

MATHEMATISCH-
PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK
REIHE I
HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING

59/60

NOMOGRAPHIE

PRAKTISCHE ANLEITUNG ZUM ENTWERFEN
GRAPHISCHER RECHENTAFELN MIT DURCHGEFÜHRTEN
BEISPIELEN AUS WISSENSCHAFT UND TECHNIK

VON

PAUL LUCKEY

OBERSTUDIENRAT I. R.

DRITTE VERBESSERTE AUFLAGE

MIT 57 FIGUREN IM TEXT
UND 48 AUFGABEN



1937

LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

Erklärung zu umstehender Figur siehe auf Seite 46.

Richard Müller, Leipzig

VORWORT ZUR ZWEITEN UND DRITTEN AUFLAGE

Bei der zweiten Auflage habe ich den Inhalt durchgreifend neu bearbeitet und beträchtlich erweitert. Hierbei wurden besonders Anwendungsbeispiele aus verschiedenen Zweigen der Technik aufgenommen, um das Büchlein auch für den Techniker brauchbar zu machen. An Vorkenntnissen sind nur die Grundbegriffe der analytischen Geometrie der Ebene erforderlich.

Neben den einfachen und zusammengesetzten Netz- und Leitertafeln behandle ich die Tafeln mit beweglichen bezifferten Systemen (die ein- und zweidimensionalen Sonderschieber). Da diese Nomogramme das noch wenig bebaute, aber für die Anwendungen wichtige Feld der Beziehungen zwischen einer größeren Zahl von Veränderlichen erschließen helfen, wurden sie ausführlicher und allgemeiner behandelt, als dies bisher in nomographischen Lehrbüchern der Fall war.

Bei der dritten Auflage wurde der Text an einzelnen Stellen berichtigt und das Schriftenverzeichnis erneuert und erweitert. Die Angabe der besonderen Nomogramme entspricht größtenteils dem Merkblatt „DK 518,3, Nomographie, Graphisches Rechnen“ der Beratungsstelle für Technisches Schrifttum, Berlin NW 7, Dorotheenstr. 32.

Die Belange der Nomographie pflegt der Ausschuß für graphische Rechenverfahren, Berlin W 9, Linkstr. 18.

Es sei noch bemerkt, daß die in dem Büchlein als „halb-logarithmisches“ und „logarithmisches Papier“ bezeichneten Netzpapiere von der herstellenden Firma „einfachlogarithmisches“ und „doppeltlogarithmisches Papier“ (das letztere auch „Potenzpapier“) genannt werden.

z. Z. Tübingen, im März 1937.

P. Luckey.

INHALT

	Seite
Schriften	5
Erster Abschnitt	
Funktionsleitern	7
Zweiter Abschnitt	
Netztafeln	13
Dritter Abschnitt	
Graphisches Rechnen und Auswerten auf Funktionspapieren .	24
Vierter Abschnitt	
Eine Fluchtentafel	35
Fünfter Abschnitt	
Die Fluchtentafel mit drei parallelen Leitern	40
Sechster Abschnitt	
Die Fluchtentafel mit drei geraden Leitern	46
Siebenter Abschnitt	
Die allgemeine Fluchtentafel	54
Achter Abschnitt	
Zusammengesetzte Netz- und Fluchtentafeln	68
Neunter Abschnitt	
Eindimensionale Tafeln mit beweglichen bezifferten Systemen	82
Zehnter Abschnitt	
Zweidimensionale Tafeln mit beweglichen bezifferten Systemen	88
Besondere Nomogramme	107
Schlüsselgleichungen	108

SCHRIFTEN

- AWF, Graphisches Rechnen. Beispielsammlung und Richtlinien für Anfertigung und praktische Ausgestaltung von Rechentafeln. Bearb. von Studienrat H. Schwerdt. 3. Aufl. Berlin 1937.
- AWF, Sonderrechenstäbe, ihre Anwendung und ihr Entwurf, mit einer logarithmischen Teiltafel. Bearb. von Ing. F. Bahlecke. Berlin 1931.
- Grosse, W. Graphische Papiere und ihre vielseitige Anwendung. Düren 1918 (179 Seiten).
- Hammer, E. Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. 6. Aufl. Stuttgart 1923 (78 Seiten).
- Konorski, B. M. Die Grundlagen der Nomographie. Berlin 1923 (86 Seiten).
- Lacmann, O. Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln. Ein Lehrbuch der Nomographie. Berlin 1923 (100 Seiten).
- Leybold, P. 31 logarithmische Maßstäbe mit einer Harfe zur Selbstanfertigung von Nomogrammen. 1927.
- Luckey, P. Einführung in die Nomographie, I. Teil: Die Funktionsleiter. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1925. Math.-phys. Bibl. 28 (60 Seiten).
- Mayer, M., Dr.-Ing. Nomographie des Bauingenieurs. Berlin und Leipzig 1927. Sammlung Göschen (111 Seiten).
- Mehmke, R. Numerisches Rechnen. Encyklopädie der math. Wiss. Bd. I. Leipzig 1902 (S. 938—1079).
- Mehmke, R. Leitfaden zum graphischen Rechnen. 2. Aufl. Wien und Leipzig 1924 (183 Seiten).
- d'Ocagne, M. Traité de Nomographie. 2. Aufl. Paris 1921 (483 Seiten).
- d'Ocagne, M. Calcul graphique et Nomographie. 3. Aufl. Paris 1924 (385 Seiten).
- d'Ocagne, M. Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques. 3. Aufl. Paris 1928 (210 Seiten).
- Pirani, M. Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. 2. Aufl., besorgt durch I. Runge. Berlin und Leipzig 1931. Sammlung Göschen (149 Seiten).
- Rohrberg, A. Theorie und Praxis des Rechenschiebers. 4. Aufl. Math.-phys. Bibl. Leipzig und Berlin 1934 (49 Seiten).
- Runge, K. Graphische Methoden. 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1928 (130 Seiten).
- v. Sanden, H. Praktische Analysis. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1923 (213 Seiten).

- Schilling, F. Über die Nomographie von M. d'Ocagne. 3. Aufl. Leipzig 1922 (47 Seiten).
- Schreiber, P. Grundzüge einer Flächennomographie. 2 Bde. Braunschweig 1921 und 1922 (85 und 113 Seiten).
- ✕ Schwerdt, H. Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage. 2. Aufl. Berlin 1937.
- ✕ Schwerdt, H. Einführung in die praktische Nomographie. Berlin 1927. Math.-nat.-techn. Bücherei 6 (122 Seiten).
- ✕ Schwerdt, H. Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik. Berlin 1931 (116 Seiten, 104 Tafeln).
- Soreau, R. Nomographie ou Traité des Abaques. 2 Bde. Paris 1921 (503 und 283 Seiten).
- Vogler, Ch. A. Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln. Berlin 1877.
- Werkmeister, P. Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomographie). Berlin 1923 (194 Seiten).

Weitere Literaturangaben auf Seite 106 bis 107.

ERSTER ABSCHNITT FUNKTIONSLEITERN

Bei den Meßstäben, mit denen wir die Gebilde der Natur, der Menschenarbeit und der Raumlehre messen, haben die Teilstriche in der Regel gleiche Abstände. Als Beispiel kann ein nach Millimetern geteilter Meßstab dienen, oder, um auch einen gekrümmten Meßstab zu nennen, die Teilung auf dem Zifferblatt einer Uhr oder die Gradeinteilung irgendeines Winkelmeßgerätes. Derartig geteilte Meßstäbe nennen wir gleichförmige Leitern. Sehen wir uns aber, besonders in der physikalisch-technischen Welt, etwas näher um, so begegnen uns auch Meßstäbe, die nach einem anderen Gesetze, einer anderen mathematischen „Funktion“, gebildet sind. Ungleiche Abstände der Teilstriche haben z. B. die meisten Strom- und Spannungsmesser auf ihren Teilungen oder Skalen, die doch auch nichts anderes als Meßstäbe zum Messen der Ausschläge eines Zeigers sind. Das Gesetz, nach welchem sich hier die Teilstrichabstände ändern, beruht auf dem physikalischen Gesetz, nach welchem der Strom in dem Gerät eine Bewegung hervorruft, und auf dem mathematischen Gesetz, nach welchem diese Bewegung auf den Zeiger übertragen wird. Die Photometerbänke, auf denen man technisch die Lichtstärken von Lampen mißt, sind unmittelbar auf die Hefnerkerze, d. i. die Einheit der Lichtstärke, geeicht und tragen demgemäß geradlinige ungleichförmige „Funktionsleitern“, deren Bildungsgesetz auf dem Gesetz von der Abnahme der Beleuchtungsstärke beruht.

Wir wollen uns zunächst nur mit den geradlinigen Funktionsleitern befassen. Das Bildungsgesetz einer solchen Leiter können wir ausdrücken durch eine Gleichung von der Form

$$x = l \cdot f(\alpha). \quad (1)$$

Diese Gleichung wollen wir die Gleichung der Leiter nennen. Sie stellt folgendermaßen das Gesetz der Leiter dar:

In Bild 1 ist als Träger der Leiter eine gerade Linie gezeichnet, deren Anfangspunkt O sei und deren positive Richtung durch einen Pfeil angegeben ist. P sei der mit α bezifferte Teilstrich der Leiter. Bezifferungen wollen wir mit griechischen Buchstaben, wie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, bezeichnen. Die Länge der Strecke OP , in einer geeigneten Maßeinheit, z. B. Millimetern gemessen, heiße x . Die Gleichung

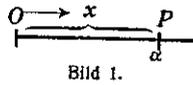


Bild 1.

(1) drückt somit die Entfernung $OP = x$ als eine Funktion der Zahl α aus, mit der der Punkt P beziffert ist. l ist ein unveränderlicher Faktor, den wir hinzusetzen, um über den Größenmaßstab der Leiter passend verfügen zu können. Für $f(\alpha) = 1$ wird $x = l$. Wir nennen deshalb l den Maßstab (oder Modul) der Funktionsleiter.

Oft wird man den verschiedenen Funktionsleitern einer graphischen Rechentafel verschiedene Maßstäbe l_1, l_2, \dots geben müssen. Einige dieser Maßstäbe werden beliebig wählbar sein, und man wird sie so wählen, daß die ganze Rechentafel die verlangte Genauigkeit und eine zweckmäßige Form erhält. Die anderen Maßstäbe sind durch das jeweilige Verfahren schon aus den gewählten bestimmt. Meist führt man die l_1, l_2, \dots zunächst als möglichst einfache, ganze Verhältniszahlen, „Maßstabfaktoren“, ein, um sich dann erst am Schluß für eine geeignete „Zeicheneinheit“ zu entscheiden. Fehlt in einer Rechnung der Maßstabfaktor, so wird l stillschweigend gleich 1 angenommen.

In den Anwendungen stellt α irgendeine benannte Größe wie Temperatur, Gewicht oder Spannung dar und nimmt praktisch nur Werte innerhalb eines Bereiches α_1 bis α_2 an. Da in der Regel die Funktion in diesem Bereich nur steigt oder nur fällt, so ist die Länge des entsprechenden Leiterstückes $|x_2 - x_1| = l |f(\alpha_2) - f(\alpha_1)|$.

Wem die allgemeine Erklärung der Funktionsleiter Schwierigkeit macht, dem werden hoffentlich die folgenden Aufgaben volle Klarheit bringen. Sie geben zugleich Beispiele oft gebrauchter Leitern.

Aufgabe 1. Die untere Leiter eines logarithmischen Rechenschiebers ist 250 mm lang und von 1 bis 10 beziffert. Welche Gleichung hat diese Leiter?

Auflösung: $x = l \cdot \log \alpha$. Diese Gleichung wird erfüllt durch die Werte $\alpha = 10$, $x = 250$ mm, also

$$250 \text{ mm} = l \cdot \log 10, \\ l = 250 \text{ mm}.$$

Demnach hat die Leiter die Gleichung

$$x = 250 \text{ mm} \cdot \log \alpha.$$

Den Maßstab nennt man hier bekanntlich auch „Länge der logarithmischen Einheit“.

Aufgabe 2. Dieselbe Aufgabe für die obere, aus zwei logarithmischen Einheiten bestehende Leiter des Rechenschiebers zu lösen.

Aufgabe 3. Ein kelchförmiges Gefäß hat als Hohlraum einen auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegel, dessen Öffnungsdurchmesser $2r$ sich zur Seitenlinie x verhält wie 1:2. Das Gefäß ist auf ccm geeicht. Man stelle die Gleichung der Eichtellung auf (siehe Bild 2).

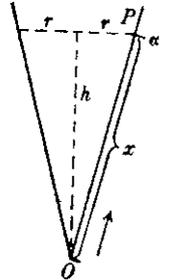


Bild 2.

Auflösung: Wenn die Flüssigkeit bis zum Punkte P gestiegen ist, so hat sie den Inhalt

$$\alpha \text{ ccm} = \frac{1}{3} r^2 \pi h = \frac{1}{3} \left(\frac{x}{4}\right)^2 \pi \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{16}} = \frac{\pi \sqrt{15}}{3 \cdot 4^3} x^3,$$

$$\text{folglich } x = 4 \sqrt[3]{\frac{3}{5\pi^2}} \cdot \sqrt[3]{\alpha} \text{ cm} = 25,08 \text{ mm} \cdot \sqrt[3]{\alpha}.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Funktionsleiter. Es hat also der Maßstab l der allgemeinen Formel (1) hier den Wert $l = 25,08$ mm und $f(\alpha)$ ist hier die Funktion $\sqrt[3]{\alpha}$. Z. B. steht die Bezifferungszahl $\alpha = 8$ (ccm) an dem Punkt, der von der Kegelspitze die Entfernung $x = 25,08 \text{ mm} \cdot \sqrt[3]{8} = 50,16$ mm hat. Hier bringt es die Natur der Aufgabe mit sich, daß der Maßstab l den irrationalen Wert $l \approx 25,08$ mm hat.

Aufgabe 4. Die Leitern $x = 10 \text{ cm} \cdot \cos \alpha$ und $y = 10 \text{ cm} \cdot \sin \alpha$ zu zeichnen.

Auflösung: Man teilt einen Kreis vom Halbmesser 10 cm nach Winkelgraden α und projiziert diese Teilung samt der Bezifferung auf den durch $\alpha = 0^\circ$ gehenden Durchmesser. Die Leiter $y = 10 \text{ cm} \cdot \sin \alpha$ erhält man durch Projektion derselben Kreisteilung auf den durch $\alpha = 90^\circ$ gehenden Durchmesser.

Im Bilde 53 sieht man unten die Leiter $x = -l \cdot \cos \alpha$ dargestellt.

Aufgabe 5. Welche Gleichung hat die gleichförmige Leiter?

$$\text{Auflösung: } x = l \cdot (\alpha - \alpha_0).$$

Da für $\alpha = \alpha_0$ die Strecke $OP = x$ (Bild 1) den Wert 0 annimmt, so ist α_0 die Zahl, mit der der Anfangspunkt O beziffert

ist. Dagegen ist l der Abstand der mit 0 und 1 bezifferten Punkte voneinander, denn bezeichnen wir den Wert von x für $\alpha = 1$ mit x_1 und den Wert von x für $\alpha = 0$ mit x_0 , so ist

$$x_1 - x_0 = l(1 - \alpha_0) - l(0 - \alpha_0) = l.$$

Aufgabe 6. Gegeben ist eine gleichförmige, bezifferte Leiter (α) auf der Geraden X , ein Punkt P_1 außerhalb der Geraden X und eine zweite Gerade Y , die die erste in O schneidet. Man projiziere die Leiter (α) aus P_1 aus auf den Träger Y und bestimme die Gleichung der so entstehenden Leiter.

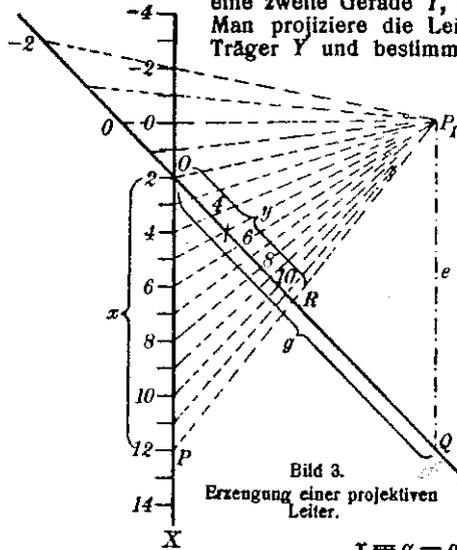


Bild 3. Erzeugung einer projektiven Leiter.

$$x = \alpha - \alpha_0. \tag{2}$$

Nun gilt, wenn der beliebige Strahl P_1RP auf den Geraden die Stücke $OP = x$ und $OR = y$ abschneidet, die Proportion

$$OP : P_1Q = OR : RQ$$

oder
$$x : e = y : (g - y),$$

aus welcher folgt
$$y = \frac{g \cdot x}{e + x} \tag{3}$$

oder, wenn man den Wert von x aus (2) einsetzt,

$$y = \frac{g \cdot (\alpha - \alpha_0)}{e + (\alpha - \alpha_0)} = \frac{g \cdot \alpha - g \cdot \alpha_0}{\alpha + (e - \alpha_0)}. \tag{4}$$

Auf der rechten Seite ist nur α eine Veränderliche. y ist also eine lineare gebrochene Funktion von α .

In der Sprache der projektiven Geometrie sagt man, die Punktreihe auf dem Träger Y ist perspektiv mit derjenigen auf dem

Träger X . Die durch eine lineare gebrochene Funktion von α mit beliebigen Koeffizienten

$$y = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \tag{5}$$

dargestellte Leiter nennen wir die projektive Leiter. Die ungleichförmige Leiter, die in Bild 3 auf dem Träger y entstand, ist also nach (4) eine projektive Leiter. Jede projektive Leiter kann durch eine Projektion wie in Bild 3 aus einer gleichförmigen Leiter erzeugt werden. Diese Tatsache, deren Beweis dem Leser überlassen sei, und der Satz, daß durch drei bezifferte Punkte eine projektive Leiter bestimmt ist, bieten ein einfaches Mittel, solche Leitern zu erzeugen.

Ebenso wie wir aus einer gleichförmigen Leiter eine mit ihr projektive Leiter ableiten, können wir natürlich auch zu einer beliebigen Funktionsleiter

$$x = f(\alpha)$$

die Leiter

$$y = \frac{af(\alpha) + b}{cf(\alpha) + d}$$

ableiten, wenn a, b, c und d unveränderliche Größen sind. Zum Beispiel können wir uns die Leiter für die Funktion

$$y = \frac{a \log \alpha + b}{c \log \alpha + d}$$

durch Projektion aus einer gewöhnlichen logarithmischen Leiter herstellen. Wir werden später hiervon Gebrauch machen.

Aufgabe 7. Man leite die Funktionsleiter $x = f(\alpha)$ aus der bekannten Kurvendarstellung dieser Funktion ab.

Auflösung: In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit einer wagerechten α -Achse und einer dazu senkrechten x -Achse sei die Kurve $x = f(\alpha)$ gezeichnet (Bild 4). Durch Parallelen zur Ordinatenachse projiziere man die gleichförmige Teilung der α -Achse samt ihrer Bezifferung auf die Kurve und von dieser durch Parallelen zur Abszissenachse auf die Ordinatenachse. Dann hat man die Funktionsleiter $x = f(\alpha)$ erhalten. Hierbei spiegeln sich die Eigenschaften der Kurve als Eigenschaften der α -Leiter wieder. Es ist eine reizvolle Aufgabe, die bisher noch niemand durchgeführt hat, zu den Eigenschaften der Kurve $x = f(\alpha)$ die entsprechenden Eigenschaften der Funktionsleiter

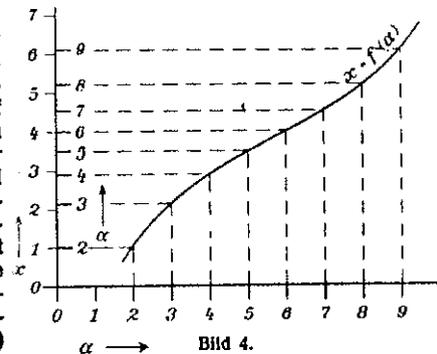


Bild 4. Die Leiterdarstellung einer Funktion wird aus ihrer Kurvendarstellung hergestellt.

$x = f(\alpha)$ anzugeben und so die Begriffe und Ergebnisse der infinitesimalen Kurvendiskussion auf die Funktionsleiter zu übertragen.¹⁾

Für einen Bereich, innerhalb dessen die erste Ableitung $f'(\alpha)$ stetig ist und nicht gleich Null wird, und in welchem die Bezifferung α der gezeichneten Teilstriche wie üblich in arithmetischer Reihe, also um gleiche Beträge $\Delta\alpha$ wächst, kann man u. a. folgende Ergebnisse ableiten:

a) Der Abstand der mit α und $\alpha + \Delta\alpha$ bezifferten benachbarten Teilstriche ist für hinreichend kleines $\Delta\alpha$ näherungsweise

$$\Delta x = f'(\alpha) \Delta\alpha.$$

Dies ergibt z. B. für die quadratische Leiter $y = \alpha^2$:

$$\Delta x = 2\alpha \cdot \Delta\alpha.$$

Bei gleichem Bezifferungssprung $\Delta\alpha = 0,1$ sind also die Teilstrichabstände Δx in der Nachbarschaft von $\alpha = 10$ annähernd doppelt so groß wie diejenigen in der Nachbarschaft von $\alpha = 5$ (siehe z. B. Einf. i. d. Nom., 1. Teil, Bild 4).

Diese Berechnung des Teilstrichabstandes Δx kann bei Bestimmung des Maßstabes einer Leiter nützlich sein. Man wird im allgemeinen dafür Sorge tragen, daß der Teilstrichabstand nirgend unter ein Minimum von etwa 1 mm herabsinkt.

Während also bei einer Kurve die „Steigung“ den Differentialquotienten der Funktion veranschaulicht, gibt uns bei der Funktionsleiter der Teilstrichabstand ein anschauliches Maß des Differentialquotienten.

b) Haben $f'(\alpha)$ und $f''(\alpha)$ in dem ganzen Bereich dasselbe Vorzeichen, so werden die Teilstrichabstände mit wachsender Bezifferung größer. Beispiele: Der Bereich $\alpha = 6 \rightarrow 9$ in Bild 4, der Bereich $\alpha = 0 \rightarrow +\infty$ der Leiter $x = \alpha^2$ (Einf. i. d. Nom., 1. Teil, Bild 4), der Bereich $\alpha = 0^\circ \rightarrow 90^\circ$ der Leiter $x = \cos \alpha$ (Bild 53).

Haben $f'(\alpha)$ und $f''(\alpha)$ in dem ganzen Bereich entgegengesetzte Vorzeichen, so werden die Teilstrichabstände mit wachsender Bezifferung kleiner. Beispiele: Der Bereich $\alpha = 2 \rightarrow 6$ in Bild 4,

der Bereich $\alpha = 0 \rightarrow +\infty$ der Leiter $x = \frac{1}{\alpha}$ (Einf., 1. Teil,

Bild 8), derselbe Bereich der Leitern $x = \sqrt{\alpha}$ (die drei Leitern in Bild 51), $x = \log \alpha$ (z. B. Bild 14), der Bereich $\alpha = 0 \rightarrow 90^\circ$ der Leiter $x = \sin \alpha$ (Bild 27).

c) An einer Stelle, für die $f''(\alpha) = 0$ und $f'''(\alpha) \neq 0$ ist, haben die Teilstrichabstände ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem an dieser Stelle $f'''(\alpha)$ mit $f'(\alpha)$ ungleiches oder gleiches Vorzeichen hat. (Hier hat die Kurve $x = f(\alpha)$ einen Wendepunkt.) Beispiele: Die Stelle $\alpha = 6$ in Bild 4 (Minimum der Teilstrichabstände), die Stelle $\alpha = 90^\circ$ der Leiter $x = \cos \alpha$ (Maximum, siehe Bild 53).

* * *

¹⁾ Wer den Begriff des Differenzialquotienten nicht kennt, kann die folgenden Betrachtungen überspringen.

Was können wir nun mit unseren Funktionsleitern anfangen? Wir haben uns hier nicht die Aufgabe gestellt, zu untersuchen, wo in der technischen Praxis an Geräten und Maschinen Funktionsleitern vorkommen. Wir wollen vielmehr die Leitern benutzen, um daraus, als aus den Elementen, selbst eine Art von Maschinen zu bauen, Maschinen, mit denen sich häufig vorkommende Rechnungen mechanisch ausführen lassen. Durch Aneinanderheften zweier Funktionsleitern erhält man die Doppelleiter, die als die graphische Auf Lösungstabelle einer Gleichung zwischen zwei Veränderlichen dienen kann. (Siehe z. B. die Doppelleiter in Bild 17, wo man Wellenlängen in Schwingungszahlen und umgekehrt verwandeln kann.) Sind die beiden aneinander gehefteten Leitern gegeneinander verschiebbar, so tritt damit eine dritte Bewegungsfreiheit oder Veränderlichkeit hinzu: Wir erhalten so die überaus nützlichen Rechenschieber. Aber immer noch sind diese kleinen Maschinen eindimensionale Gebilde. Wir gehen deshalb in naturgemäßer Weise einen Schritt weiter und bauen uns Gebälke aus Funktionsleitern in zwei Dimensionen, also in der Ebene. So mannigfaltig die Art ist, wie sich mehrere Geraden in der Ebene zu Figuren zusammenfügen lassen, so mannigfaltig ist die Zahl und Art der Nomogramme, die damit entspringen.

ZWEITER ABSCHNITT

NETZTAFELN

Nomogramme sind graphische Tabellen, die als Ersatz für numerische Tabellen dienen sollen. Wollen wir also zu zweidimensionalen Nomogrammen übergehen, so lohnt es sich, nachzusehen, ob es bei den numerischen Tabellen etwas Derartiges gibt. Das ist der Fall. Es sind die Tabellen mit zwei Eingängen, und diesen beiden Eingängen entsprechen zwei voneinander unabhängige Veränderliche. Indem wir so nun die Ebene in die Länge und in die Breite mit Funktionsleitern ausmessen, kommen wir zu dem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem. Am einfachsten legen wir zunächst die gleichförmigen Leitern

$$x = 1 \text{ mm} \cdot \alpha, \quad y = 1 \text{ mm} \cdot \beta \quad (1)$$

in Länge und Breite zugrunde. Wir bekommen, wenn wir durch die Teilpunkte in Länge und Breite Parallelen ziehen, das bekannte Netz des Millimeterpapiers. In dieses Netz lassen sich nun die Werte einer dritten Veränderlichen γ , die eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen α und β ist, in Gestalt einer Kurvenschar eintragen. So entsteht eine Netztafel. Beispiele werden die Sache am besten erläutern.

Aufgabe 8. Eine Netztafel für die Funktion

$$\gamma = \alpha \cdot \beta \quad (2)$$

zu zeichnen.

Auflösung: Bild 5 gibt das Gerippe der Netztafel, die in großem Maßstabe mit einer größeren Zahl zwischengeschalteter Geraden und Hyperbeln zu zeichnen wäre.

Neu ist für uns an diesem Nomogramm, daß es nicht, wie eine Funktionsleiter, aus bezifferten Punkten besteht, sondern aus drei Scharen von bezifferten Kurven, nämlich

1. den Parallelen zur Ordinatenachse mit den Gleichungen

$$x = \alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, 10),$$

2. den Parallelen zur Abszissenachse mit den Gleichungen

$$y = \beta \quad (\beta = 0, 1, 2, \dots, 10),$$

3. der Schar gleichseitiger Hyperbeln mit den Gleichungen

$$xy = \gamma \quad (\gamma = 0, \dots, 100).$$

Statt $x = \alpha$, $y = \beta$ hätten wir allgemeiner $x = l_1 \alpha$, $y = l_2 \beta$ ansetzen können. Man kann eben den Gleichungen von bezifferten Parallelenscharen ebenso wie den Gleichungen von Leitern Maßstabfaktoren geben, die die Größe und Form der Rechentafel bestimmen. In unserem Falle wählen wir $l_1 = l_2 = 1$ cm.

Dann und nur dann genügen drei Werte α , β , γ gleichzeitig der Gleichung (2), wenn die mit diesen Werten bezifferten Linien der drei Scharen durch einen Punkt gehen. Z. B. geht die Hyperbel $\gamma = 30$ durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $\alpha = 5$ und $\beta = 6$. Daraus ergibt sich, wie man diese Tafel zur Aufsuchung eines der Werte α , β , γ , wenn die beiden anderen gegeben sind, benutzen kann, also zur Auflösung von Multiplikations- und Divisionsaufgaben.

Eine derartige, genau ausgeführte Multiplikationstafel veröffentlichte zuerst Pouchet 1795 in seiner *Arithmétique linéaire*. Sie gilt als ältestes, überhaupt bekanntes Rechenblatt der neuzeitlichen Nomographie.

Die Tafel ist eine anschauliche Darstellung der Multiplikationsformel (2). Man kann z. B. verfolgen, wie bei konstantem Produkt (Durchlaufen einer Hyperbel) das Wachsen des einen Faktors die Abnahme des anderen nach sich zieht.

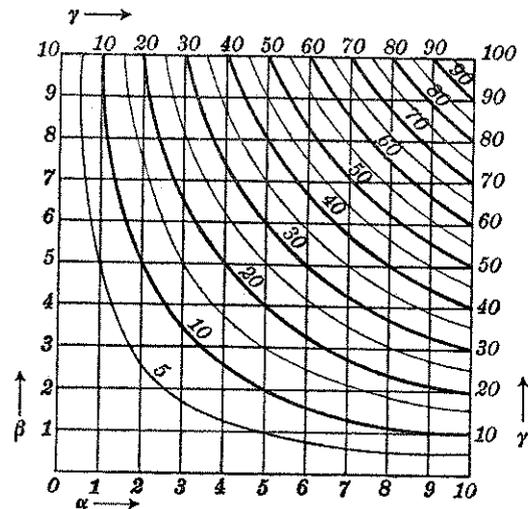


Bild 5. Gerippe einer Multiplikationstafel: $\gamma = \alpha \cdot \beta$.

Aufgabe 9. Man entwerfe eine Netztafel für die reduzierte kubische Gleichung

$$z^3 + pz + q = 0.$$

Auflösung: Wir setzen

$$x = p, \quad y = q \quad (p, q = 0; \pm 0,1; \pm 0,2; \dots; \pm 1)$$

und haben damit die Gleichungen der beiden Parallelenscharen, die das kartesische Netz bilden. Setzen wir nun in der vorgelegten Gleichung statt p und q die Zeichen x und y ein, so erhalten wir die Gleichung der dritten Schar (z):

$$xz + y + z^3 = 0 \quad (z = \pm 0; \pm 0,1; \pm 0,2; \dots; \pm 1,3).$$

Ausführlicher habe ich den Entwurf dieser Tafel von Lalanne in den Unterrichtsblättern für Math. u. Naturw. 31, 1925, S. 131–136, behandelt.

Ein großer Vorteil der Netztafeln ist es, daß sie die Darstellung auch solcher stetiger gesetzmäßiger Beziehungen ermöglichen, die man nicht durch eine mathematische Formel ausgedrückt hat. Ein Lichtstrahl gehe aus Luft in einen anderen Stoff, wie Wasser, Kronglas usw., über. In Bild 6 ist als Abszisse der Einfallswinkel und als Ordinate der zugehörige Brechungswinkel dargestellt, den man empirisch, d. h. durch Erfahrung, durch Versuche, gefunden hat. Für jeden Stoff sind die Darstellungspunkte durch Kurven verbunden. Diese Netztafel für das Brechungsgesetz kann man also gewinnen und benutzen, ohne die mathematische Formulierung des Gesetzes zu kennen.

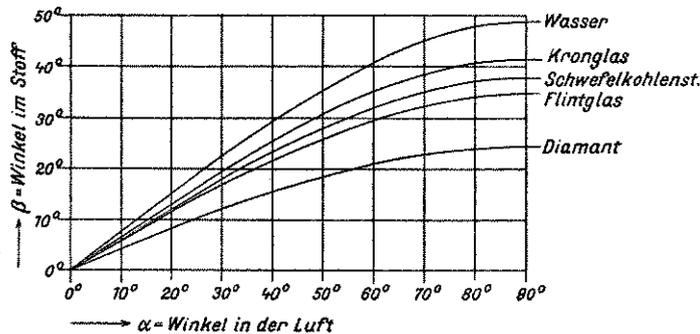


Bild 6. Das Brechungsgesetz.

Beispiel: Winkel in der Luft $\alpha = 55^\circ$, Winkel im Schwefelkohlenstoff $\beta = 30^\circ$.

Netztafeln, denen, wie den Bildern 5 und 6, ein rechtwinkliges „kartesisches“ Koordinatensystem zugrunde liegt, heißen kartesische Tafeln. Entwurf und Benutzung dieser sehr anschaulichen Rechentafeln, zu denen man ganz von selbst gelangt, wenn man, wie in Bild 6, die verschiedenen Fälle eines Gesetzes auf demselben Blatt durch Kurven darstellt, verlangen nur sehr einfache Überlegungen. Und doch kann man mit einer solchen Tafel eigentlich jede in der Naturwissenschaft und der Technik vorkommende stetige Beziehung zwischen drei Veränderlichen darstellen. Kein Wunder, daß so die kartesische Tafel das wichtigste und verbreitetste graphische Darstellungsmittel der Wissenschaft und Technik geworden ist. Die technischen Zeitschriften und Taschenbücher bezeugen das durch die mannigfaltigsten Beispiele.

Bisher sind auch wichtige kartesische Tafeln, wie z. B. die Dampfdiagramme, trotz mannigfacher Vorschläge nicht durch andersartige graphische Tafeln verdrängt worden.

Über die Mängel einer derartigen Netztafel für nomographische Zwecke wird man nicht hinwegsehen. Drei zusammengehörige Kurven aus den drei Scharen gehen, wie gesagt, durch einen Punkt. Aber die Bezifferungen der betreffenden Kurven stehen natürlich im allgemeinen nicht bei diesem Punkte, sondern an anderen Stellen dieser Kurven, so daß man der Kurve von der Ziffer bis zum Kurvenschnitt oder umgekehrt nachgehen muß. Hierbei gerät man leicht in eine Nachbarkurve; auch ist dieses Verfolgen der Kurve für das Auge anstrengend. Es kommt noch hinzu, daß im allgemeinen die drei Kurven, mit denen man es bei der besonderen Zahlenaufgabe zu tun hat, nicht gezeichnet vorliegen, sondern nach dem Augenmaß einzuschalten sind. Endlich ist die Herstellung eines derartigen Nomogramms oft sehr mühsam, da die dritte Linienschar im allgemeinen aus punktweise zu zeichnenden krummen Linien besteht.

Mitunter kann man allerdings bei einer kartesischen Tafel schon dadurch auch die dritte Schar zu einer Geradenschar machen, daß man den beiden ersten Scharen (Ordinaten- und Abszissenparallelen) zwei passend gewählte Veränderliche der Gleichung zuweist. Wenn wir zur Darstellung der Gleichung

$$\gamma = \alpha \cdot \beta \quad (2)$$

den Ansatz $x = \alpha, \quad y = 0,1 \gamma$

machen, so erhalten wir durch Einsetzen der Werte $\alpha = x, \gamma = 10y$ in (2) für die dritte Schar (β) die Gleichung

$$y = 0,1 \beta \cdot x.$$

Diese Gleichung stellt das Bündel der durch den Nullpunkt gehenden Geraden mit dem Richtungsfaktor $0,1 \cdot \beta$ dar. Mit der so entstandenen geradlinigen Netztafel, deren Gerippe Bild 7 zeigt, kann man ebenfalls Multiplikations- und Divisionsaufgaben lösen. („Strahlentafel“).

Ein anderes, wichtiges Mittel zur Streckung der dritten Schar besteht darin, daß man auf den Koordinatenachsen an Stelle der gleichförmigen Leitern $x = l_1 \cdot \alpha, y = l_2 \cdot \beta$ andere, geeignet gewählte Funktionsleitern $x = l_1 \cdot f_1(\alpha), y = l_2 \cdot f_2(\beta)$

aufträgt. Für unser Bild 5 wollen wir jetzt eine derartige Formwandlung vornehmen, indem wir das gleichförmige Koordinatennetz (Millimeterpapier) in ein solches umwandeln, bei dem die Abstände der bezifferten Parallelen sich mit wachsender Entfernung vom Anfangspunkt nach dem Gesetz

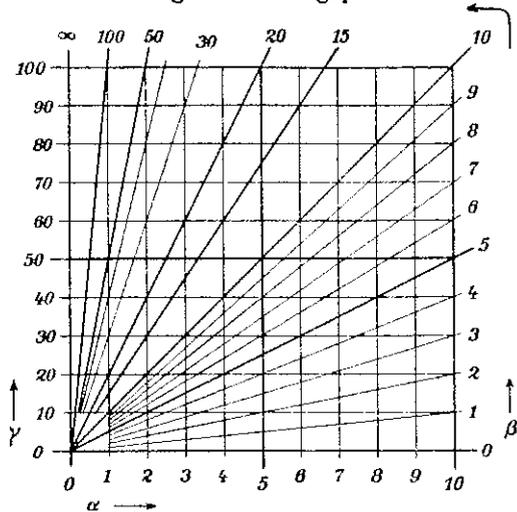


Bild 7. Geradlinige Multiplikationstafel: $\gamma = \alpha \cdot \beta$.

der logarithmischen Leiter verengen. Wir zeichnen also auf der Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems die Leiter

$$x = l \log \alpha \quad (3)$$

und auf der Ordinatenachse die Leiter

$$y = l \log \beta \quad (4)$$

und ziehen durch die Leiterpunkte die Parallelscharen.

Papier mit einem derartigen Koordinatennetz ist unter dem Namen „logarithmisches Papier“ zu kaufen. Die Firma Carl Schleicher & Schüll in Düren stellt Papiere mit den verschiedensten Maßstäben von $l = 5$ cm bis $l = 60$ cm her. Im folgenden werden wir uns häufiger der funktionalen Papiere von Schleicher & Schüll bedienen. Wir bezeichnen sie dann kurz mit der ihnen aufgedruckten Nummer, z. B. Schl. & Sch. Nr. 366 $\frac{1}{2}$.

Aus

$$\gamma = \alpha \beta$$

folgt

$$\log \gamma = \log \alpha + \log \beta,$$

also

$$l \log \gamma = l \log \alpha + l \log \beta$$

oder, nach (3) und (4)

$$x + y = l \log \gamma. \quad (5)$$

Für jedes unveränderliche γ stellt nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichung (5) eine gerade Linie

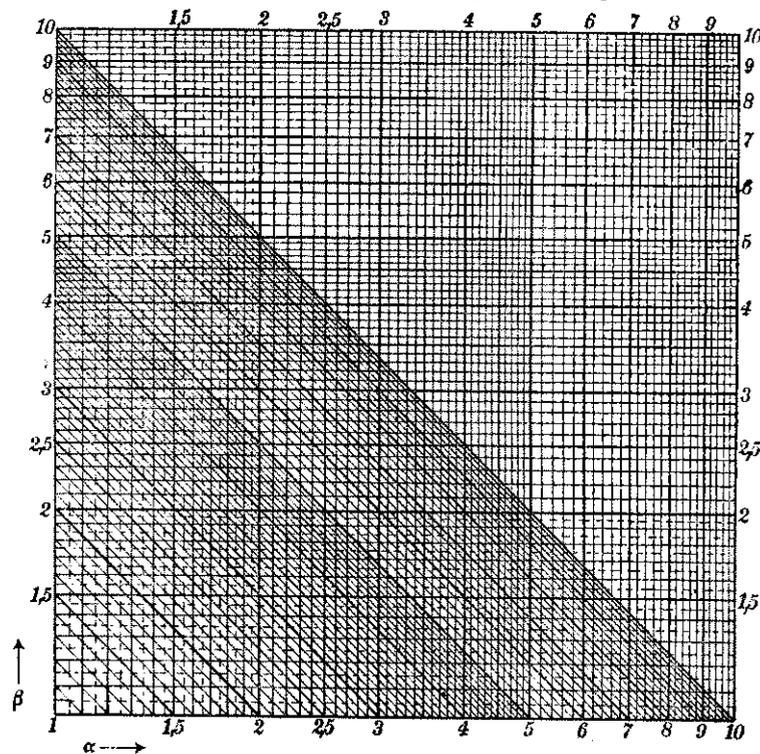


Bild 8. Logarithmische Multiplikations- und Divisionstafel: $\gamma = \alpha \cdot \beta$.

dar, die mit der positiven Richtung der Abszissenachse einen Winkel von 135° bildet und vom Anfangspunkt ($x = 0$, $y = 0$, d. h. $\alpha = 1$, $\beta = 1$) den Abstand

$$z = \frac{l}{\sqrt{2}} \log \gamma$$

hat. Die Linien gleicher γ -Werte sind also Geraden, die

sich nach dem Abstandsgesetz einer logarithmischen Leiter folgen. Da die mit γ bezifferte Linie durch den Punkt $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$ und durch den Punkt $\alpha = \gamma$, $\beta = 1$ gehen muß, so sind die Linien leicht in ein vorhandenes logarithmisches Netz einzuzeichnen.

Man erhält so das Nomogramm Bild 8, das man als graphische Multiplikations- und Divisionstafel benutzen kann.

Auch dieses Nomogramm können wir hier nur verkleinert wiedergeben. Wir bemerken allgemein, daß es bei allen in diesem Buche folgenden Nomogrammen ähnlich liegt. Nur bei Anlage großer Blätter entfaltet die Nomographie ihren ganzen Nutzen. Auch wird man durch Wahl verschiedener Farben oft die Deutlichkeit erhöhen.

Man löse in Bild 8 folgende Beispiele: $3,2 \times 2,2$; $4,15 : 1,85$; $7 : 3,9$; $2,95 : 2,05$ usw.

Aufgabe 10. Bezeichnet man mit D den Durchmesser eines Wasserleitungsrohrs in mm (Bereich $100 \rightarrow 3000$), mit Q den Durchfluß in lit/sek ($1 \rightarrow 40000$) und mit J den Druckverlust in mm Quecks. je laufendes Meter ($0,1 \rightarrow 100$), so gilt nach M. Lévy die Näherungsformel

$$D = 88,72 \left(\frac{Q}{\sqrt{J}} \right)^{\frac{3}{8}}. \quad (6)$$

Man stelle diese Formel durch eine logarithmische Netztafel dar.

Auflösung: Logarithmiert man die vorgelegte Gleichung, so ergibt sich

$$\log D + \frac{3}{16} \log J - \frac{3}{8} \log Q - \log 88,72 = 0. \quad (7)$$

Setzt man $x = \log D$, $y = \log J$, (8) und (9) so geht (7) über in

$$x + \frac{3}{16} y - \frac{3}{8} \log Q - \log 88,72 = 0. \quad (10)$$

Die Gleichungen (8) und (9) stellen ein logarithmisches Netz dar, die Gleichung (10) bedeutet eine Schar mit den Werten Q bezifferter Geraden, die parallel sind, da der Quotient der Koeffizienten von x und y von Q unabhängig ist. Da sich der nutzbare Bereich von D über $1\frac{1}{2}$ logarithmische Einheiten erstrecken soll, derjenige von J aber über 3, so wählen wir, um der Tafel eine günstige Form zu geben, am besten ein logarithmisches Netz, bei dem die Abszissen einen größeren Maßstab als die Ordinaten haben. Dann verlaufen die Linien der Q -Schar nicht zu steil, was die Genauigkeit der Ablesungen beeinträchtigen würde. Die Bezifferung des unteren Randes ist $D = 100 \rightarrow 3000$ mm, diejenige

des linken Randes $J = 0,1 \rightarrow 1000$ mm Quecks. Um die dritte Schar (Q) bequem zu zeichnen, bestimmen wir die Leitern, in denen sie den unteren und oberen Rand des Blattes schneidet. Für den unteren Rand haben wir $J = 0,1$, oder, nach (9), $y = -1$ zu setzen. Dann geht (10) über in

$$x = \frac{3}{8} \log Q + \frac{3}{16} + \log 88,72. \quad (11)$$

Das ist eine logarithmische Leiter, deren Maßstab $\frac{3}{8}$ vom Maßstab der auf demselben Träger liegenden Leiter $x = \log D$ ist. Um sie genau einzuzeichnen, bestimmen wir diejenigen D -Werte, auf die ihre mit $Q = 10$ und $Q = 10000$ bezifferten Punkte fallen. Für $J = 0,1$, $Q = 10$ geht (7) über in

$$\log D = \frac{3}{16} + \frac{3}{8} + \log 88,72 = 0,5625 + \log 88,72, \\ D = 324.$$

Für $J = 0,1$, $Q = 10000$ erhält man aus (7)

$$\log D = \frac{3}{16} + \frac{3}{2} + \log 88,72 = 1,6875 + \log 88,72, \\ D = 4320.$$

Für den oberen Rand ist $J = 100$, oder, nach (9), $y = 2$ zu setzen. Das ergibt eine logarithmische Leiter von demselben Maßstab wie unten, und zwar fällt, wie die entsprechende Rechnung zeigt, ihr Punkt $Q = 10$ auf den Punkt $D = 88,72$ und ihr Punkt $Q = 10000$ auf den Punkt $D = 1183$.

Zwischen diese Punkte und zum Teil über sie hinaus zeichnet man die logarithmischen Q -Leitern und verbindet die Punkte gleicher Bezifferung miteinander.

Alle Gleichungen von der Form

$$c \cdot a^d \beta^e \gamma^f = 1, \quad (12)$$

wo d , e , f beliebige reelle Konstanten sind und c eine positive Konstante ist, lassen sich nach dem Verfahren des letzten Beispiels durch eine aus drei Parallelscharen von logarithmischem Abstandsgesetz bestehende Netztafel darstellen. Gleichungen dieser Art sind in allen Zweigen der Wissenschaft und Technik überaus verbreitet.

Man kann natürlich in derselben Weise Koordinatennetze herstellen, bei denen die Koordinatenachsen nach den Gesetzen anderer Funktionsleitern geteilt sind, und wird je nach der darzustellenden Gleichung hierbei solche Funktionen wählen, die alle Kurven zu Geraden strecken.

Der Franzose Lalanne erfand 1843 diese Formwandlung. Er nannte sie „Anamorphose“. Nach Hammers Vorgang gebrauchen wir die deutsche Bezeichnung „Verstreckung“.¹⁾

Aufgabe 11. Die Netztafel für das Brechungsgesetz (Bild 6) zu verstrecken.

Auflösung (Bild 9): In einem Funktionsnetz, dessen Koordinatenachsen beide nach der Sinusfunktion geteilt sind ($x = \sin \alpha$, $y = \sin \beta$), strecken sich die Kurven des Bildes 6 zu Geraden,

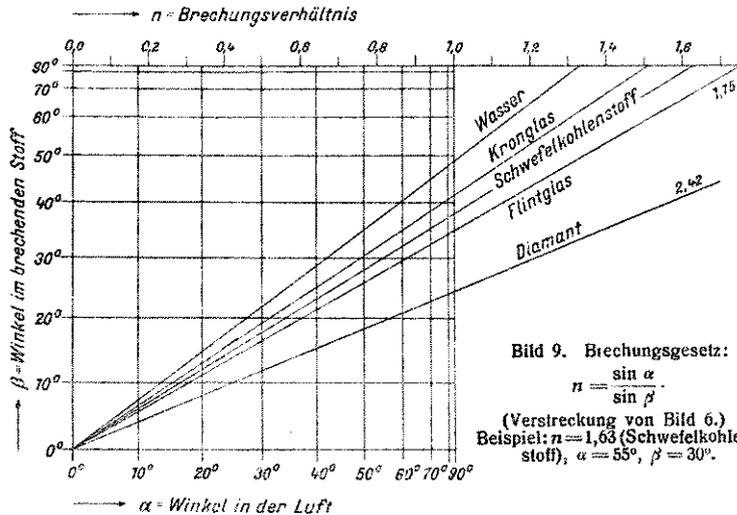


Bild 9. Brechungsgesetz:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$
 (Verstreckung von Bild 6.)
 Beispiel: $n = 1,63$ (Schwefelkohlenstoff), $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

deren reziproke Richtungsfaktoren $x : y = \sin \alpha : \sin \beta = n$ die Brechungsverhältnisse darstellen und an der oberen wagerechten Leiter abgelesen werden können.

Auch derartig verstreckte Netztafeln („Geradentafeln“) rechnen wir noch zu den kartesischen Tafeln, denn auch hier sind zwei der Parallelscharen den kartesischen Achsen

¹⁾ Ganz allgemein darf man Netztafeln beliebigen Verzerrungen im Sinne der Analysis situs (Topologie) unterwerfen. Es wird ja nur verlangt, daß eine jede Linie (γ), die vor der Verzerrung durch den Schnittpunkt der Linien (α) und (β) ging, dies auch nachher tut. Man kann also beim Entwerfen einer Netztafel zu einer Beziehung $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ zwei Systeme, z. B. (α) und (β), als beliebige, sich schneidende Scharen krummer oder gerader Linien annehmen.

parallel, wenn auch die einzelnen Parallelen nicht mehr gleich weit voneinander entfernt sind.

Aufgabe 12. Auf welche Form muß sich eine Beziehung von 3 Veränderlichen α, β, γ bringen lassen, um durch eine kartesische Geradentafel darstellbar zu sein?

Auflösung: Auf ein rechtwinkliges oder schiefwinkliges kartesisches Koordinatensystem bezogen, haben die beiden ersten Scharen einer solchen Geradentafel die Gleichungen

$$x = f_1(\alpha), \quad y = f_2(\beta); \quad (13) \text{ und } (14)$$

denn das sind die Gleichungen der Parallelscharen, die auf den Achsen die Funktionsteilungen $f_1(\alpha)$ und $f_2(\beta)$ erzeugen. Die dritte Schar läßt sich durch die Gleichung

$$x f_3(\gamma) + y g_3(\gamma) + h_3(\gamma) = 0 \quad (15)$$

darstellen, denn diese Gleichung, in der $f_3(\gamma), g_3(\gamma), h_3(\gamma)$ Funktionen von (γ) sind, stellt für jeden festen Wert von γ eine Gerade dar. Setzen wir aus (13) und (14) die Werte von x und y in (15) ein, so erhalten wir

$$f_1(\alpha) f_3(\gamma) + f_2(\beta) g_3(\gamma) + h_3(\gamma) = 0 \quad (16)$$

Dies ist die gesuchte Form, die wir auch als die Schlüsselgleichung der kartesischen Geradentafeln bezeichnen. Die linke Seite ist eine ganze Funktion ersten Grades von $f_1(\alpha)$ und $f_2(\beta)$, und die Koeffizienten dieser Form sind Funktionen von γ .

Die in Aufgabe 9 vorgelegte Gleichung ist von dieser Form, da man setzen kann

$$f_1(\alpha) = p, \quad f_2(\beta) = q, \quad f_3(\gamma) = z, \quad g_3(\gamma) = 1, \quad h_3(\gamma) = z^s.$$

Ist insbesondere $h_3(\gamma) = 0$, so haben wir, wie Gleichung (15) zeigt, für die Veränderliche γ ein durch den Nullpunkt gehendes Strahlenbüschel (Strahlentafel, Bilder 7 und 9).

Ist $f_3(\gamma)$ bis auf einen konstanten Faktor gleich $g_3(\gamma)$, so besteht die Schar (γ) aus parallelen Geraden, wie man ebenfalls aus (15) ersieht (vgl. Bild 8 und Aufg. 10).

Im allgemeinen hüllen die Geraden der Schar (γ) eine Kurve ein, so z. B. bei Aufg. 9 eine Kurve dritter Ordnung, die semikubische oder Neilsche Parabel.

Von besonderem Nutzen sind die durch Lalannesche Anamorphose „verzerrten“ Koordinatennetze für die Aufsuchung noch unbekannter gesetzmäßiger Zusammenhänge, etwa aus empirisch gefundenen Zahlen (Beobachtungsreihen). Auch lassen sich manche Rechnungen durch sehr einfache Konstruktionen auf derartigen Netzen ausführen. Im folgenden Abschnitt wollen wir diese Benutzung der Funktionspapiere zur graphischen Auswertung und zum graphischen Rechnen an Beispielen zeigen.

DRITTER ABSCHNITT
GRAPHISCHES RECHNEN UND AUSWERTEN
AUF FUNKTIONSPAPIEREN

Wenn wir mit funktionalen Koordinatennetzen arbeiten wollen, müssen wir in die Gesetze dieser Netze ebenso ein-

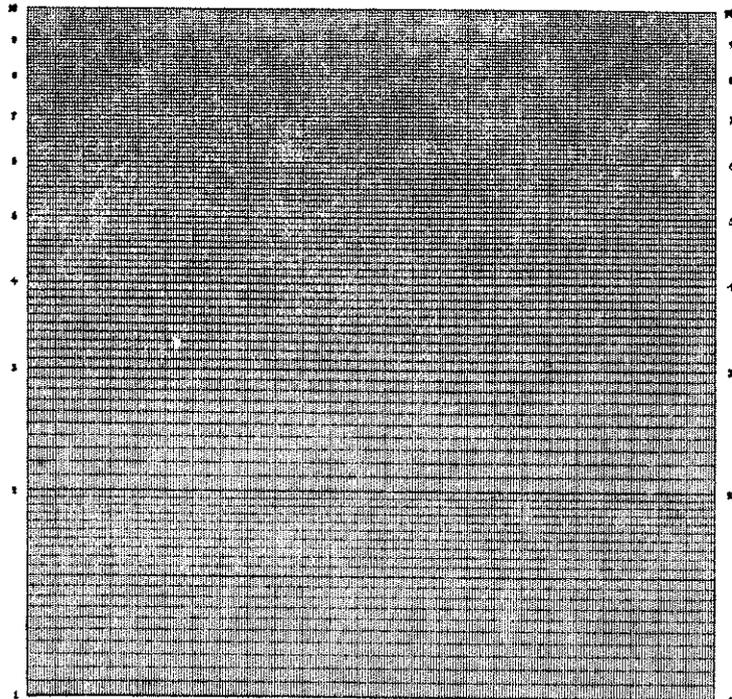


Bild 10. Halblogarithmisches Papier. Wahre Länge der Quadratseite 25 cm.

gewöhnnt sein, wie in die Gesetze des Millimeterpapiers. Wir wollen uns deshalb diese einfachsten Gesetze für das halb-logarithmische Papier und das logarithmische Papier ableiten und einprägen.

In einem gewöhnlichen Koordinatennetz stellt die Gleichung

$$y = ax + b \quad (1)$$

bekanntlich eine gerade Linie dar. Der unveränderliche Faktor a gibt die Tangensfunktion des Winkels an, den diese Gerade mit der positiven Richtung der Abszissenachse bildet und wird deshalb als Richtungsfaktor bezeichnet. Der Festwert b dagegen gibt die Länge des Abschnitts an, den die Gerade auf der Ordinatenachse erzeugt, wie man ja sofort sieht, wenn man in (1) $x = 0$ setzt.

Das halblogarithmische Papier (Bild 10) ist gekennzeichnet durch die Gleichungen

$$x = \alpha, \quad y = \log \beta. \quad (2)$$

Während also die Abszissenachse eine gewöhnliche, gleichförmige Teilung trägt, trägt die Ordinatenachse eine von 1 bis 10 oder noch weiter reichende logarithmische Teilung. (Wollen wir die gewählten Maßstäbe zum Ausdruck bringen, so müssen wir sie, wie früher, als benannte Faktoren der rechten Seite begeben. Z. B. hat das von uns in Aufg. 15 benutzte halblogarithmische Papier [vgl. Bild 11] die Gleichungen $x = 1 \text{ mm} \cdot \alpha$, $y = 100 \text{ mm} \cdot \log \beta$. Unsere Ableitung wird aber übersichtlicher, wenn wir x und y stillschweigend in denselben Maßeinheiten messen.)

Wir ziehen nun auf dem Papier eine beliebige Gerade. Sie habe in gewöhnlichen Koordinaten die Gleichung

$$y = ax + b. \quad (3)$$

Um die Gleichung der Geraden in den Netzkoordinaten α und β zu erhalten, setzen wir für x und y die Werte aus (2) ein. Wir erhalten

$$\log \beta = a\alpha + b \quad \text{oder} \quad \beta = 10^b \cdot (10^a)^\alpha.$$

Wenn wir jetzt bezeichnen

$$10^b = B, \quad 10^a = q, \quad (4)$$

so erhalten wir als Gleichung der Geraden

$$\beta = B \cdot q^\alpha, \quad (5)$$

wobei α und β die laufenden Netzkoordinaten, B und q Festwerte sind.

Denken wir uns in einem gewöhnlichen kartesischen Netz die Abszissen mit α , die Ordinaten mit β bezeichnet, so stellt

die Gleichung (5) in diesem Netz eine Exponentialkurve dar. Die Exponentialkurven eines gewöhnlichen Netzes (Millimeterpapier) strecken sich also auf unserem halblogarithmischen Papier zu geraden Linien.

Wir müssen uns daran gewöhnen, mit einem funktionalen Netz zu arbeiten wie mit einem gewöhnlichen. Wir unterwerfen also auch unsere ganze Redeweise der Anamorphose. Wenn wir z. B. sagen, ein Punkt habe die Ordinate 3, so meinen wir, daß durch ihn die mit $\beta = 3$ bezifferte Parallele zur Abszissenachse geht. Wir gehen also nicht mehr darauf zurück, daß ja die natürliche, wahre Ordinate den Wert $y = \log 3$ Längeneinheiten hat. Wird es doch auch beim Rechnen mit dem Rechenschieber keinem Menschen einfallen, danach zu fragen, welchen wahren Abstand der mit 3 bezifferte Punkt vom Anfangspunkt 1 der Leiter hat. Es hat also z. B. der Anfangspunkt unseres halblogarithmischen Netzes die Koordinaten $\alpha = 0, \beta = 1$.

Setzen wir in der Gleichung der Exponentialgeraden (5) $\alpha = 0$, so wird $\beta = B$. B ist also der Abschnitt, den die Gerade auf der Ordinaten- oder β -Achse erzeugt.

Dagegen bestimmt die andere Gleichungskonstante q die Richtung der Exponentialgeraden. Denn nach unserer Festsetzung (4) ist $q = 10^a$ oder $a = \log q$, wobei a der Richtungsfaktor der Geraden im gewöhnlichen Sinne ist.

Jede Gerade der Ebene hat also in den (α, β) -Koordinaten eine Gleichung der Form (5). Man erkennt auch leicht, daß umgekehrt jede Gleichung von der Form (5) durch eine und nur eine Gerade dargestellt wird.

Hat man also die durch die Gleichung (5) ausgedrückte Rechnung mit mäßiger Genauigkeit auszuführen, so braucht man nur auf dem halblogarithmischen Papier eine Gerade zu ziehen. Und streckt sich eine empirische Funktion auf halblogarithmischem Papier zu einer Geraden, so ist ihr analytischer Ausdruck in Gestalt der Exponentialfunktion (5) gefunden.

Für die praktische Benutzung des halblogarithmischen Papiers ist zu bemerken: Je nach der Wahl des Maßstabes liefert der Hersteller Papiere mit einer oder mehreren logarithmischen Einheiten. Meist geht, auch bei mehreren logarithmischen Einheiten, die Bezifferung von 1 bis 10 bei jeder derselben, geradeso wie beim Rechenschieber. Der Benutzer hat diesen Ziffern den für

seinen Fall in Betracht kommenden Stellenwert durch neue Beschriftung beizulegen. Übrigens kommt man, ebenso wie meist beim Rechenschieber, oft mit einer einzigen logarithmischen Einheit aus, denn das Papier mit mehreren logarithmischen Einheiten zerfällt in lauter parallele kongruente Streifen, und was man in den zweiten Streifen zeichnet, kann man auch in den ersten zeichnen, wenn man für diesen Teil der Zeichnung die neue Bezifferung anbringt. Zugunsten der Genauigkeit, aber auf Kosten der Übersichtlichkeit, wird man also manchmal Papiermuster mit nur einer logarithmischen Einheit größeren Maßstabes wählen.

Aufgabe 13. Das Wachstum eines Kapitals von 1 $\mathcal{R}M$ bei vierprozentiger Verzinsung für einen Verlauf von 50 Jahren darzustellen.

Auflösung: Bezeichnen wir den wachsenden Wert des Endkapitals mit β , den Zinsfaktor 1,04 mit q und die Zahl der Jahre mit α , so gilt $\beta = q^\alpha$. Diese Gleichung ist von der Form (5). Wir wählen deshalb zur Darstellung das halblogarithmische Papier Schl. u. Sch. Nr. 367 $\frac{1}{2}$. Den Maßstab (die Längeneinheit) für die Abszissen, also die Strecke für 1 Jahr, wählen wir gleich 5 mm. Wir erhalten dann die gewünschte Darstellung, wenn wir den Punkt $\alpha = 0, \beta = 1$ mit dem Punkte $\alpha = 1, \beta = 1,04$ verbinden und diese Verbindungslinie verlängern. Praktisch ist dieses Verfahren zu ungenau. Wir rechnen deshalb mit einer Logarithmentafel den Endwert nach 50 Jahren $\beta = 1,04^{50} = 7,11$ aus und finden die gesuchte Darstellung als Verbindung des Punktes $\alpha = 0, \beta = 1$ mit dem Punkte $\alpha = 50, \beta = 7,11$. Aus der Figur können wir den Wert des Kapitals zu jeder beliebigen Zeit herauslesen.

Aufgabe 14. 2500 $\mathcal{R}M$ stehen 14 Jahre lang zu 4 v. H. auf Zinseszins. Auf welchen Betrag wachsen sie an?

Auflösung: Die Bezifferungen der Ordinatenachse in der vorigen Aufgabe denken wir uns vertausendfacht, lesen also z. B. statt 2,5 die Zahl 2500. Durch den Punkt 2500 der Ordinatenachse ziehen wir die Parallele zur Zinsfußlinie für 4 v. H. der vorigen Aufgabe. Sie schneidet die Ordinatenparallele $\alpha = 14$ im Werte $\beta \approx 4330$. Das gesuchte Endkapital ist also $\approx 4330 \mathcal{R}M$.

Zieht man in der Figur auch die Zinsfußlinien für 3 $\frac{1}{2}$ v. H., 4 $\frac{1}{2}$ v. H., 5 v. H. usw., so kann man alle möglichen, auch verwickelten Zinseszinsaufgaben auf diesem Blatt rasch und durchsichtig mit der Genauigkeit einer rohen Überschlagsrechnung graphisch lösen.

Man kann das Parallelogramm auch dadurch herstellen, daß man mit Hilfe eines Stechzirkels oder eines angelegten logarithmischen Maßstabes vom Schnittpunkt der Zinsfußlinie 4 mit der Ordinatenparallele $\alpha = 14$ um die logarithmische Strecke $\bar{1}; 2,5$ nach oben geht. So kommt man zu dem von P. Hanck vorgeschlagenen Zinseszinsnomogramm mit verschiebbarer logarithi-

28 Dritter Abschnitt: Graphisches Rechnen und Auswerten usw. mischer Leiter. (P. Hanck, Zeitschr. f. math. u. nat. Unterr. 52, 1921, S. 261–263.) Vgl. auch weiter unten S. 89–90.

Aufgabe 15. Eine Leidener Flasche wurde durch einen Leinenfaden langsam entladen. Dabei wurde folgende Abnahme des Potentials Φ in der Zeit t beobachtet:

t in Sekunden	0	30	60	90	120	150	180
Φ in Volt	1640	1350	1120	930	780	660	550

Man untersuche das Abnahmegesetz.

Auflösung: Trägt man die Wertepaare als Koordinaten in das halblogarithmische Papier Schl. & Sch. Nr. 376½ ein (Bild 11),

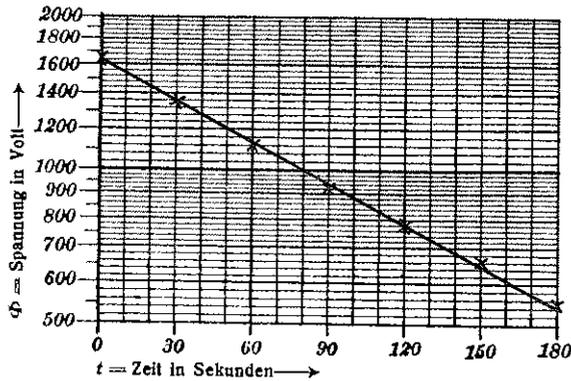


Bild 11. Abklingen einer elektrischen Ladung.

so läßt sich durch die sieben Punkte mit guter Genauigkeit eine Gerade legen. Es besteht also das Gesetz

$$\Phi = \Phi_0 \cdot q^t, \quad (6)$$

wo die Festwerte Φ_0 und q noch zu bestimmen sind. Für $t = 0$ wird $\Phi = 1640$, also ist $\Phi_0 = 1640$. Aus dem Bilde ersieht man ferner, daß die Werte $t = 180$, $\Phi = 540$ die Gleichung der Geraden mit guter Genauigkeit erfüllen müssen. Setzt man sie und den gefundenen Wert von Φ_0 in (6) ein, so ergibt sich

$$q \approx \sqrt[180]{\frac{540}{1640}}$$

und bei Ausrechnung mit dreistelligen Logarithmen

$$q \approx 0,994. \quad (7)$$

Der Potentialwert multipliziert sich also in jeder Sekunde mit 0,994 oder nimmt in jeder Sekunde um $\frac{6}{1000}$ oder 0,6 v. H. des jeweiligen Wertes am Anfang der Sekunde ab.

Abklingende Spannung. Logarithmisches Papier 29

Beim logarithmischen Papier (Bild 12) sind beide Koordinatenachsen der Anamorphose unterworfen:

$$x = \log \alpha, \quad y = \log \beta. \quad (8)$$

Hier hat der Anfangspunkt ($x = 0, y = 0$) die Koordinaten $\alpha = 1, \beta = 1$.

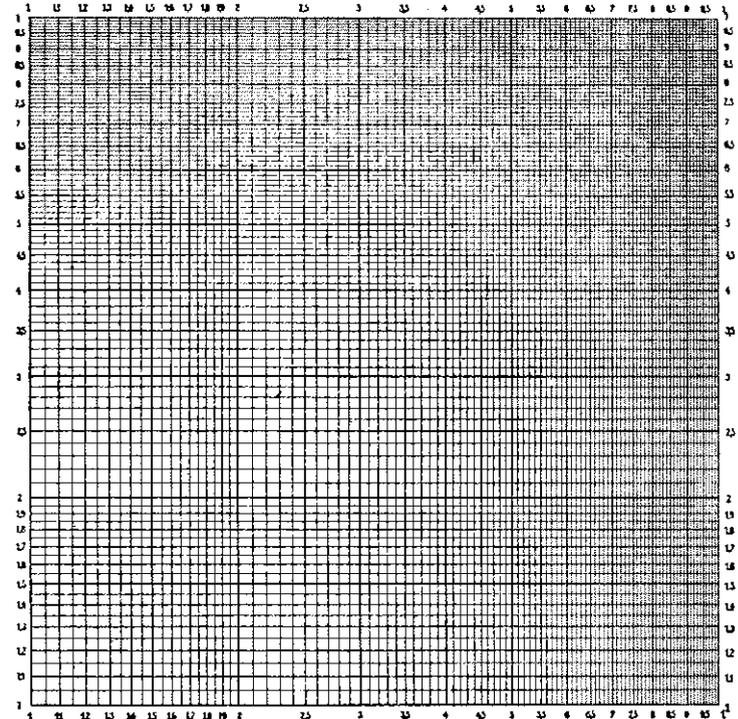


Bild 12.

Logarithmisches Papier. Wahre Länge der Quadratseite 25 cm.

Eine Gerade $y = ax + b$ (3)

hat also hier die Gleichung

$$\log \beta = a \log \alpha + b$$

oder

$$\beta = 10^b \cdot \alpha^a.$$

30 Dritter Abschnitt: Graphisches Rechnen und Auswerten usw.

Wenn wir den Festwert $10^b = B$ setzen, so erhalten wir als Gleichung der Geraden

$$\beta = B \cdot \alpha^a \quad (9)$$

In dieser Gleichung sind a und B beliebige Konstanten, α und β die Netzvariablen. Vergleichen wir die Gleichung mit der Gleichung einer Geraden in gewöhnlichen Koordinaten, so erscheinen die Rechenoperationen eine Stufe hinaufgerückt: aus der Addition ist eine Multiplikation, aus der Multiplikation eine Potenzierung geworden. In einem kartesischen Koordinatensystem, in dem die Abszissen mit α , die Ordinaten mit β bezeichnet sind, würde die Gleichung (9) die Parabel allgemeinsten Art darstellen (z. B. für $a = -1$ eine Hyperbel). Jede solche Parabel hat sich also durch die logarithmische Anamorphose zu einer geraden Linie gestreckt.

Die Bedeutung der Konstanten ist wieder leicht zu sehen. Für $a = 1$ wird $\beta = B \cdot \alpha$. B ist also die (logarithmisch gemessene) Strecke, die die Gerade auf der Ordinatenachse, die ja die Gleichung $\alpha = 1$ hat, abschneidet. Dagegen ist a , gemäß seiner Bedeutung in Gleichung (3), der Richtungsfaktor der Geraden, der aber hier in seinem alten, wahren Sinne zu nehmen ist, also die wahre Tangensfunktion des Winkels, den die Gerade mit der wachsenden Richtung der α -Achse bildet.

Für die praktische Benutzung des logarithmischen Papiers gilt Entsprechendes wie für das halblogarithmische. Bei mehreren logarithmischen Einheiten zerfällt das Blatt in lauter kongruente Quadrate (oder, wenn Abszissen- und Ordinatenmaßstab ungleich sind, Rechtecke). Trotzdem die Lösung der Aufgabe 18 eigentlich zwei untereinanderliegende derartige logarithmische Einheitsquadrate erfordert, benutzen wir hierfür der Genauigkeit wegen das Papiermuster mit nur einem Einheitsquadrat von größerem Maßstabe. Der unten links fehlende Teil der Geraden kann in die linke obere Ecke des Blattes gezeichnet werden.

Aufgabe 16. Man verbinde auf einem Bogen logarithmischen Papiers (Schl. u. Sch. Nr. 366 $\frac{1}{2}$) den Punkt $\alpha = 1, \beta = 1$ mit dem Punkte $\alpha = 10, \beta = 100$ und benutze das so erhaltene Rechenblatt dazu, beliebige Quadrierungen und Quadratwurzeln auszuführen.

Aufgabe 17. Man vervollständige die Rechentafel der vorigen Aufgabe durch zwei weitere Linien, um auch die nomographi-

Die Gerade im logarithmischen Netz. Beispiele 31

sche Lösung aller Aufgaben $\beta = \alpha^2, \alpha = \sqrt[3]{\beta}, \beta = \alpha^4, \alpha = \sqrt[4]{\beta}$ zu ermöglichen.

Aufgabe 18. O. Lummer stellte Versuche über die Abhängigkeit der Temperatur des Kohlefadens einer Glühlampe von der ausgestrahlten Energie an. Bezeichnet man mit S die von der Oberfläche 1 cm^2 in 1 sek. ausgestrahlte Energie in Grammkalorien und mit T die beobachtete absolute Temperatur in Graden, so ergaben die Versuche

T	1309	1471	1490	1565	1611	1680
S	2,138	3,421	3,597	4,340	4,882	5,660

Welches Gesetz besteht?

Auflösung: In der Darstellung der Zahlenpaare als Punkte auf dem Papier Schl. u. Sch. Nr. 375 $\frac{1}{2}$ liegen diese sechs Punkte annähernd auf einer Geraden, die, wie die Ausmessung mit einem Stechzirkel ergibt, den Richtungsfaktor ≈ 4 hat und die Ordinatenachse im Punkte $\approx 0,725$ schneidet.

Es besteht somit die Gleichung

$$S = 0,725 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^4 = 0,725 \cdot 10^{-12} \cdot T^4.$$

Der Kohlefaden folgt also dem Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetz, nach welchem die Gesamtstrahlung proportional zur vierten Potenz der absoluten Temperatur ansteigt.

Aufgabe 19. Durch Versuche wurden die Druckverluste p festgestellt, die warmes Wasser erlitt, wenn es einen Heizkörper und einen Kessel mit verschiedenen Geschwindigkeiten v durchströmte. Die Ergebnisse sind in Bild 13 dargestellt. Welches Gesetz gilt?

Auflösung: In beiden Fällen liest man aus dem Bilde

$$p = 100v^2.$$

Bei Heizkörpern und Kesseln steigt also der Druckverlust genau mit dem Quadrate der Wassergeschwindigkeit.

Bild 13 ist eins der vielen überaus lehrreichen logarithmischen Auswertungsbilder aus der Arbeit: „Reibungs- und Einzelwiderstände in Warmwasserheizungen“, Mitteil. der Prüfungsanst. f. Heizungs- und Lüftungseinrichtungen, Heft 5, München, Oldenbourg.

Aufgabe 20. Von einem auf Millimeterpapier aufgezeichneten Indikatorgramm einer Dampfmaschine wurden folgende Wertepaare von v und p für die Expansionskurve abgelesen:

Volumen v	3,34	3,73	4,12	4,60	5,08	5,58	6,30
Druck p	4,46	4,11	3,78	3,44	3,19	2,96	2,67

Die Maßeinheit dieser Zahlen ist 1 cm des Papiers. Welche Formel gibt angenähert das Expansionsgesetz wieder?

Auflösung: Die Umzeichnung auf logarithmisches Papier (Nr. 375 $\frac{1}{2}$) ergibt eine Gerade mit der Steigung $\lg \alpha = -0,81$. (Dieser Wert wird als Quotient zweier mit dem Millimetermaßstab ausgemessener Katheten des möglichst groß genommenen Steigungsdreiecks gefunden.) Also ist das Expansionsgesetz

$$p \cdot v^{0,81} = \text{konst.}$$

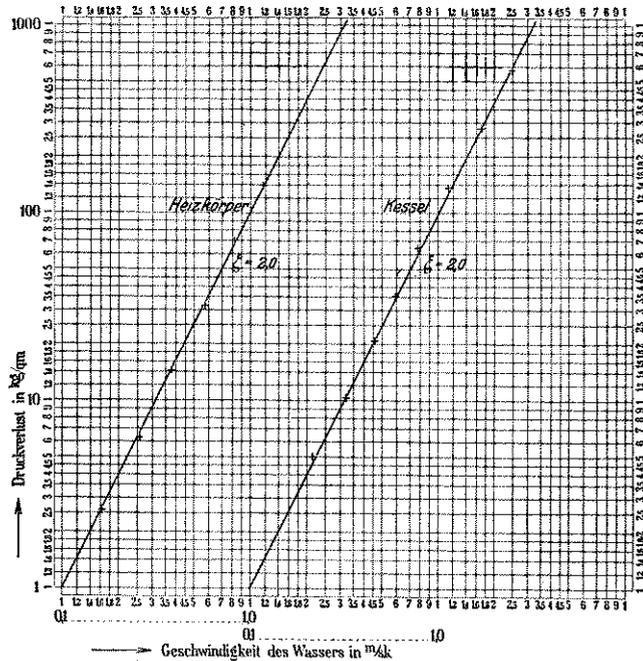


Bild 13. Druckverlust des Wassers in einem Heizkörper und in einem Kessel.

Bei einem noch unbekanntem funktionalen Zusammenhang kann natürlich kein Mensch vorher wissen, ob die Kurve sich auf einem funktionalen Koordinatennetze zu einer Geraden streckt, und auf welchem. Trotzdem ist man aber nicht planlos dem Zufall preisgegeben. Denn auch ein Probieren soll nie blindlings ausgeführt werden. Oft vermutet man aus theoretischen Gründen eine bestimmte mathema-

tische Fügung des Naturgesetzes, und die Versuche dienen dann dazu, entweder das Gesetz zu bestätigen und die Konstanten der Gleichung zu bestimmen, oder die Vermutung als falsch zu erweisen.

Aus Erfahrung weiß man auch, daß eine Menge von gesetzmäßigen Zusammenhängen zweier veränderlicher Naturgrößen α und β sich auf die Formel (9) bringen läßt, wobei der Exponent a eine ganze Zahl oder ein rationaler Bruch aus kleinen Zahlen ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ usw.) ist. Ein Beispiel hierfür gab uns Aufgabe 18. Solche Gesetze sind z. B. auch: Das Boyle-Mariottesche Gesetz, das Newtonsche und das Coulombsche Anziehungsgesetz, die Abhängigkeit des Fallraums von der Zeit, diejenige der Schwingungszeit eines Pendels von seiner Länge, das dritte Keplersche Gesetz und viele, viele andere. In allen diesen Fällen gibt die Auswertung der Beobachtungsreihen auf logarithmischem Papier eine Gerade und ermöglicht die Bestimmung der Konstanten.

Andere Naturerscheinungen wieder, so insbesondere die Vorgänge des Abklingens irgendeiner meßbaren Naturgröße, wie bei Aufgabe 15 des Potentials, vollziehen sich nach einem Gesetz, das sich auf dem halblogarithmischen Papier als Gerade darstellt.

Oft auch gehorcht der Naturvorgang nicht streng der einfachen Form des Gesetzes. Die Darstellung der Versuchsergebnisse auf dem funktionalen Papier ergibt dann nur angenähert eine gerade Linie, und der Vergleich mit der genauen Geraden gestattet ein Urteil über die Größe der Abweichungen. So könnte der Psychophysiker das Fechnersche Gesetz, nach welchem die Empfindung dem Logarithmus des Reizes proportional ist, nachprüfen, indem er die Reizwerte auf der logarithmischen und die zugehörigen Empfindungsstufen auf der linearen Achse des halblogarithmischen Papiers darstellt.

Aufgabe 21. Um ein Urteil darüber zu gewinnen, mit welcher Genauigkeit die älteste und einfachste Formel für die Abnahme des Luftdrucks b mit der Höhe h

$$h = 18400 (\log 760 - \log b)$$

$$\text{oder} \quad b = 760 \cdot \left(10^{-\frac{1}{18400}h}\right) \quad (10)$$

der Wirklichkeit nahe kommt, stelle man nach einer Zahlentafel den empirischen mittleren Barometerstand und zugleich den der Formel (10) entsprechenden theoretischen Barometerstand auf halblogarithmischem Papier dar.

Auflösung: Wir benutzen das Papier Schl. u. Sch. Nr. 367½ und machen auf der Abszissenachse die Strecke für 1000 m Höhe gleich 2 cm. Die Gleichung (10) wird dann durch die Verbindungsgerade des Punktes $h=0$, $b=760$ mit dem errechneten Punkte $h=10000$, $b=217,4$ dargestellt. Der eingetragene empirische Luftdruck ergibt eine ganz schwach gekrümmte Kurve, die zwischen $h=0$ und $h=5000$ nur wenig von der theoretischen Exponentialgeraden abweicht.

Das halblogarithmische Papier liefert auch wertvolle Schaubilder, wenn die Darstellung nicht mehr geradlinig ist. Die Aufzeichnung des Berliner Dollarkurses von 1919—23 gäbe in gewöhnlicher, linearer Darstellung ein recht ungeeignetes Bild. Die absolut kleinen Schwankungen der Anfangszeit kämen gegenüber den großen Schwankungen der späteren Zeit nicht in ihrer wahren Bedeutung zur Geltung. Dagegen prägen sich bei der Darstellung auf halblogarithmischem Papier die relativen Schwankungen des Kurses aus. Steigt in einem Zeitraum der Dollar von 40 auf 50 Papiermark, in einem anderen, gleich großen Zeitraum von 400 auf 500 Papiermark, so hat die Kurve beide Male dieselbe durchschnittliche Steigung. Tatsächlich hat ja auch in beiden Fällen die Papiermark denselben Bruchteil $\frac{1}{5}$ ihres Wertes verloren.

Ähnliche Vorteile bietet das halblogarithmische Papier für die vereinigte Darstellung mehrerer empirischer Funktionen derselben Veränderlichen in einem einzigen Schaubild. Man will etwa für die deutsche Reichsbahn die jährliche Zahl der Fahrgastkilometer, die jährliche Zahl der Tonnenkilometer und diejenige der verunglückten Personen als Funktionen der Zeit für den Bereich eines Jahrzehnts auf demselben Blatt darstellen, um das gleichzeitige Auf und Ab der Kurven zu verfolgen. Bei logarithmischen Ordinaten hat man erstens nicht die Mühe, wie beim Linearpapier für jede Kurve einen geeigneten Ordinatenmaßstab zu suchen, um alles deutlich zu machen, und zweitens geben die Steigungen und Senkungen der 3 Kurven für ein und denselben Zeitraum wirklich die für den Vergleich maßgebenden relativen Zu- und Abnahmen der dargestellten Größen an.

Als ein Beispiel für ein nichtlogarithmisches Funktionsnetz mag das trigonometrische Gitter des Bildes 9 dienen, bei dem beide Achsen nach dem Gesetz der Sinusfunktion geteilt sind. Wir können uns vorstellen, daß z. B. die Linie „Wasser“ durch Verbindung der auf Grund von Beobachtungen gewonnenen Punkte $\alpha=10^\circ$, $\beta=7^\circ,5$; $\alpha=20^\circ$, $\beta=15^\circ$; ... gefunden wurde. Dann ergibt die Auswertung das Brechungsgesetz für Wasser:

$$\sin \alpha : \sin \beta = 1,33.$$

Im Handel sind außer den halb- und ganzlogarithmischen Papieren solche erschienen, die in der einen Koordinatenrichtung nach Millimetern, in der anderen nach der Sinusfunktion geteilt sind, ferner Papiere, die in der einen Achsenrichtung logarithmisch, in der anderen nach der Funktion Logarithmus-Sinus oder Logarithmus-Tangens geteilt sind oder in beiden Achsenrichtungen nach den letztgenannten Funktionen. Bei dem hyperbolischen oder Reziprokenpapier ist eine Achse linear und die andere nach $y=1:\beta$ geteilt. Auch auf die Dreiecks- und Polarkoordinatenpapiere sei hingewiesen.

VIERTER ABSCHNITT

EINE FLUCHTENTAFEL

Unser Leitgedanke ist, die Funktionsleitern als Meßstäbe an allerhand Gebilde der Ebene anzulegen. Im zweiten und dritten Abschnitt haben wir die kartesischen Koordinaten mit solchen Funktionsmeßstäben gemessen. Es steht nichts im Wege, daß wir jetzt einmal an die Seiten und sonstigen Stücke irgendwelcher geometrischer Figuren Funktionsmeßstäbe anlegen. Ein Beispiel wird uns sogleich zeigen, daß wir dabei zu nützlichen Ergebnissen kommen. Wir wissen, daß beim Messen mit einem gewöhnlichen Meßstabe die Mittellinie $CR = w$ eines Trapezes $ABQP$ (Bild 14) das arithmetische Mittel der beiden parallelen Seiten $AP = u$ und $BQ = v$ ist:

$$w = \frac{u+v}{2}.$$

Wir wollen aber nun einmal diese drei Stücke mit logarithmischem Maße messen. Wir legen den mit 1 bezifferten

Punkt des logarithmischen Maßstabes an A als Anfangspunkt und messen die Strecke nach oben bis P . In P wird vom logarithmischen Maßstab der Wert $\alpha = 2,8$ abgelesen. Ebenso wird als logarithmisches Maß von BQ der Wert $\beta = 4,05$

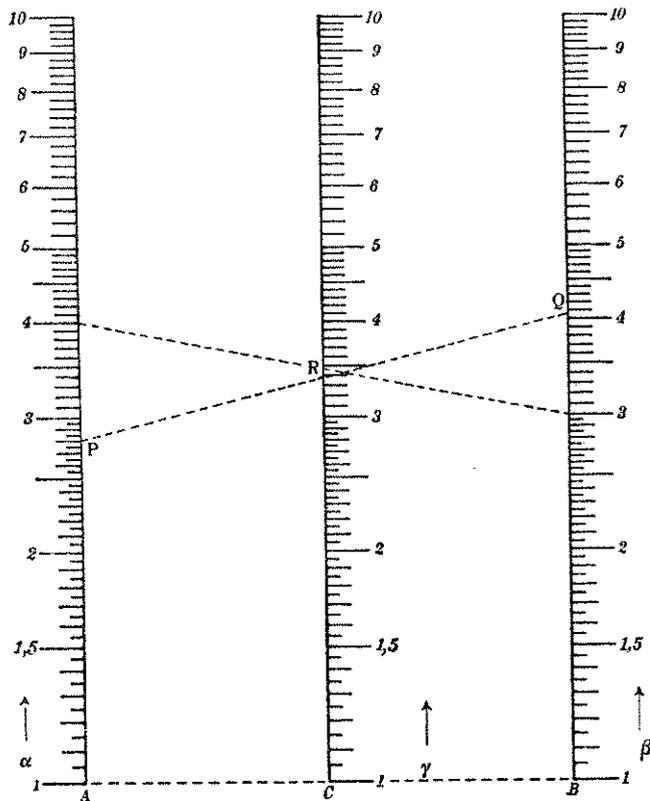


Bild 14. Das geometrische Mittel: $\gamma = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$. Beispiel: $\sqrt{3 \cdot 4} = 3,46$.

und als logarithmische Länge von CR der Wert γ abgelesen. Wir dürfen jetzt allerdings nicht einfach sagen $u = \alpha$; es heißt vielmehr: u ist logarithmisch gemessen gleich α oder

$$u = l \cdot \log \alpha, \quad (1)$$

wenn wir mit l die logarithmische Einheit des Maßstabes

bezeichnen (l bei gebräuchlichen logarithmischen Maßstäben gleich 100 mm oder gleich 250 mm). Entsprechend gilt

$$v = l \cdot \log \beta, \quad (2)$$

$$w = l \cdot \log \gamma. \quad (3)$$

Da nun nach wie vor $w = \frac{u+v}{2}$ ist, so folgt

$$l \log \gamma = \frac{l \log \alpha + l \log \beta}{2},$$

$$\log \gamma = \frac{\log \alpha + \log \beta}{2}, \quad (4)$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha \cdot \beta}. \quad (5)$$

Wir sehen also, daß beim Ausmessen des Trapezes mit einem logarithmischen Maßstabe der Satz gilt:

Die Mittellinie ist das geometrische Mittel der beiden parallelen Seiten. In der Tat gibt in unserem Falle der angelegte Maßstab

$$\gamma \approx 3,37 \approx \sqrt{2,8 \cdot 4,05}.$$

Die Aufgabe, zu zwei gegebenen Zahlen α und β das geometrische Mittel zu finden, können wir also jetzt folgendermaßen lösen: Wir zeichnen ein Trapez, dessen Parallelseiten die Längen α und β haben, zeichnen seine Mittellinie und messen sie aus. Sie ist das gesuchte geometrische Mittel, wenn alle Messungen mit dem logarithmischen Maßstabe ausgeführt wurden.

Statt in jedem Falle die Zeichnung neu zu machen, können wir folgendermaßen verfahren. Wir haben in Bild 14 auf drei parallelen, gleich weit voneinander entfernten Geraden die logarithmischen Leitern (α), (β) und (γ) so aufgezeichnet, daß ihre mit 1 bezifferten Anfangspunkte auf einer Flucht liegen. Will man nun z. B. das geometrische Mittel der Zahlen $\alpha = 4$ und $\beta = 3$ haben, so hält man einen dünnen, schwarzen Faden, den wir den Weiser nennen wollen, gespannt so über die Zeichnung, daß er die α -Leiter in dem mit 4 bezifferten Punkte und die β -Leiter in dem mit 3 bezifferten Punkte schneidet. Dann schneidet er die γ -Leiter in dem gesuchten Werte

$$\gamma = \sqrt{3 \cdot 4} \approx 3,46.$$

Bild 14, das wir nunmehr als ein Nomogramm für das geometrische Mittel ansprechen können, ist also eigentlich stets unfertig. Erst durch das Spannen des Fadens wird es jedesmal zu einem anderen Trapez vollendet.

Statt des Fadens kann man auch ein Blatt aus Zellhorn (Zelluloid) mit einer aufgedruckten Geraden benutzen.

Als guter Ersatz dient ein Blatt kräftigen, aber gut durchsichtigen Pauspapiers, auf dem man mit Tusche eine dünne Gerade gezeichnet hat.

Übungen: Man suche mit Hilfe des Nomogramms Bild 14 zu beliebigen Zahlenpaaren das geometrische Mittel. Auch kann man ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge in ein Rechteck mit einer vorgeschriebenen Seite verwandeln. Das Nomogramm liefert die Länge der unbekanntes Rechteckseite.

Beim Verfahren des zweiten Abschnitts, z. B. beim Nomogramm Bild 8, waren die drei Veränderlichen α , β , γ durch Scharen bezifferter Geraden oder anderer Kurven dargestellt. Drei Werte der Veränderlichen gehörten zusammen, d. h. genügten der Funktionsgleichung, wenn die mit ihnen bezifferten Kurven der Netztafel durch einen Punkt gingen. Anders in dem Nomogramm Bild 14! Hier treten die Werte der drei Veränderlichen in drei bezifferten Punktreihen auf. Dann und nur dann genügen drei Zahlenwerte von α , β und γ der Funktionsgleichung, wenn die mit diesen Zahlenwerten bezifferten Punkte auf einer Geraden, „auf einer Flucht“, liegen. Ein solches Nomogramm wird daher auch ein „Nomogramm nach dem Verfahren der fluchtrechten Punkte“, kurz: eine Fluchtentafel genannt. R. Mehmke hat die Bezeichnung „Fluchttafel“ als Übersetzung des entsprechenden französischen Ausdrucks eingeführt. „Fluchtentafel“ spricht sich etwas besser als „Fluchttafel“, und man bildet ja auch auf einer solchen Tafel unendlich viele Fluchten. In neuerer Zeit hat sich mehr und mehr die Bezeichnung „Leitertafel“ eingeführt. In der Tat bestehen ja auch die meisten der in der Praxis verwandten Fluchtungstabellen aus Leitern. Doch gibt es auch Fluchtungstabellen mit Netzen, und andererseits hat man auch aus Leitern bestehende Tafeln entworfen, bei denen statt der Fluchtung andere Ableseverfahren in Anwendung kommen, z. B. das Abgreifen von Strecken mit dem Stechzirkel wie in Bild 51 auf S. 93.

Daß die Fluchtentafeln eine eingehende Behandlung wert sind, leuchtet ein, wenn man sieht, wie übersichtlich und deutlich das Bild 14 für die Betrachtung und Anwendung ist. Klar und räumlich voneinander getrennt liegen die Leitern für die drei Veränderlichen da. Glatt und spielend findet jeder, der von einer Leiter Zahlen abzulesen versteht, mit Hilfe des gespannten Fadens zu zwei beliebigen der Werte α , β und γ den unbekanntes dritten. Hier ist kein sinnverwirrendes Gewebe von Kurven wie bei den Netztafeln. Kein neckischer und boshafter Kobold führt unser Auge zu einer Nachbar-kurve in die Irre, um uns so um den Lohn aller Mühe zu bringen. Ein Vorzug der Leiterdarstellung ist es auch, daß man an einer Leiter eine zweite Variable und sonstige Eintragungen durch Teilstriche nach der anderen Seite darstellen kann, wie dies bei Leitern der Bilder 27, 36 und 40 geschehen ist. Nimmt man noch hinzu, daß Fluchtentafeln meist leichter herzustellen sind und oft mehr Veränderliche umfassen können als Netztafeln, so ermißt man die Bedeutung dieser Erfindung.

Allerdings darf uns die Freude über die Zweckmäßigkeit der Fluchtentafeln nicht für ihre Nachteile blind machen. Für eine Fluchtentafel ist es peinlich notwendig, daß das Blatt, auf dem sie gezeichnet ist, keinerlei Verzerrungen unterworfen wird, durch die die Fluchtrichtigkeit der Punkte beeinträchtigt wird. Während man eine Netztafel ruhig falten und knicken, auch nach einem beliebigen Gesetz dehnen und verzerren darf, ohne die richtige Brauchbarkeit in Frage zu stellen, darf eine Fluchtentafel nur solchen Formwandlungen unterworfen werden, bei denen alle geraden Linien wieder in gerade Linien übergehen. Eine solche unschädliche Formwandlung liegt z. B. vor, wenn sich das Papier der Zeichnung durch Austrocknung gleichmäßig zusammenzieht.

Ein weiterer Nachteil der Fluchtentafeln ist es auch, daß man meist beide Hände für eine Ablesung frei haben muß, während man bei einer auf dem Blatt gedruckten Zahlen- oder Netztafel meist mit einer Hand auskommt. Auch muß bei der Fluchtentafel immer der Weiser zur Hand sein und das Blatt auf eine ebene Unterlage ausgebreitet werden. Grenzt man ferner aus einer Netztafel durch Schneiden oder Falten ein Stück ab, so hat man sofort eine handliche

40 Fünfter Abschnitt: Die Fluchtentafel mit drei parallelen Leitern
Netztafel für den Teilbereich. Bei den Fluchtentafeln entspricht
im allgemeinen einem Teilbereich ein Streifen von unbe-
quemer Lage und Form.

Im siebenten Abschnitt werden wir sehen, daß nicht jede
Gleichung mit drei Veränderlichen durch eine Fluchtentafel
darstellbar ist. Auch in dieser Hinsicht ist also die Netztafel
im Vorteil, da sie praktisch jede solche Gleichung dar-
stellen kann.

FÜNFTER ABSCHNITT

DIE FLUCHTENTAFEL MIT DREI PARALLELEN LEITERN

Im vorigen Abschnitt haben wir eine Fluchtentafel aus
drei parallelen, gleich weit voneinander entfernten logarith-
mischen Leitern entworfen. Wir betrachten jetzt allgemeiner
die Fluchtentafeln, die sich aus drei parallelen geradlinigen

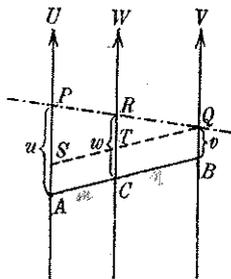


Bild 15.

Funktionsleitern bilden lassen. Die Ab-
stände der Leitern sollen also auch
ungleich sein dürfen, und die Leitern
sollen drei ganz beliebige Funktionen
 $f_1(\alpha)$, $f_2(\beta)$, $f_3(\gamma)$ darstellen. Wir wollen
untersuchen, welche Gleichungen sich
auf diese Weise darstellen lassen, und
den Weg suchen, wie diese Darstellun-
gen auszuführen sind.

In Bild 15 seien U , V und W drei
parallele Leiterträger. Ihre Anfangs-
punkte A , B und C mögen auf einer
Flucht liegen und die Pfeile mögen die positiven Richtungen
für die auf den Trägern gemessenen Strecken

$$AP = u, \quad BQ = v, \quad CR = w$$

angeben. Der Träger W teile den Abstand der beiden anderen
im Verhältnis $AC : BC = m : n$.

Wir suchen die Bedingung dafür auf, daß die Punkte P ,
 Q und R auf einer Flucht liegen. Das Bild zeigt

$$TR : SP = TQ : SQ,$$

also $(w - v) : (u - v) = n : (m + n)$

Schlüsselgleichung

41

oder

$$(m + n)w = nu + mv.$$

(1)

Tragen nun die drei Geraden die Leitern

$$\left. \begin{aligned} u &= l_1 \cdot f_1(\alpha), \\ v &= l_2 \cdot f_2(\beta), \\ w &= l_3 \cdot f_3(\gamma), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wo l_1 , l_2 und l_3 die in einer bestimmten Längeneinheit ge-
messenen Maßstäbe und $f_1(\alpha)$, $f_2(\beta)$, $f_3(\gamma)$ ganz beliebige
Funktionen der Veränderlichen α , β und γ sind, so erhalten
wir durch Einsetzen der Funktionen (2) in (1)

$$(m + n)l_3 \cdot f_3(\gamma) = nl_1 \cdot f_1(\alpha) + ml_2 \cdot f_2(\beta). \quad (3)$$

Nehmen wir an, daß bei dem darzustellenden Gesetz α und
 β gewöhnlich als die unabhängigen Veränderlichen auftreten,
so wird sich jede von diesen innerhalb eines bekannten Be-
reiches bewegen. Wenn α z. B. eine elektrische Spannung
bedeutet, so wird diese beispielsweise stets zwischen 1,5 Volt
und 20 Volt liegen. Wir wollen dann über die Maßstäbe l_1
und l_2 so verfügen, daß die für jene Bereiche zu zeichnenden
Leitern (α) und (β) annähernd gleich lang ausfallen. Sind
 l_1 und l_2 so gewählt, so wollen wir l_3 und das Teilverhältnis
 $m : n$ so bestimmen, daß alle Koeffizienten der Gleichung (3)
einander gleich werden:

$$(m + n)l_3 = nl_1 = ml_2. \quad (4)$$

Hieraus ergibt sich $m : n = l_1 : l_2$ (5)

und $\frac{1}{l_3} = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}$ oder $l_3 = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$. (6)

Dividieren wir die Gleichung (3) durch ihre nach (4) gleichen
Koeffizienten, so geht sie über in

$$f_3(\gamma) = f_1(\alpha) + f_2(\beta). \quad (7)$$

Damit ist die gesuchte „Schlüsselgleichung“ gefunden:

Jede beliebige Gleichung zwischen drei Verän-
derlichen α , β , γ , die sich auf die Form (7) bringen
läßt, wo f_1 , f_2 , f_3 beliebige Funktionen sind, läßt sich
durch eine Fluchtentafel mit drei parallelen Leitern
darstellen.

Die folgenden Beispiele werden zeigen, wie man praktisch derartige Nomogramme herstellt.

Aufgabe 22. Jemand besitzt eine Batterie von zehn Bleiakкумуляtoren, mit der er allerhand Gleichstromversuche anstellen will. Durch geeignete Schaltung kann er dieser Stromquelle Spannungen von 2 bis 20 Volt geben. Die Gesamtwiderstände, die bei den Versuchen in den Stromkreis eingeschaltet sind, sollen stets zwischen 0,1 Ohm und 10 Ohm liegen. Der Besitzer will sich ein auf den Kasten der Batterie aufzuklebbendes Nomogramm herstellen, aus dem von den drei Größen: Spannung (e), Widerstand (r) und Stromstärke (i) die dritte entnommen werden kann, wenn die beiden anderen beliebig gegeben sind.

Auflösung: Es gilt Ohms Gesetz

$$i = \frac{e}{r} \quad (8)$$

Hieraus folgt $\log i = \log e - \log r$ (9)

Diese Gleichung ist von der Form der Gleichung (7). Wir setzen also entsprechend den Gleichungen (2)

$$\left. \begin{aligned} u &= l_1 \log e, \\ v &= -l_2 \log r, \\ w &= l_3 \log i. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Wir wollen für r zunächst nur den Bereich 1 bis 10 Ω nehmen. Die Erweiterung des Bereichs auf 0,1 bis 1 Ω , wie auf jeden anderen Bereich, wird sich später leicht machen lassen. Um auch den Fall zu berücksichtigen, daß die Spannung einer Zelle etwas unter 2 Volt heruntersinkt, wählen wir für e den Bereich 1,5 bis 20 Volt. Da dann e ungefähr und r genau den Bereich einer logarithmischen Einheit hat, so wählen wir $l_1 = l_2$. Dann wird nach (6)

$$l_3 = \frac{l_1}{2}$$

Wir wählen $l_1 = l_2 = 250$ mm, $l_3 = 125$ mm,

denn mit diesen logarithmischen Einheiten stehen uns fertige Meßstäbe zur Verfügung. Die Leiterstücke

$$u = 250 \text{ mm} \cdot \log e \quad (1,5 \leq e \leq 20),$$

$$v = -250 \text{ mm} \cdot \log r \quad (1 \leq r \leq 10)$$

zeichnen wir parallel zueinander und, wegen des Minuszeichens, mit in entgegengesetztem Sinne wachsender Bezifferung (Bild 16). Der Abstand der Leitern und die Lagen ihrer Anfangspunkte ist beliebig; meist wird man aber der Genauigkeit und Schönheit zuliebe die Leiterstücke so legen, daß das Nomogramm annähernd die Form eines schlanken Rechtecks erhält. Da nach (5)

$$m : n = l_1 : l_2 = 1 : 1$$

wird, so ist nun die i -Leiter mit halb so großem Maßstab an die Gerade zu legen, die in der Mitte der beiden Leitern parallel zu beiden verläuft. Die Leiter ist gleichsinnig mit der e -Leiter so anzu-

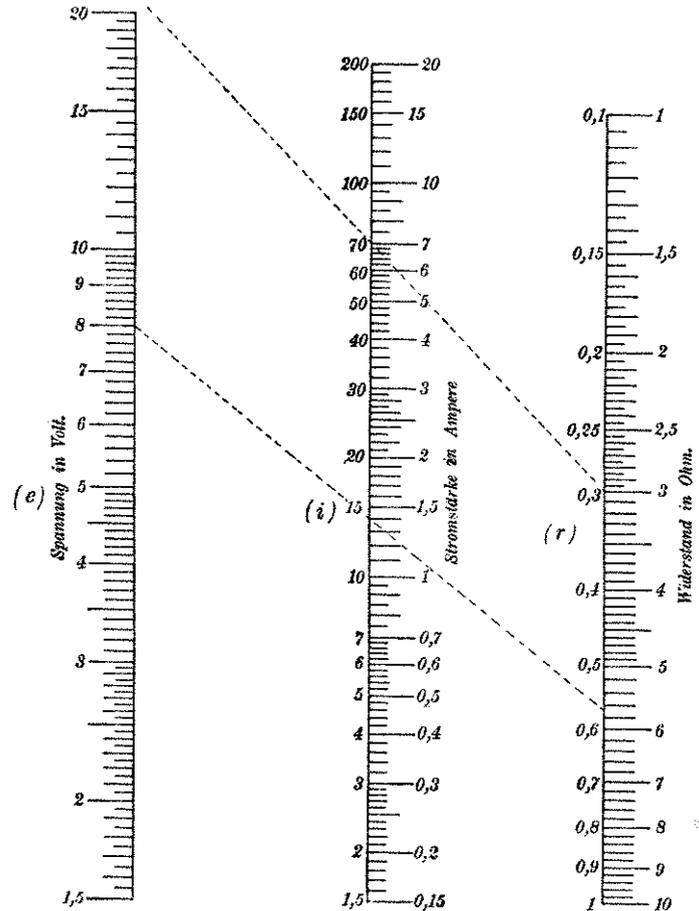


Bild 16. Das Ohmsche Gesetz: $i = \frac{e}{r}$

Beispiel: Bei 8 V Spannung und 0,57 Ω Widerstand fließen 14 A Strom.

legen, daß ihr Punkt 0,15 auf der Verbindungslinie der Punkte 1,5 und 10 der beiden anderen Leitern liegt. Denn die Werte $e = 1,5$, $i = 0,15$, $r = 10$ erfüllen die Gleichung (8).

44 Fünfter Abschnitt: Die Fluchtentafel mit drei parallelen Leitern

Multiplikation von i mit einem konstanten Faktor, z. B. 10, und gleichzeitige Division von r durch denselben Faktor beeinflussen die Richtigkeit der Gleichung (8) nicht. So ergibt sich die Erweiterung des Bereichs von r um das Wertgebiet 0,1 bis 1 Ω , dem die links an die Leitern geschriebenen Ziffern entsprechen. In derselben Weise kann man durch Kopfrechnung die Wertgebiete noch beliebig mehr erweitern.

Anwendungsbeispiele. 1. Bei einem Versuch mit der Spannung 8 Volt zeigte das Amperemeter 14 A Strom an. Wieviel Widerstand war im Stromkreis? Antwort: Das Nomogramm ergibt $r = 0,57 \Omega$.

2. Kann die Batterie einen Apparat von 3 Ω Widerstand mit 7 Amp. Strom speisen? Antwort: Nein, denn der durch $r = 3$ und $i = 7$ gehende Weiserfaden zeigt, daß hierzu mehr als 20 Volt Spannung erforderlich wären.

Bemerkung: Bild 16 entspricht dual dem Bilde 8 und kann als Multiplikations- und Divisionstafel dienen.

Aufgabe 23. In der drahtlosen Technik werden häufig folgende Formeln gebraucht:

$$\lambda = 6\pi\sqrt{C \cdot L} \cdot 10^8, \quad N = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

In ihnen bedeutet L die in C.G.S.-Einheiten gemessene Selbstinduktion, C die in C.G.S.-Einheiten gemessene Kapazität eines elektrischen Schwingungskreises. N ist die Schwingungszahl und λ die in Metern gemessene Länge der elektrischen Wellen, die der Kreis aussendet. Man stelle beide Formeln durch ein einziges Nomogramm dar. Auflösung Bild 17. Vgl. Jahrb. d. drahtl. Telegraphie u. Telephonie. Bd. 12, S. 516.

Aufgabe 24. Ein Nomogramm für den Inhalt eines geraden Kreiszylinders zu zeichnen. Zwecks einfachster Herstellung soll darauf verzichtet werden, der Tafel unter Berücksichtigung der Wertebereiche die Rechteckform zu geben.

Auflösung: $I = 0,25 \pi d^2 h, \quad (11)$

$$2 \log d = \log I - \log h - \log (0,25 \pi). \quad (12)$$

Oft führt unmittelbare Überlegung rascher zum Entwurf des Nomogramms, als die Deduktion aus dem allgemeinen Fall, wie wir sie bei Aufgabe 22 vornahmen. Im vorliegenden Fall lehnen wir uns bequem an die im vierten Abschnitt entworfene Rechentafel für das geometrische Mittel (Bild 14) an. Dieser lag die Gleichung (4) von S. 37 oder die Gleichung

$$2 \log \gamma = \log \alpha + \log \beta \quad (13)$$

zugrunde. Kehre ich in Bild 14 die Richtung einer der Leitern, z. B. der β -Leiter, um, so äußert sich das analytisch darin, daß

in Gleichung (13) das Glied $\log \beta$ sich in $-\log \beta$ verwandelt. Verschiebe ich zweitens noch eine der Leitern, z. B. die α -Leiter, um ein Stück in ihrer eigenen Richtung, so tritt in Gleichung (13) noch eine additive Konstante auf. Die Gleichung (13) geht also in die Form über

$$2 \log \gamma = \log \alpha - \log \beta + \text{const.} \quad (14)$$

Von dieser Form ist aber unsere Gleichung (12). So kommen wir zu folgender Konstruktion des Nomogramms:

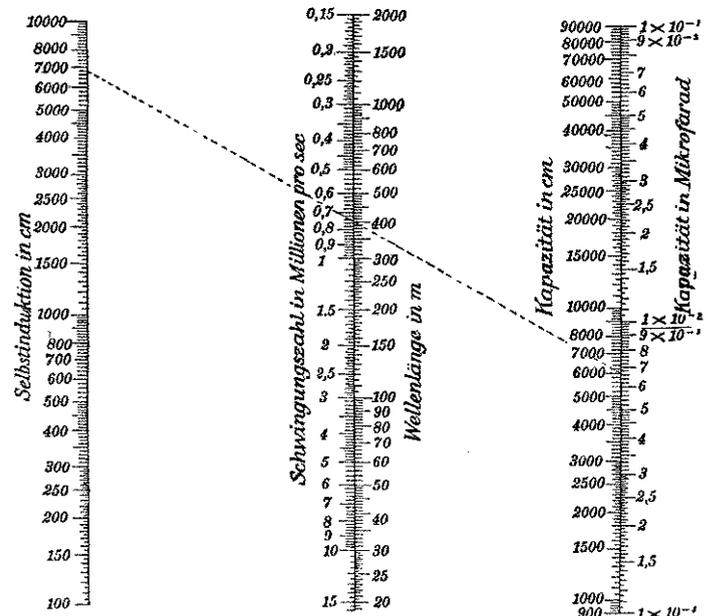


Bild 17. Schwingungszahl und Wellenlänge von Kondensatorkreisen. Der Schwingungskreis eines Senders hat bei 6000 cm Kapazität und 6800 cm Selbstinduktion 750 000 Schwingungen in der Sekunde. Der auf ihn abgestimmte Luftdrahtkreis sendet 400 m lange Wellen aus.

Wir legen die Leitern 250 mm $\cdot \log I$, 250 mm $\cdot \log h$ und 250 mm $\log d$ parallel und in gleichen Abständen so, daß die d -Leiter in der Mitte liegt, die Werte der h -Leiter in entgegengesetzter Richtung wachsen wie die der beiden anderen, und daß die Verbindungslinie der Punkte $d=1$, $h=1$ die I -Leiter im Punkte $I = 0,25 \pi$ trifft. [Mitten von (J) und (h) einander gegenüber!]

Bei einiger Übung kann man solche unmittelbaren Überlegungen auch sofort an die ursprünglichen (unlogarithmierten)

46 Sechster Abschnitt: Die Fluchtentafel mit drei geraden Leitern

Gleichungen, wie Gleichung (11), anknüpfen. Auch Aufgabe 22 und 23 lassen sich so in Anlehnung an die Aufgabe des vierten Abschnitts lösen.

Aufgabe 25. Ein Nomogramm für das Gewicht δ eines Liters Luft als Funktion des Druckes p und der Temperatur t zu zeichnen.

Auflösung: Es gilt die Formel
$$\delta = \frac{1,293 \cdot p}{760} \cdot \frac{273}{273 + t}$$

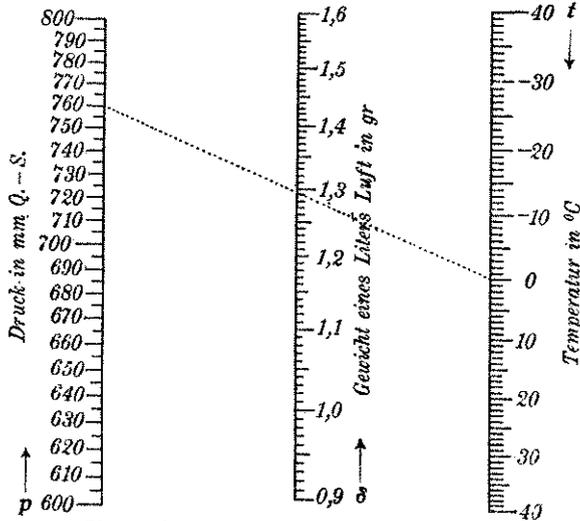


Bild 18. Gewicht eines Liters trockener Luft in g:

$$\delta = \frac{1,293 \cdot p}{760} \cdot \frac{273}{273 + t}$$

p = Druck in mm Hg, t = Temperatur in °C.

welche durch Bild 18 nomographisch dargestellt wird. In der Formel wurde zunächst $273 + t$ durch T ersetzt; dann wurde logarithmiert. Zum Schlusse wurde die T -Leiter mit den Werten von t beziffert.

SECHSTER ABSCHNITT

DIE FLUCHTENTAFEL MIT DREI GERADEN LEITERN

Es liegt nahe, auch solche Fluchtentafeln aus drei geradlinigen Leitern herzustellen, bei denen die Träger nicht mehr oder nicht mehr alle parallel sind. Wir unterscheiden folgende Fälle:

Luftgewicht. Nicht parallele Leitern

1. Die Leitern bilden die Seiten eines Dreiecks.
2. Die Leitern gehen durch einen Punkt.
3. Zwei parallele Leitern werden von einer dritten geschnitten.

Für den ersten dieser Fälle wird der Leser im Lehrsatz des Menelaos die Grundform der Gleichungen finden, die sich durch eine solche Figur nomographisch lösen lassen. Den zweiten und dritten Fall wollen wir hier etwas näher betrachten.

Durch den Punkt O (siehe Bild 19) gehen die drei Leiterträger U, V und W . Der Einfachheit halber nehmen wir an, W bilde mit U und V denselben Winkel ϵ . Schneidet nun eine beliebige Gerade PQ als Weiser auf den Strahlen die Strecken $OP = u, OQ = v, OR = w$ ab, so ist

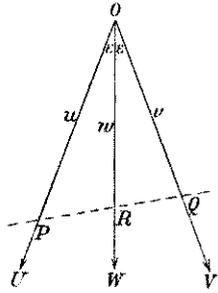


Bild 19.

$$\frac{1}{2} uv \sin 2\epsilon = \frac{1}{2} vw \sin \epsilon + \frac{1}{2} uw \sin \epsilon, \quad (1)$$

denn diese Gleichung sagt aus, daß der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ gleich der Summe der Inhalte der Dreiecke OPR und OQR ist. Aus (1) folgt

$$\frac{\sin 2\epsilon}{w} = \frac{\sin \epsilon}{u} + \frac{\sin \epsilon}{v}$$

oder, da $\sin 2\epsilon = 2 \sin \epsilon \cos \epsilon$ ist,

$$\frac{2 \cos \epsilon}{w} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}. \quad (2)$$

Setzen wir nun für die drei Leitern die Gleichungen

$$u = l f_1(\alpha), \quad v = l f_2(\beta), \quad w = l_3 \cdot f_3(\gamma) = 2l \cos \epsilon \cdot f_3(\gamma) \quad (3)$$

an, so geht (2) durch Einsetzen dieser Werte über in die Schlüsselgleichung

$$\frac{1}{f_3(\gamma)} = \frac{1}{f_1(\alpha)} + \frac{1}{f_2(\beta)}. \quad (4)$$

Hierbei wählen wir für die Funktionen f_1 und f_2 also gleiche Maßstäbe l und für die Funktion f_3 den Maßstab $l_3 = 2l \cos \epsilon$.

Aufgabe 28. In Bild 23 sei AB der 100 cm lange Meßdraht einer Brückenschaltung nach Wheatstone. Um mit Hilfe des bekannten Widerstandes $\alpha \Omega$ den unbekanntem Widerstand $\beta \Omega$ zu finden, verschiebt man den Kontakt P so lange auf dem Meßdraht, bis durch die Brücke kein Strom mehr fließt. Man liest dann ab: $AP = \gamma$ cm. Es wird ein Nomogramm für den unbekanntem Widerstand $\beta \Omega$ gesucht.

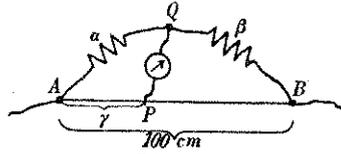


Bild 23.

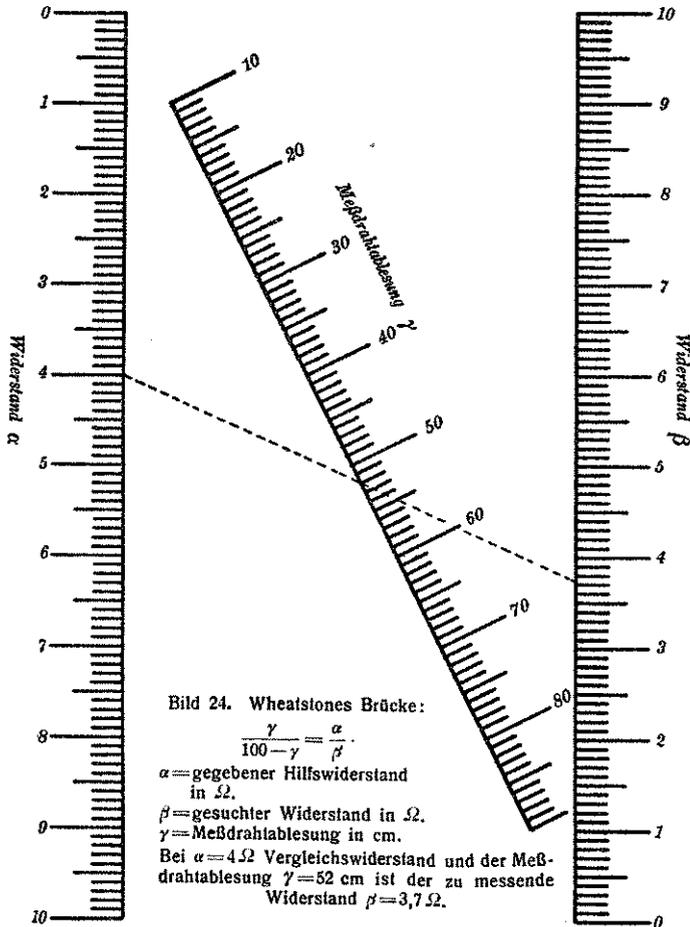


Bild 24. Wheatstones Brücke:

$$\frac{\gamma}{100 - \gamma} = \frac{\alpha}{\beta}$$

α = gegebener Hilfswiderstand in Ω .

β = gesuchter Widerstand in Ω .

γ = Meßdrahtablesung in cm.

Bei $\alpha = 4 \Omega$ Vergleichswiderstand und der Meßdrahtablesung $\gamma = 52$ cm ist der zu messende Widerstand $\beta = 3,7 \Omega$.

Auflösung: Es gilt $\frac{\gamma}{100 - \gamma} = \frac{\alpha}{\beta}$. Diese Gleichung geht in (6) über, wenn man $u = l_1 \alpha$, $v = l_1 \beta$, $w = l_2 \gamma$, $a = l_2 \cdot 100$ setzt, wo l_1 und l_2 geeignet gewählte Längeneinheiten sind. Das Bild 24, das sich, wie auch einige der später zu besprechenden Fluchtentafeln, besonders leicht in ein Netz von Millimeterpapier zeichnen läßt, ist das gesuchte Nomogramm und zeigt als Beispiel die Lösung der Aufgabe: Wie groß ist der zu bestimmende Widerstand β , wenn der Hilfswiderstand α gleich 4Ω ist und auf dem Meßdraht $\gamma = 52$ cm abgelesen wird? Es ergibt sich $\beta = 3,7 \Omega$.

Aus dem überaus durchsichtigen Nomogramm kann man ohne jede nomographische Theorie die Proportion der Wheatstoneschen Brückenverzweigung herauslesen (Strahlensatz). Die γ -Leiter ist dabei ein verkleinertes Abbild des Meßdrahtes.

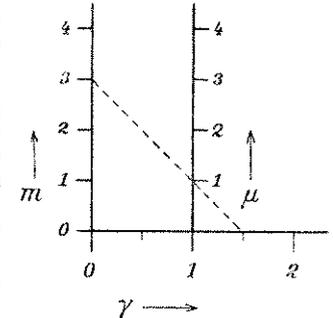


Bild 25. Wiegt ein Körper in der Luft m g, unter Wasser μ g, so hat er das spezifische Gewicht

$$\gamma = \frac{m}{m - \mu}$$

Aufgabe 29. Ein Körper wiegt in der Luft m g, unter Wasser μ g. Man zeichne eine Tafel für das spezifische Gewicht γ .

Auflösung: $\gamma = \frac{m}{m - \mu}$

oder $\frac{m}{\mu} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$, siehe Bild 25.

Beispiel: $m = 300$, $\mu = 100$, $\gamma = 1,5$.

Nach dem Leitergefüge des Bildes 22 läßt sich nun jede Gleichung von der Form

$$f_3(\gamma) = \frac{f_1(\alpha)}{f_2(\beta)} \tag{7}$$

darstellen.

Wir erhalten diese Darstellung, wenn wir setzen

$$\left. \begin{aligned} u &= l_1 f_1(\alpha), & v &= l_2 f_2(\beta), \\ \frac{w}{a - w} &= l_3 f_3(\gamma) \text{ oder } w &= \frac{l_3 f_3(\gamma) \cdot a}{1 + l_3 f_3(\gamma)}. \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Denn wählen wir l_1 und l_2 beliebig und $l_3 = l_1/l_2$, so geht die Gleichung (7) durch Einsetzen der Werte, die den Funktionen $f_1(\alpha)$, $f_2(\beta)$ und $f_3(\gamma)$ nach (8) zukommen, in die Gleichung (6) über.

Läßt sich die Leiter $w = \frac{l_3 f_3(\gamma) \cdot a}{1 + l_3 f_3(\gamma)}$ nicht unmittelbar zeichnen, wohl aber eine Leiter für $f_3(\gamma)$, so kann die Leiter

52 Sechster Abschnitt: Die Fluchtentafel mit drei geraden Leitern für w durch Projektion aus der Leiter für $f_3(\gamma)$ abgeleitet werden. Denn da w eine lineare gebrochene Funktion von $f_3(\gamma)$ ist, so ist die Leiter für w projektiv zu derjenigen von $f_3(\gamma)$ (vgl. S. 11). Wie einfach sich die projektive Erzeugung praktisch gestaltet, zeigen die beiden folgenden Aufgaben.

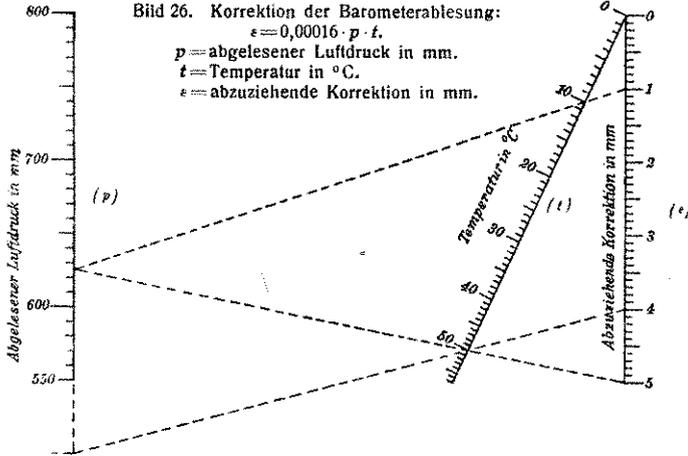


Bild 26. Korrektur der Barometerablesung:

$\epsilon = 0,00016 \cdot p \cdot t$
 p = abgelesener Luftdruck in mm.
 t = Temperatur in °C.
 ϵ = abzuziehende Korrektur in mm.

Aufgabe 30. Wird von einem Quecksilberbarometer mit Messingmaßstab bei $t^\circ\text{C}$ der Luftdruck p in mm Quecksilbersäule abgelesen, so muß man, um diesen Luftdruck auf 0° zu reduzieren, von p den Betrag

$$\epsilon = 0,00016 p \cdot t \quad (9)$$

abziehen. Für diese Barometerkorrektur ist ein Nomogramm zu zeichnen.

Auflösung: Bild 26 (nach d'Ocagne). Das fertige Nomogramm läßt seine Herstellungsweise leicht erkennen und begründen. Die gleichförmigen Leitern (ϵ) und (p) sind parallel und entgegengesetzt gerichtet und leicht in beliebigen, zweckmäßigen Maßstäben und Bereichen auf Millimeterpapier zu zeichnen. Die Leiter (t) findet man folgendermaßen:

1. Festlegung ihres Trägers. Da der Träger eine gerade Linie ist, genügt es, zwei seiner Punkte festzulegen. Als einer dieser Punkte kann der Punkt $\epsilon = 0$ der ϵ -Leiter dienen. Denn da nach (9) bei $t = 0$ für beliebige p -Werte $\epsilon = 0$ wird, so ist der Punkt $\epsilon = 0$ der ϵ -Leiter zugleich ein Punkt der t -Leiter. Als zweiter Bestimmungspunkt mag etwa dienen der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden ($p = 500, \epsilon = 4$) mit der Geraden ($p = 625, \epsilon = 5$), denn beide Geraden geben nach (9) denselben Punkt $t = 50$ der t -Leiter.

2. Einzeichnung der Teilung. Für $p = \frac{10000}{16} = 625$ geht (9) über in $t = 10\epsilon$.

Projiziert man also die ϵ -Leiter vom Punkte $p = 625$ der p -Leiter aus auf den soeben gefundenen Träger, so erhält man die Punkte der t -Leiter, die mit den zehnfachen Zahlen der entsprechenden Punkte der ϵ -Leiter zu beziffern sind.

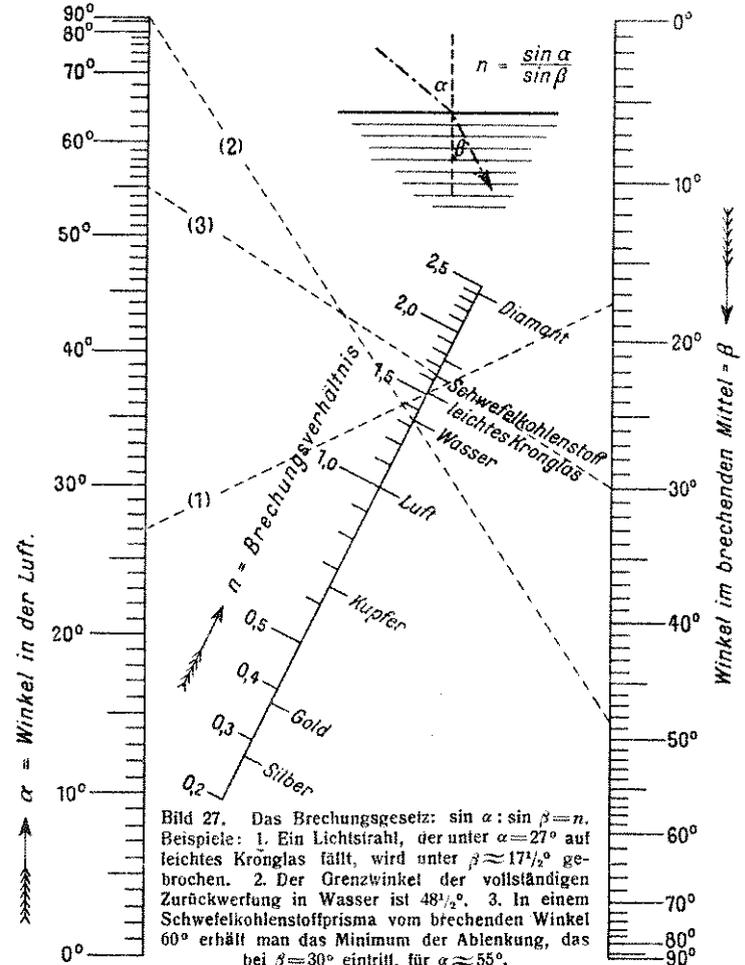
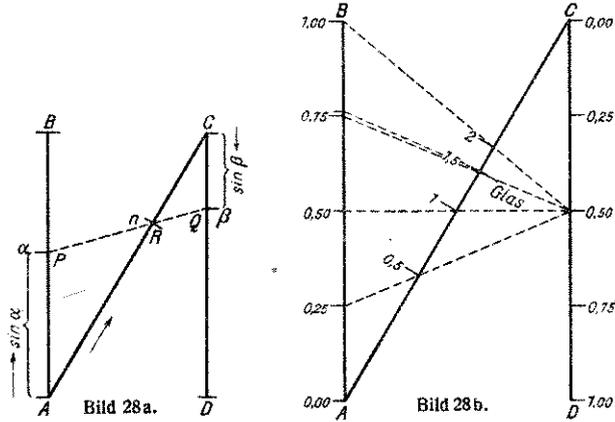


Bild 27. Das Brechungsgesetz: $\sin \alpha : \sin \beta = n$. Beispiele: 1. Ein Lichtstrahl, der unter $\alpha = 27^\circ$ auf leichtes Krönglas fällt, wird unter $\beta \approx 17\frac{1}{2}^\circ$ gebrochen. 2. Der Grenzwinkel der vollständigen Zurückwerfung in Wasser ist $48\frac{1}{2}^\circ$. 3. In einem Schwefelkohlenstoffprisma vom brechenden Winkel 60° erhält man das Minimum der Ablenkung, das bei $\beta = 30^\circ$ eintritt, für $\alpha \approx 55^\circ$.

Aufgabe 31. Das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

durch eine Fluchtentafel darzustellen (vgl. Aufg. 11).



Auflösung: Bild 27 ist die gesuchte Rechentafel. Sie ist dual zu Bild 9 auf S. 22. Die Bilder 28a und b erläutern Bau und Herstellung der Tafel. Die Leitern (α) und (β) sind Sinusleitern, die Leiter (n) ist eine projektive Leiter, die in Bild 28b nach Aufg. 6 von S. 10 als Projektion einer gleichförmigen Leiter erzeugt wird.

SIEBENTER ABSCHNITT

DIE ALLGEMEINE FLUCHTENTAFEL

Werfen wir einen Rückblick auf die in den drei letzten Abschnitten gebildeten Fluchtentafeln aus drei geradlinigen Leitern, so sehen wir, daß alle diese Nomogramme im Grunde Gleichungen von ein und derselben Natur darstellen, nämlich Gleichungen, die sich auf die Schlüsselform

$$F_1(\alpha) + F_2(\beta) + F_3(\gamma) = 0 \quad (1)$$

bringen lassen. Die Gleichung (7) von S. 51 kommt durch Logarithmieren auf diese Form. Eine Gleichung der Form (1) kann man durch irgendeins der beschriebenen Nomo-

grammgefüge aus drei Geraden darstellen. Welches Gefüge man wählt, ob drei parallele Gerade oder drei sich schneidende oder zwei parallele, die von einer dritten geschnitten werden, hängt davon ab, mit welchem Gefüge man das Ziel am einfachsten und besten erreicht, vor allem also davon, welches Gefüge die einfachsten Funktionsleitern erfordert. Die im vorigen Abschnitt behandelte Gleichung $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ hätte sich z. B. auch durch drei parallele, gleich weit voneinander entfernte gerade Träger mit den Funktionsleitern

$$u = \frac{l}{\alpha}, \quad v = \frac{l}{\beta}, \quad w = \frac{l}{\gamma}$$

darstellen lassen. Das wären aber lauter ungleichförmige, nämlich projektive (reziproke) Leitern gewesen. Viel zweckmäßiger war es deshalb, für das Nomogramm dieser Gleichung drei sich in einem Punkte schneidende Geraden mit gleichförmigen Leitern zu benutzen. Gleichungen von der Form (1) lassen sich auch durch Rechenschieber darstellen, wie wir das im neunten Abschnitt sehen werden.

Wir gehen nun weiter und fragen uns, ob auch andere Gleichungen zwischen drei Veränderlichen α, β, γ , als solche vom Bau der Gleichung (1), durch Fluchtentafeln darstellbar sind. Dafür ist Aussicht vorhanden, denn eine Verallgemeinerungsmöglichkeit besteht darin, daß die geradlinigen Leitern durch irgendwelche krummlinige Leitern ersetzt werden.

Zu diesem Zwecke beschäftigen wir uns zunächst mit der analytischen und zeichnerischen Darstellung einer krummlinigen Leiter. Gegeben seien die beiden Gleichungen

$$x = f(\alpha), \quad y = g(\alpha), \quad (2)$$

in denen f und g beliebige, eindeutige, stetige Funktionen derselben Veränderlichen α bezeichnen. Setzen wir für den „Parameter“ α einen beliebigen Wert, z. B. $\alpha = 2$ ein, so stellen die Gleichungen (2) in der Ebene eines kartesischen Koordinatennetzes (x, y) einen Punkt dar, den wir einzeichnen und mit dem Wert $\alpha = 2$ beziffern wollen. Lassen wir nun α weiter die Werte 3, 4 usw. annehmen, so werden auch diesen Parameterwerten gewisse neue Punkte entsprechen, die wir ebenfalls einzeichnen und beziffern können.

Durchläuft α , etwa mit dem Werte $\alpha = 2$ beginnend, eine stetige Folge von Werten, so wird der entsprechende Punkt eine stetige Folge von Punkten, eine Kurve, durchlaufen, an der wir für runde Werte von α , wie $\alpha = 1, 2, \dots$ Teilstriche und Bezifferungen anbringen können. Die Gleichungen (2) stellen also eine im allgemeinen krumme α -Leiter dar, die wir punktweise zeichnen können.

Aufgabe 32. Die Leiter

$$x = \frac{100}{1+z}, \quad y = \frac{-10z^2}{1+z} \quad (3)$$

für den Bereich $0 \leq z \leq 11$ punktweise zu zeichnen.

Auflösung: Setzen wir in die Gleichungen (3) für den Parameter z der Reihe nach die Werte $0, 1, \dots, 11$ ein, so erhalten wir

z	0	1	2	3	4	5
x	100	50	33,3	25	20	16,7
y	0	-5	-13,3	-22,5	-32	-41,7
z	6	7	8	9	10	11
x	14,3	12,5	11,1	10	9,1	8,3
y	-51,4	-61,3	-71,1	-81	-90,9	-100,8

Hieraus gewinnt man das in Bild 29 dargestellte Gerippe der z -Leiter, das natürlich durch Berechnung und Einzeichnung weiterer Punkte auszufüllen ist.

Eliminiert man aus den beiden Gleichungen (2) den Parameter α , so ergibt sich die Gleichung des Trägers der Leiter. So erhalten wir aus den Gleichungen (3) die Hyperbelgleichung

$$(100 - x)^2 + 10xy = 0. \quad (4)$$

Aus den Gleichungen (3) können wir auch folgende Gleichungen ableiten:

$$\frac{y}{x} = -\frac{z^2}{10} \quad \text{und} \quad \frac{y}{x-100} = \frac{z}{10}. \quad (5)$$

Sie stellen Strahlenbüschel dar, die den Nullpunkt und den Punkt $x=100$ der Abszissenachse zu Zentren haben. Der mit z zu beziffernde Punkt läßt sich also statt aus seinen Koordinaten x und y auch als Schnittpunkt des durch den Nullpunkt gehenden Strahls vom Richtungsfaktor $-\frac{z^2}{10}$ mit dem durch den Punkt

$x=100, y=0$ gehenden Strahl vom Richtungsfaktor $\frac{z}{10}$ finden. Diese Konstruktion ist im Bilde 29 für den Punkt $z=3$ ausgeführt. Solche Erzeugungsweisen von Leiterpunkten sind oft bequemer, aber meist ungenauer als die Berechnung der kartesischen Koordinaten.

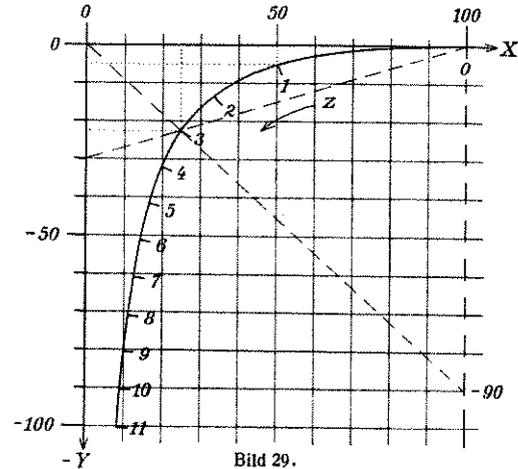


Bild 29.
Die Leiter $x = \frac{100}{1+z}, y = \frac{-10z^2}{1+z}$.

Aufgabe 33. a) Wann stellen die Gleichungen (2) eine geradlinige Leiter dar? b) Wie lautet insbesondere die Darstellung einer zur y -Achse parallelen geraden Leiter?

Auflösung: a) Wenn zwischen $f(\alpha)$ und $g(\alpha)$ eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten besteht:

$$af(\alpha) + bg(\alpha) + c = 0.$$

b) $x = \text{const}, y = g(\alpha)$.

Nun können wir die Schlüsselgleichung der allgemeinsten, aus drei gerad- oder krummlinigen Leitern bestehenden Fluchtentafel (Bild 30) aufstellen. Die drei Leitern seien durch folgende Parameterdarstellungen gegeben:

$$\left. \begin{aligned} \text{Leiter } (\alpha): & \quad x_\alpha = f_1(\alpha), \quad y_\alpha = g_1(\alpha), \\ \text{Leiter } (\beta): & \quad x_\beta = f_2(\beta), \quad y_\beta = g_2(\beta), \\ \text{Leiter } (\gamma): & \quad x_\gamma = f_3(\gamma), \quad y_\gamma = g_3(\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Hier bedeuten f_1, g_1, f_2, \dots beliebige Funktionen. Um die Zugehörigkeit zur α -, β - oder γ -Leiter zu kennzeichnen, haben wir die laufenden Koordinaten mit den Zeigern α, β, γ versehen. Bekanntlich lautet die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die drei Punkte $(x_\alpha, y_\alpha), (x_\beta, y_\beta), (x_\gamma, y_\gamma)$ auf einer Flucht liegen,

$$\frac{y_\gamma - y_\alpha}{x_\gamma - x_\alpha} = \frac{y_\beta - y_\alpha}{x_\beta - x_\alpha} \quad (7)$$

Setzen wir in diese Gleichung die Werte (6) ein, so erhalten wir die Schlüsselgleichung für eine Fluchtentafel

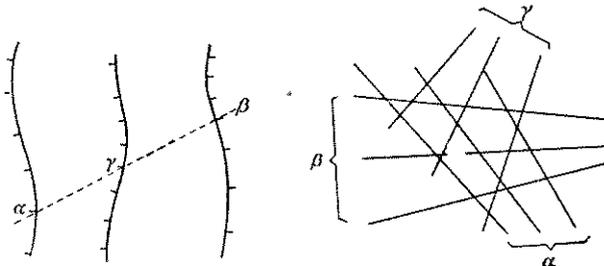


Bild 30. Die allgemeine Fluchtentafel mit drei Leitern.

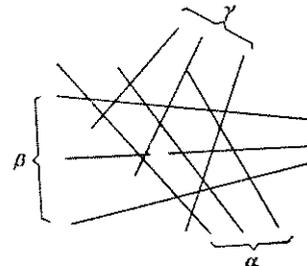


Bild 31. Die allgemeine Netztafel mit drei Geradenscharen.

tafel aus drei beliebigen, geraden oder krummen Leitern:

$$\frac{g_3 - g_1}{f_3 - f_1} = \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1} \quad (8)$$

Der Kürze und besseren Übersicht halber haben wir hier statt $f_1(\alpha), g_1(\alpha), \dots$ geschrieben: f_1, g_1 . — Gelingt es, eine vorgelegte Gleichung auf die Form (8) zu bringen, so läßt sie sich durch eine Fluchtentafel mit den Leitern (6) darstellen.

Die Gleichung (8) läßt sich auch durch eine aus lauter Geraden bestehende Netztafel darstellen, und zwar durch eine Geradentafel allgemeinsten Art (Bild 31), bei der nicht mehr, wie bei den im zweiten Abschnitt betrachteten Geradentafeln zwei der drei Scharen (α), (β), (γ) den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems parallel zu sein brauchen. Bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, können die Gleichungen dieser drei Scharen lauten:

$$\left. \begin{aligned} \text{Schar } (\alpha): & \quad y = f_1(\alpha) \cdot x + g_1(\alpha), \\ \text{Schar } (\beta): & \quad y = f_2(\beta) \cdot x + g_2(\beta), \\ \text{Schar } (\gamma): & \quad y = f_3(\gamma) \cdot x + g_3(\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

Für einen beliebigen Wert von α stellt z. B. die erste dieser Gleichungen die mit diesem Wert α bezifferte Gerade der ersten Schar dar. Zieht man einmal die erste, das andere Mal die zweite dieser Gleichungen von der dritten ab, löst die beiden so erhaltenen Gleichungen nach x auf und setzt diese Werte von x gleich, so erhält man die Schlüsselgleichung (8). Das heißt aber: Dann und nur dann gehen drei Geraden (α), (β), (γ) durch einen Punkt (x, y) , wenn ihre Bezifferungen α, β, γ der Gleichung (8) genügen.

Die durch die Gleichungen (6) dargestellte Fluchtentafel (Bild 30) und die durch die Gleichungen (6a) dargestellte Netztafel (Bild 31) stellen also dieselbe Schlüsselgleichung (8) dar. Die eine Tafel ist das duale Abbild der anderen. Jeder bezifferten Geraden der Netztafel entspricht der mit derselben Zahl bezifferte Punkt der Fluchtentafel eindeutig-umkehrbar. Gehen drei Geraden (α), (β), (γ) der Netztafel durch einen Punkt, so liegen die drei entsprechenden Punkte (α), (β), (γ) der Leitertafel auf einer Flucht und umgekehrt. So waren die Geradentafel Bild 8 und die Fluchtentafel Bild 16 dual, ferner die Bilder 9 und 27.

Jetzt sehen wir klar, daß der Anwendung der Fluchtentafeln auf Beziehungen zwischen 3 Veränderlichen engere Grenzen gezogen sind, als derjenigen der Netztafeln. Während wir jede beliebige „vernünftige“ Beziehung zwischen 3 Veränderlichen durch eine Netztafel darstellen können, wobei dann nötigenfalls mindestens eine Schar krummer Linien verwendet wird, lassen sich durch eine Fluchtentafel nur diejenigen Gleichungen oder empirischen funktionalen Beziehungen zwischen drei Variablen darstellen, die durch eine geradlinige Netztafel von der allgemeinen Form von Bild 31 darstellbar sind. Gelingt uns zeichnerisch die Darstellung nach Bild 31, oder gelingt es uns, die darzustellende funktionale Beziehung analytisch auf die Form (8) zu bringen, so ist damit auch der Herstellung der Fluchtentafel die Tür geöffnet. Wir nennen in diesem Fall die funktionale Beziehung

zwischen α, β, γ anamorphosierbar oder verstreckbar. Zum Glück sind sehr viele der am häufigsten vorkommenden Gleichungen mit drei Veränderlichen verstreckbar und deshalb durch eine Fluchtentafel mit drei Leitern darstellbar. In anderen Fällen gelangt man durch rechnerische oder zeichnerische Näherungsmethoden zu Verstreckungen, die innerhalb des Benutzungsbereichs der Veränderlichen für den praktischen Zweck hinreichend genaue Lösungen geben.

Aufgabe 34. Man leite die Schlüsselgleichungen der bisher behandelten geradlinigen Leitertafeln als Sonderfälle der Gleichung (8) ab.

Auflösung: Um z. B. eine Schlüsselgleichung von der Form (4) auf S. 47 zu erhalten, können wir in (6) und (8) setzen: $g_1 \equiv 0, f_2 \equiv 0, g_3 \equiv f_3$. Wie liegen dann die Leitern (6)? Um die Schlüsselgleichung für Tafeln mit drei parallelen Leitern zu erhalten, setzt man in (6) für f_1, f_2, f_3 drei voneinander verschiedene Konstanten ein.

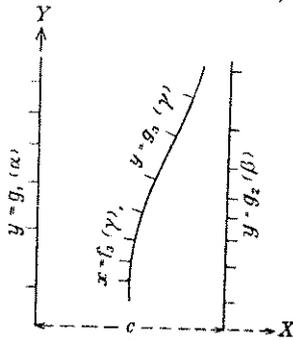


Bild 32. Tafel für die Schlüsselgleichung $g_1(f_3 - c) + g_2(-f_3) + c g_3 = 0$.

Nächst den Fluchtentafeln mit lauter geradlinigen Leitern sind weitaus am wichtigsten diejenigen mit zwei parallelen geradlinigen Leitern (α) und (β) und einer krummlinigen Leiter (γ). Nehmen wir (Bild 32) die α -Leiter $y = g_1(\alpha)$ auf der Y-Achse und die β -Leiter $y = g_2(\beta)$ auf einer Parallelen zur Y-Achse im Abstände c an, so haben wir in den Gleichungen (6) zu setzen

$$f_1 \equiv 0 \quad \text{und} \quad f_2 \equiv c. \quad (9)$$

Die Schlüsselgleichung (8) geht dann über in

$$\frac{g_3 - g_1}{f_3} = \frac{g_2 - g_1}{c}$$

oder
$$g_1(f_3 - c) + g_2(-f_3) + c g_3 = 0. \quad (10)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine ganze Funktion ersten Grades der beiden Funktionen $g_1(\alpha)$ und $g_2(\beta)$ und die Koeffizienten dieser linearen Form sind Funktionen der dritten Veränderlichen γ . Die Gleichung (10) fällt also unter

die Form der Schlüsselgleichung der kartesischen Geradentafeln

$$g_1 F_3 + g_2 G_3 + H_3 = 0, \quad (11)$$

die wir in Aufgabe 12 (S. 23) mit anderen Bezeichnungen abgeleitet haben. Unsere Gleichung (10) hat vor der Gleichung (11) noch die besondere Eigenschaft voraus, daß die Summe der Koeffizienten von g_1 und g_2 gleich einer Konstanten $-c$ ist. Diese Eigenschaft können wir aber leicht jeder Gleichung von der Form (11) geben, indem wir sie mit dem Faktor $\frac{-c}{F_3 + G_3}$ multiplizieren. Das möge der Leser durch Ausführung der einfachen Rechnung selbst beweisen.

Die kartesische Geradentafel und die Fluchtentafel mit zwei parallelen und einer krummen Leiter haben also dieselbe Schlüsselgleichung (11). Diese beiden Tafelformen sind dual.

Zur Herstellung einer Fluchtentafel wird man also eine Gleichung von der Form (11) zunächst durch Multiplikation mit $\frac{-c}{F_3 + G_3}$ auf die Form (10) bringen, aus der man die Funktionen g_1, g_2, g_3, f_3 herauslesen kann. Dann hat man sofort die Parameterdarstellungen aller drei Leitern:

$$\left. \begin{aligned} \text{Leiter } (\alpha): & \quad x_\alpha = 0, & \quad y_\alpha = g_1(\alpha), \\ \text{Leiter } (\beta): & \quad x_\beta = c, & \quad y_\beta = g_2(\beta), \\ \text{Leiter } (\gamma): & \quad x_\gamma = f_3(\gamma), & \quad y_\gamma = g_3(\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Ist in (11) $H_3 = 0$, so erhalten wir die Schlüsselgleichung (7) von S. 51, deren Fluchtentafeln (Bild 22) zu den „Strahlentafeln“ dual sind, die nach den Betrachtungen in Aufg. 12 (S. 23) dieselbe Schlüsselgleichung haben.

Ist F_3 bis auf einen konstanten Faktor gleich G_3 , so haben wir die Schlüsselgleichung (1) von S. 54. Wie der Vergleich mit den Ergebnissen der Aufg. 12 zeigt, entsprechen also die Tafeln mit drei parallelen Leitern denen mit drei Parallelscharen.

Aufgabe 35. Ein Nomogramm für die quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0 \quad (13)$$

zu zeichnen ($p = -10 \rightarrow +10; q = -10 \rightarrow +10$).

Auflösung: In der Gleichung (13) müssen wir uns unter p und q beliebige reelle Veränderliche vorstellen, denn wir wollen doch die Gleichung für alle beliebig gegebenen Werte von p

und q lösen können. Die Gleichung (13) ist dann von der Form der Gleichung (11). Sie ist linear in bezug auf die Veränderlichen p und q , die den Funktionen g_1 und g_2 in der Schlüsselgleichung (11) entsprechen. Um die Gleichungsform (10) zu bekommen, multiplizieren wir also (13) mit $\frac{-c}{1+z}$. Wir erhalten

$$p \frac{-cz}{1+z} + q \frac{-c}{1+z} + \frac{-cz^2}{1+z} = 0. \quad (14)$$

So kommen wir, wenn wir $c=10$ setzen, zu der Parameterdarstellung

$$\left. \begin{array}{l} p\text{-Leiter:} \quad x_p = 0, \quad y_p = p, \\ q\text{-Leiter:} \quad x_q = 10, \quad y_q = q, \\ z\text{-Leiter:} \quad x_z = \frac{10}{1+z}, \quad y_z = \frac{-z^2}{1+z}. \end{array} \right\} \quad (15)$$

Zur Probe bilden wir mit diesen Funktionen die Gleichung (7). Wir erhalten richtig die vorgelegte Gleichung (13). Als Zeicheneinheit diene 1 cm. Bequemer nimmt man 1 mm, nachdem man vorher die rechten Seiten der Gleichungen (15) alle mit 10 multipliziert hat. Die hyperbelförmige z -Leiter haben wir schon in Aufgabe 32 entworfen. So erhalten wir die in Bild 33 dargestellte Rechentafel.

Wir brauchen nur das mit positiven Werten bezifferte Stück der z -Leiter zu zeichnen. Denn wenn die Gleichung (13) eine negative Wurzel $-\gamma$ hat, so hat die Gleichung

$$z^2 - pz + q = 0 \quad (16)$$

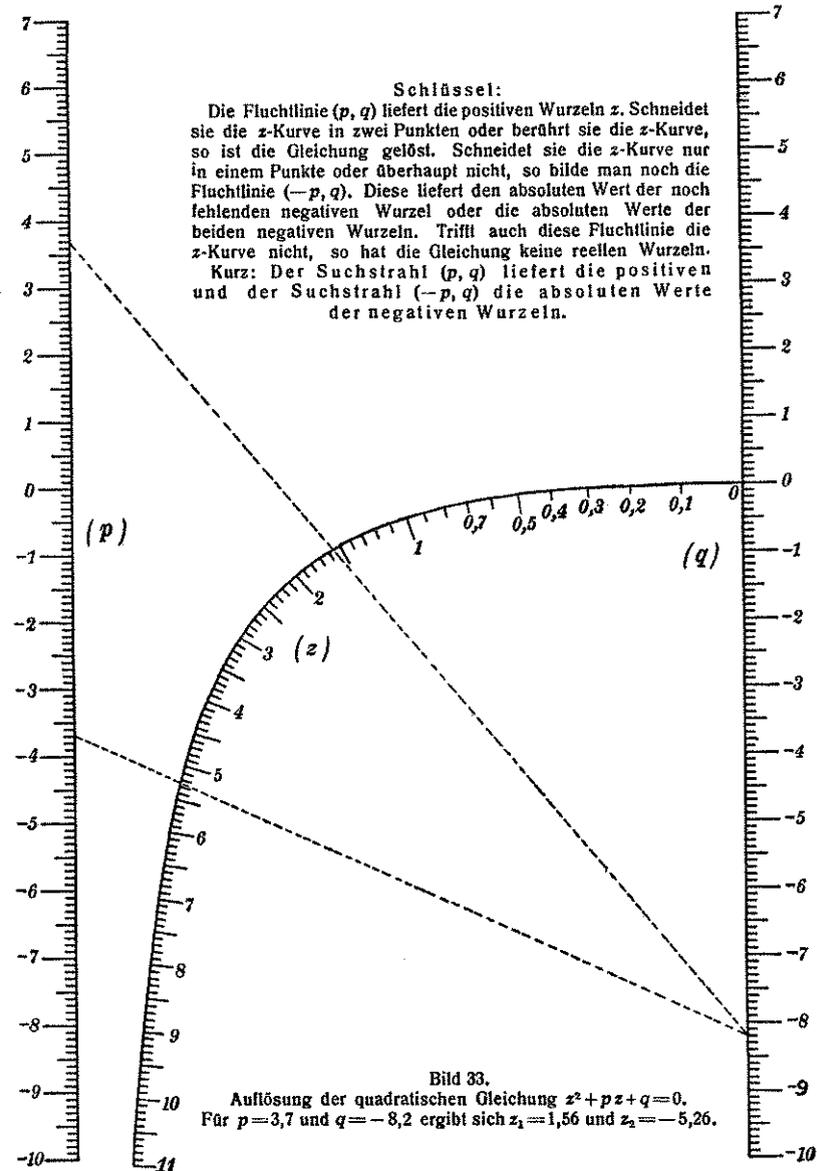
die positive Wurzel $+\gamma$, was man sofort erkennt, wenn man $-\gamma$ in (13) einsetzt. Den absoluten Wert einer negativen Wurzel der Gleichung (13) findet man also, wenn man in ihr p durch $-p$ ersetzt.

Anwendungsbeispiel. $z^2 + 3,7z - 8,2 = 0$. Die Weiserlinie ($p=3,7$; $q=-8,2$) ergibt die Wurzel $z_1 \approx 1,56$. Die Weiserlinie ($p=-3,7$; $q=-8,2$) ergibt den absoluten Wert der anderen Wurzel $|z_2| \approx 5,26$. Also sind die Wurzeln $z_1 = 1,56$ und $z_2 = -5,26$.

Aufgabe 36. Man entwerfe eine ebensolche Rechentafel für die reduzierte Gleichung dritten Grades

$$z^3 + pz + q = 0.$$

Man wird vielleicht sagen, daß das Nomogramm Bild 33 doch nur für begrenzte Bereiche der Werte p und q eine befriedigende Genauigkeit in den Lösungen z ergibt. Insbesondere werden die Ablesungen sehr ungenau ausfallen, wenn die Weiserlinie nahezu oder ganz in die Tangentenlage zur z -Kurve kommt. Dem ist entgegenzuhalten, daß die quadratische Gleichung (13) eine viel



zu allgemeine Aufgabe für die nomographische Behandlung ist. Nomogramme zeichnet man für bestimmte, praktische Zwecke. Führt eine solche praktische Anwendung auf eine Gleichung zweiten Grades, so bewegen sich die Größen p und q zwischen oft recht engen Grenzen, und man kann dann die Rechentafel so anlegen, daß die Lösungen hinreichend genau ausfallen.

In der linken Hälfte des Bildes 36 wird uns ein Nomogramm für eine quadratische Gleichung der Praxis entgegnetreten. Da kommen solche gefährlichen Weiserstellungen nicht vor; andernfalls muß man für die kleinen Werte von d eine besondere Tafel entwerfen.

Wie bei der Fluchtentafel mit drei parallelen Leitern, die ein Sonderfall der uns hier beschäftigenden Form ist, wird man die Tafel wieder möglichst so anlegen, daß die beiden geraden und parallelen Leiterstücke (α) und (β) annähernd oder genau gleich lang werden und sich annähernd oder genau wie die Seiten eines Rechtecks gegenüber treten. Bei Aufgabe 35 trat das von selbst ein, da wir $g_1 \equiv p$ und $g_2 \equiv q$ denselben Größenbereich durchlaufen ließen. Im allgemeinen wird man aber, um das zu erreichen, die Form (11) erst passend zurechtmodellern müssen. Wie man das macht, wollen wir zunächst an einem Beispiel sehen.

Aufgabe 37. Die quadratische Gleichung

$$s^2 + ds - \xi = 0 \quad (17)$$

für die Bereiche $0 \leq d \leq 100$ und $0 \leq \xi \leq 1000$ zu verferteln.

Auflösung: Die Gleichung (17) hat die Schlüsselform (11). Nämlich wir aber einfach wie bei Aufgabe 35 $g_1 \equiv d$ und $g_2 \equiv -\xi$, so fiele die ξ -Leiter zwischen den Bezifferungen 0 und 1000 zehnmal so lang aus wie die d -Leiter zwischen 0 und 100. Wir schreiben deshalb (17) in der Form

$$ds + (-0,1\xi) \cdot 10 + s^2 = 0. \quad (17a)$$

Dadurch wird das nutzbare Stück der Leiter $y_\xi = -0,1\xi$ ebenso lang wie das der Leiter $y_d = d$. Aber diese Stücke liegen sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem noch nicht wie Rechtecksseiten gegenüber. Wir ändern deshalb weiter ab und nehmen $y_d = d$ und $y_\xi = 100 - 0,1\xi$. Denn hier wird für $d = 0$ und $\xi = 1000$ sowohl y_d wie y_ξ gleich 0, und ebenfalls wird für $d = 100$ und $\xi = 0$ sowohl y_d wie y_ξ gleich 100. Statt (17a) müssen wir also schreiben

$$ds + (100 - 0,1\xi) 10 + (s^2 - 1000) = 0. \quad (17b)$$

Diese Gleichung, die noch immer von der Form der Schlüssel-

gleichung (11) ist, führt uns nun entsprechend wie früher nach Multiplikation mit $\frac{-c}{10+s} = \frac{-50}{10+s}$ zu der Fluchtentafel

$$\left. \begin{array}{l} d\text{-Leiter: } x_d = 0, \quad y_d = d, \\ \xi\text{-Leiter: } x_\xi = 50, \quad y_\xi = 100 - 0,1\xi, \\ s\text{-Leiter: } x_s = \frac{500}{10+s}, \quad y_s = \frac{1000-s^2}{10+s}. \end{array} \right\} \quad (18)$$

Die vorhin schon erwähnte linke Hälfte von Bild 36 zeigt diese Tafel, wenn wir uns auf der als „Zapfenlinie“ bezeichneten Geraden von oben nach unten die von 0 bis 1000 reichende gleichförmige ξ -Teilung aufgetragen denken.

Eine solche Formung der Fluchtentafeln mit zwei parallelen Leitern ist meistens möglich, denn statt

$$g_1 F_3 + g_2 G_3 + H_3 = 0 \quad (11)$$

können wir schreiben

$$(l_1 g_1 - k_1) \frac{F_3}{l_1} + (l_2 g_2 - k_2) \frac{G_3}{l_2} + \left(H_3 + \frac{k_1}{l_1} F_3 + \frac{k_2}{l_2} G_3 \right) = 0. \quad (11a)$$

Diese Gleichung ist wieder von der Form der Schlüsselgleichung (11), und wir können in ihr die konstanten Maßstabfaktoren l_1, l_2 so wählen, daß die Leiterstücke der Funktionen $l_1 g_1 - k_1$ und $l_2 g_2 - k_2$ vorgeschriebene, möglichst gleiche Längen erhalten und die Konstanten k_1, k_2 so, daß diese Leiterstücke vorgeschriebene Anfangspunkte bekommen.

Meistens werden wir durch passende Wahl der Vorzeichen von g_1 und g_2 erreichen, daß die krummlinige γ -Leiter zwischen die α - und β -Leiter fällt.

Aufgabe 38. Für die Breite von Berlin besteht zwischen der Deklination δ , dem Stundenwinkel t und der Zenitdistanz z eines Sternes die Beziehung

$$\cos z = \sin 52^\circ,5 \sin \delta + \cos 52^\circ,5 \cos \delta \cos t. \quad (19)$$

$$(\text{Bereiche: } t = 0^h \rightarrow 24^h, z = 0^\circ \rightarrow 90^\circ.)$$

Für diese Formel zeichne man eine Fluchtentafel.

Auflösung: Die Gleichung (19) ist von der Form (11), und es entspreche t der Variablen α der Funktion g_1 und z der Vari-

ahlen β der Funktion g_2 . Setzen wir in (19) für die dritte Variable δ einen konstanten Wert, am einfachsten $\delta = 0$, ein, so erkennen wir sofort, daß für steigendes $\cos t$ auch $\cos z$ steigt und für fallendes fällt. Soll also, wie in Bild 32, die dritte Leiter zwischen den beiden parallelen Leitern fallen, so haben wir die Kosinusfunktionen g_1 und g_2 mit entgegengesetzten Vorzeichen anzusetzen, wie die Drehung der Ablesegeraden um den festen Leiterpunkt $\delta = 0$ sofort lehrt. So kommen wir zu dem Ansatz

$$g_1 = -\cos t, \quad g_2 = \cos z,$$

$$F_3 = \cos 52^\circ,5 \cdot \cos \delta, \quad G_3 = 1, \quad H_3 = -\sin 52^\circ,5 \cdot \sin \delta.$$

Um auf die Form (11 a) und damit auf eine günstige Gestalt der Tafel zu kommen, setzen wir die Gleichungen für die beiden parallelen Leitern folgendermaßen an:

$$y_t = l_1 g_1 - k_1 = -l_1 \cos t - k_1,$$

$$y_z = l_2 g_2 - k_2 = l_2 \cos z - k_2.$$

Da die t -Leiter ihre äußersten Punkte für $t = 0^\circ$ und $t = 180^\circ$, die z -Leiter die ihrigen aber für $z = 0^\circ$ und $z = 90^\circ$ erreicht, so betragen die Längen der nutzbaren Leiterstücke

$$t\text{-Leiter: } |(-l_1 \cos 0^\circ - k_1) - (-l_1 \cos 180^\circ - k_1)| = 2l_1,$$

$$z\text{-Leiter: } |(l_2 \cos 0^\circ - k_2) - (l_2 \cos 90^\circ - k_2)| = l_2.$$

Um diese Leiterstücke gleich lang zu machen, wählen wir

$$l_1 = 150 \text{ mm}, \quad l_2 = 300 \text{ mm}.$$

Setzen wir in die Leitergleichungen die Werte von $\cos t$ und $\cos z$ ein, die y_t und y_z am kleinsten machen, so erhalten wir

$$y_t = -l_1 \cos 0^\circ - k_1 = -150 - k_1,$$

$$y_z = l_2 \cos 90^\circ - k_2 = -k_2.$$

Um die diesen Werten entsprechenden tiefsten Punkte der beiden parallelen Leitern auf die X -Achse zu verlegen, so daß sie einander in der Rechentafel genau gegenüberliegen, müssen wir setzen

$$k_1 = -150, \quad k_2 = 0.$$

Jetzt lautet nach (11 a) die darzustellende Gleichung

$$(-150 \cos t + 150) \frac{\cos 52^\circ,5 \cos \delta}{150} + (300 \cos z) \frac{1}{300} + (-\sin 52^\circ,5 \sin \delta - \cos 52^\circ \cos \delta) = 0.$$

Diese umgeformte Gleichung ist nun wieder von der Form (11). Um sie auf die Form (10) zu bringen, haben wir sie nach S. 61 mit

$$\frac{-c}{F_3 + G_3} = \frac{-300c}{1 + 2 \cos 52^\circ,5 \cos \delta}$$

zu multiplizieren. Dann wird der Koeffizient von g_2

$$-f_3 = \frac{-c}{1 + 2 \cos 52^\circ,5 \cos \delta}$$

und das letzte Glied

$$c g_3 = \frac{300c \cos(52^\circ,5 - \delta)}{1 + 2 \cos 52^\circ,5 \cos \delta}.$$

Wir sind also, wenn wir den Leiterabstand $c = 200$ mm wählen, zu folgender Darstellung der Rechentafel gelangt:

$$t\text{-Leiter: } x_t = 0, \quad y_t = 150(1 - \cos t),$$

$$z\text{-Leiter: } x_z = 200, \quad y_z = 300 \cos z,$$

$$\delta\text{-Leiter: } x_\delta = \frac{200}{1 + 2 \cos 52^\circ,5 \cos \delta},$$

$$y_\delta = \frac{300 \cos(52^\circ,5 - \delta)}{1 + 2 \cos 52^\circ,5 \cos \delta}.$$

Die Abbildung der Rechentafel zu dieser und anderen Aufgaben der praktischen Himmelskunde findet man in des Verfassers Aufsatz: „Die Fluchtentafel im Dienste der Himmelskunde“, Sirius, 1922, Heft 2 u. 3.

Aufgabe 39. Zur Verwendung bei der Benutzung des Wasservoltmeters entwerfe man eine Rechentafel für die Knallgasmenge v , die ein Strom von 1 Amp. je Sekunde bei einer Temperatur von $t^\circ\text{C}$ entwickelt.

Auflösung: Es gilt die unter Bild 34 angegebene Gleichung, in der ε eine tabellarisch gegebene empirische Funktion von t ist. Da diese Gleichung linear in p und $\frac{1}{v}$ ist, mit Funktionen von t als Koeffizienten,

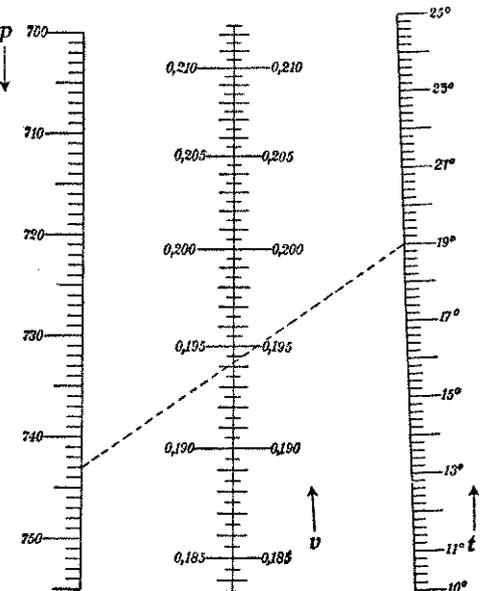


Bild 34.

Knallgasmenge, die 1 Amp. in der Sek. entwickelt:

$$v = \frac{273+t}{273} \cdot \frac{760 \cdot 0,174}{p - 0,9 \varepsilon}$$

p = Druck in mm Hg, v = Knallgasmenge in ccm, t = Temperatur in $^\circ\text{C}$, ε = Sättigungsspannung des Wasserdampfs von $t^\circ\text{C}$.

$$-\frac{p}{760 \cdot 0,174} + \frac{273 + t}{273} \cdot \frac{1}{v} + \frac{0,9 \epsilon}{760 \cdot 0,174} = 0,$$

so liegt die Form (11) vor. Nach passender Umformung gewinnt man Bild 34. Die t -Leiter fällt fast geradlinig aus.

ACHTER ABSCHNITT

ZUSAMMENGESetzte NETZ- UND FLUCHTEN-TAFELN

Bisher haben wir Netz- und Fluchtentafeln für Gleichungen mit drei Veränderlichen kennengelernt. Dem Praktiker und insbesondere dem Ingenieur ist aber gerade an der Verfertigung von Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen viel gelegen. Am häufigsten löst man solche durch zusammengesetzte Tafeln. Eine Tafel für eine Gleichung mit vier Veränderlichen können wir nämlich sehr oft aus zwei Netz- oder zwei Fluchtentafeln oder einer Netz- und einer Fluchtentafel mit je drei Veränderlichen zusammensetzen. Die folgenden Aufgaben werden das Verfahren zeigen.

Aufgabe 40. Eine zusammengesetzte Netztafel für Rohrgewichte herzustellen.

Auflösung: In der Formel

$$G = 0,001 \pi (ds + s^2) \gamma \quad (1)$$

bedeutet d die lichte Weite in mm (Werte von 0 mm bis 100 mm), s die Wandstärke in mm (0 mm \rightarrow 10 mm), γ das spezifische Gewicht und G das Gewicht des laufenden Meters in kg/m. Wir schreiben (1) in der Form

$$ds + s^2 = \frac{1000 G}{\pi \gamma} \quad (1a)$$

Hier stehen auf jeder Seite der Gleichung nur zwei Veränderliche. Deshalb können wir (1a) unter Einführung einer Hilfsveränderlichen ζ in folgende Gleichungen mit je drei Veränderlichen zerlegen:

$$\zeta = ds + s^2, \quad (2a)$$

$$\zeta = \frac{1000 G}{\pi \gamma} \quad (2b)$$

Für jede dieser beiden Gleichungen entwerfen wir eine Netztafel, und zwar so, daß in jeder dieser Tafeln die Veränderliche ζ durch dieselbe Linienschar dargestellt wird.

Die Gleichung (2a) läßt sich durch eine kartesische Geraden-tafel darstellen. Als Gleichungen der Koordinatenparallelen setzen wir an:

Scharen (ζ) und (d): $x = 0,1 \zeta, y = d.$ (3)

Der Maßstabfaktor 0,1 wurde gewählt, da ζ von 0 bis 1100 läuft, also rund ein 10mal so großes Intervall hat wie die nur von

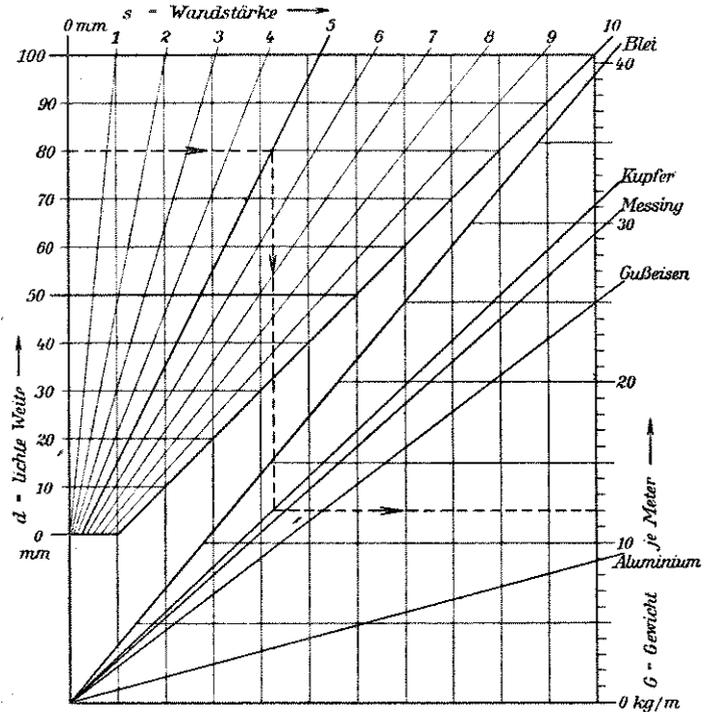


Bild 35. Zusammengesetzte Netztafel für die Berechnung von Rohrgewichten:

$$G = 0,001 \pi (ds + s^2) \gamma.$$

Beispiel: Lichte Weite $d=80$ mm, Wandstärke $s=5$ mm, spez. Gewicht $\gamma=9$, Gewicht 12 kg/m.

0 bis 100 laufende Größe d . Setzen wir aus den Gleichungen (3) die Werte von ζ und d in (2a) ein, so erhalten wir die Gleichung der

$$\text{Schar (s):} \quad 10x = sy + s^2. \quad (4)$$

Diese Schar schneidet die Abszissenachse $y=0$ in der Leiter $x = 0,1 s^2$ und die Abszissenparallele $y = 100$ in der Leiter

$$x = 10s + 0,1 s^2.$$

70 Achter Abschnitt: Zusammengesetzte Netz- und Fluchtentafeln
Mit Hilfe dieser bequem errechenbaren Leitern ist die Schar (s) leicht zu zeichnen.

Entsprechend gewinnen wir für die zweite, zu (2b) gehörige Teiltafel die Darstellungsgleichungen:

Scharen (ζ) und (G): $x = 0,1 \zeta, \quad y = \frac{10}{3} G, \quad (5)$

Schar (γ): $\frac{y}{x} = \frac{\pi \gamma}{30}. \quad (6)$

Diese zweite Teiltafel ist eine Strahlentafel von der Art der in Bild 7 dargestellten Divisionstafel.

Bild 35 zeigt das Gerippe der so entstandenen zusammengesetzten Netztafel. Die beiden Teiltafeln angehörenden senkrechten ζ -Linien braucht man nicht zu beziffern. In der Richtung dieser Linien können die beiden Teiltafeln in eine zweckmäßige gegenseitige Lage geschoben werden.

Aufgabe 41. Dieselbe Formel (1) durch eine zusammengesetzte Fluchtentafel darzustellen.

Auflösung: Genau wie vorhin zerlegen wir (1) in die Gleichungen (2a) und (2b), um dann für diese Gleichungen Fluchtentafeln mit gemeinsamer ζ -Leiter zu entwerfen. Die Darstellung für (2a) haben wir schon in Aufgabe 37 gefunden. Die Gleichung (2b) behandeln wir entweder wie Aufgabe 30 oder wir stellen nach dem allgemeinen Verfahren des siebenten Abschnitts folgende Leitertafeln auf:

ζ -Leiter: $x = 0, \quad y = 100 - 0,1 \zeta,$
 G -Leiter: $x = 50, \quad y = 2,5 G,$
 γ -Leiter: $x = \frac{2000}{\pi \gamma + 40}, \quad y = \frac{100 \pi \gamma}{\pi \gamma + 40} \quad (7)$
 oder $y = -2x + 100$ (Träger),
 $\frac{y}{x} = \frac{\pi \gamma}{20}$ (Teilung erzeugendes Büschel).

Die so gewonnene zusammengesetzte Leitertafel Bild 36 entspricht dual der zusammengesetzten Scharentafel Bild 35. Insbesondere entspricht der einen Kegelschnitt bildenden Punkteihe (s) von Bild 36 die von einem Kegelschnitt eingehüllte Geradenschar (s) von Bild 35. Die der unbezifferten Parallelschar entsprechende ζ -Leiter braucht nicht geteilt und beziffert zu werden. Als Ort der Dreh- oder Zapfenpunkte der Weisergeraden führt sie den Namen Zapfenlinie. Man kann Raum sparen, wenn man die eine Teiltafel um die Zapfenlinie auf die andere klappt.

Aufgabe 42. Man vertafele die Formel für Drahtgewichte
 $G = 0,000025 \pi d^2 l \gamma. \quad (8)$
 (G in kg, d in mm, l in m; welche Bereiche?)

Auflösung: Durch Logarithmieren bringt man die Gleichung auf die Schlüsselform

$$F_1(\alpha) + F_2(\beta) = F_3(\gamma) + F_4(\delta). \quad (9)$$

Sie führt auf eine aus zwei Teiltafeln zusammengesetzte geradlinige Netztafel oder eine ebensolche Fluchtentafel mit lauter

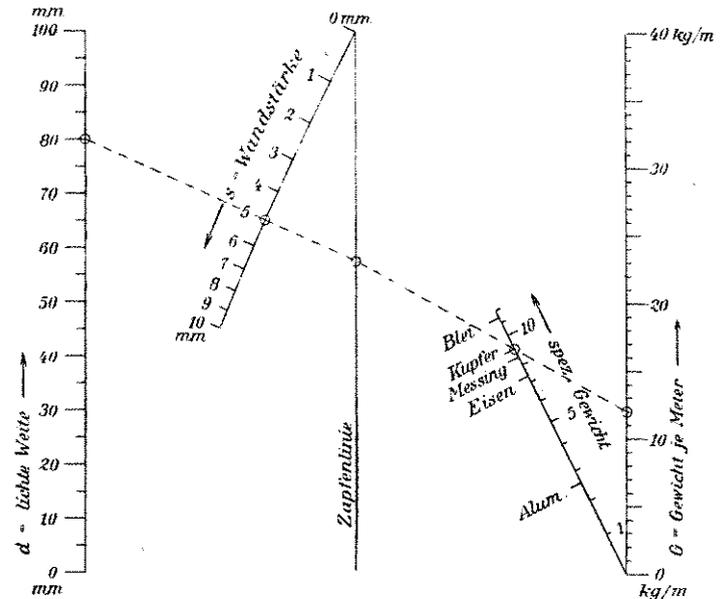


Bild 36. Zusammengesetzte Leitertafel für die Berechnung von Rohrgewichten. Formel und Beispiel wie bei Bild 35.

parallelen logarithmischen Leitern. Die Zapfenlinie setzt man so an, daß sie entweder für jede Teiltafel die mittlere oder für jede Teiltafel eine äußere Leiter wird, oder auch für die eine die mittlere und für die andere eine äußere.

Aufgabe 43. Eine zusammengesetzte Tafel für die Berechnung der Selbstinduktion einer Spule zu entwerfen.

Auflösung: Wir legen die Formel

$$L = 9,87 \pi^2 \cdot \frac{d^2}{l} \cdot \varphi \left(\frac{d}{l} \right) \quad (10)$$

zugrunde. In ihr bedeutet L die in cm gemessene Selbstinduktion, l die Länge der ganzen Wicklung in cm, d den mittleren

Durchmesser in cm, n die Zahl aller Windungen und $\varphi\left(\frac{d}{l}\right)$

$\frac{d}{l}$	$\varphi\left(\frac{d}{l}\right)$
0,00	1
0,25	0,9
0,55	0,8
0,95	0,7
1,50	0,6
2,20	0,5
3,40	0,4
5,40	0,3
10,00	0,2
26,00	0,1

die durch die nebenstehende Zahlentafel gegebene Funktion des Quotienten $\frac{d}{l}$. Wir schreiben die Gleichung (10) in der Form

$$9,87 \frac{d^2}{l} \cdot \varphi\left(\frac{d}{l}\right) = \frac{L}{n^2} \quad (10a)$$

und zerlegen diese unter Einführung einer Hilfsveränderlichen ζ in zwei Gleichungen:

$$\zeta = 9,87 \frac{d^2}{l} \cdot \varphi\left(\frac{d}{l}\right), \quad (11a)$$

$$\zeta = \frac{L}{n^2}. \quad (11b)$$

Die Gleichung (11a) ist nicht verstreckbar; wir stellen sie deshalb durch eine Netztafel dar. Nachdem wir auf Grund der Gleichung (11a) und der Zahlentafel für die Funktion φ für geeignet gewählte Werte von d und l die zugehörigen ζ -Werte ausgerechnet und in einer Zahlentafel mit zwei Eingängen für die unabhängigen Veränderlichen d und l zusammengestellt haben, entwerfen wir die Netztafel zu (11a). Bei einer solchen können wir immer über zwei der Scharen willkürlich verfügen. Wir wählen für l und ζ die Scharen

$$x = \log l, \quad y = \log \zeta, \quad (11c)$$

die auf logarithmischem Papier fertig vorliegen. Die Linien gleicher d -Werte ergeben sich dann als schwach gekrümmte Kurven (Bild 37). Um zu zwei beliebigen Werten von l und d , z. B. $l=20$, $d=12$, den zugehörigen ζ -Wert zu finden, müßten wir den Schnittpunkt der Linien $l=20$, $d=12$ auf eine Parallele zu den Ordinaten, z. B. auf die als „Träger der binären Leiter ζ “ bezeichnete Gerade projizieren. Wäre dieser Träger nach $\log \zeta$ geteilt, so könnten wir den zugehörigen ζ -Wert auf ihm ablesen. (Zur Erläuterung sind die Teilstriche $\zeta=2$, $\zeta=10$, $\zeta=100$, $\zeta=1000$ eingetragen.) Da wir aber diesen ζ -Wert gar nicht wissen wollen, sondern wie auf einer Zapfenlinie nur den ihn darstellenden Punkt brauchen, so ist dieser Träger weiter nicht beziffert, und zur Erleichterung des Projizierens ist statt der Geradenschar $y = \log \zeta$ eine unbezifferte Schar gleich weit voneinander entfernter Parallelen eingezeichnet.

Zu jedem Wertepaar (d, l) gehört ein bestimmter Punkt auf dem Träger, und das System (d, l) wird durch die Projektion gewissermaßen auf dem Träger verdichtet. Wir sprechen deshalb von dem verdichteten System (d, l) und nennen die ζ -Leiter eine binäre Leiter, weil ζ eine Funktion der zwei Veränderlichen d und l ist.

Bei einer zusammengesetzten Tafel sucht man, wenn es eben möglich ist, zu erreichen, daß das vermittelnde System (ζ) für beide Teiltafeln dieselbe Schar oder Leiter ist. Aus diesem Grunde haben wir die Netztafel für (11a) so gezeichnet, daß die Hilfsvariable ζ durch $y = \log \zeta$ dargestellt wurde. Wir können nämlich jetzt die andere Teiltafel, diejenige für (11b), leicht so

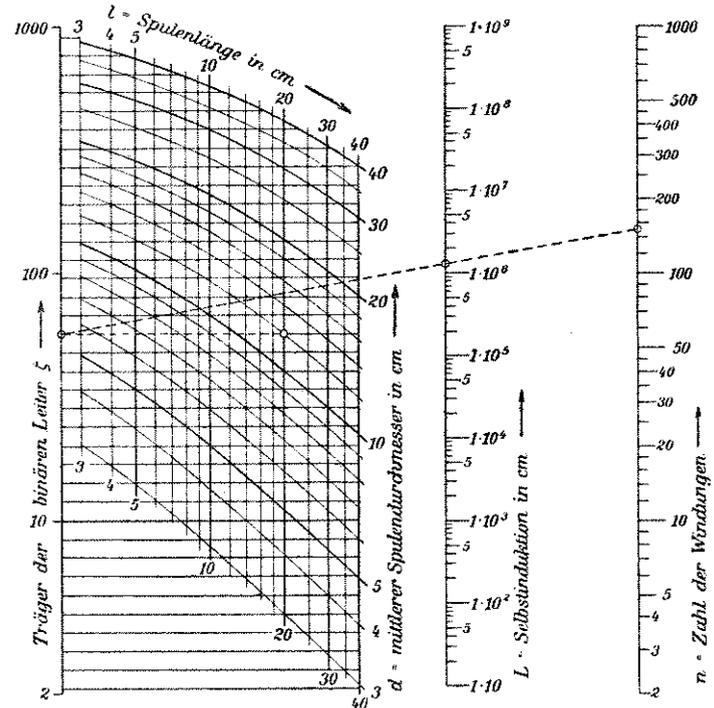


Bild 37. Eine $l=20$ cm lange Spule mit $d=12$ cm mittlerem Durchmesser und $n=150$ Windungen hat die Selbstinduktion $L=1260000$ cm.

entwerfen, daß sie ebenfalls die Leiter $y = \log \zeta$ erhält. Logarithmieren wir (11b), so erhalten wir

$$\log L = \log \zeta + 2 \log n,$$

und diese Gleichung stellen wir nach dem fünften Abschnitt durch eine Fluchtentafel mit drei parallelen Leitern

$$u = l_1 \cdot \log \zeta, \quad v = l_2 \cdot 2 \log n, \quad w = l_3 \cdot \log L$$

dar. Wählen wir, um die für die Anwendung der Tafel passenden Bereiche von ζ und n durch ungefähr gleich lange Leiterstücke darzustellen,

$$l_1 = 1, \quad l_2 = \frac{1}{2},$$

so wird

$$l_3 = \frac{1}{3},$$

und das Verhältnis der Leiterabstände wird

$$m : n = l_1 : l_2 = 2 : 1.$$

So erhalten wir das Bild 37. Um z. B. die Selbstinduktion einer 20 cm langen Spule mit 150 Windungen von 12 cm mittlerem Durchmesser zu ermitteln, projiziert man den Netzpunkt $l = 20$,

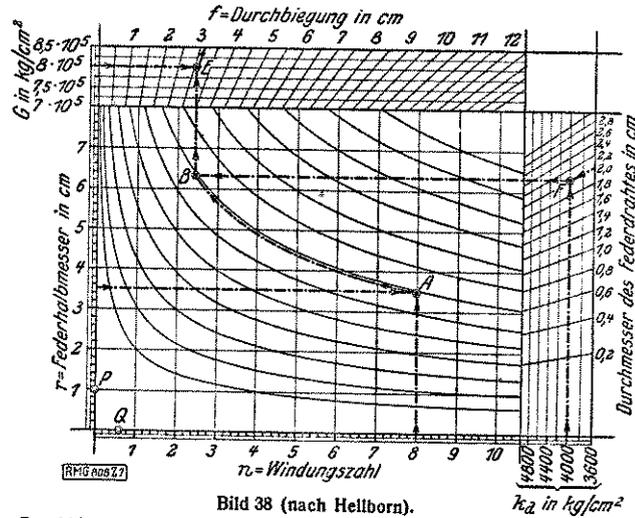


Bild 38 (nach Hellborn).
Durchbiegung zylindrischer Schraubentfedern mit rundem Querschnitt:

$$f = 4\pi \frac{n r^2}{d} \cdot \frac{k_d}{G}$$

(k_d = Drehungsspannung, G = Gleitmaß.)

Beispiel: $n = 8$, $r = 3,5$ cm, $d = 2$ cm, $k_d = 4000$ kg/cm², $G = 8 \cdot 10^5$ kg/cm², $f = 3,1$ cm.

$d = 12$ auf den linken Träger und fluchtet den erhaltenen Punkt mit dem Punkte $n = 150$. Dann erhält man auf der L -Leiter für die gesuchte Selbstinduktion den Wert $L = 1260000$ cm.

Nach dem Gesagten können wir die hergestellte Tafel als eine Zusammensetzung aus einer Netz- und einer Fluchtentafel betrachten. Man kann aber auch einfach von einer Fluchtentafel mit einem auf einem Träger ξ verdichteten binären System (d, l) reden. Von dieser Tafelform für eine Gleichung mit vier Veränderlichen macht man oft Gebrauch, da der Fall häufig vorkommt, daß sich eine Gleichung, wie hier, in eine verstreckbare (11 b) und eine unverstreckbare Gleichung (11 a) zerlegen läßt.

Jede der vier Veränderlichen kann in unserer Tafel als Unbekannte auftreten. Das ist ein Vorteil gegenüber der umständlicheren zusammengesetzten Fluchtentafel, die das amerikanische Radio-News-Amateurs Handbook für dieselbe Formel gebracht hat, und die L. Bergmann in seinen Nomographischen Tafeln für den Gebrauch in der Radiotechnik (Berlin, Springer 1926) wiedergegeben hat. Siehe übrigens weiter unten S. 84 Anmerkung!

Auch eine Gleichung mit mehr als vier Veränderlichen kann man in derselben Weise aus lauter aneinandergeschalteten Dreischarentafeln oder Dreileitertafeln zusammensetzen, wenn sich die Gleichung unter Einführung von Hilfsveränderlichen in lauter Gleichungen der erforderlichen Art mit je drei Veränderlichen zerlegen läßt. Dies trifft für die in den Anwendungen vorkommenden Gleichungen sehr oft, aber nicht stets zu. Bei n Veränderlichen erhält man n bezifferte Scharen oder Leitern und $n - 3$ unbezifferte Übergangsscharen oder Zapfenlinien. Bild 38 zeigt eine solche zusammengesetzte Netztafel von A. V. Hellborn¹⁾ für eine Gleichung mit 6 Veränderlichen. In den Teiltafeln dieses Nomogramms erkennen wir die Grundformen der Hyperbeln- und Strahlentafel wieder (vgl. Bild 5 und Bild 7). Man beachte die geschickte Anordnung des Ganzen!

Eine andere Tafelform für Gleichungen mit vier Veränderlichen zeigt Bild 39. Diese Tafel besteht aus vier geraden, parallelen Leitern:

$$y_\alpha = g_1(\alpha), \quad y_\beta = g_2(\beta), \quad y_\gamma = g_3(\gamma), \quad y_\delta = g_4(\delta). \quad (12)$$

Die beiden ersten Leitern mögen voneinander den Abstand c haben, die beiden anderen den Abstand d . Vier Leiterpunkte A, B, C, D ergeben dann und nur dann eine Lösung, wenn AB parallel CD ist.

Wie das Bild zeigt, muß die Gleichung

$$\frac{g_2 - g_1}{c} = \frac{g_4 - g_3}{d} \quad (13)$$

gelten. Da c und d Konstanten sind, die man ebenso wie die Minuszeichen in die Funktionssymbole hineinziehen kann, indem man z. B. $-\frac{g_1(\alpha)}{c} = F_1(\alpha)$ setzt, so hat also die Tafel

1) Aus A. V. Hellborn, Wie entsteht eine nomographische Netztafel für Gleichungen mit mehreren Veränderlichen? Maschinenbau, 5, S. 1—6, 1926, Januar, Heft 1.

die überaus oft in den Anwendungen vorkommende Schlüsselgleichung (9) von S. 71. Die Ablesung vollzieht man bei dieser „Parallelfluchtentafel“ mit Hilfe eines durchsichtigen Blattes, auf dem eine Schar hinreichend nahe aneinanderliegender Parallelen gezeichnet ist.

Denkt man sich in Bild 39 die Leitern des Paares (α) und (β) einerseits und die Leitern des Paares (γ) und (δ) andererseits starr miteinander verbunden, so kann man jedes dieser Paare in der Ebene in beliebiger Richtung ohne Drehung verschieben, ohne die Parallelität von AB und CD und damit die Richtigkeit der Gleichung (13) zu stören. Dadurch

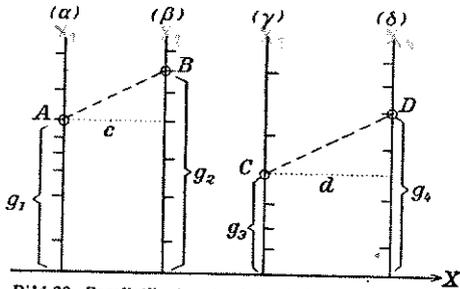


Bild 39. Parallelfluchtentafel für die Schlüsselgleichung

$$\frac{g_2 - g_3}{c} = \frac{g_4 - g_3}{d}$$

kann man die Leiterpaare in eine zweckmäßige gegenseitige Lage bringen und Raum sparen. Nimmt man $c = d$, so kann bei passender Stellung der Leiterpaare die Ablesung statt mit der Parallelenschar auch durch Abgreifen mit einem Stechzirkel vorgenommen werden, denn es ist dann $AC = BD$ oder auch $AB = CD$. Man kann für $c = d$ sogar die Träger von (γ) und (δ) auf die von (α) und (β) werfen, wenn man die Teilstriche etwa nach den in Bild 39 gewählten Seiten zieht. Schneidet man ein solches Nomogramm in den beiden Leiterträgern auf, so hat man einen Schieber, denn fällt C auf A , so fällt D auf B . Solchen Schiebern, die wir im nächsten Abschnitt eingehender betrachten werden, kommt also die Schlüsselgleichung (9) zu.

Vom projektiven Standpunkt ist Bild 39 eine zusammengesetzte Fluchtentafel, deren Zapfenlinie ins Unendliche gerückt ist.

Denkt man sich in Bild 39 die Leitern (γ) und (δ) wieder starr miteinander verbunden und samt der zugehörigen Ablesegeraden CD um 90° in ihrer Ebene gedreht, so erhält man eine Kreuzfluchtentafel, für die in Bild 40 ein

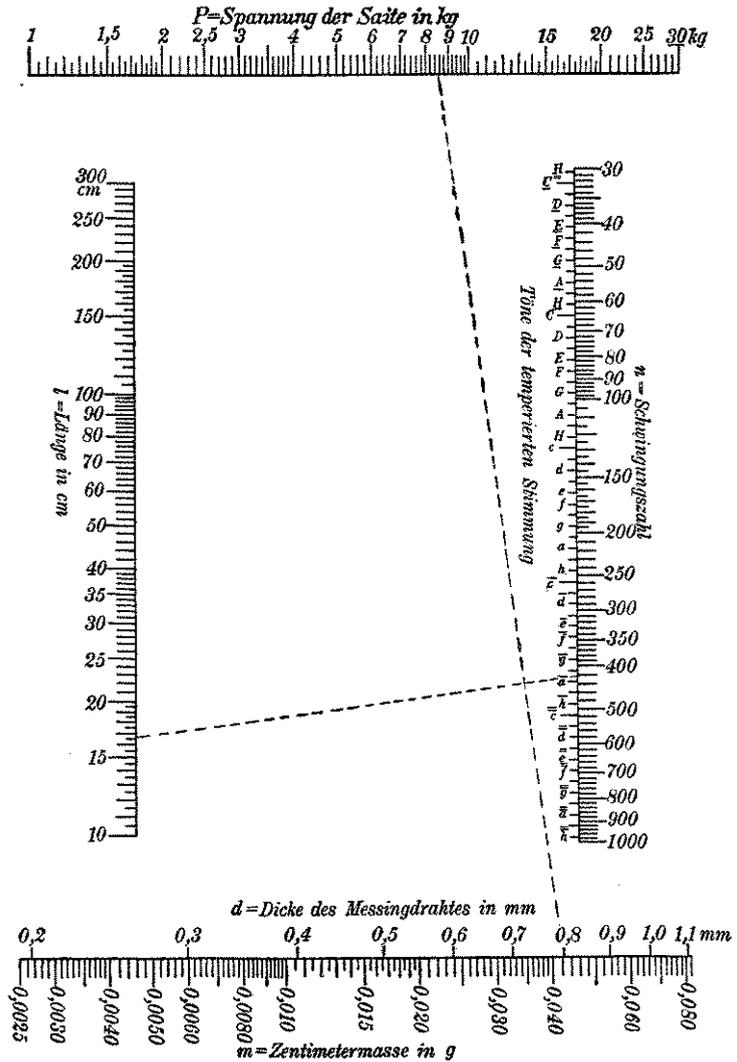


Bild 40. Taylors Formel: $n = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{981000P}{m}}$

Eine 16,6 cm lange, 0,8 mm dicke Saite aus weichem Messingdraht macht bei 8,5 kg Spannung etwa 423 Schwingungen je Sekunde. Der Ton liegt zwischen g_{is} und a .

Beispiel ausgeführt ist. Die vier Leitern bilden nun ein Rechteck, und als Ablesegerät dient ein auf ein durchsichtiges Blatt gezeichnetes Geradenkreuz. Ist in Bild 40 P, m und l gegeben, so stellt man zuerst die Flucht $P m$ her und verschiebt dann das Blatt in der Richtung dieser Flucht, bis die andere Gerade durch l geht. Sie geht dann auch durch den gesuchten Wert n . Natürlich hat auch diese Tafel dieselbe Schlüsselgleichung (9) wie Bild 39. Durch Logarithmieren wird die Taylorsche Saitenformel auf diese Form gebracht.

Wie man bei den zuletzt behandelten Tafeln über die Maßstäbe und Abstände der einzelnen Leitern verfügen kann, möge der Leser selbst untersuchen.¹⁾ Die Parallel- und besonders die Kreuzfluchtentafel hat vor der Tafel mit Zapfenlinie die Eigenschaft voraus, daß man bei einer einzigen Einstellung des Ablesegeräts alle vier zusammengehörigen Werte der Veränderlichen gleichzeitig vor sich hat.

Aufgabe 44. Man löse die Aufgabe 42 durch eine Parallel- oder Kreuzfluchtentafel.

Die Parallel- und Kreuzfluchtungsmethode läßt sich leicht auf nicht parallele gerade Leitern und auf krumme Leitern ausdehnen. Aus den Parametergleichungen der vier Leitern und der Ablesevorschrift $AB \parallel CD$ gewinnt man hierbei die fruchtbare Schlüsselgleichung

$$\frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1} = \frac{g_4 - g_3}{f_4 - f_3} \quad (14)$$

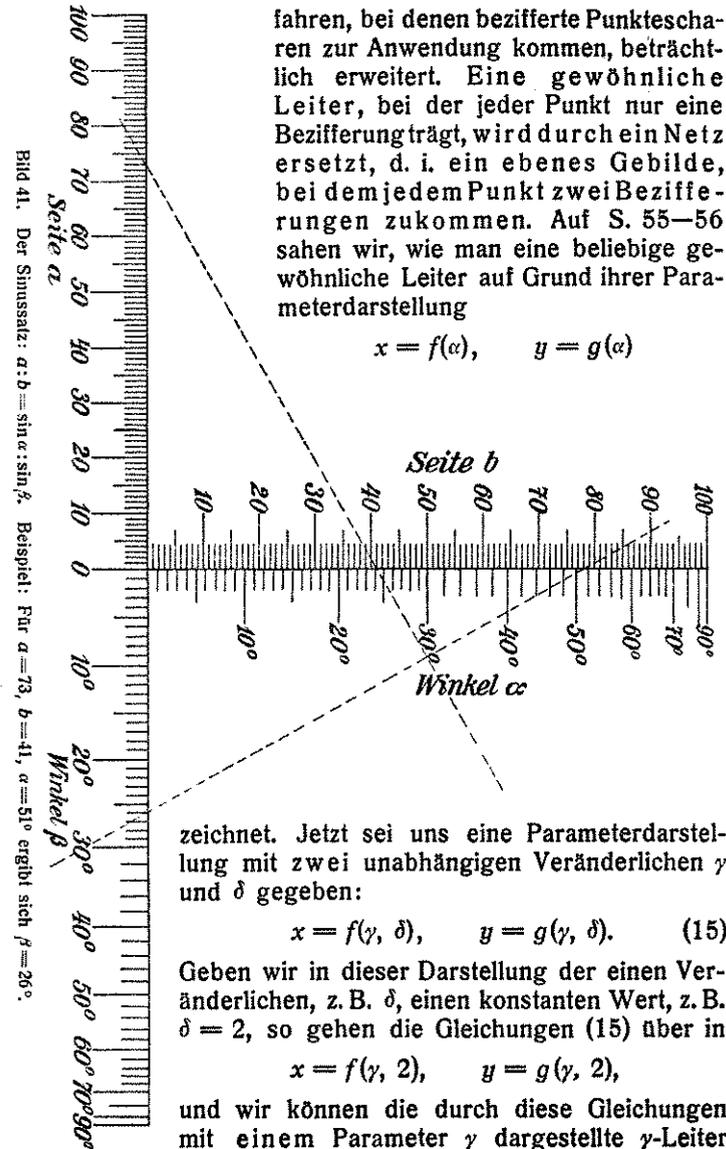
Bild 41 gibt ein Beispiel für nicht parallele Leitern. Hier erhält man die dargestellte Gleichung sofort aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke, die die Geraden des Weiskreuzes mit den Leitern bilden. Zwei dieser Seiten haben einen gemeinsamen Träger.

Ehe wir die Fluchtentafeln verlassen, wollen wir eine fruchtbare Verallgemeinerung der Leitern kennenlernen. Durch diese Verallgemeinerung wird der Anwendungsbereich der Fluchtungsmethode und anderer nomographischer Ver-

1) Parallelfuchtentafeln vertragen nur affine Abbildungen. Die Formungsmöglichkeit ist also beschränkter als bei zusammengesetzten Fluchtentafeln mit einer Zapfenlinie im Endlichen.

fahren, bei denen bezifferte Punktescharen zur Anwendung kommen, beträchtlich erweitert. Eine gewöhnliche Leiter, bei der jeder Punkt nur eine Bezifferung trägt, wird durch ein Netz ersetzt, d. i. ein ebenes Gebilde, bei dem jedem Punkt zwei Bezifferungen zukommen. Auf S. 55–56 sahen wir, wie man eine beliebige gewöhnliche Leiter auf Grund ihrer Parameterdarstellung

$$x = f(\alpha), \quad y = g(\alpha)$$



zeichnet. Jetzt sei uns eine Parameterdarstellung mit zwei unabhängigen Veränderlichen γ und δ gegeben:

$$x = f(\gamma, \delta), \quad y = g(\gamma, \delta). \quad (15)$$

Geben wir in dieser Darstellung der einen Veränderlichen, z. B. δ , einen konstanten Wert, z. B. $\delta = 2$, so gehen die Gleichungen (15) über in

$$x = f(\gamma, 2), \quad y = g(\gamma, 2),$$

und wir können die durch diese Gleichungen mit einem Parameter γ dargestellte γ -Leiter

80 Achter Abschnitt: Zusammengesetzte Netz- und Fluchtentafeln
 punktweise zeichnen. Für $\delta = 3, \delta = 4$ usw. erhalten wir
 entsprechende γ -Leitern (Bild 42a). Die Träger dieser ein-
 zelnigen γ -Leitern beziffern wir mit den betreffenden Wer-
 ten von δ . Statt der Teilstriche ziehen wir nun die Verbind-
 ungslinien der mit gleichen γ -Werten bezifferten Punkte
 der verschiedenen Leitern. So erhalten wir das in Bild 42b
 dargestellte, aus den beiden bezifferten Kurvenscharen (γ)
 und (δ) bestehende Netz (γ, δ). Wir hätten dieses Netz natür-
 lich ebensogut aus lauter einzelnen δ -Leitern entstehen lassen

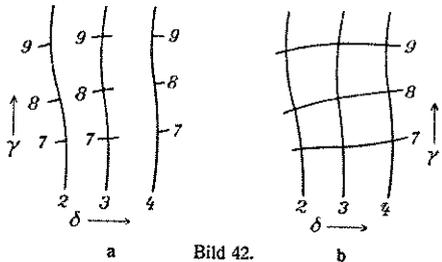


Bild 42.

können, deren Träger
 mit den entsprechen-
 den γ -Werten bezif-
 fert sind.

Während einem
 Punkte einer gewöhn-
 lichen Leiter nur eine
 Bezifferung zukommt,
 hat jeder Punkt eines
 solchen Netzes zwei

Bezifferungen, nämlich die Bezifferungen der beiden Kurven
 (oder Geraden) (γ) und (δ), die durch diesen Punkt gehen.
 Gegebenenfalls sind diese Kurven durch Einschaltung nach
 dem Augenmaß zu ermitteln.

Schon in Aufgabe 43 begegnete uns ein System von
 Punkten mit zwei Bezifferungen (d, l). Damals wurde es
 aber auf einem geraden Träger verdichtet. Die Parameter-
 darstellung jenes Netzes lautet nach den Gleichungen (11c)
 und (11a) von S. 72:

$$x = \log l, \quad y = \log 9,87 + 2 \log d - \log l + \log \varphi \left(\frac{d}{l} \right).$$

Aufgabe 45. Das Netz

$$x_\sigma = \log [0,01 (\sigma_e + 10 \sigma_b)],$$

$$y_\sigma = \log \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_b} \right)$$

zu zeichnen. In dieser Darstellung, die später zum Aufbau
 einer Rechentafel verwandt werden soll, bedeutet σ_e die
 in der Eisenbetonrechnung vorkommende Beanspruchung des
 Eisens und soll die Werte 600 bis 1500 kg/cm^2 durchlaufen,
 während σ_b , die Beanspruchung des Betons, von 20 bis 80 kg/cm^2
 laufen soll.

Auflösung: Wir legen für die Werte

$$\xi = 0,01 (\sigma_e + 10 \sigma_b),$$

$$\eta = \frac{\sigma_e}{\sigma_b}$$

die folgende Zahlentafel an:

		$\sigma_e \longrightarrow$				
		600	700	800	900	...
$\sigma_b \downarrow$	20	$\xi = 8$ $\eta = 30$	9 35	10 40	11 45
	30	$\xi = 9$ $\eta = 20$	10 $23\frac{1}{3}$	11 $26\frac{2}{3}$	12 30
	40	$\xi = 10$ $\eta = 15$	11 $17\frac{1}{2}$	12 20	13 $22\frac{1}{2}$
..	

Dann stechen wir auf einem Bogen
 logarithmischen Papiers in die
 Punkte mit den Bezifferungen $\xi = 8,$
 $\eta = 30$ usw. feine Löcher. Die
 richtige Verbindung dieser Punkte
 und die Bezifferung der Verbind-
 ungskurven liefert das gesuchte
 Netz (σ_e, σ_b), das man in Bild 57
 dargestellt sieht.

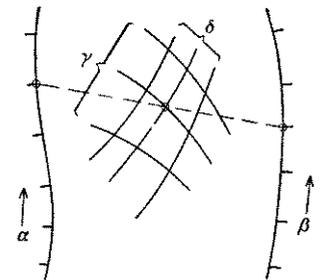


Bild 43. Fluchtentafel mit einem Netz.

Erst durch die Verwendung
 von Netzen statt gewöhnlicher
 Leitern nutzen wir die Zwei-
 dimensionalität der Ebene voll

aus. In der Fluchtentafel mit drei beliebigen Leitern (Bild 30)
 können wir jetzt jede der Leitern durch ein Netz ersetzen.
 Schon wenn wir bloß eine der Leitern, etwa die γ -Leiter,
 durch ein Netz (γ, δ) ersetzen, kommen wir zu einer sehr
 fruchtbaren Tafelform (Bild 43). Die zugehörige Schlüssel-
 gleichung erhält man, wenn man in der Schlüsselgleichung
 (8) von S. 58 die Funktionen f_3 und g_3 durch die Funktionen
 f_{34} und g_{34} von zwei Veränderlichen γ und δ ersetzt. Der
 einfache Sonderfall, in welchem (α) und (β) gerade par-

82 Neunter Abschnitt: Eindimensionale Tafeln mit bewegl. Systemen
 alle Leitern sind, meistert Gleichungen, die man durch zusammengesetzte Netz- oder Fluchtentafeln nicht lösen kann, wie z. B. die nicht reduzierte kubische Gleichung oder die Kosinussätze der ebenen und der sphärischen Trigonometrie.

NEUNTER ABSCHNITT

EINDIMENSIONALE TAFELN MIT BEWEGLICHEN BEZIFFERTEN SYSTEMEN

Bei manchen Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen versagen die bisher behandelten nomographischen Methoden. Dann nimmt man zuweilen seine Zuflucht zu „überzähligen Systemen“, d. h. man stellt eine Gleichungsveränderliche durch mehr als eine Linienschar oder Leiter dar. Hat man sich in dieser Weise z. B. bei der Darstellung einer Gleichung mit vier Veränderlichen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch eine zusammengesetzte Leitertafel genötigt gesehen, für die Veränderliche α zwei Leitern (α) und (α') zu zeichnen, so liegt tatsächlich ein Nomogramm für eine Gleichung mit fünf Veränderlichen $\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \delta$ vor, bei dessen Benutzung man aber den Veränderlichen α und α' stets denselben Zahlenwert gibt. Diese sicher nicht willkommene Vermehrung der Systeme nimmt man in Kauf, weil man damit einer für die betreffende Nomogrammformt sonst unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeit oder einer zeichnerischen Mühsal ausweicht. Das Verfahren ist annehmbar, solange die Veränderliche des überzähligen Systems nicht als Unbekannte auftritt. Ist dies aber der Fall, so kann der Wert dieser Unbekannten $\alpha = \alpha'$ nur durch Probieren ermittelt werden. Denn wenn von den fünf Veränderlichen $\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \delta$ die drei letzten gegeben sind, so wäre das Nomogramm zunächst durch unendlich viele Einstellungen zu befriedigen, denen allen die Werte von β, γ, δ gemeinsam sind, bei denen aber die Werte von α und α' im allgemeinen voneinander verschieden ausfallen, und man müßte nun durch systematisches Probieren derjenigen Einstellung immer näher kommen, für die $\alpha = \alpha'$ wird. Ein solches Probieren ist mißlich, und man wird deshalb Tafeln mit überzähligen Systemen für die Unbekannte meistens ablehnen.

Hier treten nun die Tafeln mit beweglichen bezifferten Systemen in die Bresche, indem sie uns für eine Reihe solcher schwierigerer Gleichungen geeignete Schlüsselformen darbieten. Aber sogar in Fällen, wo auch die bisher betrachteten Verfahren anwendbar sind, wird man, wie wir sehen werden, zuweilen dieser neuen Tafelform den Vorzug geben.

Tafeln mit beweglichen Gebilden haben wir auch bisher schon verwandt. Solche bewegliche Gebilde sind doch z. B. die einfache Ablesegerade der Fluchtentafeln, ferner die unbezifferte Parallelschar der Parallelfuchtentafel und das

Ablesekrenz der Kreuzfluchtentafel. Jetzt sollen aber die beweglichen Gebilde aus einem oder mehreren bezifferten Systemen bestehen: bezifferten Leitern, Scharen oder Netzen. Die einfachsten und wichtigsten Tafeln mit beweglichen bezifferten Systemen sind die eindimensionalen Rechenschieber, und unter diesen wieder sind die einfachsten und wichtigsten die Schieber mit einer Zunge.

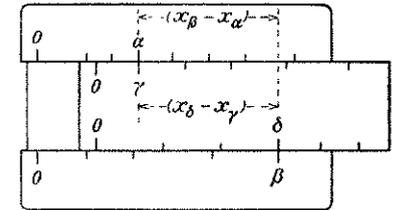


Bild 44. Schieber für die Schlüsselgleichung $f_2(\beta) - f_1(\alpha) = f_4(\delta) - f_3(\gamma)$.

Der in Bild 44 dargestellte Schieber besteht aus der Grundtafel und der Zunge. Die Grundtafel wollen wir auch Grundblatt, die Zunge auch Schiebestreifen oder Schiebeblatt nennen. Denn in vielen Fällen ist ein solcher Schieber schon brauchbar, wenn man Grundtafel und Zunge auf starkes Papier zeichnet und die ausgeschnittene Zunge ohne Schlittenführung mit der Hand auf der Grundtafel einstellt. Ferner bereiten uns diese Bezeichnungen auf die entsprechenden Verhältnisse bei den später zu besprechenden zweidimensionalen Schiebern vor. Die Grundtafel trage die Leitern $x_\alpha = f_1(\alpha), \quad x_\beta = f_2(\beta), \quad (1)$ der Schiebestreifen die Leitern $x_\gamma = f_3(\gamma), \quad x_\delta = f_4(\delta). \quad (2)$

Die Nullpunkte, von denen aus diese Abszissen gerechnet sind, sollen einander paarweise gegenüberliegen, also bei

unendlich schmal gedachter Zunge paarweise zusammenfallen. Steht dann bei einer beliebigen Einstellung der Zunge der Teilstrich γ dem Teilstrich α und der Teilstrich δ dem Teilstrich β gegenüber, so ergibt die Zeichnung ohne weiteres die Richtigkeit der Gleichung

$$x_\beta - x_\alpha = x_\delta - x_\gamma. \quad (3)$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte aus (1) und (2) ein, so erhält man die Schlüsselgleichung der Schieber mit einer Zunge:

$$f_3(\beta) - f_1(\alpha) = f_4(\delta) - f_3(\gamma). \quad (4)$$

Dies ist wieder die in den Anwendungen so überaus verbreitete Schlüsselgleichung (9) des achten Abschnitts, in welchem wir übrigens schon dieselbe Schieberform aus den Parallelfuchtentafeln abgeleitet haben (S. 76).

Aufgabe 46. Die in cm gemessene Selbstinduktion L einer Spule kann man nach der Formel von Korndörfer berechnen:

$$L = 10,5 N^2 \cdot D \cdot k. \quad (5)$$

Hierin ist N die Zahl der Windungen, D der in cm gemessene mittlere Durchmesser, und für den Faktor k gilt

$$k = \sqrt[3]{\frac{D}{U}}, \text{ wenn } D \geq U, \quad (6)$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{D}{U}}, \text{ wenn } D \leq U, \quad (7)$$

wo U der in cm gemessene Umfang des Wicklungsquerschnitts ist. Gesucht ist ein Schieber, mit dem man L unmittelbar aus N , D und U berechnen kann.¹⁾

Auflösung: Setzen wir, zunächst für den Fall $D \geq U$, den Wert (6) von k in die Gleichung (5) ein, so erhalten wir

$$L = 10,5 N^2 D^{\frac{3}{2}} U^{-\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

¹⁾ Hier lege ich ebenso wie bei Aufgabe 43 (S. 71) eine Formel zugrunde, die in der Literatur angegeben wird. In beiden Fällen dürften aber wohl empirische Potenzformeln durch Auswertung zu ermitteln sein, die sich einerseits den Beobachtungen besser anschmiegen und andererseits leichter nomographisch verfafeln lassen. Die Funktionen müßten Produkte aus Potenzen der Veränderlichen mit beliebigen positiven oder negativen Dezimalbrüchen als Exponenten sein.

Durch Logarithmieren bringen wir diese Gleichung auf die Form der Schlüsselgleichung (4)

$$2 \log N - \log L = \frac{1}{2} \log U - \frac{3}{2} \log D - \log 10,5. \quad (9)$$

Die Leitern für N , L , U , D sind also logarithmische Leitern, deren Maßstäbe sich wie 4 : 2 : 1 : 3 verhalten. Um nun die Leitern möglichst zweckmäßig anzuordnen, beachten wir, daß wir dreien der Glieder der Gleichung (9) beliebige additive Konstanten geben können, wenn wir dann nur dem vierten Gliede ebenfalls eine so gewählte additive Konstante zuteilen, daß die Gleichung (9) erfüllt bleibt. Das bedeutet: Wir dürfen z. B. jede der beiden Leitern (N) und (L) so in ihrer Längsrichtung verschieben, daß sie in eine zweckmäßige gegenseitige Lage kommen, wenn wir dann nur die beiden Leitern (U) und (D) so legen, daß die Gleichung (9) oder die Gleichung (8) für eine beliebige Wertezusammenstellung N , L , D , U erfüllt ist. Wir nutzen diese Freiheit dadurch aus, daß wir die nutzbaren Bereiche von N und L auf der Grundtafel einander möglichst wie die Seiten eines Rechtecks gegenüberlegen, etwa so, daß dem Wert $N=10$ der Wert $L=10^4$ gegenüber zu stehen kommt. Zu $N=10$, $L=10^4$, $U=1$ ergibt die Gleichung (8) $D=4,493$. Deshalb muß man die U -Leiter jetzt so auf der Zunge zeichnen, daß ihr mit 1 bezifferter Teilstrich dem Punkt $D=4,493$ der D -Leiter senkrecht gegenüberliegt. Der Genauigkeit wegen wird man noch ausrechnen, daß der Teilstrich $U=100$ dem Punkt $D=4,493 \cdot \sqrt[3]{100} = 20,86$ gegenüberliegt.

Damit ist der Sonderschieber für den Fall $D \geq U$ fertiggestellt. Entwirft man für den Fall $D \leq U$ einen Schieber nach genau demselben Verfahren, so fällt nur die Zunge anders aus als im ersten Falle, und da jede der Zungen kürzer als die halbe Länge der Grundtafel wird, so haben wir im Bild 45 beide Zungen hintereinander auf demselben Schiebestreifen angeordnet.

Die Verwendung eines beweglichen bezifferten Systems bedeutet in gewisser Hinsicht einen Nachteil gegenüber den Rechentafeln, bei denen alle bezifferten Systeme sich auf dem Grundblatt befinden. Tafeln mit beweglichen bezifferten Systemen wird man z. B. nicht so leicht einem Buche beigegeben können wie andere Nomogramme. Das Schiebblatt wird beim Altern und Austrocknen leicht anders schrumpfen als das Grundblatt, besonders wenn man es aus einer anderen Papiersorte, z. B. Pauspapier, herstellt, was bei manchen dieser Nomogramme nötig ist. Man erwäge aber auch die Vorteile solcher Tafeln! Die Einstellung und Ablesung beim Schieber, wo bezifferter Leiterpunkt auf bezifferten Leiterpunkt fällt, ist bequemer und genauer als bei anderen

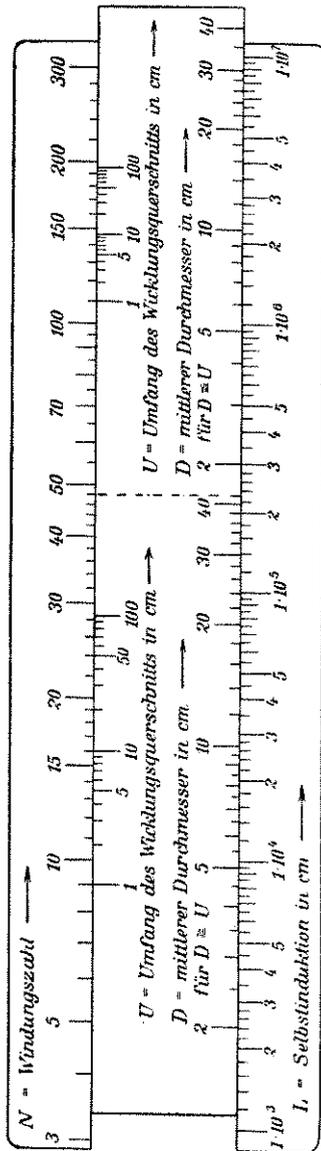


Bild 45. Selbstinduktion einer Spule nach der Formel von Kornlöcher. Beispiel: Eine Spule von $N=16$ Windungen und vom mittleren Durchmesser $D=10$ cm hat, wenn der Umfang des Wicklungsquerschnitts $U=10$ cm ist, die Selbstinduktion $L=140\,000$ cm.

Nomogrammen. Man beachte auch, daß ein Schieber von der Form des Bildes 44 eine Gleichung mit vier Veränderlichen durch eine einzige Einstellung löst, während doch bei der entsprechenden Fluchtentafel mit einer Zapfenlinie zwei Einstellungen erforderlich sind, und die Kreuzfluchtentafel zwar nur eine, aber eine viel umständlichere Einstellung erfordert. Zudem liefert der Schieber, im Gegensatz zu den Fluchtentafeln, durch dieselbe Einstellung noch unendlich viele andere Lösungen. Ist z. B., wie in Bild 45, $U=10$ cm, $N=16$ gegeben, so zeigen die beiden aneinander liegenden Leitern (D) und (L) ohne weiteres zu jedem U -Werte von D , der größer als 10 cm ist, den zugehörigen Wert der Selbstinduktion an. Auch wenn man die Zunge „gegenläufig“ einschiebt, so daß die Leitern (D) und (U) auf dem Kopf stehen und (D) oben, (U) unten ist, erhält man richtige Lösungen. Stellt man dann einem konstant gegebenen N -Wert einen konstant gegebenen D -Wert gegenüber, so liefert diese Einstellung ohne weiteres zu jedem U -Werte den zugehörigen L -Wert.

Dem eindimensionalen Schieber mit einer Zunge kann man auch manchmal die im Bild 46 dargestellte Form geben, bei der die Leiter der Funktion $f_2(\beta)$ neben die Leiter von $f_1(\alpha)$ und die Leiter der Funktion $f_4(\delta)$ neben diejenige von $f_3(\gamma)$ gerückt ist (Schieber mit einem Spalt). Steht wieder bei einer beliebigen Einstellung der Teilstrich γ dem Teilstrich α und der Teilstrich δ dem Teilstrich β gegenüber, so ergibt die Betrachtung von Bild 46 wieder dieselbe Gleichheit der Abszissendifferenzen wie bei Bild 44. Auch diese Schieberform stellt also die Schlüsselgleichung (4) von S. 84 dar. Sind $f_1(\alpha)$ und $f_2(\beta)$ oder $f_3(\gamma)$ und $f_4(\delta)$ oder gar alle vier Leitern voneinander verschiedene, ausgedehnte Funktionsleitern, so wird diese

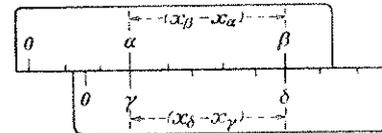


Bild 46. Schieber für die Schlüsselgleichung $f_2(\gamma) - f_1(\alpha) = f_4(\delta) - f_3(\gamma)$.

Schieberform allerdings meistens unförmlich lang ausfallen. Oft kommt es aber vor, daß z. B. f_1 und f_2 dieselbe Funktion f , ferner f_3 und f_4 dieselbe Funktion g sind, so daß auf jedem der Streifen nur eine Leiter zu zeichnen ist. Dann ist diese Schieberform brauchbar. Sie hat in diesem Falle die Schlüsselgleichung

$$f(\beta) - f(\alpha) = g(\delta) - g(\gamma) \tag{10}$$

Benutzt man den gewöhnlichen logarithmischen Rechenschieber zur Proportionsrechnung nach der Gleichung

$$\beta : \alpha = \delta : \gamma,$$

so liegt ein solches Rechnen an einem Spalt vor, und zwar sind hier sogar f und g beide dieselbe Funktion, nämlich der Logarithmus.

Die Methode der eindimensionalen Schieber¹⁾ läßt sich nach verschiedenen Richtungen hin weiterbilden und verallgemeinern. Für eine Gleichung mit sechs Veränderlichen von der Form

$$F_1(\alpha) + F_2(\beta) + F_3(\gamma) + F_4(\delta) + F_5(\epsilon) + F_6(\zeta) = 0 \tag{11}$$

¹⁾ Weitere Beispiele enthält der Aufsatz: F. Bahlecke, Sonder-Rechenschieber. Werkstattstechnik 1925, Heft 20, S. 726–730 und die AWF-Schrift desselben Verfassers.

88 Zehnter Abschnitt: Zweidimensionale Tafeln mit bewegl. Systemen
 könnte man z. B. aus starkem Papier einen Schieber von der in Bild 47 dargestellten Form behelfsmäßig herstellen. Liegt eine Gleichung mit n Veränderlichen von der Form der Gleichung (11) vor, so sind, wenn n gerade ist, außer dem zwei Leitern tragenden Grundstreifen, $\frac{n}{2} - 1$ Zungen, jede mit zwei Leitern, erforderlich. Ist n ungerade, so wird

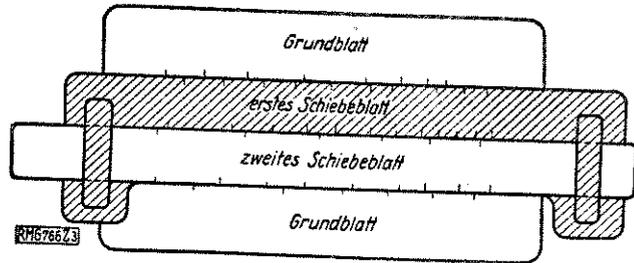


Bild 47. Schieber für die Gleichung $F_1(a) + F_2(b) + F_3(\gamma) + F_4(\delta) + F_5(\epsilon) + F_6(\zeta) = 0$.

der Schieber geradeso angelegt wie ein solcher für die gerade Anzahl von $(n + 1)$ Veränderlichen. An Stelle einer dieser Veränderlichen tritt hierbei eine Konstante, und an Stelle der betreffenden Funktionsleiter ein einziger Teilstrich.

ZEHNTER ABSCHNITT

ZWEIDIMENSIONALE TAFELN MIT BEWEGLICHEN BEZIFFERTEN SYSTEMEN

Zu einer weiteren Verallgemeinerung der Schieber gelangen wir, wenn wir nun an die Stelle der eindimensionalen Leitern des Grundblatts zweidimensionale Gebilde: bezifferte Netze, Scharen oder Leitern treten lassen. Das bewegliche Blatt soll vorläufig noch eine gewöhnliche eindimensionale Leiter sein oder aus mehreren geraden Leitern bestehen, die aber alle auf demselben Träger oder auf mehreren parallelen Trägern entworfen sind. Einige kennzeichnende Beispiele sollen uns mit dieser Tafelform vertraut machen.

Bild 48 ist eine Tafel für die Zinseszinsformel

$$K = kq^n, \quad (1)$$

in der k das Anfangskapital, K das Endkapital, n die Anzahl der Jahre und $q = 1 + \frac{p}{100}$ den Zinsfaktor bedeutet. Nehmen wir zunächst an, n sei eine Konstante, etwa gleich 20. Die Gleichung (1) können wir dann auf die Form

$$20 \log q - 0 = \log K - \log k \quad (2)$$

bringen. Diese Gleichung mit 3 Veränderlichen fällt unter die Form der Schlüsselgleichung (10) von S. 87, da wir ja Null als einen Wert der Funktion $20 \log q$ auffassen können, nämlich denjenigen, den sie für $q = 1$, d. h. für $p = 0$ annimmt. Wir können

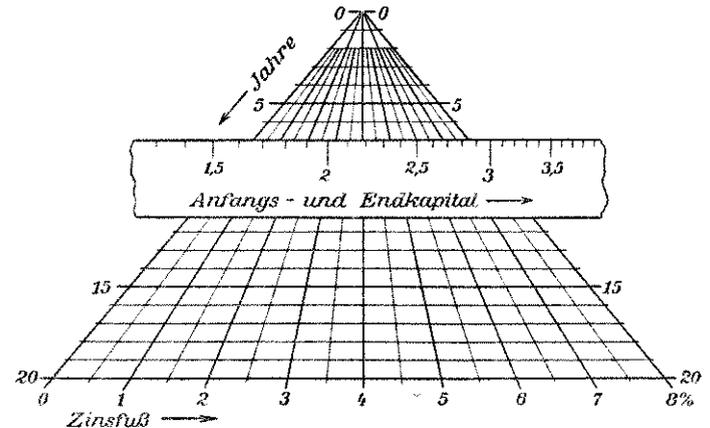


Bild 48. Die Zinseszinsformel:

$$K = k \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Beispiel: Anfangskapital $k = 16700 \text{ R.M.}$, Zeit $n = 7$ Jahre, Zinsfuß $p = 6\%$. Man legt die Schiebelleiter an die mit $n = 7$ bezifferte wagerechte Parallele so an, daß der mit 0 bezifferte erste Zinsfußstrahl durch den Teilpunkt $k = 1,67$ geht. Dann geht der Zinsfußstrahl $p = 6$ durch den Teilpunkt $K = 2,5$. Also beträgt das Endkapital rund 25000 R.M. Man kann die Ablesung auch mit einem Stechzirkel machen.

also (2) durch einen Schieber mit einem Spalt darstellen, dessen Grundtafel die Leiter $20 \log \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ und dessen Schiebestreifen die Leiter $\log K$ (zugleich $\log k$) trägt, und es muß, wie Bild 49 zeigt, bei einer beliebigen Einstellung der Teilstrich k des Schiebestreifens dem Teilstrich $p = 0$ der Grundtafel und der Teilstrich K des Schiebestreifens dem Teilstrich p der Grundtafel gegenüberstehen. Tritt nun an die Stelle von $n = 20$ ein anderer Wert von n ,

90 Zehnter Abschnitt: Zweidimensionale Tafeln mit bewegl. Systemen

so ändert sich nur der Maßstab der nach den Werten von p geteilten und bezifferten q -Leiter der Grundtafel. Für $n = 10$ z. B. erhält man an Stelle der Leiter $20 \log \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ die Leiter von halb so großem

Maßstab $10 \log \left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Hat man etwa die Leiter $20 \log \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ entworfen, so erhält man die p -Leitern für alle kleineren Werte von n leicht folgendermaßen: Man zeichnet zum Träger der Leiter $20 \log \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ 20 Parallelen, die alle auf derselben Seite desselben liegen und von ihm und voneinander gleich weit entfernt sind (Bild 48). Diese Parallelen beziffert man mit $n = 19, 18, \dots, 0$. Einen beliebigen Punkt der Parallelen $n = 0$ verbindet man dann mit den Teilpunkten der Leiter $20 \log \left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Das

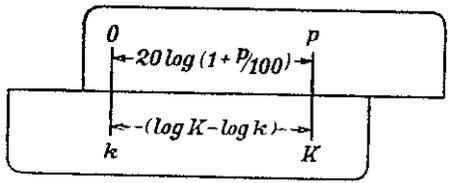


Bild 49.

entstehende, mit den Werten von p zu beziffernde Strahlenbündel erzeugt auf den Parallelen die gewünschten Leitern. Das Nomogramm, das sich leicht auf halblogarithmischem Papier entwerfen läßt, ist mit der auf S.27 erwähnten Rechentafel von Hanck nahe verwandt.

Man mache sich auch an Beispielen klar, wie die Tafel zu benutzen ist, wenn k oder n oder p gesucht ist.
Aufgabe 47. Die in m/sek. gemessene Geschwindigkeit G , mit der Heiß- oder Satttdampf von der Temperatur t °C und vom Drucke p at bei einer Durchgangsmenge von m t/h (d. h. Tonnen je Stunde) ein Rohr vom Durchmesser d cm durchströmt, ergibt sich aus der Formel

$$G = \frac{mv}{0,00009 \pi d^2} \quad (3)$$

Hier ist v das spezifische Volumen und kann als empirische Funktion von p und t ,

$$v = f(p, t) \quad (4)$$

aus Dampftabellen, die z. B. im Taschenbuch „Hütte“ zu finden sind, entnommen werden. Es wird ein Nomogramm verlangt, das durch eine einzige Einstellung eines beweglichen Schiebestreifens zu jedem gegebenen Wertsystem p, t, d, m den gesuchten Wert der fünften Veränderlichen G liefert.

Auflösung: Denken wir uns zunächst den Dampfdruck p konstant, etwa gleich 20 at, so läßt sich die durch Einsetzen von (4) in (3) herstellbare Gleichung

$$\frac{100 f(p, t)}{G} = \frac{0,009 \cdot \pi d^2}{m} \quad (5)$$

durch Logarithmieren auf die Form der Schlüsselgleichung (4) von S. 84 bringen und durch einen Schieber von der Form des Bildes 44 darstellen. Der Schieber erhält folgende Leitern:

Grundtafel:

obere Leiter: $x_t = \log(100 f(p, t))$
 (da p konstant = 20 ist, so ist dies eine gewöhnliche t -Leiter),
 untere Leiter: $x_G = \log G$,

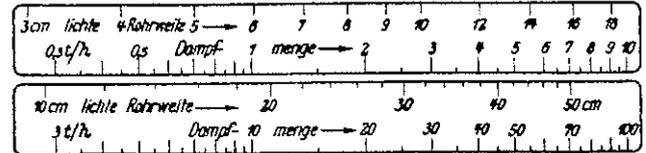
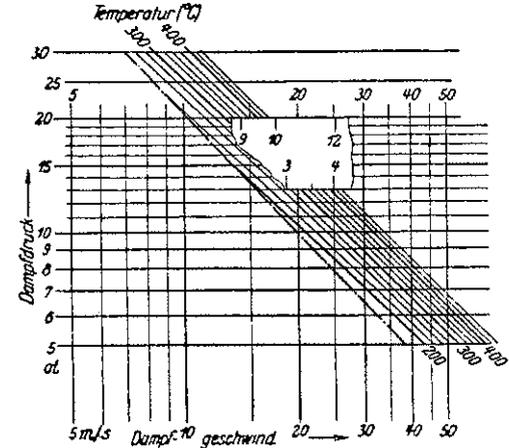
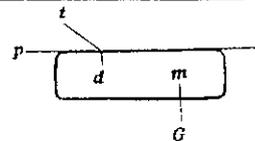


Bild 50. Dampfgeschwindigkeit in Rohren.

Beispiel: Wenn durch ein Rohr von $d = 9$ cm lichter Weite je Stunde $m = 4$ t Heißdampf von $t = 350$ °C und $p = 20$ at abs. strömen, so beträgt die Dampfgeschwindigkeit $G = 25$ m/s.



Schiebestreifen:

obere Leiter: $x_d = \log(0,009 \cdot \pi d^2)$,
 untere Leiter: $x_m = \log m$.

Für andere Werte von p ändert sich nur die obere Leiter der Grundtafel, die t -Leiter. Alle diese verschiedenen t -Leitern zeichnen wir nun auf parallelen wagerechten Trägern, die mit den betreffenden p -Werten zu beziffern sind (Bild 50). An sich könnten

wir die Abstände dieser Träger nach einem beliebigen Gesetz regeln. Es empfiehlt sich aber, diese Abstände nach der Funktion $y = \log p$ anzunehmen, denn dann sind die Verbindungslinien der t -Punkte gleicher Bezifferung, die mit den t -Werten beziffernten „Isothermen“, nahezu gerade Linien. Hat man diese Isothermen gezogen, so ist die Grundtafel nichts anderes als ein logarithmisches Dampfdiagramm mit $\log 100 v$ als Abszissen und $\log p$ als Ordinaten. Die strichpunktierte Linie gilt für Satteldampf. Der erste Schiebestreifen ist für kleinere, der zweite für größere Rohrweiten und Dampfmenge bestimmt.

Aufgabe 48. Man löse die Aufgabe 43 durch einen Schieber, für den die erste Teiltafel von Bild 37 als Grundtafel diene, während die zweite durch eine Zunge ersetzt werde.

Auflösung: Die Gleichung (11b) von S. 72 läßt sich schreiben

$$\log \xi - \log 100 = (-2 - 2 \log n) - (-\log L). \quad (6)$$

Man stellt deshalb mit der Zeicheneinheit von Bild 37 einen Schiebestreifen her, der an der oberen Kante die Leiter

$$x_n = -2 - 2 \log n$$

und an der unteren Kante die Leiter

$$x_L = -\log L$$

trägt. Ferner zieht man ein für allemal in dem Netz von Bild 37 die Gerade $\xi = 100$ durch, d. i. die Gerade, die durch den Teilpunkt $\xi = 100$ senkrecht zum „Träger der binären Leiter ξ “ verläuft. Sie heiße die „Ablesegerade“. Ist nun z. B. gegeben $l = 20$, $d = 12$, $n = 150$, so legt man, nachdem man Bild 37 um 90° im Uhrzeigersinn gedreht hat, den Schiebestreifen mit seiner oberen Kante so an die mit $l = 20$ bezifferte Gerade, daß die Kurve $d = 12$ durch den Teilpunkt $n = 150$ geht. Dann geht die Ablesegerade durch denjenigen Punkt der unteren Zungenkante, der mit dem gesuchten Wert $L = 1260000$ beziffert ist.

War bisher der Schiebestreifen stets in derselben Richtung auf die Grundtafel einzustellen, so folgen jetzt Beispiele, bei denen er verschoben und gedreht wird.

Bild 51 ist eine Tafel zur angenäherten Berechnung des Umfangs L einer Ellipse mit den Halbachsen a und b nach der Formel von Boussinesq

$$L = \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab} \right]. \quad (7)$$

Diese Formel gibt eine gute Annäherung, solange das Verhältnis $a:b$ der großen zur kleinen Achse nicht allzu groß ist. Die Gleichung (7) kann man schreiben

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3\pi} L} \right)^2 = (\sqrt{a})^2 - \frac{2}{3} \sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2. \quad (8)$$

Die festen Leitern (a) und (b) der Grundtafel haben die Gleichungen

$$x = \sqrt{a}, \quad y = \sqrt{b} \quad (9)$$

und bilden einen Winkel α , dessen Kosinus gleich $\frac{1}{3}$ ist. Die bewegliche L -Leiter hat die Gleichung

$$t = \sqrt{\frac{2}{3\pi} L}. \quad (10)$$

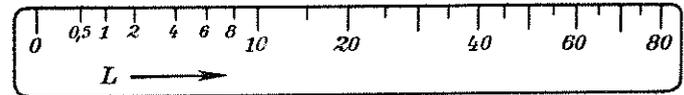
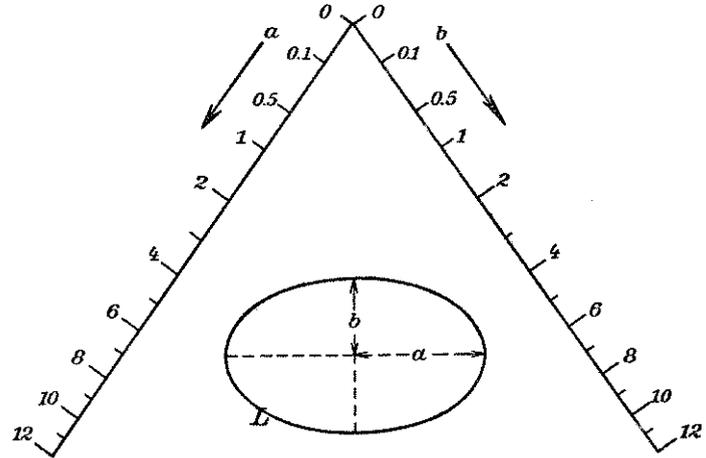


Bild 51. Umfang einer Ellipse:

$$L = \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab} \right].$$

Um den Umfang L der Ellipse mit den Halbachsen $a=11$, $b=4$ zu erhalten, legt man die L -Leiter mit dem Punkte $L=0$ an den Punkt $a=11$. Geht dabei ihr Träger durch $b=4$, so ergibt sich $L=50$. Man kann die dritte Dreiecksseite auch mit dem Stechzirkel abgreifen und auf die L -Leiter übertragen.

Für das bei der Ablesung gebildete Dreieck mit den Seiten x , y , t gilt der Kosinussatz

$$t^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha. \quad (11)$$

Setzt man in diese Gleichung die obigen Werte von x , y , t , $\cos \alpha$ ein, so sieht man, daß die Gleichung (8) und damit auch die Gleichung (7) erfüllt ist.

Während beim letzten Beispiel das Grundblatt zwei Leitern trug, trägt es in den beiden folgenden Beispielen bezifferte Scharen paralleler Geraden.

Bild 52 löst überaus einfach eine Gleichung mit 5 Veränderlichen. Die bewegliche t -Leiter ist gleichförmig, ebenso sind die Geraden der Parallelscharen (m_1) und (m_2), deren Bezifferungen von der gemeinsamen Nullgeraden aus in entgegengesetzten Richtungen wachsen, gleich weit voneinander entfernt. Bei einer beliebigen Ablesung soll, wie auch die beigegebene Schlüsselfigur vorschreibt, t_2 auf m_1 , t_1 auf m_2 eingestellt werden. Dann zeigt die Nullgerade auf dem Schiebestreifen den gesuchten Wert t an. Aus der Figur ergibt sich die Proportion

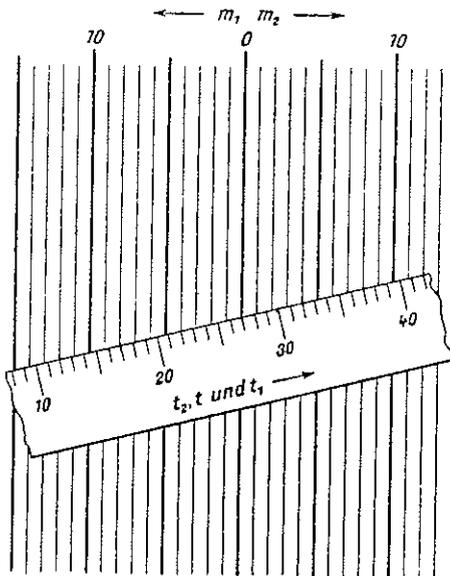
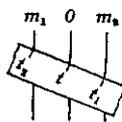


Bild 52. Mischungsgleichung:

$$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}$$

Beispiel: Mischt man 8 kg Wasser von 32° mit 4 kg Wasser von 17°, so erhält man Wasser von 27°.



aus der man die unter dem Nomogramm angegebene Mischungsformel dadurch erhält, daß man nach t auflöst.

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t} = \frac{m_1}{m_2} \quad (12)$$

In Bild 53 ist die Grundtafel eine bezifferte Parallelschar mit der Gleichung

$x = -\cos u [= -\cos v]$ und das Schiebblatt eine Leiter mit derselben Funktionstellung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad (13)$$

$$\text{die Hilfswinkel } u = b + c, \quad v = b - c \quad (14)$$

ein, so kann man die Formel schreiben

$$\frac{\cos u - \cos v}{\cos 180^\circ - \cos 0^\circ} = \frac{\cos a - \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos 0^\circ} \quad (15)$$

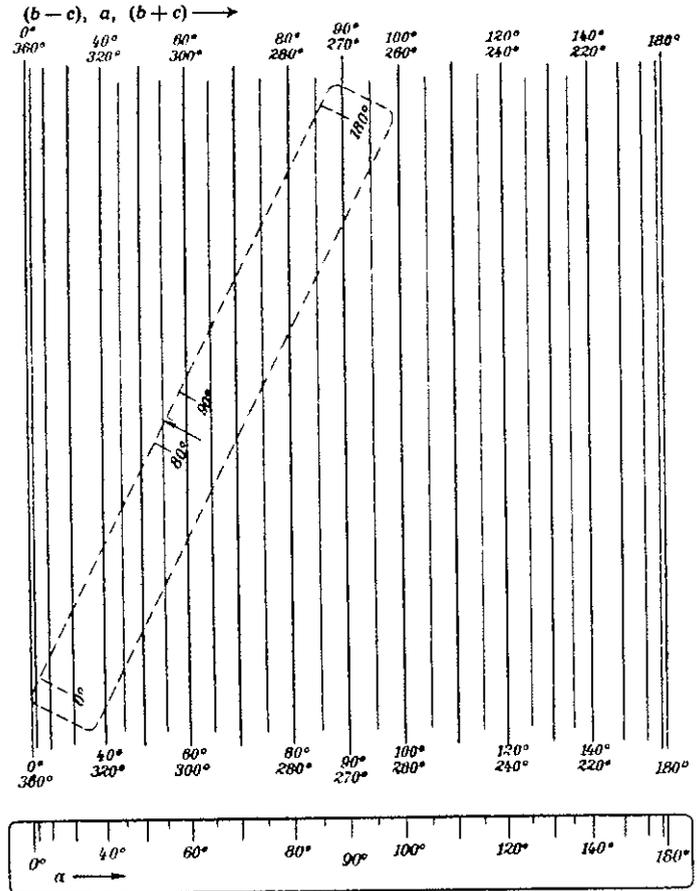
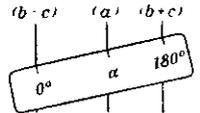


Bild 53. Der sphärische Kosinussatz:
 $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$

Beispiel: Welchen Bogenabstand haben Hamburg (10° ö. L., 53 1/2° n. B.) und Neuyork (74° w. L., 40 1/2° n. B.)?

Auflösung: Im Dreieck Hamburg-Neuyork-Südpol ist $b = 90^\circ + 53 1/2^\circ = 143 1/2^\circ$, $c = 90^\circ + 40 1/2^\circ = 130 1/2^\circ$, $\alpha = 10^\circ + 74^\circ = 84^\circ$. Es ist also $b + c = 274^\circ$, $b - c = 13^\circ$. Legt man — siehe den Schlüssel — die α -Leiter so auf das Grundblatt, daß ihr linker Endpunkt auf die mit 13° und ihr rechter Endpunkt auf die mit 274° bezifferte Parallele fällt, so zeigt der Teilstrich $\alpha = 84^\circ$ auf die Parallele 55°. Also ist die gesuchte Bogenentfernung $\alpha = 55^\circ$. Das sind rund 55 · 111 = 6110 km. Man kann die Ablesung auch mit einem Papierstreifen ausführen, auf den man die drei Teilpunkte von der auf dem Grundblatt entworfenen α -Leiter überträgt.



Diese Proportion erfüllen wir aber durch die vorschriftsmäßige Einstellung der beweglichen Leiter, wie der Anblick des der Tafel beigegebenen Schlüssels zeigt. Das „Sinuslinearpapier“ von Schleicher und Schüll (Nr. 378½ oder 379½) bietet uns das Grundblatt und die Leiter des Schiebestreifens dieser Tafel fertig dar, wenn wir nur die Sinusbezeichnung durch eine Kosinusbezeichnung ersetzen.

Nun steigen wir zu dem allgemeineren Fall auf, in welchem das Schiebeblatt, ebenso wie das Grundblatt, ein zweidimensionales Gebilde ist, eine Ebene, die bezifferte Leitern, Kurvenscharen oder Netze, aber auch unbezifferte Elemente tragen

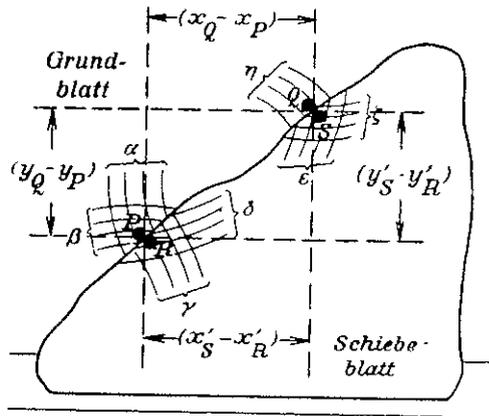


Bild 54.

kann. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, daß das Schiebeblatt stets in derselben „Orientierung“ auf die Grundtafel eingestellt wird, so daß es also auf der Grundtafel nur verschoben, nicht gedreht werden darf. Für solche Rechentafeln habe ich den Namen „Flächenschieber“ oder „zweidimensionale Rechenschieber“ vorgeschlagen. Man stellt das Schiebeblatt gewöhnlich dadurch auf das Grundblatt ein, daß man eine vorgezeichnete Gerade des Schiebeblatts, die „Richtgerade“ – meistens ist es eine gerade Kante dieses Blattes – einer auf der Grundtafel vorgezeichneten (bezifferten oder unbezifferten) Schar von Parallelen, den „Richtparallelen“, parallel stellt. Zu der Schlüsselgleichung der für die Anwendungen nützlichsten Formen von Flächenschiebern gelangen wir nun durch folgende Betrachtung.

Das Schiebeblatt werde so auf das Grundblatt gelegt, daß ein bezifferter Punkt R des Schiebeblatts auf einen bezifferten Punkt P des Grundblatts fällt (Bild 54). Nachdem man die Richtgerade des Schiebeblatts den Richtparallelen des Grundblatts parallel gestellt hat, ist die „Einstellung“ vollzogen. Es wird dann ein beliebiger bezifferter Punkt S des Schiebeblatts auf einen bezifferten Punkt Q des Grundblatts fallen. (In Sonderfällen können auch irgendwelche der 4 Punkte unbeziffert sein.) Nehmen wir auf dem Grundblatt ein Koordinatensystem (x, y) an und auf dem Schiebeblatt ein System (x', y') , dessen Achsen denen des Systems (x, y) bei jeder Einstellung parallel sind, so gelten, wie man aus Bild 54 sieht, die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_Q - x_P &= x'_S - x'_R, \\ y_Q - y_P &= y'_S - y'_R. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Das Gleichungspaar entspricht genau der Gleichung (3) von S. 84. Diese Gleichung bezog sich auf eindimensionale Schieber von der in den Bildern 44 und 46 dargestellten Form. Während nun bei den eindimensionalen Schiebern die aufeinander eingestellten Punkte gewöhnlichen eindimensionalen Leitern angehörten, nehmen wir jetzt an, daß die Punkte P, Q, R, S bezifferten ebenen Systemen angehören; und zwar sollen drei der Punkte, etwa P, R, S zweifach bezifferte Punkte sein, nämlich Punkte der in Bild 54 dargestellten Netze

$$\left. \begin{aligned} \text{Netz } (\alpha, \beta) \dots x_P &= f_{12}(\alpha, \beta), & y_P &= g_{12}(\alpha, \beta), \\ \text{Netz } (\gamma, \delta) \dots x'_R &= f_{34}(\gamma, \delta), & y'_R &= g_{34}(\gamma, \delta), \\ \text{Netz } (\epsilon, \zeta) \dots x'_S &= f_{56}(\epsilon, \zeta), & y'_S &= g_{56}(\epsilon, \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\text{Netz } (\eta, \vartheta) \dots x_Q = f_{78}(\eta, \vartheta), \quad y_Q = g_{78}(\eta, \vartheta) \quad (17^*)$$

angehört, so erhielten wir durch Einsetzen der Werte (17) und (17*) in die Gleichungen (16) zwei Gleichungen zwischen den acht Veränderlichen $\alpha, \beta, \dots, \vartheta$. Der Flächenschieber wäre also ein Nomogramm für zwei simultane Gleichungen zwischen acht Veränderlichen. Da wir es aber in den meisten

Fällen nur mit einer darzustellenden Gleichung zu tun haben, nehmen wir statt der Parameterdarstellung (17*) eine Gleichung

$$F(x_Q, y_Q, \eta) = 0 \quad (18)$$

an. In dieser Gleichung bedeuten x_Q, y_Q die laufenden Koordinaten eines Punktes Q . Für einen konstanten Wert des Parameters η stellt (18) eine Kurve dar, die wir mit diesem Wert η beziffern wollen. Zeichnen wir diese η -Kurven für eine geeignete Auswahl von Werten η , so sehen wir also, daß Q ein Punkt einer Kurvenschar (η) ist. Sind nun z. B. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ gegeben und ist η gesucht, so haben wir demzufolge das Schiebblatt unseres Nomogramms Bild 54 so in der vorgezeichneten Richtung auf das Grundblatt einzustellen, daß der Netzpunkt $R \equiv (\gamma, \delta)$ auf den Netzpunkt $P \equiv (\alpha, \beta)$ fällt. Dann geht durch den Netzpunkt $S \equiv (\varepsilon, \zeta)$ die mit dem gesuchten Wert η bezifferte Kurve der Schar (η).

Um die Schlüsselgleichung dieses Schiebers zu erhalten, haben wir aus den Gleichungen (16), (17) und (18) die acht Größen x_P, y_P, x_Q, y_Q usw. zu eliminieren. Wir setzen zu diesem Zweck die Werte (17) in die Gleichungen (16) ein und erhalten

$$\left. \begin{aligned} x_Q &= f_{12} + f_{56} - f_{34}, \\ y_Q &= g_{12} + g_{56} - g_{34}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (18) ein, so erhalten wir die gesuchte Schlüsselgleichung

$$F(f_{12} + f_{56} - f_{34}, g_{12} + g_{56} - g_{34}, \eta) = 0 \quad (20)$$

Sehr viele in den Anwendungen vorkommende Gleichungen mit sieben oder weniger Veränderlichen lassen sich auf diese recht allgemeine Form bringen, und oft geht dies auf mehrere Arten. Man muß bei einer vorgelegten Gleichung Ausschau halten, ob die charakteristischen Verbindungen $f_{12} + f_{56} - f_{34}$ und $g_{12} + g_{56} - g_{34}$ vorhanden oder herstellbar sind. Auf Gleichungen mit weniger als sieben Veränderlichen wird die Schlüsselform (20) dadurch anwendbar, daß eine oder mehrere der sieben Veränderlichen $\alpha, \beta, \dots, \eta$ zu Konstanten werden. Ist z. B. α eine Konstante, so stellen die Gleichungen

$$x_P = f_2(\alpha, \beta), \quad y_P = g_2(\alpha, \beta) \quad (17a)$$

nicht mehr ein Netz, sondern nur noch eine gewöhnliche, gerade oder krumme β -Leiter dar. Ist η eine Konstante, so tritt nach (18) an die Stelle der η -Schar eine einzige, unbezifferte Kurve, die „Ablesekurve“.

Grundblatt und Schiebblatt können ihre Rollen vertauschen. Man kann also auch auf dem Grundblatt die beiden Netze (γ, δ) , (ε, ζ) und auf dem Schiebblatt das Netz (α, β) und die Schar (η) entwerfen. Auch kann man z. B. bloß die Netze (α, β) und (γ, δ) gegeneinander eintauschen, indem man setzt

$$\left. \begin{aligned} x_P &= -f_{34}, & y_P &= -g_{34}, \\ x'_R &= -f_{12}, & y'_R &= -g_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (17b)$$

Denn dieser Ansatz führt zu denselben Gleichungen (19), mithin auch zu derselben Schlüsselgleichung. Von diesen Möglichkeiten eines verschiedenen Ansatzes wird man besonders dann Gebrauch machen, wenn die Zahl der Veränderlichen kleiner als 7 ist. Man wird dann nämlich tunlichst die Funktionen so ansetzen, daß man Netze und Scharen auf die Grundtafel, einfache Leitern aber oder eine bloße Ablesekurve auf das Schiebblatt bringt. Dann braucht man nämlich letzteres nicht aus durchsichtigem Papier herzustellen, sondern kann die Leitern oder die Ablesekurve an den Rand des Schiebblattes verlegen, wie es auch in den folgenden Beispielen geschehen wird.

Beim Ansatz der Gleichungen (17) kann man auch z. B. x_P durch $x_P - c$ ersetzen, wobei c eine Konstante ist, wenn man gleichzeitig entweder x'_R durch $x'_R - c$ oder x_Q durch $x_Q - c$ ersetzt. Das Entsprechende gilt für die Ordinaten von P und für die Koordinaten der anderen Punkte, und man benutzt diese Freiheit, um den Gebilden von Grund- und Schiebblatt eine zweckmäßige gegenseitige Lage zu geben.

Unter die Form der Schlüsselgleichung (20) fällt auch die Gleichung von der besonders häufig vorkommenden Form

$$\Phi \left(\frac{\varphi_{12} \cdot \varphi_{56}}{\varphi_{34}}, \frac{\psi_{12} \cdot \psi_{56}}{\psi_{34}}, \eta \right) = 0 \quad (21)$$

denn man kann sie ja schreiben:

$$\Phi(10^{\log \varphi_{12} + \log \varphi_{56} - \log \varphi_{34}}, 10^{\log \psi_{12} + \log \psi_{56} - \log \psi_{34}}, \eta) = 0.$$

Die Flächenschieber zu dieser Gleichungsform entwirft man am besten auf logarithmischem Papier, weil man dann gar keine Logarithmen aufzuschlagen hat. Bezeichnet man mit ξ und η die Bezifferungen der Netzlinien des logarithmischen Papiers, so ist

$$x = \log \xi, \quad y = \log \eta.$$

An die Stelle der Gleichungen (16) treten jetzt die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \xi_Q : \xi_P &= \xi'_S : \xi'_R, \\ \eta_Q : \eta_P &= \eta'_S : \eta'_R. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

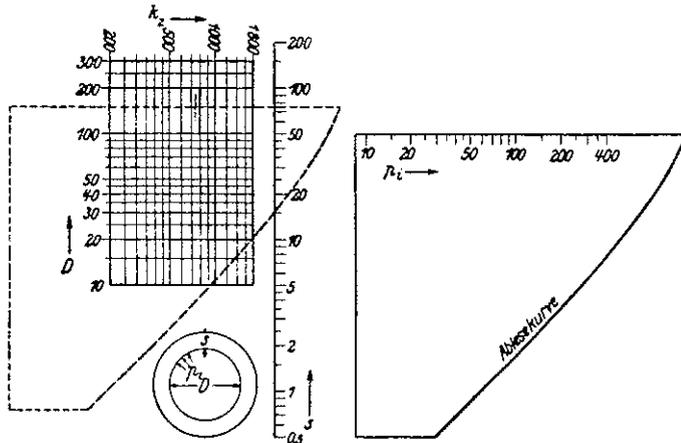


Bild 55. Wandstärke von Rohren mit innerem Überdruck:

$$s = \frac{D}{2} \left(\sqrt{\frac{k_z + 0,4 p_l}{k_z - 1,3 p_l}} - 1 \right).$$

Beispiel: Welche Wandstärke s muß man einem Rohr von $D=150$ mm lichter Weite geben, wenn der höchste Innendruck $p_l = 150$ kg/cm² ist und als zulässige Zugbeanspruchung der Wert $k_z = 750$ kg/cm² angenommen wird? Man legt das Schieberblatt so auf das Grundblatt, daß die p_l -Leiter der mit 150 bezifferten waagrechten D -Geraden anliegt und die senkrechte Gerade $k_z = 750$ durch den Teilpunkt $p_l = 150$ geht. Dann geht die „Ablesekurve“ durch den Teilpunkt 15,6 der s -Leiter. Also ist $s=15,6$ mm.

An die Stelle der Gleichungen (17) und (18) treten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \xi_P &= \varphi_{12}(\alpha, \beta), & \eta_P &= \psi_{12}(\alpha, \beta), \\ \xi'_R &= \varphi_{34}(\gamma, \delta), & \eta'_R &= \psi_{34}(\gamma, \delta), \\ \xi'_S &= \varphi_{56}(\epsilon, \zeta), & \eta'_S &= \psi_{56}(\epsilon, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

und

$$\Phi(\xi_Q, \eta_Q, \eta) = 0, \quad (24)$$

und diese Netze und bezifferten Kurven werden in dem logarithmischen Koordinatennetz auf Grund punktwiser Berechnung ebenso eingezeichnet wie die Netze und Kurven der Gleichungen (17) und (18) in das gewöhnliche Koordinatenpapier. Statt der additiven dienen jetzt multiplikative Konstanten dazu, die Systeme in eine zweckmäßige gegenseitige Lage zu rücken.

Diejenigen der bisher in diesem Abschnitt behandelten Tafeln, bei denen das bewegliche Blatt nur verschoben, nicht gedreht wurde, lassen sich als Sonderfälle der Schlüsselgleichung (20) oder (21) betrachten. Zwei weitere Beispiele sollen uns die Verwendung dieser sehr fruchtbaren Tafelform vor Augen führen.

Erstes Beispiel.

Um in der unter Bild 55 angegebenen Formel die für die Schlüsselgleichung (21) charakteristischen Verbindungen $\frac{\varphi_{12} \cdot \varphi_{56}}{\varphi_{34}}$ und $\frac{\psi_{12} \cdot \psi_{56}}{\psi_{34}}$ herzustellen, schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\frac{2s}{D} + 1 = \sqrt{\frac{1 + 0,4 \cdot p_l / k_z}{1 - 1,3 \cdot p_l / k_z}}. \quad (25)$$

Dann kann man für den Entwurf des Nomogramms auf logarithmischem Papier folgende Systeme ansetzen, die durch passende Wahl von konstanten Faktoren gleich in eine zweckmäßige gegenseitige Lage gerückt sind:

Grundblatt:

$$\left. \begin{aligned} \text{Netz } (k_z, D): & \quad \xi_P = 0,01 k_z, \quad \eta_P = D, \\ \text{Leiter } (s): & \quad \xi_Q = 25, \quad \eta_Q = 2s, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Schiebeblatt:

$$\text{Leiter } (p_l): \quad \xi'_R = 0,1 p_l, \quad \eta'_R = 100, \quad (27)$$

$$\text{Ablesekurve: } 0,01 \eta'_S + 1 = \sqrt{\frac{1 + 0,0016 \xi'_S}{1 - 0,0052 \xi'_S}}. \quad (28)$$

Drückt man aus den Gleichungen (22) ξ'_S und η'_S aus und setzt man die Werte aus (26) und (27) ein, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \xi'_S &= \frac{\xi_Q \xi'_R}{\xi_P} = \frac{250 p_l}{k_x}, \\ \eta'_S &= \frac{\eta_Q \eta'_R}{\eta_P} = \frac{200 s}{d}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (28) der Ablesekurve ein, so erhält man die Gleichung (25), und damit ist die Richtigkeit der Darstellung bewiesen.

Der Flächenschieber läßt sich auf logarithmischem Papier sehr rasch herstellen, da das Netz (k_x, D) und die Leiter (p_l) schon fertig vorhanden sind und auch die Leiter (s) sehr leicht in das Netz einzuzichnen ist. Nur die Ablesekurve ist durch Einsetzen einiger geeigneter verteilter Werte in die Gleichung (28) punktweise zu berechnen, doch genügen wenige Werte, da die Kurve ziemlich flach ist.¹⁾

Zweites Beispiel.

Der in Bild 57 dargestellte Flächenschieber für eine Fundamentalaufgabe der Eisenbetonrechnung, nämlich für das Bemessen und die Spannungsberechnung einfach bewehrter Balken und Platten von rechteckigem Querschnitt²⁾, kennzeichnet gut die Leistungsfähigkeit dieser nomographischen Methode. Hier werden nämlich mit einer einzigen Einstellung des Schiebeleblatts drei simultane Gleichungen mit im ganzen sieben Veränderlichen gelöst, wobei die Werte von vier der Veränderlichen gegeben und diejenigen der drei übrigen gesucht sind. Bild 56 zeigt den rechteckigen Querschnitt des Betonbalkens von der Breite b cm. Unten sind die Querschnitte der auf Zug beanspruchten Eisenlagen sichtbar. Die Summe dieser Querschnitte betrage F_e cm², der Abstand ihrer Mitten vom oberen Querschnittsrande h cm. NV ist die „Nulllinie“, die den auf Zug beanspruchten unteren Teil des Querschnitts, die „Zugzone“, von dem auf Druck beanspruchten oberen Teil, der schraffierten „Druckzone“, scheidet. Die Nulllinie habe vom oberen Querschnittsrande den Abstand x cm. σ_e bedeutet die Zugbeanspruchung des Eisens, σ_b die Druckbeanspruchung des Betons. Beide Werte sind in kg/cm² gemessen. Endlich ist M das in mkg gemessene Biegemoment.

Auf logarithmischem Papier mit den Bezifferungen (ξ, η) sind die Systeme von Grund- und Schiebeleblatt nach folgenden Gleichungen gezeichnet:

¹⁾ W. Kretschmer hat diese Form von Flächenschiebern unter dem Namen „Wanderkurvenblätter“ eingeführt. W. Kretschmer, Über Wanderkurvenblätter. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 5 (1925), S. 182–184.

²⁾ Vgl. P. Luckey, Ein Flächenschieber für das Bemessen und die Spannungsberechnung einfach bewehrter Balken und Platten. Beton und Eisen, 1920, S. 95–97.

Grundblatt:

$$\text{Netz } (\sigma_e, \sigma_b): \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_\sigma &= 0,01 (\sigma_e + 10\sigma_b), \\ \eta_\sigma &= \sigma_e / \sigma_b, \end{aligned} \right. \quad (30) \quad (31)$$

$$\text{Schar } (x): \quad \xi_x = 3000/x^2, \quad (32)$$

$$\text{Schar } (h): \quad \xi_h = \frac{(\eta_h + 600)^2}{120} \cdot \frac{1}{h^2}, \quad (33)$$

$$\text{Schar } (F_e): \quad \xi_F \cdot \eta_F^2 = 3 \left(\frac{8000}{F_e} \right)^2, \quad (34)$$

Schiebeleblatt:

$$\text{Leiter } (M): \quad \xi'_M = 0,0001 \cdot M, \quad \eta'_M = 0,25, \quad (35) \text{ u. } (36)$$

$$\text{obere Leiter } (b): \quad \xi'_{b_o} = b, \quad \eta'_{b_o} = 10, \quad (37) \text{ u. } (38)$$

$$\text{rechte Leiter } (b): \quad \xi'_{b_r} = 500, \quad \eta'_{b_r} = \sqrt{\frac{32}{b}}. \quad (39) \text{ u. } (40)$$

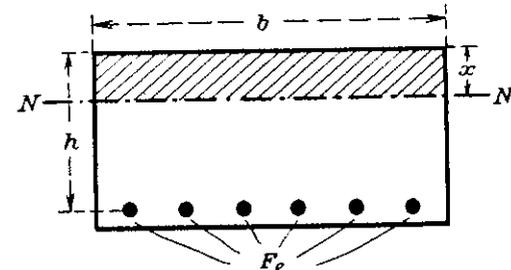


Bild 56.

Die Zeiger (Indices) weisen auf das System hin, dem der betreffende Punkt angehört; so bedeutet z. B. (ξ'_{b_o}, η'_{b_o}) den mit b bezifferten Punkt der oberen b -Leiter des Schiebeleblatts.

Wie man das Netz (σ_e, σ_b) in das logarithmische Papier einzeichnet, wurde schon S. 81 gezeigt. Auch die übrigen Systeme des Grund- und des Schiebeleblatts sind leicht zu zeichnen. Bis auf die Schar (h) sind sie alle Punkte- und Geradenscharen von logarithmischem Abstandsgesetz. Von der Schar (h) braucht man aber nur eine Kurve punktweise zu berechnen; alle anderen sind ihr kongruent, und alle schneiden jede Parallele zur wagerechten Achse in einer logarithmischen Leiter.

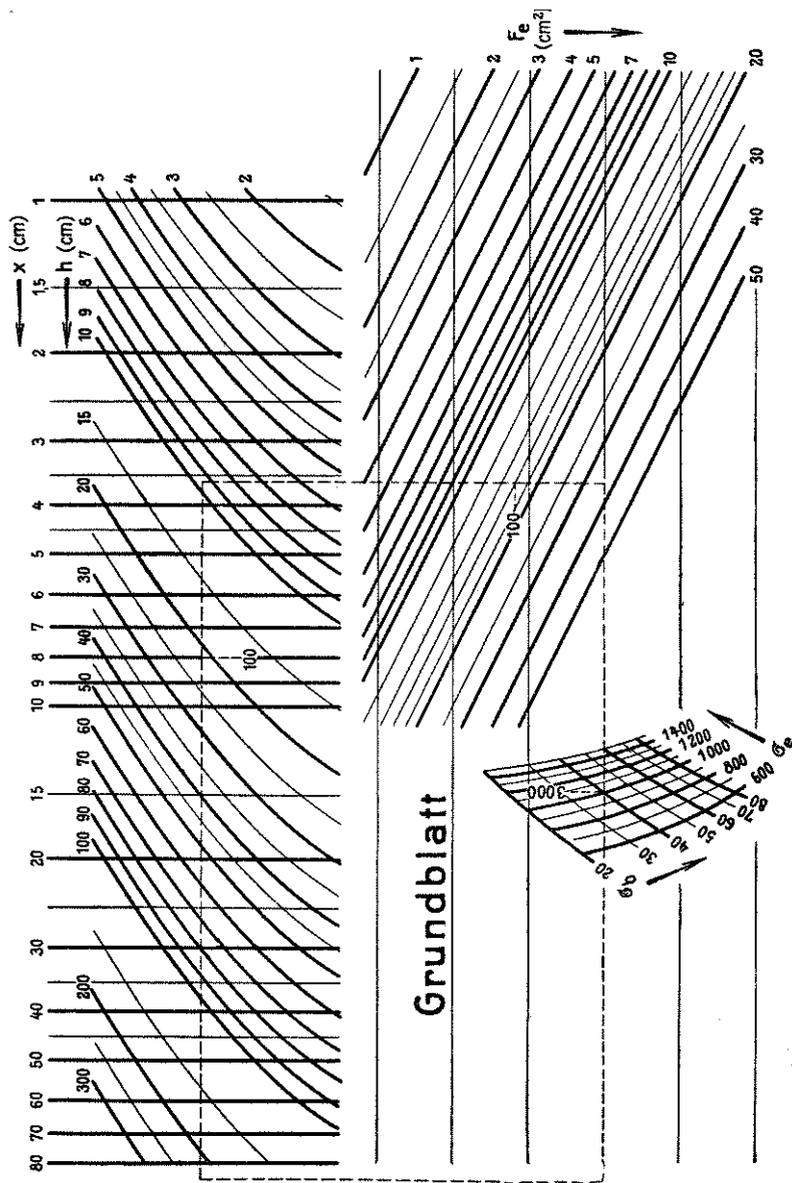
Die Richtigkeit des Schiebers ergibt sich folgendermaßen:

Bei jeder Einstellung kommen folgende Punktepaare zur Deckung:

$$(M) \text{ mit } (\sigma_e, \sigma_b),$$

$$(b_{\text{oben}}) \text{ mit } (x), \quad (b_{\text{oben}}) \text{ mit } (h),$$

$$(b_{\text{rechts}}) \text{ mit } (F_e).$$



Benutzung: 1. Das Schiebblatt ist stets so auf das Grundblatt einzuteilen, daß seine langen Seiten den unbeanspruchten wagerechten Richtlinien des Grundblattes parallel sind. Auch bei Verschiebungen muß diese Richtung stets gewahrt bleiben.

2. (Zusammengehörigkeit der Systeme.) Bei jeder Einstellung kommt ein Punkt der *M*-Leiter zur Deckung mit einem Punkt des Netzes (σ_e, σ_b), ein Punkt der „oberen *b*-Leiter“ mit einem Punkt des Netzes (x, h) und ein Punkt der „rechten *b*-Leiter“ mit einer Geraden der *Schar* (F_e). Jede vorschrittsmäßige Einstellung des Schiebblattes zeigt gleichzeitig die zusammengehörigen Werte $\sigma_e, \sigma_b, M, b, h, x, F_e$ eines Balkens oder einer Platte an.

Beispiele: Aufg. 1 (Bemessen). Gegeben $\sigma_e = 1000, \sigma_b = 40, M = 3000, b = 100$. Gesucht x, h, F_e . Man stellt $M = 3000$ auf den Netzpunkt $\sigma_e = 1000, \sigma_b = 40$. Dann gehen durch den Teilpunkt 100 der oberen *b*-Leiter die Gerade $x = 8$ und die Kurve $h = 21,4$ und durch den Teilpunkt 100 der rechten *b*-Leiter die

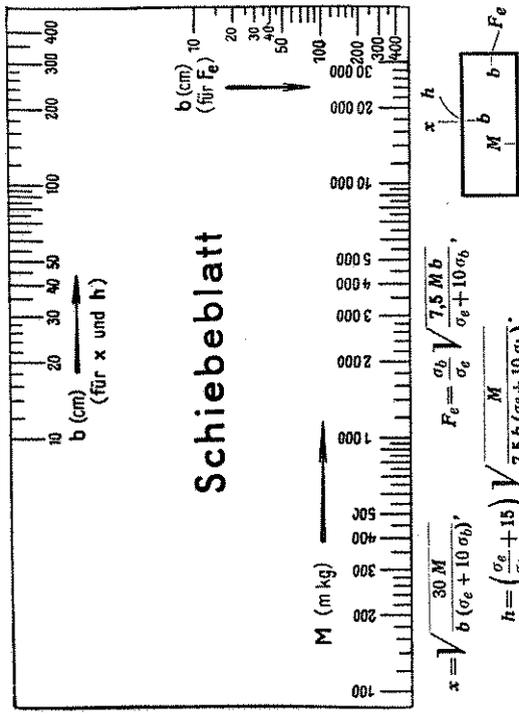


Bild 57. Flächenschieber für einfach bewehrte Balken und Platten von rechteckigem Querschnitt (Aus einem Aufsatze des Verfassers in „Beton und Eisen“ 1926, Heft 5, Seite 96. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.)

Gerade $F_e = 16$ (die gestrichelten Linien deuten die Einstellung des Schiebblattes an). Aufg. 2 (Spannungsberechnung). Gegeben $M = 3000, b = 100, h = 21,4, F_e = 16$. Gesucht σ_e, σ_b, x . Man verschiebt den Punkt $b = 100$ der rechten *b*-Leiter auf der Geraden $F_e = 16$, bis der Punkt $b = 100$ der oberen *b*-Leiter auf die Kurve $h = 21,4$ fällt. Dann fällt der letztgenannte Punkt auf die Gerade $x = 8$ und der Punkt $M = 3000$ auf den Netzpunkt $\sigma_e = 1000, \sigma_b = 40$.

Dies liefert nach (22) die Gleichungspaare

$$1. \quad \xi_x : \xi_\sigma = \xi'_{b\sigma} : \xi'_M, \quad \eta_x : \eta'_\sigma = \eta'_{b\sigma} : \eta'_M. \quad (41) \text{ u. } (42)$$

Setzt man in (41) die Werte (30), (32), (35), (37) ein, so ergibt sich

$$x = \sqrt{\frac{30M}{b(\sigma_e + 10\sigma_b)}}$$

$$2. \quad \xi_h : \xi_\sigma = \xi'_{b\sigma} : \xi'_M, \quad \eta_h : \eta'_\sigma = \eta'_{b\sigma} : \eta'_M. \quad (43) \text{ u. } (44)$$

Man setzt die Werte (30), (31), (35), (36), (37), (38) in diese Gleichungen ein, löst sie nach ξ_h und η_h auf und setzt diese Werte in (33) ein. Dies ergibt

$$h = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_b} + 15\right) \sqrt{\frac{M}{7,5b(\sigma_e + 10\sigma_b)}}$$

$$3. \quad \xi_F : \xi_\sigma = \xi'_{b\sigma} : \xi'_M, \quad \eta_F : \eta'_\sigma = \eta'_{b\sigma} : \eta'_M. \quad (45) \text{ u. } (46)$$

Man setzt die Werte (30), (31), (35), (36), (39), (40) in diese Gleichungen ein, löst sie nach ξ_F und η_F auf und setzt dann diese Werte in (34) ein. Das ergibt

$$F_e = \frac{\sigma_b}{\sigma_e} \sqrt{\frac{7,5Mb}{\sigma_e + 10\sigma_b}}$$

Weitere Beispiele für Tafeln mit beweglichen bezifferten Systemen hat der Verfasser behandelt in den Aufsätzen:

1. Die Flächenschieber oder zweidimensionalen ebenen Rechenschieber. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 5 (1925), S. 254–262.
2. Nomogramme für die Oberfläche des Quaders. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 5 (1925), S. 262–267.
3. Abbaco per il calcolo delle annualità. Giornale di Matematica finanziaria 7 (1925), S. 248–250.
4. Anwendungen der Flächenschieber. Maschinenbau 1926, Heft 1, S. 6–11.
5. Nomogramme für Kapitaltilgungen. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 6 (1926), S. 327–29.
6. Über graphische Rechentafeln mit einer frei beweglichen Leiter. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 7 (1927), S. 155–158.
7. Nomogramme für die komplexen Wurzeln quadratischer und reduzierter kubischer Gleichungen. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 13 (1933) S. 36.

Über Geschichte der Nomographie handeln folgende Arbeiten des Verfassers:

1. Zur älteren Geschichte der Nomographie. Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw. 29 (1923) S. 54–59.
2. Das Analemma des Ptolemäus. Astronom. Nachrichten 230 (1927) Sp. 17–46.
3. Zur Geschichte der Nomographie. Zeitschr. f. math. u. nat. Unterr. 58 (1927) S. 455–465.

BESONDERE NOMOGRAMME

- Berl, E., Herbert, W., Wahlig, W. Nomographische Tafeln für die chemische Industrie. Mit 31 Tafeln. 1930.
- Faltus, F. 15 Nomogramme für den Eisenbau. 1927.
- Knicknomogramme für den Eisenbau. Nach G. Unold. 1928.
- Konorski, B. M. Hilfsbuch für Betriebsrechnungen. . . . Mit 46 Nomogramm- und 13 Kurventafeln. . . . 1930.
- Leybold, P. 9 Rechentafeln für Maschinenelemente (Hebezeugbau). 2. Aufl. 1928.
- Liesche, O. 6 chemische Nomogramme.
- Manger, H. Rechentafeln für elektrische Apparate. 1927.
- Nentwig, K. Nomogramme für die Punktechnik. 1936.
- d'Ocagne, M. Principes usuels de nomographie, avec applications à divers problèmes concernant l'artillerie et l'aviation. Paris 1920 (70 Seiten).
- Wagener, E. Anwendung der Nomographie in der Wehrwissenschaft. Göttinger Dissertation o. J. (1936). (75 Seiten.)

SCHLÜSSELGLEICHUNGEN

- | | Seite |
|---|---------------------|
| 1. $f_s = f_1 + f_2$ | 17—22, 35—37, 40—46 |
| 2. $\frac{1}{f_s} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ | 47—49 |
| 3. $f_1 = f_2 \cdot f_s$ | 14—18, 22, 49—54 |
| 4. $\frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1} = \frac{g_3 - g_1}{f_3 - f_1}$ | 58—59 |
| 5. $g_1 F_2 + g_2 G_3 + H_2 = 0$ | 23, 61—68 |
| 6. $F_{12} = F_{24}$ | 68—78 |
| 7. $F_1 + F_2 = F_3 + F_4$ | 71, 75—78, 82—87 |
| 8. $\frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1} = \frac{g_4 - g_3}{f_4 - f_3}$ | 78 |
| 9. $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 0$ | 88 |
| 10. $F(f_{12} + f_{26} - f_{34}, g_{12} + g_{26} - g_{34}, \eta) = 0$ | 96—99 |
| 11. $\Phi \left(\frac{\varphi_{12} \varphi_{26}}{\varphi_{34}}, \frac{\psi_{12} \psi_{26}}{\psi_{34}}, \eta \right) = 0$ | 88—92, 99—106 |

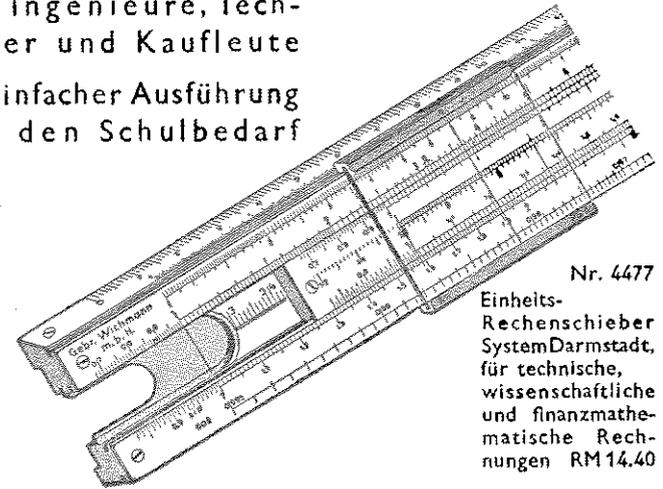
Für die Anzeigen verantwortlich: Charlotte Triepel, Leipzig, MA. 1500.

Rechenschieber

aller Systeme

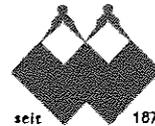
Präzisions-Ausführung
für Ingenieure, Techniker
und Kaufleute

in einfacher Ausführung
für den Schulbedarf



Nr. 4477

Einheits-
Rechenschieber
System Darmstadt,
für technische,
wissenschaftliche
und finanzmathe-
matische Rech-
nungen RM 14,40



seit 1873

Rei ß z e u g e Rei ß b r e t t e r Zeichengeräte Techn. Papiere

Druckschriften kostenlos

Gebr. Wichmann m. b. H.

Berlin NW 7, Karlstraße 13 · Fernruf: 42 55 41

Bremen / Breslau / Düsseldorf / Hamburg / Königsberg / Magdeburg / Stettin / Stuttgart