Symmetrie mit einem Umdrehungswinkel von $\frac{360^\circ}{2n}$ die n-fache Ecken- und die n-fache Seitensymmetrie.

Ein regelmäßiges $(2n+1)$-Eck hat außer der vollkommenen zentrischen Symmetrie mit einem Umdrehungswinkel von $\frac{360^\circ}{2n+1}$ noch die $(2n+1)$-fache Lotsymmetrie.

Fortsetzung folgt.

Kriegsnomogramme.

Von P. Luckey in Elberfeld, z. Zt. im Felde.

Mit Figuren 9—15 im Text.

(Fortsetzung von Seite 15 und Schluß.)

V.

Die beiden parallelen Skalenträger U und V (Fig. 9) werden von dem Skalenträger W in A und B geschnitten. A und B seien die Anfangspunkte der U- und der V-Achse; O, der Mittelpunkt von $AB = 2\delta$, sei der Anfangspunkt der W-Achse. Die positiven Richtungen der Achsen sind durch Pfeilspitzen bezeichnet. Sind P, Q und R drei beliebige Punkte der Achsen mit den Koordinaten u, v und w, so ist nach der Figur die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sie auf einer Flucht liegen:

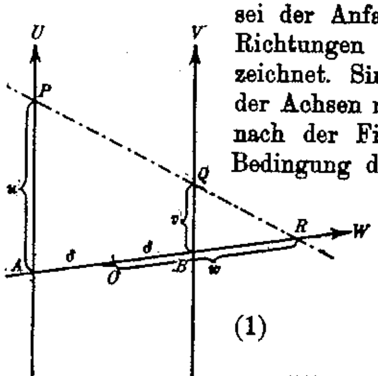

Fig. 9.

$$AP : BQ = AR : BR$$

oder

$$u : v = (w+\delta) : (w-\delta),$$

(1) $$u + v\,\frac{w+\delta}{\delta-w} = 0.$$

Wir können mit Hilfe dieses Koordinatensystems eine beliebige Gleichung zwischen drei Veränderlichen α, β, γ darstellen, die sich auf die Form

(2) $$f_1(\alpha) + f_2(\beta)\cdot f_3(\gamma) = 0$$

bringen läßt. Denn bringen wir auf der U- und der V-Achse die Leitern

(3) $$u = l_1 f_1(\alpha)$$
$$v = l_2 f_2(\beta)$$

an und setzen wir diese Werte für u und v in Gleichung (1) ein, so erhalten wir:

$$l_1 f_1(\alpha) + l_2 f_2(\beta)\cdot\frac{w+\delta}{\delta-w} = 0,$$

$$f_1(\alpha) + f_2(\beta)\cdot\frac{l_2}{l_1}\,\frac{w+\delta}{\delta-w} = 0.$$

Z. math. nat. Unterricht 48 (1917)

Diese Gleichung geht in (2) über, wenn wir

$$\frac{l_2}{l_1}\,\frac{w+\delta}{\delta-w} = f_3(\gamma)$$

setzen. Daraus folgt aber durch Auflösung nach w, daß auf der w-Achse die Leiter

(3a) $$w = \delta\,\frac{l_1 f_3 - l_2}{l_1 f_3 + l_2}$$

anzubringen ist.

Beispiel: *Würfelförmige Kästen für Sprengladungen.* Das vorige Beispiel erheischte ein Nomogramm für die Formel

(4) $$l = \sqrt[3]{\frac{L}{D}},$$

wo l die in dm gemessene Kante des würfelförmigen Kastens ist, der L kg Sprengstoff vom spezifischen Gewicht D enthält. Schreiben wir die Gleichung

(5) $$L - l^3 D = 0,$$

so hat sie die Form (2), und wir können nun setzen:

(6) $$u = l_1 L$$
$$v = l_2(-D)$$
$$w = \delta\,\frac{l_1 l^3 - l_2}{l_1 l^3 + l_2}.$$

Wir zeichnen zunächst die beiden parallelen Leitern für L und D, und zwar L für den Bereich 10 kg bis 100 kg und D für den Bereich 0,800—1,400, der für Schießpulver, Schießbaumwolle und Dynamit in Betracht kommt. Die beiden ersten der Gleichungen (6) zeigen, daß die beiden Skalen regelmäßige sind, und zwar steigen, wegen der entgegengesetzten Vorzeichen, die Bezifferungen in entgegengesetzten Richtungen. Wir wählen die Maßstäbe beliebig, aber so, daß die Leitern annähernd gleich lang werden und bequem mit einem Millimetermaßstab hergestellt werden können. Auch ihr Abstand ist beliebig und richtet sich nach dem Format, den das Nomogramm haben soll. So erhalten wir die beiden parallelen Leitern der Fig. 10, in der für die L-Leiter zunächst nur die rechte Bezifferung gilt. Statt nun nach der ursprünglichen Vorschrift den Träger der W-Leiter als Verbindungslinie der Anfangspunkte der U- und V-Leiter zu konstruieren (wozu das Papier nicht ausreichen würde) und die W-Leiter nach der dritten der Gleichungen (6) zu errechnen und aufzutragen (was umständlich wäre), zeichnen wir die W-Leiter folgendermaßen. Durch Kopfrechnen finden wir, daß der Gleichung (5) oder der Gleichung

(4a) $$\frac{L}{D} = l^3$$

Würfelförmige Kästen für Sprengstoffe

$$l = 10\sqrt[3]{\frac{L}{D}} \quad \begin{cases} l = \text{Kante des Kastens in cm} \\ L = \text{Sprengstoffladung in kg} \\ D = \text{Dichte des Sprengstoffes} \end{cases}$$

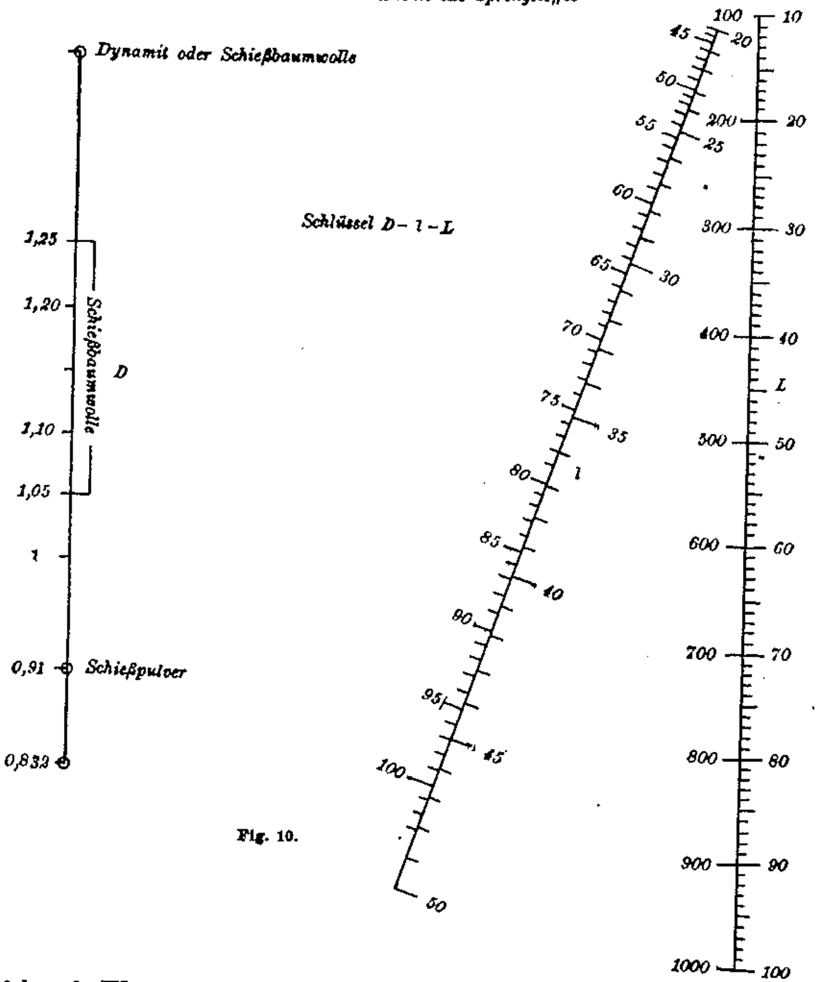

Fig. 10.

folgende Wertzusammenstellungen genügen:

L	D	l
8	1,00	2
10	1,25	2
100	0,8	5
750	0,6	5

Damit sind die mit 2 dm und 5 dm zu beziffernden Punkte der l-Leiter, jeder als Schnittpunkt zweier Verbindungsgeraden, gefunden. (In

Fig. 10 heißen die Punkte 20 und 50, da l in cm angegeben ist.) Hat man aber nun den Träger der l-Leiter gezeichnet, so kann man leicht ein Gerippe bezifferter Punkte auf ihm finden. Z. B. genügen der Gleichung (5a) auch folgende Wertetripel:

L	D	l
15,6	1	2,5
27	1	3
42,9	1	3,5
64	1	4
91,1	1	4,5

Wenn hiernach die Punkte $l = 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$ cm der l-Leiter gezeichnet sind, genügt es für die bei diesem Nomogramm erforderliche Genauigkeit, die weitere Unterteilung nach dem Augenmaß einzuschalten.

Die Einteilungen auf der linken Seite der L- und der l-Leiter lösen die Formel für den weiteren Bereich $L = 100$ kg bis 1000 kg. Die Begründung ihrer Herstellung bleibe dem Leser überlassen. In der Leiter für D sind die Punkte für häufig zur Anwendung kommende Sprengstoffsorten besonders gekennzeichnet.

VI.

Die beiden parallelen Variablenträger U und V mit den Anfangspunkten A und B (Fig. 11) sollen als Grundlage eines Systems von Linienkoordinaten dienen, das den Namen „Parallelkoordinaten" führt. $AP = u$ und $BQ = v$ sind *die Koordinaten der* durch die Punkte P und Q gelegten *Geraden*. Die Strecke AB wollen wir den *Steg* des Koordinatensystems nennen. Jede beliebige Gerade der Ebene ist durch Angabe ihrer Koordinaten u und v eindeutig bestimmt. Zur Durchführung der Dualität suchen wir die *Gleichung eines Punktes* der Ebene. Diese Gleichung läßt sich leicht unmittelbar ableiten[1]), *wir* finden sie hier am schnellsten im Anschluß an die im ersten Abschnitt zu Fig. 1 abgeleitete Gleichung

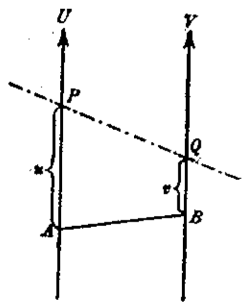

Fig. 11.

$$(1) \qquad w = \frac{n}{m+n}u + \frac{m}{m+n}v.$$

Betrachten wir nämlich in dieser Gleichung w als eine Konstante, die wir k nennen wollen, und beachten wir die im ersten Abschnitt festgelegte Bedeutung von $w = k$ und $m : n$, so lehrt die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{n}{m+n}u + \frac{m}{m+n}v = k$$

1) Die Ableitung der der kartesischen Gleichung einer Geraden $y = mx + q$ entsprechenden Gleichung des Punktes in Parallelkoordinaten $v = mu + b$ findet man in dem angeführten Aufsatz XLVI, S. 4.

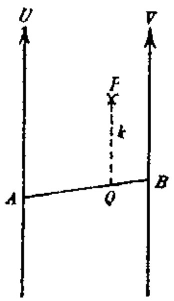

Fig. 12.

folgendes: Alle Geraden, deren Koordinaten u und v der Gleichung (2) genügen, gehen durch einen Punkt P (Fig. 12), dessen parallel zu den Koordinatenachsen gemessene Entfernung vom Steg die Größe $QP = k$ hat und diesen im Verhältnis $AQ : BQ = m : n$ teilt. Die Gleichung (2) kann deshalb *die Gleichung des Punktes P in Parallelkoordinaten* genannt werden, und zwar wollen wir sie wegen der Bedeutung ihrer Konstanten *die Normalform* der Gleichung des Punktes nennen. Sie entspricht der Hesseschen Normalform der Gleichung der Geraden in kartesischen Koordinaten und ist dadurch gekennzeichnet, daß die Summe der Koeffizienten von u und v den Wert 1 hat, ebenso wie bei der Hesseschen Normalform die Summe der Quadrate der Koeffizienten von x und y den Wert 1 hat. Nun sieht man, daß jede beliebige Gleichung des ersten Grades

$$au + bv + c = 0 \tag{3}$$

die Gleichung eines Punktes ist; denn man kann sie dadurch, daß man sie durch $a + b$ dividiert, auf die Normalform

$$\frac{a}{a+b}u + \frac{b}{a+b}v = -\frac{c}{a+b} \tag{4}$$

bringen. Den Punkt P, den die Gleichung (3) darstellt, kann man nach den Angaben

$$m : n = b : a \tag{5}$$

$$k = -\frac{c}{a+b} \tag{6}$$

zeichnen.

Nach der so festgelegten Dualität kann man eine graphische Darstellung in kartesischen Koordinaten in eine solche in Linienkoordinaten übersetzen. Die bisher betrachteten Nomogramme lassen sich als solche Übersetzungen auffassen. Im folgenden Beispiel wollen wir die Übersetzung wirklich ausführen, und zwar soll es sich dabei um die Darstellung eines empirischen Gesetzes handeln.

Beispiel: *Schußweiten der französischen 155er Kanone.*[1]) Das Geschoß eines Belagerungsgeschützes gehe unter dem Winkel Φ mit der Anfangsgeschwindigkeit V ab und erreiche eine Gesamtschußweite W. Man hat gefunden, daß sich die Abhängigkeit zwischen diesen drei Größen für kleine Abgangswinkel Φ durch die Formel

$$\sin 2\Phi = f(V)F(W) \tag{7}$$

darstellen läßt, in der f und F empirisch bekannte Funktionen sind. Um diese Formel auf größere Werte von Φ auszudehnen, bringt man

1) Die „ballistischen Abaken" im vierten Bande des Lehrbuchs der Ballistik von Cranz sind sämtlich Netztafeln in einem gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinatensystem.

auf den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems die Funktionsteilungen

$$(8) \qquad \begin{aligned} x &= l \cdot F(W) \\ y &= l \cdot \sin(2\Phi) \end{aligned}$$

an und trägt in das so erhaltene Netz die Punkte ein, die nach den Schießversuchen zu solchen Werten von W und Φ gehören, bei denen das Geschoß ein und dieselbe Anfangsgeschwindigkeit V hatte, also mit anderen Worten die Ergebnisse der Anwendung einer bestimmten Munition (Sprengstoffladung) auf das Geschütz. Für jeden solchen Wert von V verbindet man diese verschiedenen Punkte durch eine Linie (Fig. 13). Diese Linie geht durch den Anfangspunkt und fällt zunächst mit ihrer Tangente in diesem Punkte fast zusammen, entsprechend der Tatsache, daß, wie gesagt, für kleine Werte von Φ die Formel (5) merklich genau ist. Die Linie entfernt sich dann zwar von dieser Geraden, aber wenn man das Stück MN der Kurve betrachtet, das zu den tatsächlich in Anwendung kommenden Schußweiten gehört (für Mörser z. B. $2000\text{ m} \leq W \leq 5000\text{ m}$), so weicht dieses begrenzte Linienstück wenig von dem entsprechend begrenzten Stück einer *Geraden* ab, die in der Figur strichpunktiert ist. Mit hinreichender Annäherung kann man die empirische Kurve in den betrachteten Grenzen durch die Gerade ersetzen, und zwar gilt das Entsprechende für alle praktisch in Betracht kommenden Werte von V, d. h. also für alle diese Kurvenstücke der Kurvenschar $V =$ const, von der wir nur einen einzigen Vertreter gezeichnet haben. Eine sorgfältige Zeichnung der bezifferten Kurvenschar $V =$ const im Netze der Scharen $W =$ const (Parallelen zur Y-Achse) und $\Phi =$ const (Parallelen zur X-Achse) für den in Betracht kommenden Bereich der drei Variablen könnte nun als Nomogramm für die Formel (5) dienen. Viel bequemer und klarer als das Liniengewirr einer solchen *Netztafel*, das einem beim Gebrauch auf die Augen und auf die Nerven geht, ist aber ein Nomogramm nach dem Verfahren der fluchtrechten Punkte. Nachdem wir die Kurvenschar $V =$ const durch eine Geradenschar ersetzt haben, können wir die Netztafel in eine solche *Fluchttafel* übersetzen. Statt auf einer X- und Y-Achse bringen wir jetzt die beiden Funktionsteilungen auf zwei parallel zueinander stehenden Achsen U und V an:

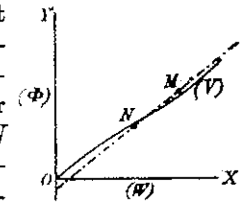

Fig. 13.

$$(9) \qquad \begin{aligned} u &= l_1 F(W) \\ v &= l_2 \sin(2\Phi). \end{aligned}$$

Fig. 14 zeigt diese Skalen W und Φ. Während in der Netztafel jedem bestimmten Werte von V eine Gerade entsprach, muß ihr jetzt ein Punkt entsprechen, und die Schar dieser Punkte $V =$ const wird sich zu einer *Kurve* anordnen, auf der wir die V-Werte als *Skala* anbringen.

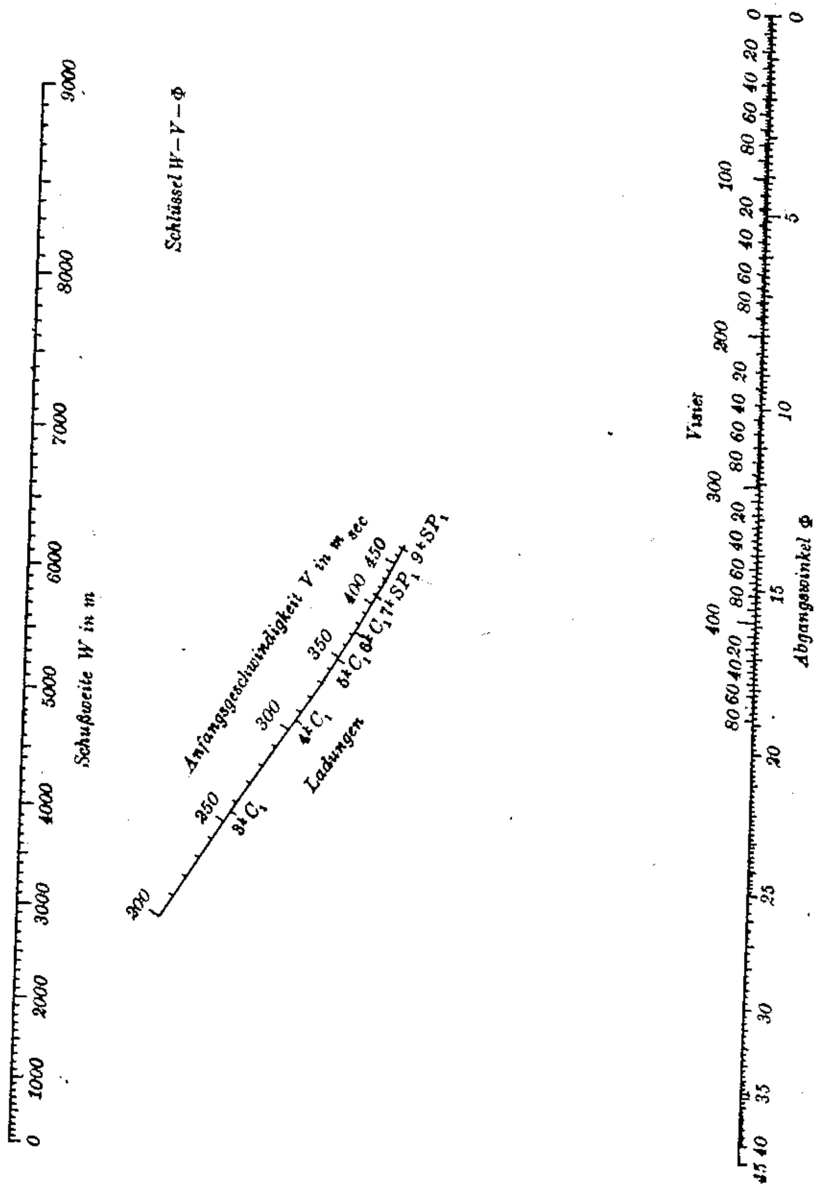

Fig. 14.

Da die Anfangsgeschwindigkeit für ein bestimmtes Geschütz eindeutig von seiner *Ladung* abhängt, so ist am Skalenträger der V-Werte nach der anderen Seite eine Skala der zugehörigen Ladungen in kg angebracht. Ebenso ist am Träger der Abgangswinkel Φ noch die Leiter der Visierstellungen angebracht.

Durch ein derartiges Nomogramm mit zwei parallelen Leitern und einer krummlinigen Leiter läßt sich jede Gleichung zwischen drei Veränderlichen α, β, γ darstellen, die in bezug auf zwei derselben, z. B. α und β, linear ist und deren Koeffizienten beliebige Funktionen der dritten Veränderlichen γ sind, also jede Gleichung von der Form

$$\varphi(\gamma) \cdot f_1(\alpha) + \psi(\gamma) \cdot f_2(\beta) + \chi(\gamma) = 0. \tag{10}$$

Die Gleichung (7) war in bezug auf W und Φ linear.

Das Nomogramm Fig. 14 kann benutzt werden, um zu zwei beliebig gegebenen, praktisch vorkommenden der drei Größen Visierstellung, Ladung, Schußweite die dritte zu finden.

Das Nomogramm rührt von dem französischen Artilleriehauptmann Lafay her.[1]) Es ist einer 34 cm × 38 cm großen Tafel entnommen, auf der Lafay die verschiedenen, für das Schießen der französischen 155er Kanone in Betracht kommenden Rechnungen durch Nomogramme ausführbar gemacht hat. Durch Beziehungsbuchstaben (Schlüssel) ist auf dieser Tafel angegeben, wie die verschiedenen Funktionsleitern zur Verbindung gebracht werden, so daß auch der Unkundigste sich mechanisch sofort zurechtfindet. Der russische Artillerieoberst Langensheld hat die Arbeit Lafays auf Küstenmörser ausgedehnt.

VII.

Der mathematische Unterricht sucht wie jeder andere Unterricht aus dem Kriege zu lernen, um Richtpunkte für seine zukünftige Entwicklung zu nehmen. Es ist nicht damit getan, wenn wir als Anwendungen und Aufgabenstoffe Kriegswissenschaft und Nationalökonomie mehr berücksichtigen. Nach dem Kriege möchten wir es satt werden, wenn in unseren Lehrbüchern außer den obligaten graphischen Eisenbahnfahrplänen auch die in den Aufgaben herumsausenden Granaten zum guten Ton gehörten.

Unsere höchste militärische Tugend ist vielleicht die *Schlagkraft*, die Fähigkeit, vermöge deren in sorgsamer, gründlicher und genialer Weise angesammelte Kräfte in überraschendem Schlage plötzlich zur Auslösung kommen. Diese *Schlagkraft* wohnt in höchstem Maße der *angewandten Mathematik* inne.

Das Nomogramm ist die mathematische Formel in Alarmbereitschaft. Die Werte der Veränderlichen, auf den drei Skalen ausgerichtet wie eine Kompagnie in Zugkolonne, stehen in höchster Bereitschaft, gewappnet für den Augenblick der Anwendung, während dieselbe Formel, durch eine Kurve in rechtwinkligen Koordinaten dargestellt, ein Bild der satten, theoretischen Beschaulichkeit des wehrlosen Zivilisten darstellt.

1) D'Ocagne, Tr. d. N., S. 20.

Die einzigartige Bedeutung des kartesischen Kurvenbildes für die Anschaulichkeit einer Funktion ist nicht zu bestreiten. Dennoch nimmt es auch in bezug auf die Anschaulichkeit die *Doppelskala* oft mit der Kurve auf. Es ist z. B. zweifellos anschaulicher, die Formel des freien Falles $s = \frac{1}{2}gt^2$ durch eine Doppelleiter mit nach unten wachsendem s darzustellen als durch eine Kurve. Dasselbe gilt für die Formel der barometrischen Höhenmessung. Die Doppelleiter zeigt auch viel unmittelbarer als die Kurve, wie die Wertepaare der beiden Veränderlichen einander zugeordnet, aneinandergeschmiedet sind.

Ferner ist die Nomographie ein Mittel, den Lernenden die Universalität analytisch-geometrischer Methoden erleben zu lassen. Es liegt die Gefahr vor, daß unsern Schülern die analytische Geometrie in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten, die als analytische Geometrie der Kegelschnitte leicht der Versteinerung anheimfällt, das Gebiet wird, mit dem allein sie den Variablen- und Funktionsbegriff assoziieren. Und die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten möchten Gefahr laufen, zu einem privilegierten kgl. preußischen Staatskoordinatensystem und Schulbücher-Graphischen-Darstellungssystem zu werden, wie nach Hoffmanns Ausspruch die Ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ zur kgl. preußischen Staats- und Prüfungsellipse geworden ist. Es genügt auch nicht *zu sagen*, daß z. B. auch die Stücke eines Dreiecks Variable sind. Demgegenüber macht die Nomographie die Stücke irgendeiner Figur zu *Variablenträgern*. Jeder elementare geometrische Lehrsatz kann das Gefüge zu einem mehr oder minder zweckmäßigen Nomogramm abgeben.

Schwierigkeiten liegen nicht vor, wenn sich der Lehrer entschlossen hat, die Funktionsleiter durchzunehmen, und das muß er, wenn er den Rechenschieber durchnimmt, der ja auch in die Nomographie gehört.

Es scheint mir kein Fehler zu sein, daß das fertige Nomogramm alles Lehrhafte abgestreift hat und rein nach praktischen Zwecken eingerichtet ist. Vielmehr ist es ein Anreiz für das jugendliche Gemüt, eine solche *Rechenmaschine* herzustellen, bei der schließlich alle Spuren der Erzeugungsweise verwischt sind, und die dann so glatt und mühelos langwierige Rechnungen von selbst ausführt.

Wenn jemand beim Anblick von Nomogrammen den Eindruck gewinnt, daß es sich hier um spezialtechnische Dinge handle, so wolle er bedenken, daß auch die Diagramme in kartesischen Koordinaten *aus der Technik* den Weg in die Physik, Chemie und Mathematik genommen haben. Die Schule braucht nur die Methode auf *ihre Stoffe* anzuwenden. Der Physik- und Chemieunterricht gibt reichlich Stoff zu solchen Nomogrammen, Nomogrammen, die in physikalischen und chemischen Schülerübungen wirklich benutzt werden können. Jeder Demonstrationsapparat, jeder Schülerübungsapparat kann in der Sammlung sein

fertiges, mit den besonderen Konstanten dieses Apparates gezeichnetes Nomogramm haben, durch das sich auch der Lehrer die Kontrolle von Übungsergebnissen erleichtern kann, wenn er den Schülern das Nomogramm nicht in die Hand gibt. Als Beispiel habe ich in Fig. 15 nach den Grundsätzen des zweiten Abschnitts ein Nomogramm für das Gewicht eines Liters Luft

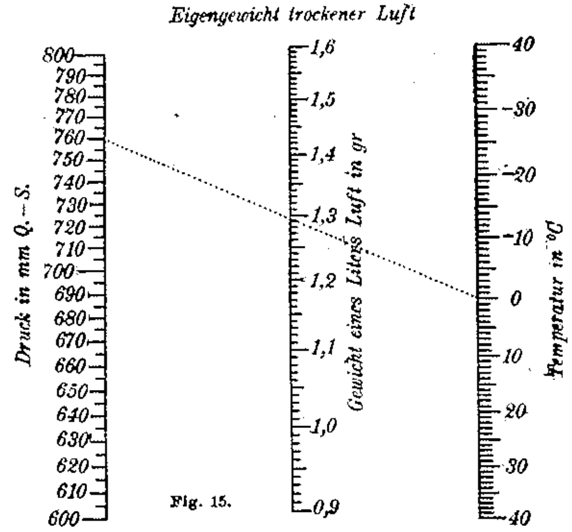

Fig. 15.

gezeichnet.[1]) In diesem Sinne möchte ich auch die „Kriegsnomogramme", die zur Zeit vielleicht interessieren mögen, nicht allgemein als einen Stoff für die Schulbetätigung empfehlen. Denn nicht mit Minen und Kanonen, sondern mit Wage und Maßstab hantiert bei uns der Schüler. Wenn er das gelernt und sonst das Herz auf dem rechten Fleck hat, wird er auch, wenn es sein muß, mit Minen und Kanonen seinen Mann stellen.

Die Tätigkeit des Deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission 1908—1916.

Bericht anläßlich der Fertigstellung der „Abhandlungen" erstattet von

A. Gutzmer in Halle a. S.

(Fortsetzung von Seite 25.)

Es bedurfte zunächst längerer mündlicher und schriftlicher Verhandlungen, um die Grundlagen für die Organisation und den Arbeitsplan der IMUK zu gewinnen. Insbesondere seien Beratungen zwischen Klein und Gutzmer zu Göttingen am 11. und 12. Juni 1908, sowie zwischen Klein und Smith daselbst im Laufe des Sommers jenes Jahres, ferner ein ausgedehnter Briefwechsel zwischen den Genannten, sowie Fehr und Lietzmann erwähnt. Bei Gelegenheit der Kölner Naturforscherversammlung 1908 wurde sodann zur Deutschen Mathematiker-

1) In der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht und in dieser Zeitschrift wird je eine Abhandlung mit weiteren Beispielen für „Schulnomogramme" folgen.