

gewählten Zahlenwerten fesseln aber die Jugend solche Berechnungen, welche durch Versuche vor der Klasse oder durch Schülerversuche ihre Grundlage erhielten. — Weitere Förderungen bringen dem physikalischen Urteile Denkaufgaben, die entweder von theoretischen Überlegungen oder von Erfahrungen und einfachen Versuchen ausgehen.

Zu begrüßen wäre es weiter wohl, wenn über die Anwendungen neuer, zweckmäßiger Unterrichtsapparate häufiger als bisher von Fachgenossen, welche diese Apparate benutzen, Mitteilungen gemacht würden. Vom Urheber einer Neuerung wird nicht selten die Beschreibung der einen oder anderen wichtigen Maßnahme beim Gebrauche des Apparates unterlassen, weil sie ihm vielleicht selbstverständlich vorkam oder die Befürchtung zu großer Breite der Mitteilung hervorrief. Außerdem ist mancher Apparat beim Gebrauche unter veränderten Umständen von anderer Wirksamkeit. Kurze Berichte über solche Erfahrungen dürften stets von Nutzen sein. Dem experimentierenden Unterrichte haben auch immer wieder praktische Neuerungen Förderungen und Erleichterungen gebracht, die von der Technik dargeboten wurden, die aber oft sehr langsam in allgemeineren Gebrauch kamen. Auch auf solche Hilfsmittel könnte durch kurze Mitteilungen hingewiesen werden.

Soweit es der verfügbare Raum gestattet, sollen außer dem physikalischen Lehrstoff auch diejenigen Teile der Chemie, welche den Zusammenhang dieser beiden so nahe verwandten Wissenschaften zu fördern geeignet sind, berücksichtigt werden. Besondere Beachtung wird dabei der sowohl für den Fortschritt der Wissenschaft als auch für einen in die Tiefe dringenden Schulunterricht so hochwichtigen physikalischen Chemie zuzuwenden sein.

Die übrigen Naturwissenschaften sollen im allgemeinen nur in Form kleiner Mitteilungen und durch Rezensionen berücksichtigt werden.

Dresden, im Juli 1915.

H. REBENSTORFF.

Kartesische Koordinaten, Parallelkoordinaten und Funktionskalen als Arbeitshilfsmittel im Unterricht.

Von P. LUCKEY in Elberfeld.¹⁾

Mit 17 Figuren im Text.

Die Methoden der graphischen Darstellung sind bekanntlich größtenteils auf den Arbeitsfeldern der die Mathematik anwendenden Wissenschaften, insbesondere der Technik, emporgewachsen. Auf diesem Boden war und ist die graphische Darstellung aber nicht nur eine schöne Veranschaulichung von abstrakten Größenzusammenhängen, sondern hat einen besonderen Wert als *Arbeitshilfsmittel*. Dieser ihr Arbeitswert ist ein doppelter.

Erstens dient sie zur *Aufsuchung unbekannter gesetzmäßiger Zusammenhänge aus Erfahrungsgrößen*. Als Beispiel hierzu diene folgende Aufgabe, die für die Stufe des Tertianers nicht trivial sein wird: *Wie berechnet die Eisenbahn die Fahrkarten vierter Klasse?* Ein Taschenkursbuch und die ihm beigegebene Preistafel lehren:

Station	Entfernung km	Preis Pfg	Station	Entfernung km	Preis Pfg
Elberfeld Hbf. .	0	0	Landwehr	21	45
Sonnborn	4	10	Leichlingen	24	50
Vohwinkel	7	15	Opladen	29	60
Gruiten	11	25	Schlebusch	33	70
Haan	15	30	Mülheim (Rh.)	41	85
Ohligs	18	40	Cöln Hbf.	46	95

Es entsteht die in Fig. 1 als „vorläufige Preiskurve“ bezeichnete Linie. Welcher Schluß ist aus ihrem annähernd geradlinigen Verlauf zu ziehen, und welche Erörterungen führen schließlich zur Einzeichnung der „idealen Preiskurve“? Eine andere Aufgabe wäre: *Miß Umfang und Durchmesser kreisförmiger Gebilde (Räder, Zylinder, Töpfe usw.) und suche die Beziehung zwischen Umfang und Durchmesser durch graphische Darstellung auf!*

Die *andere* Anwendungsweise der graphischen Darstellung ist die als *Rechentafel (Nomogramm)*. Während soeben die Zeichnung allmählich entstand, liegt jetzt eine fertig und genau gezeichnete Darstellung vor, z. B. die ideale Preiskurve der Fig. 1, die nun dazu benutzt werden kann, beliebige Einzelaufgaben ohne Rechnung zu lösen.

1) Da Verfasser als Kriegsfreiwilliger im Felde steht, ist die Korrektur von der Schriftleitung besorgt worden. Die Schriftleitung.

Pfg.

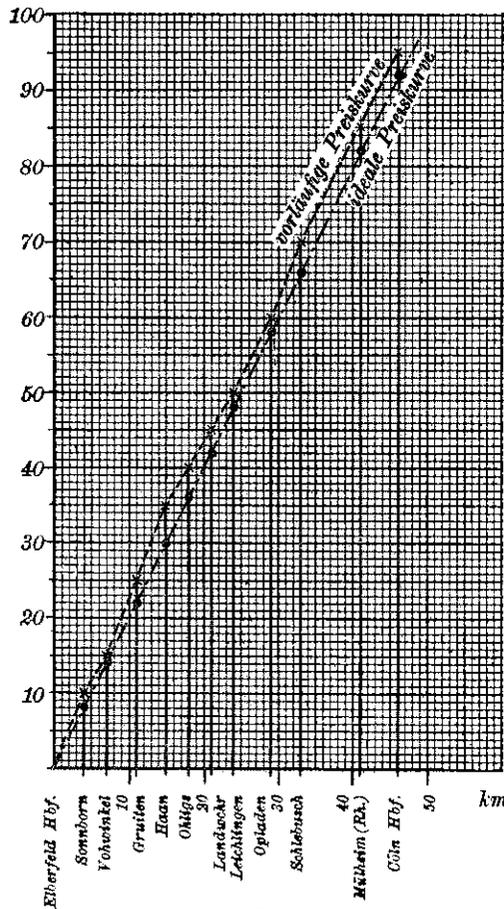


Fig. 1.

So zeigt die Tafel z. B., daß für eine Fahrstrecke von 12 km der (nicht abgerundete) Fahrpreis 24 Pfg beträgt. Die Herstellung einer Tafel für die Multiplikation mit 2 wäre allerdings einfältig; Sinn hat aber schon die Aufgabe: *Stelle eine Tafel her, aus der die Dicke y von zylindrischen Baumstämmen aus dem gemessenen Umfang x entnommen werden kann*, da die Teilung einer womöglich mehrziffrigen Zahl durch einen Näherungswert von π nicht so augenblicklich auszuführen ist. Die Herstellung dieser Tafel, von der Fig. 2 ein Bruchstück zeigt, erfordert schon eine Anzahl praktischer Überlegungen: Die Tafel braucht nur für den Bereich $x = 1$ bis $x = 10$ der Abszissen und den entsprechenden Bereich der Ordinaten ausgeführt zu werden; denn dann hat man z. B. den Bereich 0,1 bis 1 dadurch, daß man alle Zahlen in Gedanken durch 10 teilt. Der zu wählende Maßstab hängt von der verlangten Genauigkeit ab. Soll die dritte Ziffer noch zuverlässig sein, so wird man bei sorgfältiger Zeichnung die Einheit auf der Abszissenachse mindestens gleich 2 cm machen. (Ein Geübter schätzt die fünftel Millimeter noch mit bloßem Auge.) Für die Ordinaten würde sich jetzt nicht derselbe Maßstab empfehlen, da sonst die Parallelen zur Abszissenachse die Darstellungsgerade zu flach treffen, was der Genauigkeit der Ablesung schadet. Die günstigste Steigung der Darstellungsgereaden wäre 45° . Wählt man die Einheit auf der Ordinatenachse 5 cm lang, so hat man bei Benutzung von Millimeterpapier eine brauchbare Unterteilung und zugleich eine der genannten günstigsten Steigung genügend nahe kommende. Rechnet man $\pi \approx \frac{22}{7}$, so kann man leicht einen vom Nullpunkt möglichst weit entfernten Gitterpunkt angeben, der, mit jenem verbunden, die Darstellungsgerade ergibt. Die Frage, welche Bestimmung von y nach der Tafel genauer ausfällt, ob die für $x = 11$ cm oder die für $x = 110$ cm,

ob die für $x = 90$ cm oder die für $x = 110$ cm, gibt Erörterungen über *Genauigkeit*. Bisher haben wir stillschweigend unter graphischer Darstellung eine solche in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten verstanden. Wer einmal wirklich mit einer „kartesischen Rechentafel“ gearbeitet hat, wird empfunden haben, daß das Verfolgen der richtigen Parallelen zur Ordinatenachse, welche Parallele meist zwischen zwei wirklich gezeichneten nach dem Augenmaß eingeschaltet gedacht ist, und das Feststellen und Verfolgen einer ebensolchen Parallelen zur Abszissenachse unbequem, für das Auge ermüdend und daher eine Quelle von Fehlern ist. In der Tat, so unvergleichlich wertvoll das kartesische Kurvenbild einer Funktion für

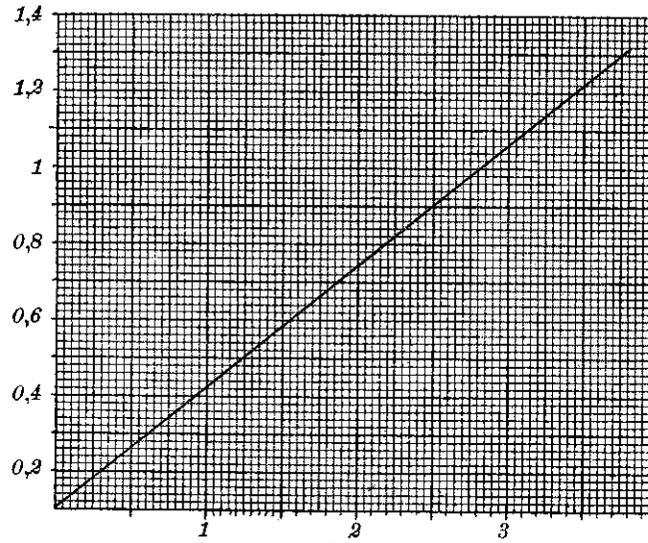


Fig. 2.

ihre Anschaulichmachung ist, als *Rechentafel* ist es meist unzuweckmäßig, und die Nomographie kennt weit vorteilhaftere Methoden. Sie liegen sogar überraschend nahe. Vermehrt man in der Figur für die sogenannten Strahlensätze (Fig. 3) die Zahl der Parallelen ins Unendliche, während die beiden Strahlen s und s' fest bleiben, so erzeugt man die unendliche Reihe von Abschnitten y (Ordinaten), die den entsprechenden Abschnitten x auf dem einen Strahl (Abszissen) proportional sind (Fig. 4). Dieser Satz und eine seiner Umkehrungen begründet die in Fig. 1 und 2 angewandte kartesische Darstellung der Proportionalität. Lassen wir da-

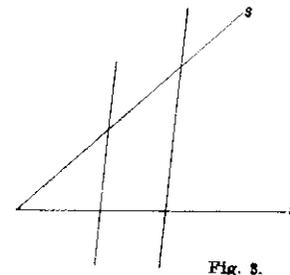


Fig. 3.

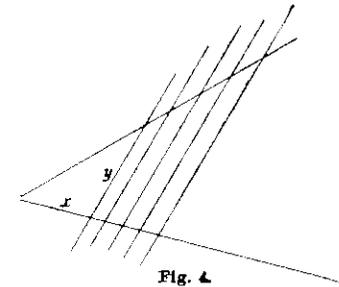
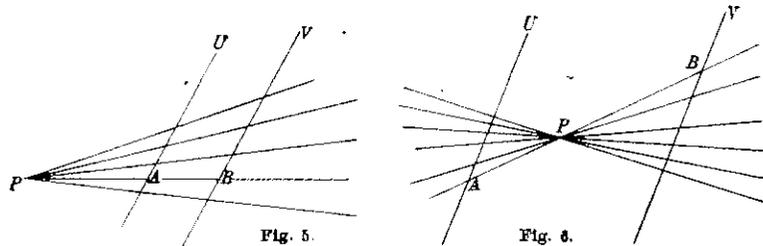


Fig. 4.

29*

gegen nun in Fig. 3 die beiden Parallelen festliegen, vermehren dagegen die Zahl der durch P gehenden Strahlen ins Unendliche, so erzeugen wir *auf den beiden Parallelen* eine unendliche Folge proportionaler Stücke (Fig. 5 und Fig. 6). Die beiden Parallelen spielen also



jetzt die Rolle der Koordinatenachsen. Wir wollen sie als U -Achse und V -Achse bezeichnen. Auf jeder dieser beiden Achsen muß ein Anfangspunkt (Nullpunkt) und eine positive Richtung für die Koordinatenskala gegeben sein. Der Nullpunkt auf der U -Achse heiße A , derjenige auf der V -Achse heiße B . Die Lage der Punkte A und B auf den Achsen ist beliebig. Die Verbindungsstrecke AB wollen wir den *Steg* des Parallelkoordinatensystems nennen. Die Darstellungsmöglichkeit der Proportionalität in diesem Koordinatensystem liegt nun elementar begründet in den Sätzen: Zieht man durch einen beliebigen Punkt F des Stegs oder seiner Verlängerung beliebig viele Gerade, so schneiden diese auf den Achsen proportionale Stücke ab. Und die Umkehrung: Trägt man auf den Achsen von den Nullpunkten aus proportionale Stücke u und v ab, so schneiden sich die Verbindungslinien der entsprechenden Endpunkte in einem Punkte P des Stegs (oder seiner Verlängerung). Der Punkt P teilt den Steg (innerlich oder äußerlich) nach dem betreffenden Verhältnis:

$$v : u = PB : PA = m.$$

Diese Darstellungsweise der Proportionalität durch *Parallelkoordinaten* entspricht *dual* der kartesischen. An die Stelle der durch den Anfangspunkt gehenden Geraden mit der Gleichung $y : x = m$ ist der auf dem Steg (oder seiner Verlängerung) liegende Punkt P mit der Gleichung $v : u = m$ getreten. Der Proportionalitätsfaktor, der früher durch den Richtungsfaktor der Geraden angegeben wurde, wird jetzt durch das Teilverhältnis $PB : PA = m$ dargestellt.

Auch die Gleichung eines beliebigen, auch außerhalb des Steges gelegenen Punktes läßt sich leicht ableiten: Ist P ein solcher (Fig. 7), PU ein beliebiger, durch ihn gezogener Strahl, der auf den Koordinaten-

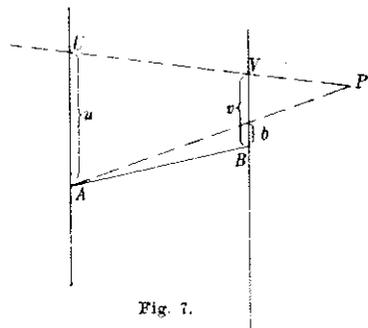


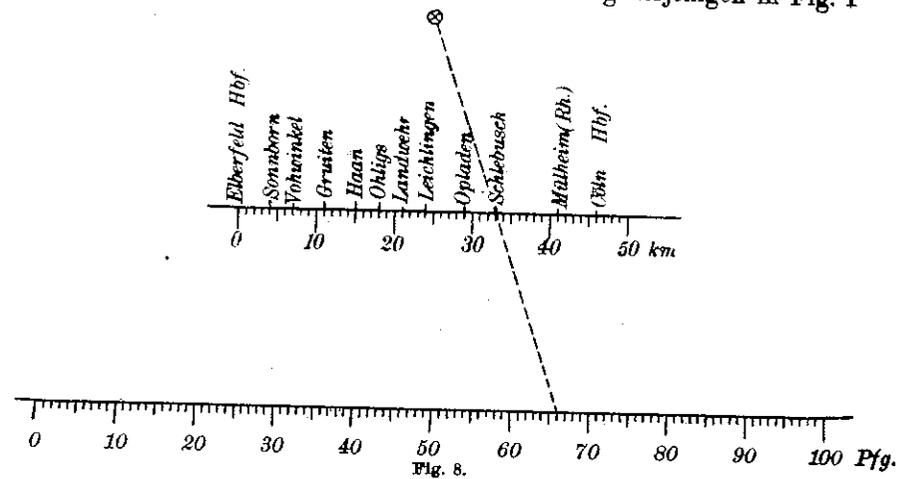
Fig. 7.

achsen die Strecken u und v abschneidet, und schneidet der Strahl PA auf der V -Achse die Strecke b ab, so besteht die Gleichung

$$(v - b) : u = \text{const.} = m \quad \text{oder} \quad v = mu + b,$$

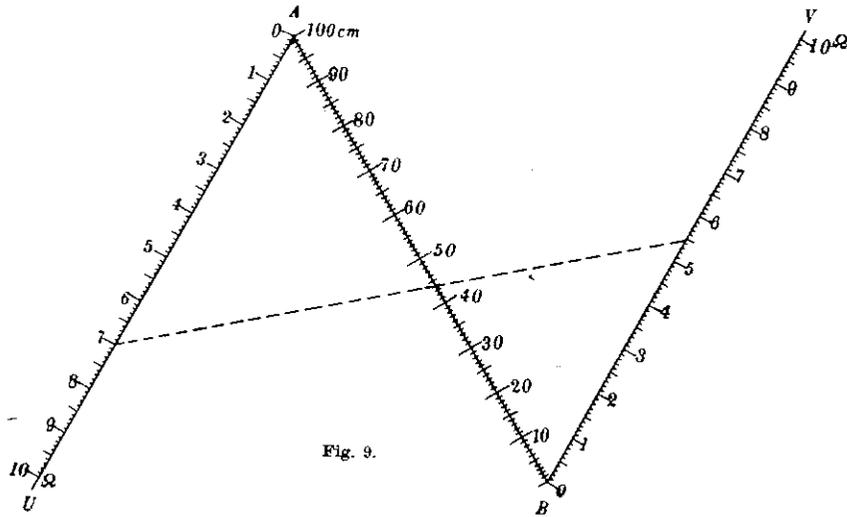
in der m das Verhältnis der Abstände des Punktes P von den Koordinatenachsen bedeutet.

Fig. 8 zeigt als Anwendung des Verfahrens eine allerdings sehr einfältige Rechentafel, die die duale Übersetzung derjenigen in Fig. 1

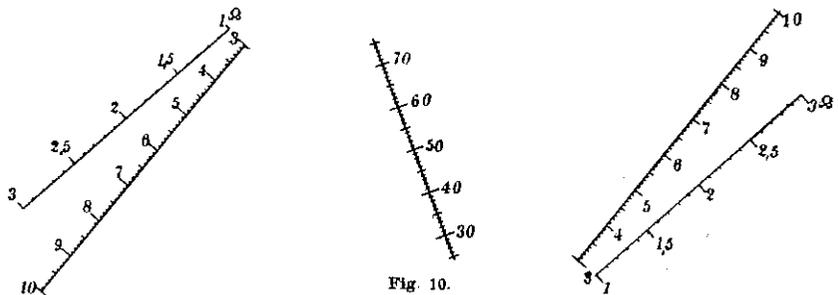


ist. In dem mit einem Kreis umgebenen Punkte denke man sich an einer fest eingesteckten Nadel einen dünnen schwarzen Faden (den „Zeiger“) befestigt, der nun, in eine beliebige Richtung gespannt, auf den Skalen zusammengehörige Werte abschneidet. In der Lage der gestrichelten Linie zeigt er z. B., daß eine Strecke von 33 km 66 Pfg. kostet. Groß sind die Vorteile einer solchen, nach dem Verfahren der „fluchtrechten Punkte“ eingerichteten Tafel (so übersetzt Mehrke treffend d'Ocagnes „Abagues à alignement“). Nicht mehr das Gewirr der *Scharen von Koordinatenlinien*, zwischen denen das Auge noch neue einschalten muß, sondern scharfe Ablesung oder bequeme Einschaltung nach dem Augenmaß *auf einer Skala*, d. h. einer *Punktreihe*, an der die Zahlen unmittelbar angeschrieben sind! Während Fig. 8 natürlich nur das Verfahren zeigen soll, mag die Rechentafel Fig. 9 auf der Schule, die ja zugunsten der Durchsichtigkeit und Einfachheit der Methoden bescheidenere Ansprüche an die Genauigkeit stellt, schon Anwendung finden. Es soll sich um die Aufgabe handeln, unbekannte elektrische Widerstände nach der Methode der Wheatstoneschen Brücke zu bestimmen. Mit der Tafel soll die kleine Ausrechnung des zu bestimmenden Widerstandes, für die Noack seinem Buch über Schülerübungen eine *numerische* Tafel beigibt, *graphisch* ausgeführt werden. Der benutzte Maßdraht sei 1 m lang. AB stellt gewissermaßen sein auf $1/10$ verkleinertes Bild dar. Die Skala der einen Parallelachse,

z. B. der U -Achse, dient für die gegebenen Vergleichswiderstände, die andere Achse für die zu messenden Widerstände. Die Benutzung der Tafel ist nun sehr einfach: Beträgt z. B. der Vergleichswiderstand 7Ω

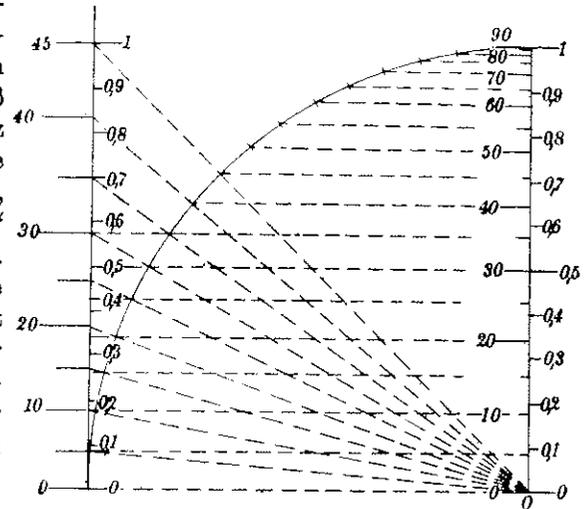


und ist die Brücke stromlos, wenn die Schneide auf der Stelle 44 cm des Meßdrahtes steht, so halte man einen Faden, den „Zeiger“, so ausgespannt auf die Tafel, daß er die U -Achse beim Skalenstrich 7, den Steg AB beim Skalenstrich 44 schneidet. Er schneidet dann die V -Achse bei 5,5. Der unbekannte Widerstand beträgt also $5,5\Omega$. Wäre der Vergleichswiderstand $0,7\Omega$, so würde dieselbe Fadenstellung den gesuchten Widerstand zu $0,55\Omega$ ergeben. Man lasse die Rechentafel in vergrößertem Maßstabe zeichnen und auf eine starke Pappe kleben. Dann kann man sie bei Schülerübungen benutzen. Der Maßstab und die Genauigkeit der Tafel müssen so groß sein, daß die Fehler bei ihrer Benutzung kleiner sind als die Fehler, die den Ergebnissen des Versuchs anhaften. Die Fig. 10 zeigt dieselbe Tafel mit der Abänderung, daß nur die notwendigen Teile der Skalen gezeichnet und daß für die Werte von 1 bis 3 für u und v besondere Skalen gezeichnet sind. Da nämlich für solche Werte in Fig. 9 der Zeiger die



Skala AB unter sehr spitzem Winkel schneidet, ist die Einstellung und damit das Ergebnis für solche Lagen des Zeigers weniger genau. Dieser Nachteil ist bei der Tafel Fig. 10 vermieden.

Diese und andere Anwendungen sind unmittelbar elementargeometrisch verständlich, ohne daß man das schwere Geschütz der Kunstsprache, Worte wie „Linienkoordinaten“, „Gleichung des Punktes“ in Tätigkeit treten läßt. Es kann also nicht die Rede davon sein, daß mit derartigen Methoden der Geist des Schülers belastet werde. Vielmehr haben wir es schlecht und recht mit einer Anwendung der Elementargeometrie, mit der nach Fig. 5



und Fig. 6 beweglich gemachten Figur des Strahlensatzes zu tun, ebenso wie die graphische Darstellung der Proportionalität nach kartesischer Methode nichts ist als die nach Fig. 4 beweglich gemachte Figur des Strahlensatzes, nur verdunkelt dadurch, daß durch die Benutzung einer Ordinatenachse noch der Satz von den Gegenseiten im Parallelogramm zur Anwendung kommt, während bei den Parallelkoordinaten der Strahlensatz unvermischt vorliegt. Wie wir nach guter alter Methode als Anwendung der Strahlensätze die Aufgabe: „Zu drei Strecken die vierte Proportionale zu zeichnen“ nach *allen* Möglichkeiten lösen, so können wir als moderne Anwendung der Strahlensätze *in erschöpfernder Erörterung* die Aufgabe lösen: „Auf welche verschiedenen Arten lassen sich auf Grund der Figur des Strahlensatzes zwei proportionale Wertreihen darstellen?“

Die Fruchtbarkeit der Methode der fluchtrechten Punkte zeigt sich erst recht bei Benutzung der *Funktionsskalen*. Die Herstellung und Benutzung der Funktionsskalen ist zunächst an sich eine wertvolle Übung. Fig. 11 zeigt die Herstellung einer Sinuskala für 0° bis 90° von 5 zu 5 Grad. Wenn man, wie es in der Figur geschehen ist, an die Skala die reguläre Skala der Werte der Funktion anheftet, so hat man ein Beispiel für die brauchbarste graphische Darstellung einer Funktion einer Veränderlichen: die Darstellung durch *aneinandergeheftete Skalen*. Wenn der Schüler diese sowie die ebenfalls in Fig. 11 gezeichnete Darstellung der Tangensfunktion für Winkel von 0° bis 45° in großem Maßstabe und mit weitergehender Unterteilung auf dem

Zeichenbrett genau ausführt, so können die gewonnenen Doppelskalen an Stelle einer numerischen Funktionstafel zur unmittelbaren Ablesung der Funktions- oder Winkelwerte beim Lösen solcher trigonometrischer Aufgaben verwandt werden, die etwa die Genauigkeit des Rechenschiebers verlangen.

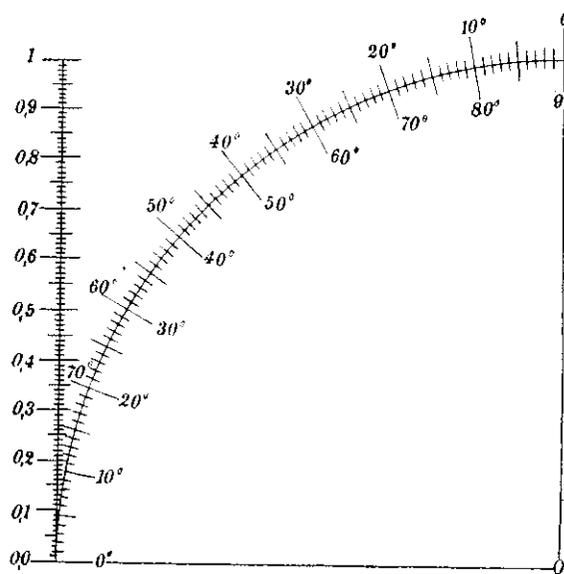


Fig. 12.

Für die gemeinsame Ablesung in der Klasse habe ich in großem Maßstabe und mit weitgehender Unterteilung eine Tafel nach Fig. 12 auf einem großen Brett hergestellt: In O ist an einem Reißnagel ein schwarzer Faden befestigt. Spannt man ihn mit der Hand, so kann man zu einem Winkel von 0° bis 45° die Tangensfunktion, zu einem Winkel von 45° bis 90° die Cotangensfunktion unmittelbar

ablesen, und umgekehrt zu den Funktionswerten zwischen 0 und 1 die zugehörigen Winkel. Zur Ablesung von Sinus und Cosinus ist mit der Laubsäge nach Fig. 13 ein langes Loch in eine Reißschiene geschnitten und durch dieses in der Richtung der Schiene ein Faden gespannt. Legt man die Schiene seitlich an das Brett,

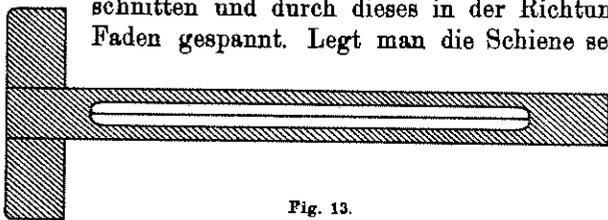


Fig. 13.

so schneidet der Faden die zusammengehörigen Werte.

Neben den Skalen der trigonometrischen Funktionen und der projektiven Skala, die hier übergangen werden soll, ist von besonderer Bedeutung die logarithmische Skala, die allerdings an der Hand einer numerischen Tafel der Logarithmen gezeichnet werden muß.

Um einen Begriff von der Fruchtbarkeit zu bekommen, die für die Aufstellung von Rechentafeln die Benutzung der Funktionsskalen im Verein mit der Methode der fluchtrecten Punkte gezeigt hat, werfe man einen Blick in die Werke über Nomographie, besonders diejenigen von M. d'Ocagne. Uns sollen hier noch zwei Beispiele zeigen, daß sich die neuen Methoden auch trefflich zu dem anderen, im Anfang gekennzeichneten Zweck der graphischen Methoden ver-

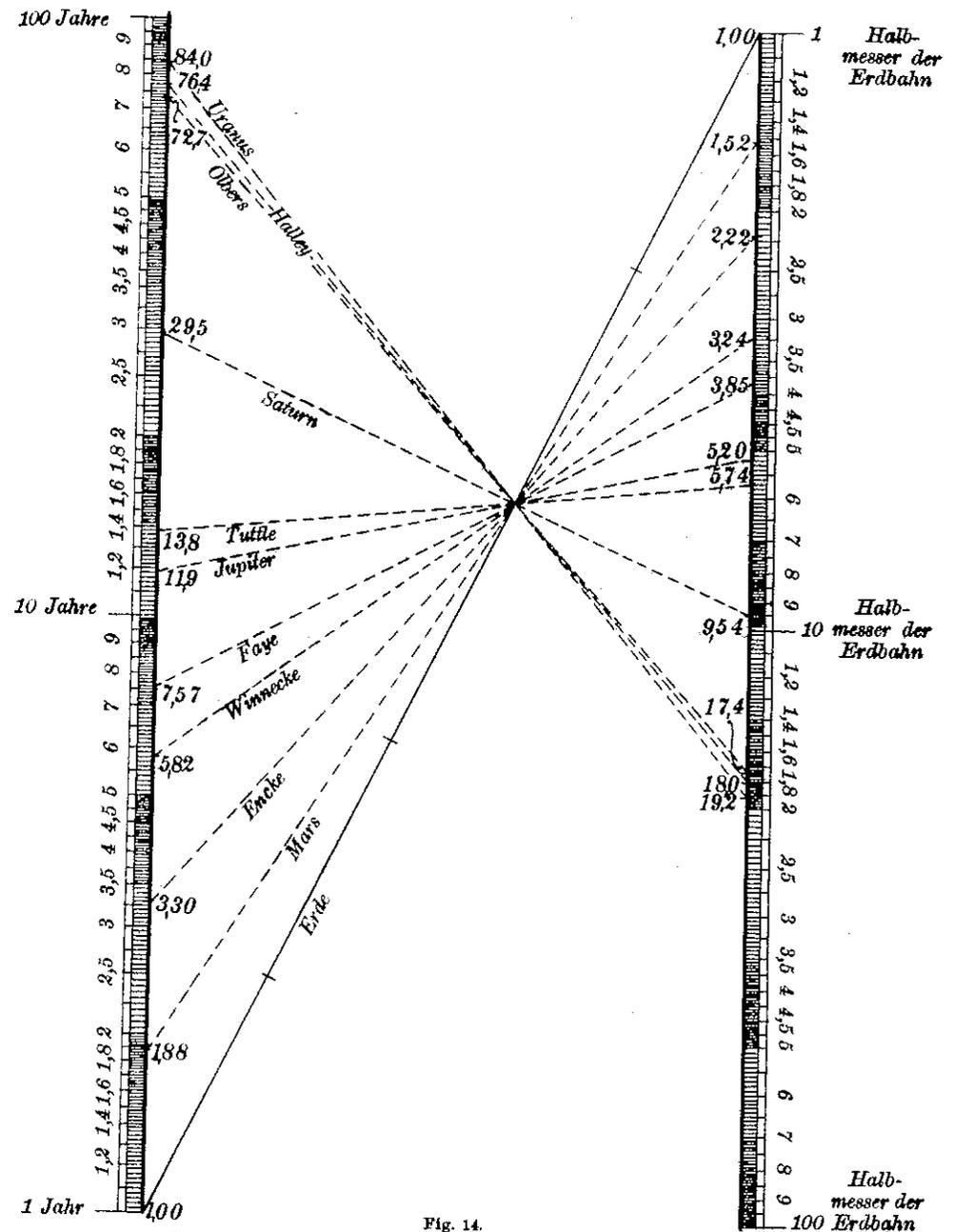


Fig. 14.

Graphische Aufsuchung des dritten Keplerschen Gesetzes.

wenden lassen: zur Aufsuchung unbekannter Gesetze. Stellt man, wie in Fig. 14, zwei logarithmische Skalen einander parallel gegenüber, so können in diesem System alle Gesetze von der Form

$$u = av^b,$$

wo a und b beliebige reelle Werte sind, aufgesucht werden. Stellt z. B. die eine Skala die Umlaufzeiten (T), die andere die großen Halbachsen (a) der Bahnen von Planeten und Kometen dar, und verbindet

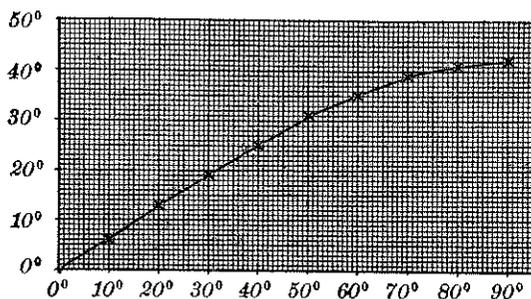


Fig. 15.

man die zusammengehörigen Punkte, so gehen die Verbindungslinien durch einen Punkt, der den Steg im Verhältnis 3 : 2 teilt. Ohne daß man irgendwelche Kenntnisse aus der analytischen Geometrie braucht, sieht man nun aus der Figur, daß

$$\log T : \log a = 3 : 2,$$

woraus $T^2 = a^3$ folgt. Diese Aufsuchung des dritten Keplerschen Gesetzes ist noch durchsichtiger als die mit kartesischen Koordinaten (vgl. diese Zeitschrift 45, S. 28 ff.). Die Skalen können vom Rande

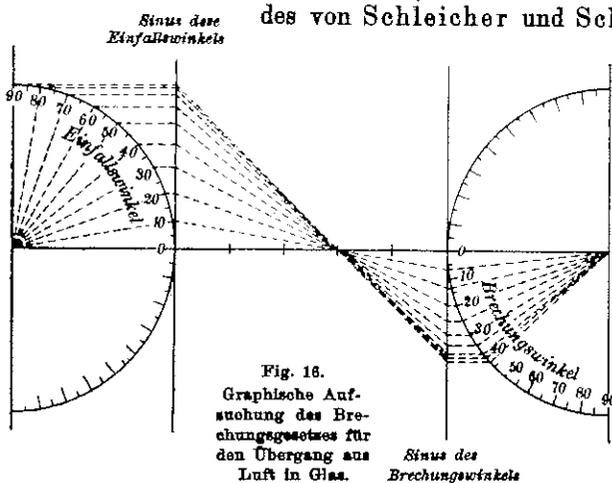


Fig. 16. Graphische Aufsuchung des Brechungsgesetzes für den Übergang aus Luft in Glas.

des von Schleicher und Schüll in den Handel gebrachten logarithmischen Papiers abgeschnitten und dann auf den Zeichenbogen in der zweckmäßigsten Lage aufgeklebt werden. Man kann aber auch einfach mit einem logarithmischen Maßstab, z. B. der Zunge des Rechenschiebers, nur diejeni-

gen Strecken, die man braucht, auf den Koordinatenachsen abtragen, genau so wie man sich sonst eines gewöhnlichen Maßstabes bedient. Als zweites Beispiel diene die Aufsuchung des Brechungsgesetzes. Mit einer optischen Scheibe erhielt ich im Klassenunterricht die Beobachtungsergebnisse

Einfallswinkel $\alpha \dots$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Brechungswinkel β .	0°	7°	13°	20°	26°	31°	35°	39°	41°	42°

Die Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten (Fig. 15) lehrt, daß für kleine Einfallswinkel annähernd α und β proportional sind, und zwar im Verhältnis 3 : 2. Unsere Frage ist: Sind vielleicht Funktionen von α und β proportional? Die trigonometrischen Funktionen liegen hiernahe, und die ebengenannte Proportionalität kleiner Winkelwerte legt es nahe, einen Versuch mit der Sinusfunktion zu machen. Fig. 16 zeigt, wie auf zwei Parallelachsen die Sinus der Einfallswinkel und der Brechungswinkel erzeugt und durch Ziehen der Verbindungslinien auf Proportionalität untersucht werden. Die Verbindungslinien gehen durch einen Punkt, der den Steg nach dem Verhältnis 3 : 2 teilt. Es ist also:

$$\sin \alpha : \sin \beta = 3 : 2.$$

Nachdem das Gesetz gefunden ist, kann die Zeichnung als Tafel zur Aufsuchung des β zu beliebigem α , des α zu gegebenem β dienen, ferner

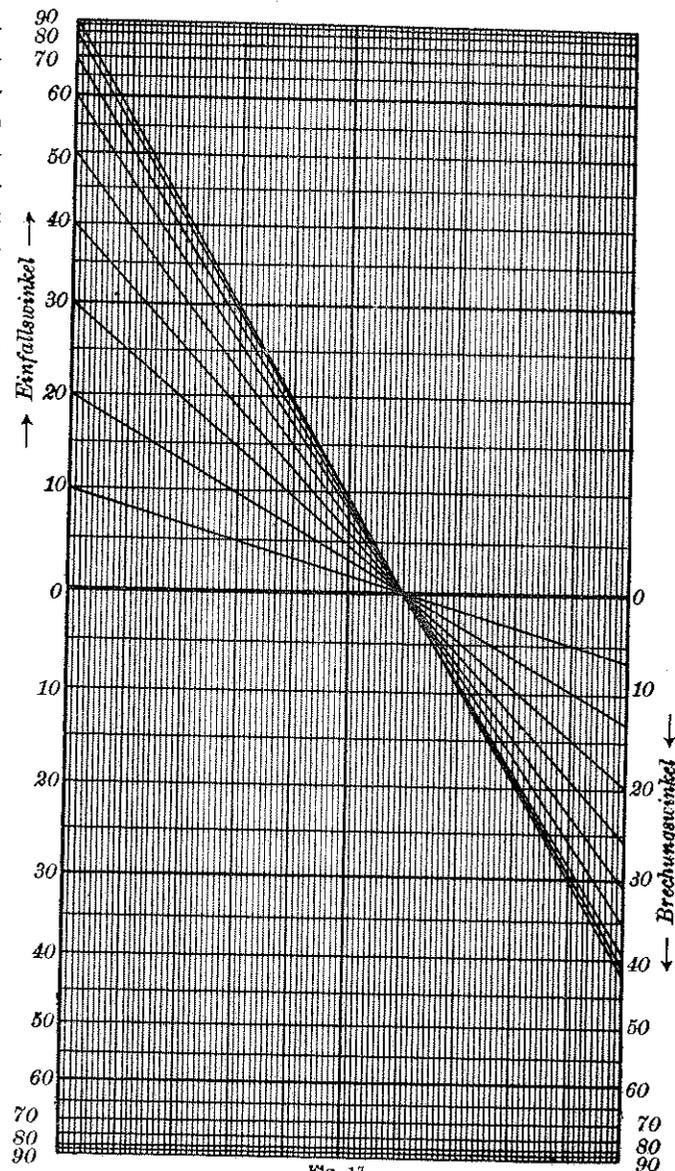


Fig. 17. Graphische Aufsuchung des Brechungsgesetzes für den Übergang aus Luft in Glas.

zur Erläuterung des Grenzwinkels der totalen Reflexion und zur Darstellung des Brechungsgesetzes für andere Medien (Punkte auf dem Stög, die diesen in dem betreffenden Brechungsverhältnis teilen). Auch hier erscheint mir das Verfahren mit Parallelkoordinaten übersichtlicher als das ihm dual entsprechende Verfahren mit kartesischen Koordinaten, auf das ich einen Hinweis des Herrn V. Hevler-Krumau in dieser Zeitschrift (45, S. 522) finde. Man kann übrigens zu diesem Zweck unmittelbar das Sinuspapier, das Schleicher und Schüll in den Handel bringen, benutzen, wie Fig. 17 dies zeigt, indem man einfach, unbekümmert um das ausgezogene Netz, den linken Rand des Netzes als α -Achse, den ihm parallelen rechten als β -Achse benutzt. (In Fig. 17 ist mit Rücksicht auf das Format schon eine frühere Parallele zum Netzrand als β -Achse benutzt worden.) Außer dem hier zugrunde gelegten Sinuspapier Nr. 379 $\frac{1}{2}$, läßt sich auch das Sinuspapier Nr. 378 $\frac{1}{2}$, derselben Firma benutzen. Bei diesem ist die Teilung bis zu den Graden ausgeführt.

Zum Schluß noch eine Bemerkung. Wenn von einer *Aufsuchung* von Naturgesetzen die Rede ist, so liegt die Meinung ferne, als seien durch unsere bequemen graphischen Hilfsmittel die Aufgaben, um die sich größte Geister oft vergeblich bemüht haben, zum Schülerspiel geworden. Welche gedankliche Arbeit gehört allein dazu, die richtigen Begriffe zu bilden und die richtigen Fragen zu stellen! Erst wenn diese Begriffe und Fragen da sind, — sie werden nur mit starker Hilfeleistung des Lehrers gebildet — können wir, mit Hilfe von ebenfalls vorbereiteten mathematischen Methoden, die sich jene Männer auch erst schaffen mußten, in einer Weise arbeiten, die fast handwerksmäßig zum Ziele führt.

Zum Beweis des Eulerschen Satzes.

Von OSKAR FABER † in Straßburg, Els.¹⁾

Der gewöhnlich in der Schule vorgetragene Beweis des Eulerschen Satzes²⁾ gilt unter der Voraussetzung, daß das Polyeder „im allgemeinen“ konvex sei. Was darunter zu verstehen ist, soll zunächst etwas näher erläutert werden. Ein beliebiges Polyeder werde entweder zentral oder parallel auf eine beliebige Ebene projiziert. Falls das Bild einer Ecke so beschaffen ist, daß alle Winkel zwischen zwei benachbarten Projektionen ihrer Kanten kleiner sind als zwei Rechte, werde das Bild bezeichnet als „Sternpunkt“, im andern Falle als „Halbsternpunkt“. Dann gilt der oben zitierte Beweis des Eulerschen Satzes, wie zunächst noch einmal kurz gezeigt werden soll, unter den folgenden Voraussetzungen:

1) Der Verfasser ist bei Ausbruch des Krieges als Kriegsfreiwilliger ins Heer eingetreten und am 11. Dezember 1914 bei Ypern gefallen.

Die Schriftleitung.

2) Vgl. z. B. Mehler, Elementarmathematik.

1. Jede Kante verbindet zwei und nur zwei Ecken.¹⁾
2. Das Polyeder ist einfach zusammenhängend und begrenzt von einfach zusammenhängenden Flächen.²⁾
3. Es existiert eine solche Projektion des Polyeders, daß sämtliche Eckenprojektionen im Innern der Umrißfigur Sternpunkte sind.

Die Anzahl der Ecken des Polyeders sei E , die der Flächen F und die der Kanten K .³⁾ Dann ist die über sämtliche Polyederflächen erstreckte Winkelsumme⁴⁾:

$$W = (K - F) \cdot 4R.$$

Dieselbe Summe bildet man jetzt in der Projektion, indem man in geeigneter Weise summiert. Sei m die Anzahl der innerhalb, also $(E - m)$ die Anzahl der auf der Umrißfigur liegenden Eckenprojektionen, dann ist die doppelt zu nehmende Winkelsumme der Umrißfigur $2(E - m)R - 4R^5$, die Winkelsumme über alle im Innern liegenden Eckenprojektionen $4mR^5$, so daß man erhält:

$$W = 2[2(E - m)R - 4R] + 4mR$$

und infolgedessen:

$$(K - F) \cdot 4R = (E - 2) \cdot 4R,$$

$$E + F = K + 2.$$

Das Fremdartige dieses Beweises liegt in der zweimaligen, verschieden ausgeführten Winkelsummierung und hat zur Folge, daß dem Schüler der ganze Beweis als ein Kunstgriff erscheint, während doch der nächstliegende Gedanke der des einfachen Abzählens wäre. Hier-von ausgehend gibt Müller⁶⁾ einen elementaren und durchsichtigen Beweis, der aber den Nachteil hat, daß verschiedene Fallunterscheidungen gemacht werden müssen, und daß einige sehr einschränkende Voraussetzungen eingeführt werden.⁷⁾

1) Das soll heißen: wenn eine Kante ohne Unterbrechung $n + 1$ Ecken verbindet, so wird die Kante n -fach gezählt.

2) Dabei soll Zusammenhang im Sinne der Analysis situs gemeint sein: eine ebene Fläche ist einfach zusammenhängend, wenn sie durch jede, zwei und nur zwei Punkte der Begrenzung enthaltende Schnittlinie in zwei Teile zerlegt wird; ein Polyeder ist einfach zusammenhängend, wenn es durch jede einfach zusammenhängende Schnittfläche in zwei Teile zerlegt wird.

3) Der jetzt folgende kurze Beweis ist nur eine unwesentliche Verallgemeinerung des unter 2) zitierten.

4) Vgl. z. B. Mehler, Elementarmathematik.

5) Dasselbe gilt, wenn mehrere Eckenprojektionen des Umrisses in einer Geraden liegen, oder wenn mehrere zusammenfallen, nur sind diese dann entsprechend vielfach zu zählen.

6) Zeitschrift für math. u. naturw. Unterr. 45, S. 178 ff.

7) So z. B. im dritten und vierten Abschnitt die Einschränkung, daß zwei Flächen nur eine Kante gemeinsam haben; das ist bei einfachen Polyedern schon dann nicht mehr der Fall, wenn eine Kante eingekerbt wird.