die Wirkung nur aus nächster Nähe schwach wahrnehmbar, weil die Lichtstärke erheblich geringer war und die rötliche Farbe des durchgelassenen Lichtes einer kleineren Drehung entspricht, während beim Schwefelkohlenstoff auch die viel stärker gedrehten brechbareren Strahlen durchgelassen werden.

Für die Aufgabe, eine passende Spule für höhere Feldstärke zu entwerfen, findet man in Kohlrausch, Prakt. Physik, Ziffer 114, die Angabe, daß ohne künstliche Kühlung 800 Gauß erreichbar sind. Wünschenswert wäre an derselben Stelle Zugabe der elektrotechnischen Unterlagen für den Entwurf. Da sie nirgends bequem beisammen zu finden waren, seien sie hier mitgeteilt, obgleich dem Verfasser ihre Erprobung nicht möglich war. Die Feldstärke in der Spule ist bei gegebener Spannung der Stromquelle von der Windungszahl in erster Näherung unabhängig; denn verdoppelt man letztere unter Benutzung derselben Kupferstärke, so drückt man die Stromstärke annähernd auf die Hälfte herab (wegen des zunehmenden Windungsumfangs käme man auf etwas weniger, jedoch steigt gleichzeitig wegen geringerer Erwärmung das spez Leitvermögen des Kupfers); die Amperewindungszahl bleibt also gleich. Maßgebend für die Feldstärke ist vielmehr die benutzte Kupferdrahtstärke; die Windungszahl muß dabei aus der Forderung berechnet werden, die Erwärmung innerhalb der zulässigen Grenze zu halten. Da im obigen Beispiel Draht von 0,2 mm Durchmesser 250 Gauß ergab, würde Draht von 0,35 mm ungefähr die nach Kohlrausch noch durchführbare Verdreifachung der Feldstärke herbeiführen. Die Erwärmung berechnet die Elektrotechnik nach der Formel

$$\text{Temperaturanstieg } \Delta\vartheta = 500 \cdot \text{Wattverlust} \cdot \text{Spulenoberfläche in qcm},$$

wobei die äußere Zylindermantelfläche der Wicklung voll, die innere halb gerechnet wird.[1])

Man erkennt aus ihr, daß die benutzte Spule schon sehr stark belastet war, da sie nach dieser Formel bei Dauerbetrieb um 140° erwärmt worden wäre.

Ersetzt man die Wicklung durch 3000 Windungen 0,35 mm starken Drahtes, so erhält man die verlangte Verdreifachung der Feldstärke, aber der Wattverbrauch wird ebenfalls verdreifacht, die Oberfläche dagegen nimmt nur wenig zu; sie wird von 700 zu etwa 725 qcm, im Sinne der obigen Vorschrift berechnet; die Erwärmung wird also auch fast verdreifacht. Verdreifacht man dagegen jetzt die Windungszahl, so sinkt die Wattzahl auf ein Drittel, während zugleich die Oberfläche auf etwa 800 qcm steigt; die Erwärmung geht also etwas unter den Betrag bei der jetzigen Spule herab und der gewünschte Zweck ist erreicht. Dieselbe Drehung hätte man mit 9000 Windungen 0,2 mm starken Drahtes auf einer Spule von dreifacher Achsenlänge erreicht; das Drahtgewicht stiege hierbei nur auf das Dreifache, bei der kurzen Spule auf das Neunfache; die Lichtschwächung ins Mangansulfat läßt jedoch für objektive Vorführung die kurze, schwere Spule besser erscheinen. (An sich ist die Drehung ein Maß nicht für Feldstärke sondern magnetische Spannung längs des Lichtweges.)

Ein weiterer denkbarer Kunstgriff zur Steigerung der Drehung bei der

1) Strecker, Hilfsbuch für die Elektrotechnik, 9. Aufl., S. 212 (1921), „wobei $\Delta\vartheta$ für Daueranschluß bei Lackdraht 80, bei Baumwollendraht 50, bei Seide nur gering werden darf".

objektiven Vorführung besteht in der Anwendung des Einzelschlag-Verfahrens.[1]) Würde man beispielsweise eine Spule aus Millimeterdraht an die Lichtleitung anschließen, so erhielte man 6250 Gauß. Man erkennt auch ohne Rechnung, daß das nur für kürzeste Zeiten geht; aber der optische Eindruck könnte so auffallend sein, daß er in dieser kurzen Zeit schon wahrnehmbar wird. Mit den dem Verfasser zu Gebote stehenden Einrichtungen war nur ein schwacher Versuch in dieser Richtung möglich; die mehrere Treppen höher gelegene Gebäude-Hauptsicherung, hinter welcher die Schalttafel schwächer gesichert liegt, läßt nur 20 Ampere durch; daher wurde nur mit einem Maximalausschalter für 6 Ampere gearbeitet. Als Spule diente die Primärspule desselben Gerätes, welchem bei den Dauerversuchen die Sekundärspule entnommen worden war; die Röhre war wieder 20 cm lang, aber entsprechend enger, so daß die Lichtstärke und daher die Empfindlichkeit gegen Drehung geringer war. Die Spule wurde ohne Ballast durch einen Schlag eines Leiters gegen einen andern für ganz kurze Zeit an die Lichtleitung angeschlossen, wobei der Maximalausschalter in Tätigkeit trat, ehe der Schlag zu Ende war; die Wirkung war nicht sicher wahrnehmbar.

Kleine Mitteilungen.

Nochmals die Gedächtnisregel für Sinus- und Kosinuswerte. (Mit 3 Figuren im Text.) (Vgl. diese Zeitschr. 56, 1925, S. 91—94.)

Eine zusammenfassende und übersichtliche Ableitung der einfachsten rationalen und algebraischen Sinus- und Kosinuswerte läßt sich durch Lösung folgender Übungsaufgabe aus dem Gebiet der komplexen Zahlen gewinnen:

Die zusammengesetzten Kreisteilungsgleichungen

$$(z^4-1)(z^6-1)=0 \qquad (1)$$

$$(z^8-1)(z^{12}-1)=0 \qquad (2)$$

$$(z^{16}-1)(z^{24}-1)=0 \qquad (3)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

goniometrisch und algebraisch zu lösen.

Die im folgenden ausgeführte Lösung mag als Beispiel für eine etwas größere Arbeit dienen, wie man sie unter geeigneten Verhältnissen einem Primaner aufgeben kann. Denn mit elementaren Hilfsmitteln werden hier von einem etwas erhöhten Standpunkt aus Ergebnisse, die, wie die Werte von sin 0°, sin 30° usw., im Anfangsunterricht aus Einzelfiguren abgeleitet wurden, zusammenfassend noch einmal gewonnen. Dabei treten Gegenstände, die im Kopf des Anfängers zunächst ein mehr oder weniger isoliertes Dasein fristen, miteinander in Verbindung, wie die algebraische Auflösung von Gleichungen (Zerlegen in Linearfaktoren), die komplexen Zahlen, die trigonometrischen Funktionswerte und Formeln, die regelmäßigen Vielecke, die arithmetischen Reihen.

Goniometrisch läßt sich die Gesamtheit der vierten und sechsten Einheits-

1) Vgl. Hermann, Aus der phys. Unterrichtspraxis 2, letzter Jahrg. der Korr.-Bl. f. d. höheren Schulen Württ., S. 24, 1923; Kapitza, Die Naturw. 14, 145, 1926.

wurzeln, die der Gleichung (1) genügen, geordnet nach steigender Größe der Abweichung $\frac{t}{12} \cdot 360^0$, folgendermaßen darstellen:

$$z = \cos\left(\frac{t}{12} \cdot 360^0\right) + i \sin\left(\frac{t}{12} \cdot 360^0\right) \tag{4}$$

$$[t = 0, 0, 2, 3, 4, 6, 6, 8, 9, 10]$$

$\frac{t}{12}$ durchläuft hierbei die Bruchreihe, die man erhält, wenn man in der Reihe

$$\frac{0}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12}$$

diejenigen Brüche streicht, die sich nicht zu Vierteln oder Sechsteln kürzen lassen und diejenigen doppelt zählt, die sich sowohl zu Vierteln als auch zu Sechsteln kürzen lassen.

In Fig. 1 ist die durch (4) ausgedrückte gleichzeitige Vier- und Sechsteilung des Einheitskreises ausgeführt. Die Werte der Abweichungen sind als Bruchteile einer vollen Umdrehung an die Teilpunkte geschrieben.

Um nun die Gleichung (1) auch *algebraisch* zu lösen, zerlegen wir ihre linke Seite folgendermaßen in reelle Faktoren zweiten Grades:

$$\left.\begin{aligned}(z^4-1)(z^6-1) = (z^2 - \mathbf{2}\cdot z + 1)(z^2 - \mathbf{1}\cdot z + 1)(z^2 + \mathbf{0}\cdot z + 1)\\ (z^2 + \mathbf{1}\cdot z + 1)(z^2 + \mathbf{2}\cdot z + 1).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Diese Zerlegung ist ausführbar unter bloßer Anwendung der elementaren Formeln:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Die Zerlegung (5) zeigt die bemerkenswerte Eigenschaft, daß die fünf quadratischen Faktoren eine arithmetische Reihe mit der Differenz z bilden. In dieser Gesetzmäßigkeit können wir die Ursache der „Gedächtnisregel" sehen.

Die Gleichung (1) zerfällt also in die 5 Gleichungen

$$z^2 + nz + 1 = 0 \quad [n = -2, -1, 0, 1, 2] \tag{6}$$

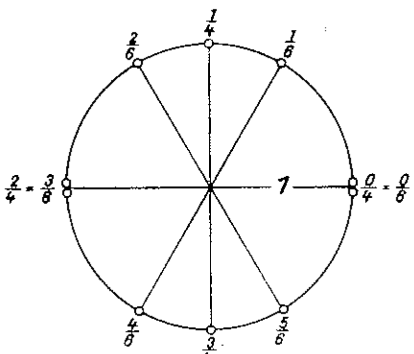

Fig. 1.

und hat somit die 10 Wurzeln

$$z = -\frac{n}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4 - n^2}. \quad [n = -2, -1, 0, 1, 2] \tag{7}$$

Hierbei soll n für das + Zeichen vor der Wurzel die Reihe −2, −1, 0, 1, 2 und für das − Zeichen die umgekehrte Reihe 2, 1, 0, −1, −2 durchlaufen. Dann sind nämlich wie bei der goniometrischen Darstellung die 10 Einheitswurzeln nach steigenden Abweichungen geordnet. Nun können wir unter Voraussetzung dieser gleichen Anordnung die goniometrische Darstellung (4) der algebraischen Darstellung (7) derselben Wurzeln gleichsetzen:

$$\left.\begin{aligned}\cos(t \cdot 30^0) + i \sin(t \cdot 30^0) = -\frac{n}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4 - n^2}\\ [t = 0, 2, 3, 4, 6, 6, 8, 9, 10, 12;\ n_+ = -2, -1, 0, 1, 2;\ n_- = 2, 1, 0, -1, -2].\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Durch Gleichsetzung der reellen und imaginären Teile der Formel (8) ergeben sich die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\cos\ 0^0 &= \frac{2}{2} & \sin\ 0^0 &= \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2^2}\\
\cos\ 60^0 &= \frac{1}{2} & \sin\ 60^0 &= \frac{1}{2}\sqrt{4 - 1^2}\\
\cos\ 90^0 &= \frac{0}{2} & \sin\ 90^0 &= \frac{1}{2}\sqrt{4 - 0^2}\\
\cos 120^0 &= \frac{-1}{2} & \sin 120^0 &= \frac{1}{2}\sqrt{4 - (-1)^2}\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

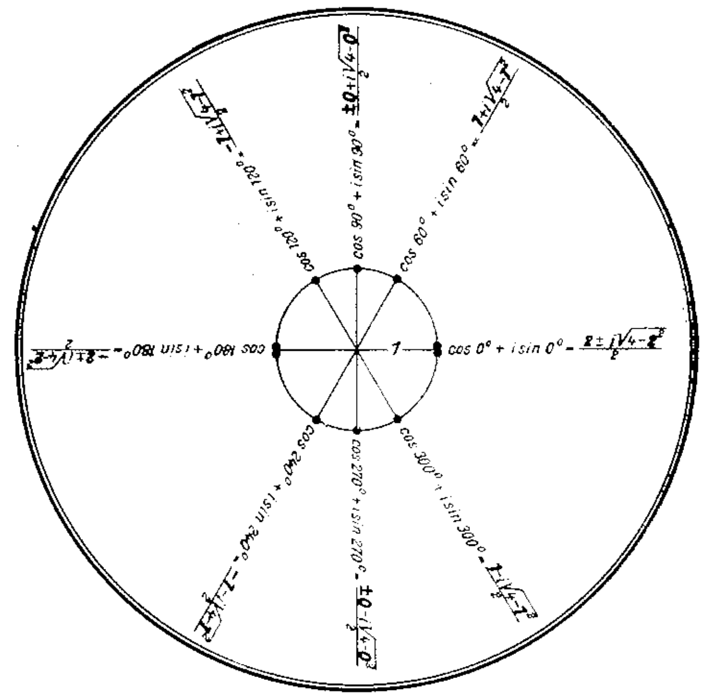

Fig. 2

Man kann diese Formeln alle aus Fig. 2 herauslesen.

Um nun zu den Lösungen der Gleichung (2) und damit zu den halben Winkeln überzugehen, brauchen wir nur aus beiden Seiten der Gleichung (8) die Quadratwurzel zu ziehen, und zwar aus der linken Seite goniometrisch nach der Formel

$$\sqrt{\cos\alpha + i \sin\alpha} = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + k \cdot 180^0\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2} + k \cdot 180^0\right) \quad [k = 0, 1]$$

und aus der rechten Seite algebraisch nach der Formel

$$\sqrt{a + bi} = \pm\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}} \pm i\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}},$$

die hier, da der absolute Betrag $\sqrt{a^2+b^2}$ gleich 1 ist, die einfache Form

$$\sqrt{a+bi} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2a+2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{-2a+2}$$

annimmt und eine Zusammenfassung der beiden „Halbwinkelformeln" darstellt. Wir erhalten so die Gesamtheit der achten und zwölften Einheitswurzeln:

$$\left.\begin{aligned} &\cos(t\cdot 15^0 + k\cdot 180^0) + i\sin(t\cdot 15^0 + k\cdot 180^0)\\ &\qquad = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-n+2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{n+2}\\ &[t=0,2,3,4,6,6,8,9,10,12;\ k=0,1;\ n=-2,-1,0,1,2]. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Auf der rechten Seite sind die Vorzeichen vor den Wurzeln voneinander unabhängig zu kombinieren, + mit + und — und — mit + und —. Auf

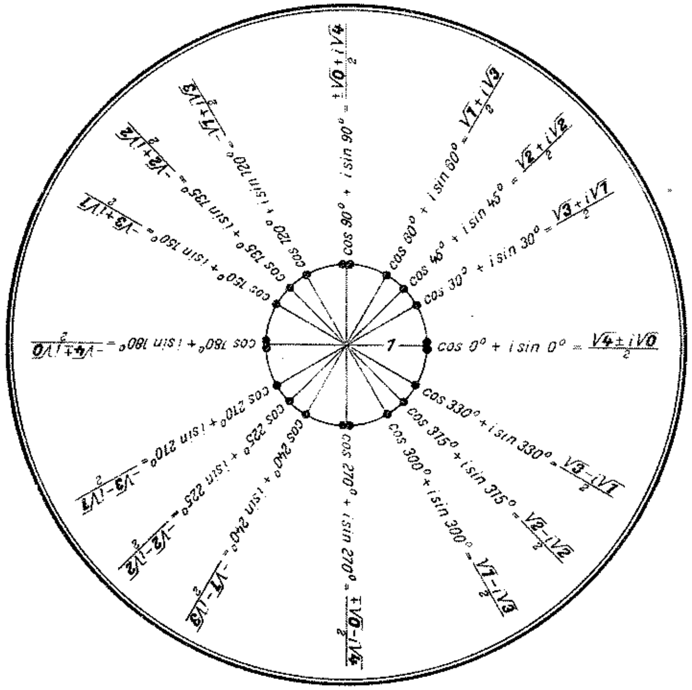

Fig. 3.

beiden Seiten denke man sich wieder die Wurzeln nach steigenden Werten der Abweichung geordnet. Ausführlich sind die Gleichungen (9) in Fig. 3 niedergelegt. Aus ihr liest man durch Vergleichung der reellen und imaginären Teile die *Gedächtnisregel* heraus:

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\ 0^0 = \frac{1}{2}\sqrt{4} & \sin\ 0^0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}\\ \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} & \sin 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1}\\ \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} & \sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \qquad (9\,\mathrm{a})$$

Zieht man aus beiden Seiten der Gleichung (9) noch einmal die Quadratwurzeln, so erhält man die Lösungen der Gleichungen (3), nämlich die Gesamtheit der 16ten und 24ten Einheitswurzeln:

$$\left.\begin{aligned} &\cos(t\cdot 7{,}5^0 + k\cdot 90^0) + i\sin(t\cdot 7{,}5^0 + k\cdot 90^0)\\ &\qquad = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{-n+2}} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2\mp\sqrt{-n+2}}\\ &[t=0,2,3,4,6,6,8,9,10,12;\ k=0,1,2,3;\ n=-2,-1,0,1,2]. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Bei den Doppelzeichen unter der Wurzel ist das obere Zeichen mit dem oberen, das untere mit dem unteren zu kombinieren; die Zeichen vor den Wurzeln sind unabhängig zu kombinieren, also jedes mit jedem. Ausführlich liefert die Formel (10), wenn man die Wurzeln nach steigender Größe der Abweichung ordnet, die von W. Jaeckel aufgestellte Formelgruppe:

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\ 0^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{4}} & \sin\ 0^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{4}}\\ \cos\ 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} & \sin\ 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\\ \cos 22{,}5^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} & \sin 22{,}5^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\\ \cos\ 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{1}} & \sin\ 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{1}}\\ \cos\ 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{0}} & \sin\ 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2\mp\sqrt{0}}\\ \cos\ 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{1}} & \sin\ 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{1}}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \qquad (10\,\mathrm{a})$$

Durch erneutes Quadratwurzelziehen kann man weitere Formelgruppen für die immer wieder halbierten Winkel aufstellen. Auch läßt sich rückwärts durch Quadrieren der Formel (8) eine solche für die Gesamtheit der zweiten und dritten Einheitswurzeln, also für die Kosinus und Sinus von 0^0, 120^0, 180^0, 240^0 gewinnen.

Bemerkenswerte Formen nimmt übrigens die „Gedächtnisregel" auch für die Funktionen Tangens und Kotangens an. So findet man z. B., indem man in Fig. 3 jedesmal den Sinuswert durch den Kosinuswert dividiert, für die Richtungsfaktoren der in dieser Figur gezeichneten Strahlen folgende Werte:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{tg}\ \ 0^0 = \sqrt{\frac{0}{4}} & \mathrm{tg}\ 60^0 = \sqrt{\frac{3}{1}}\\ \mathrm{tg}\ 30^0 = \sqrt{\frac{1}{3}} & \mathrm{tg}\ 90^0 = \sqrt{\frac{4}{0}}\\ \mathrm{tg}\ 45^0 = \sqrt{\frac{2}{2}} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \qquad (9\,\mathrm{b})$$

Unter den Wurzeln stehen Brüche, deren Zähler und Nenner jedesmal die Summe 4 haben. Nimmt der Zähler um 1 zu, so nimmt der Nenner um 1 ab.

Marburg (Lahn). P. Luckey.

Eine Zinseszinsaufgabe aus der Praxis. Von kaufmännischer Seite wurde mir vor einiger Zeit folgender Sachverhalt zur Begutachtung vorgelegt: