des Apollonischen Satzes auf eine mehr elementare Weise abzuleiten. Während bei Ptolemäus der Satz durch eine scharfe, aber langwierige rein geometrische Ableitung gewonnen wird, können wir folgendermaßen vorgehen: In Fig. 3 sei die Stellung von S, E und J zu einer beliebigen Zeit gezeichnet. Da es nur auf die relativen Bewegungen ankommt, so dürfen wir annehmen, daß S und J stillstehen, während E mit der Differenzgeschwindigkeit 11 umläuft. Wir müssen dann gleichzeitig dem Sternhimmel $St\,St$ eine Drehung im entgegengesetzten Sinne mit der Geschwindigkeit 1 zuschreiben. Während die Erde von E nach E_1 geht, legt J von ihr aus gesehen den Winkel $\gamma = -\sphericalangle EJE_1$ zurück. Bezeichnen wir den Winkel E_1FE mit δ, so ist nach dem Sinussatz

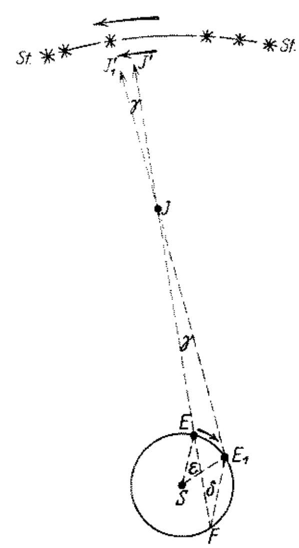

Fig. 3.

$$\sin EJE_1 = -\sin\gamma = \sin\delta \cdot \frac{E_1F}{E_1J}. \qquad 3)$$

Macht man den Weg EE_1 hinreichend klein, so geht diese Gleichung mit unendlicher Genauigkeit über in

$$-\gamma = \delta \cdot \frac{EF}{EJ}, \qquad 4)$$

[1]) Neuere Ausgabe: Ptolemäus, Syntaxis, ed. Heiberg, Leipzig 1898 und 1903; Übersetzung: K. Manitius, Leipzig 1912 und 1913.

oder, wenn wir den Zentriwinkel ESE_1, der die Erdbewegung mißt, mit ε bezeichnen,

$$\gamma = -\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{EF}{EJ}. \tag{5}$$

Der scheinbare Weg von J' in einer unendlich kleinen Zeit wäre also das $\left(-\frac{EF}{2\,EJ}\right)$fache der gleichzeitigen Bewegung von E, und da E die Geschwindigkeit 11 hat, wäre die Geschwindigkeit von J' gleich $-\frac{11\,EF}{2\,EJ}$. Da es uns aber auf die Geschwindigkeit von J' unter den Fixsternen ankommt, und diese nach der Annahme mit der rückläufigen Geschwindigkeit 1 umlaufen, so ist der obige Betrag um 1 zu vermehren, und wir erhalten

$$\text{Geoz. Geschw.} = 1 - \frac{11\,EF}{2\,EJ} = 1 - \frac{11\,EG}{EJ}, \tag{6}$$

ebenso wie in Gleichung 2).

Wie gesagt, stellt die Gleichung 6) eine Verallgemeinerung des apollonischen Satzes dar. Man kann nämlich aus der Lage der Sekante JEF (Fig. 2) für jeden beliebigen Augenblick das Verhältnis $\frac{11\,EF}{2\,EJ}$ bestimmen und dann durch Subtraktion dieser Größe von 1 die geozentrische Geschwindigkeit von J'. (Nachdem die Quadraturstellung überschritten ist, sind dabei die Sehnen EF negativ zu rechnen.) Insbesondere erkennt man, daß die geozentrische Geschwindigkeit ihren größten Wert

$$1 - \frac{11\,(-SB)}{JB} = 1 - \frac{-11}{6} = 2\,\frac{5}{6}$$

in der Konjunktion und ihren kleinsten Wert

$$1 - \frac{11\,SA}{JA} = 1 - \frac{11}{4} = -1\,\frac{3}{4}$$

in der Opposition hat, und daß die genannte Geschwindigkeit in der Quadraturstellung gleich 1 wird, was wir schon früher feststellen konnten (mittlere Bewegung). Man erhält diese Ergebnisse auch analytisch, indem man in Gleichung 1) für $t - l = \alpha$ und $12t - l = \alpha + \beta$ die betreffenden Werte einsetzt.

Übung: Betrachte wie bei dem letzten Beweis S und J als ruhend und zeichne sie samt dem Halbkreis, den dann E von der Opposition bis zur nächsten Konjunktion zurücklegt, in möglichst großem Maßstab auf Millimeterpapier (vgl. Fig. 4). Teile den

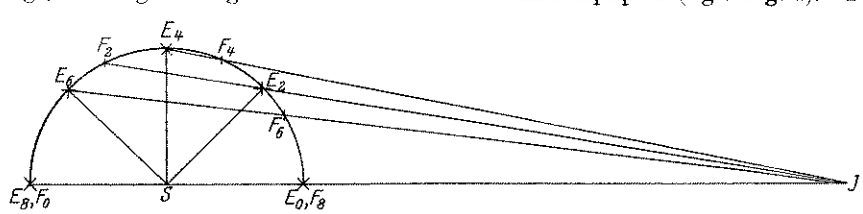

Fig. 4.

Halbkreis in 8 gleiche Teile (in der Figur sind 4 gezeichnet) und ziehe die Sekanten JEF zu diesen Erdstellungen. Lies die Längen EF und JE für jede Stellung ab. Da die Verhältnisse dieser Strecken zu bilden sind, können die Millimeterstriche zum Ablesen benutzt werden, auch bei den Sekanten, die das Netz schief durchschneiden. Bilde dann die geozentrischen Geschwindigkeiten $1 - \frac{11\,EF}{2\,JF}$ und stelle sie graphisch dar (Fig. 5). Da von der Konjunktion bis zur nächsten Opposition dieselben Sekantenwerte wiederkehren, so kann die Darstellung bis zu dieser Opposition symmetrisch ergänzt werden. O, U, Q, K kennzeichnen die Geschwindigkeitswerte in den Oppositionen, Umkehrpunkten, Quadraturen und der Konjunktion. Die Parallele durch den Punkt $+1$ der Ordinatenaxe zur Abszissenaxe stellt die konstante Geschwindigkeit des mittleren Jupiter dar. Da die Flächenräume, die von der Abszissenaxe und den Bögen der periodisch fortgesetzt zu denkenden Kurve abgegrenzt werden (mit entsprechenden Vorzeichen) die Wege darstellen, d. h. die geozentrischen Längen l, so zeigt man leicht, daß die über der genannten Parallele liegenden Flächenstücke, absolut genommen, gleich den unter ihr gelegenen sein müssen.

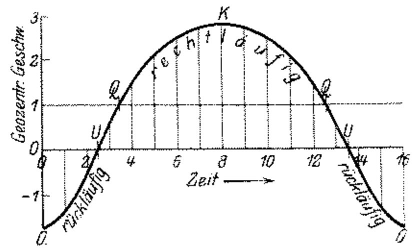

Fig. 5.

4. Mit Hilfe des apollonischen Satzes lassen sich nun Zeit und Ort des Stationärwerdens in einfacher Weise bestimmen:

a) Durch Zeichnung. Man lege von einem beliebigen Punkte J der Jupiterbahn (Fig. 2) eine Sekante JEF an die Erdbahn so, daß

$$JE : JF = 11 : 13\,. \qquad 7)$$

Um den Abstand des Stillstandpunktes von einer erfolgten oder einer bevorstehenden Opposition zu erhalten, hat man dann den Winkel JSE um $^1/_{11}$ zu vergrößern (vgl. a. a. O. S. 285 Anm.). So kann man die der Figur 3 auf Seite 285 entsprechende strenge Figur herstellen.

b) Durch Rechnung. Da die beiden Beweise, die wir für den apollonischen Satz gegeben haben, ohne jede Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall übertragen werden können, soll die Berechnung allgemein durchgeführt werden. Bezeichnet man mit E und J (Fig. 2) zwei beliebige Planeten, von denen J der obere sei, und sind $SJ = R$ und $SE = r$ die Halbmesser ihrer Bahnen, T und t ihre Umlaufszeiten, so ist nach dem Apollonischen Satz

$$GJ : GE = T : t,\quad GJ = \frac{T}{t}\, GE\,. \qquad 8)$$

Ferner ist

$$GJ^2 - GE^2 = R^2 - r^2, \qquad 9)$$

da sowohl die linke wie die rechte Seite dieser Gleichung die Potenz des Punktes J in bezug auf den Kreis $AEFB$ ausdrückt. Setzt man den Wert von GJ aus 8) in 9) ein, so findet man

$$GE^2 = \frac{R^2 - r^2}{T^2 - t^2}\, t^2 \qquad 10)$$

und nach Fig. 2:

$$SG^2 = SE^2 - GE^2 = r^2 - \frac{R^2 - r^2}{T^2 - t^2}\, t^2 = \frac{T^2 r^2 - R^2 t^2}{T^2 - t^2}\,, \qquad 11)$$

$$\sin^2\beta = \sin^2 SJE = \frac{SG^2}{SJ^2} = \frac{T^2 r^2 - R^2 t^2}{(T^2 - t^2) R^2}\,{}^{2)} \qquad 12)$$

$$\sin^2(\alpha + \beta) = \sin^2 SEJ = \frac{SG^2}{SE^2} = \frac{T^2 r^2 - R^2 t^2}{(T^2 - t^2) r^2} \qquad 13)$$

Die Ausdrücke 12) und 13) gehen durch Vertauschung von R mit r und T mit t ineinander über. Da eine unmittelbare Überlegung zeigt, daß, wenn von E aus gesehen J stillsteht, auch E von J aus gesehen stillsteht, so berechnen sich also die Stillstandspunkte der unteren und der oberen Planeten nach denselben Formeln. Die genannten Ausdrücke gehen ferner für $R = 5$, $T = 12$, $r = 1$, $t = 1$ in die Gleichungen 7) und 8) von Seite 287 über. Endlich vereinfachen sie sich noch, wenn man beachtet, daß nach dem dritten Kepplerschen Gesetze

$$T^2 : t^2 = R^3 : r^3\,.$$

[2]) Die Formel 12) stimmt wesentlich mit der Formel überein, die in den älteren Auflagen des astronomischen Anhangs zu Jochmann-Hermes für denselben, dort mit φ bezeichneten Winkel abgeleitet ist.

ist. Sie gehen dann über in

$$\sin^2\beta = \sin^2 SJE = \frac{r^2}{R^2 + Rr + r^2}, \tag{14}$$

$$\sin^2(\alpha+\beta) = \sin^2 SEJ = \frac{R^2}{R^2 + Rr + r^2}, \tag{15}$$

Formeln, die die Berechnung der Stillstandspunkte aus den Halbmessern der Bahnen allein ermöglichen.

Ich erlaube mir noch eine Nachbemerkung zu dem unter 2. der ersten Arbeit angegebenen Verfahren zur Bestimmung der Stillstandspunkte. Veranlassung dazu geben mir kritische Bemerkungen von Herrn Professor M. Koppe, die mir die Redaktion gütigst zur Verfügung stellte. Diesen Bemerkungen verdanke ich auch Hinweise, die zu Veränderungen in der vorliegenden Arbeit geführt haben.

Meine Absicht war zunächst, ein Verfahren anzugeben, wonach der Anfänger rasch ein Bild des sichtbaren Laufs gewinnen kann, einen vorläufigen Entwurf, wie er in Fig. 3 auf S. 285 erscheint. Zu diesem Zweck wurde bewußt ein nicht unbeträchtlicher Fehler gemacht: es wurde nämlich für den gesuchten Augenblick des Rückläufigwerdens J als unbeweglich angesehen. Die Bewegung des kleinen Zeigers zu vernachlässigen, liegt dem ungeübten Denker nahe, wie man denn z. B. hören kann, daß die Uhrzeiger sich um 5 Minuten nach 1 Uhr decken. Es erscheint mir im vorliegenden Falle nicht verwerflich, einen derartigen Fehler anfangs zu machen. (Es wird sich empfehlen, als Vorbetrachtung J während eines ganzen Umlaufs von E ruhend zu denken und so die Parallaxe eines in der Ebene der Ekliptik liegenden Fixsterns abzuleiten. Hier würden, wenn man von anderen Einflüssen absieht, die Umkehrpunkte genau mit den Quadraturen zusammenfallen.) Man wird sich allerdings genau klarmachen müssen, was man vernachlässigt, nämlich die von E aus gesehene, durch die Bewegung von J hervorgerufene Verschiebung von J' auf dem unendlich fernen Hintergrund. Da man erkennt, daß sich nach dem betrachteten Augenblick (der in Fig. 3, S. 285 gezeichneten Quadratur) die durch die Bewegung von E hervorgerufene Verschiebung von J' auf dem Hintergrund bald sehr stark geltend macht, so sieht man, daß der wirkliche Stillstandspunkt erst um ein gewisses Stück später erreicht wird. Man ist aber gut genug mit den Bewegungen der Uhrzeiger vertraut, um sagen zu können, daß die vereinfachte Zeichnung schon eine rohe Annäherung gibt. (Man versetze sich nach E.) Während die Betrachtung natürlich für Mars und die unteren Planeten unmöglich ist, würde sie für die Planeten über Jupiter immer kleinere Fehler geben. Wollte jemand die Werte der Ausdrücke (14) und (15) für den Fall, daß R gegenüber r hinreichend groß ist, überschlagen, so würde er in erster Annäherung im Nenner $Rr + r^2$ weglassen. Dann würde aber

$$\sin SJE = \frac{r}{R} \quad \text{und} \quad \sin SEJ = 1,$$

und das Dreieck SJE würde bei E rechtwinklig werden. Diese Annahme habe ich schon für ein Verhältnis $\frac{R}{r}$ gemacht, für das der Fehler noch nicht unbeträchtlich wird.

Die Angabe, das Verfahren sei in Lehrbüchern angegeben, beruht auf einem Irrtum, den ich hiermit berichtige.

Endlich möchte ich noch hervorheben, daß ich keine vollständige Behandlung des Gegenstandes habe geben wollen. Sonst hätte ich vor allem auf die wertvolle Punktkonstruktion der geozentrischen Bahn eingehen müssen.