bei uns besteht der Zwang zur Rationalisierung, wenn wir den Nutzeffekt unserer Arbeit erhöhen, wenn wir die Zeit gewinnen wollen, um die erzieherischen und bildenden Werte unseres Faches ausreichend zur Geltung kommen zu lassen.

Gerade aus erzieherischen Gründen müssen unsere Schüler ein Gefühl dafür bekommen, was ökonomisches Denken eigentlich bedeutet. Und hierbei handelt es sich eben nicht um etwas Aeußerliches und Mechanisches, sondern um etwas, was unserem ganzen Handeln Ziel und Richtung geben kann. Der Grundsatz: „Vergeude keine Energie" ist ein ethischer Grundsatz! Und durch bewußt herbeigeführte Rationalisierung des Unterrichtes nach Form und Inhalt wird den uns anvertrauten jugendlichen Menschen vielleicht der Sinn des technischen und auch des wissenschaftlichen Schaffens besser aufgehen als durch die Durchnahme noch so vieler technischer Verfahren und die Uebermittlung eines noch so umfangreichen Wissenstoffes.

Kreisberechnung ohne Wurzeln.

Von P. LUCKEY in Marburg.

Der Lehrer, der seine Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus zu durchdringen sucht, wird sich Rechenschaft über die ersten Grenzwerte ablegen, die dem Schüler entgegentreten. Er muß sich klar sein, daß der Quartaner, wenn er $0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$ ausrechnet, tatsächlich $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^n}\right)$ bestimmt. Dem reiferen Schüler wird man das Wesen des Limesbegriffes nach Möglichkeit aufzuhellen suchen. Hierzu ist die Intervallschachtelung dienlich, die sich auch auf der Zahlengeraden veranschaulichen läßt. $0{,}333\ldots$ ist die Zahl, die in jedem der Intervalle $(0{,}3;\,0{,}4)$, $(0{,}33;\,0{,}34)$, $(0{,}333;\,0{,}334)$, ... enthalten ist. Von diesen Intervallen, die eine unendliche Folge bilden, liegt jedes folgende im vorhergehenden, und wenn wir nur weit genug gehen, wird das Intervall kleiner als eine beliebige Größe. Bei der Berechnung des Pyramideninhalts dienen etwa als Enden eines Intervalls die Inhalte eines einbeschriebenen und eines umbeschriebenen Treppenkörpers von gleicher Stufenzahl, die Enden des folgenden Intervalls sind die Inhalte der Treppenkörper etwa von der doppelten Stufenzahl. In den beiden angeführten Fällen liegt die Sache insofern noch einfach, als der zu gewinnende Grenzwert als eine Größe bekannter Art gefunden wird: $0{,}333\ldots$ als rationaler Bruch $\frac{1}{3}$, der Pyramideninhalt ebenfalls als rationaler Bruchteil $\frac{1}{3}$, nämlich eines Prismeninhalts. Anders wird das bei den Wurzeln. Zieht man auf die übliche Weise die Quadratwurzel aus 2, so heißt das, man bestimmt durch systematisches Probieren folgende Intervallschachtelung: $(1;\,2)$, $(1{,}4;\,1{,}5)$, $(1{,}41;\,1{,}42)$, ... Die Intervalle haben die Größen $1;\,0{,}1;\,0{,}01;\ldots$ Das untere Ende jedes Intervalles ist eine rationale Zahl, die der Ungleichung $x^2 < 2$, das obere eine solche, die der Ungleichung $x^2 > 2$ genügt. Die „Zahl" $\sqrt{2}$ selbst aber, auf die die Intervallschachtelung abzielt, ist nicht als rationale Zahl vorhanden, sie wird erst definiert durch die Intervallschachtelung, die ja einem DEDEKINDschen Schnitt gleichwertig ist. Es soll hier nicht erörtert werden, wie weit man versuchen kann, im Anfänger das Verständnis für diesen bedeutungsvollen Sachverhalt zu wecken. Auch wollen wir der Frage nicht näher treten, ob der Anfänger schon ein Bedürfnis nach einer strengeren Begründung des Rechnens mit Irrationalzahlen, d. h. hiernach: des Rechnens mit unendlichen Intervallschachtelungen, hat. Vielleicht können wir aber hierin in Zukunft doch etwas weiter gehen, als es bisher meistens geschah. Jetzt möchte ich vielmehr das Augenmerk lenken auf die merkwürdigste und schwierigste Intervallschachtelung, die wir in der Schule überhaupt behandeln, und das sogar schon auf der Mittelstufe. Ich meine die Kreisberechnung nach dem Verfahren des ARCHIMEDES oder einer Variante dieses Verfahrens. Als Varianten des ARCHIMEDischen Verfahrens bezeichne ich alle Methoden, bei denen ein- und umbeschriebene regelmäßige Vielecke zur Verwendung kommen, deren Seitenzahl fortgesetzt verdoppelt wird[1]). Es ist zwar anschaulich sehr einleuchtend, etwa dem halben Umfang π des Einheitskreises durch eine Intervallschachtelung zu Leibe zu rücken, bei der als Intervallenden die halben Umfänge ein- und umbeschriebener regelmäßiger Vielecke dienen, deren Seitenzahl wir fortwährend verdoppeln. Aber sobald wir die Sache von der analytischen und numerischen Seite

[1]) Vgl. TH. WEITBRECHT, Zur Kreisrechnung. Zeitschr. f. math. u. nat. Unterr. **61** (1930), 318—320.

betrachten, türmen sich die Schwierigkeiten hoch. Denn nicht nur können wir zunächst gar nichts darüber aussagen, ob die gesuchte Zahl π etwa als rationale Zahl existiert oder nicht, sondern auch die Enden der Intervalle dieser Schachtelung, nämlich die halben Umfänge der ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke, sind bis auf zwei Ausnahmen Irrationalzahlen, also selbst durch Intervallschachtelungen definiert. Geht man etwa vom regelmäßigen Sechseck aus, so erhält man für π die Intervallschachtelung

$$[3;\ 2\sqrt{3}],\ \left[6\sqrt{2-\sqrt{3}};\ 12(2-\sqrt{3})\right],\ \left[12\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}};\ 24\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2-\sqrt{3}\right)\right],\ \ldots$$

Selbst wenn wir uns über die mangelnde oder mangelhafte theoretische Begründung des Rechnens mit Irrationalzahlen, das hier ganz munter ausgeübt wird, hinwegsetzen, so bestehen noch große Schwierigkeiten des praktischen Rechnens. Denn will der Schüler nun etwa den Ausdruck $12\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ auf drei Stellen nach dem Komma genau berechnen, wie genau muß er da $\sqrt{3}$ ausziehen, und wie genau die folgende Wurzel? Das kann er selbst nicht entscheiden, wenn nicht vorher eine Untersuchung darüber angestellt wird. Nachdem aber hierüber Klarheit geschaffen ist, ist viel Rechenarbeit zu leisten, falls man etwa bis zum 96-Eck aufsteigen will, und diese Rechenarbeit ist durch Gruppenarbeit kaum zu erledigen, da sich immer ein Ergebnis auf das vorhergehende aufbaut. Alle anderen Kreisberechnungen mit Hilfe regelmäßiger Vielecke kranken grundsätzlich an denselben Uebeln, wenn sie auch zum Teil weniger Rechenarbeit erfordern, als das obige, in den Lehrbüchern am meisten verbreitete. Bei dem von Deutsch[2]) und Flechsenhaar[3]) vorgeschlagenen Trapezverfahren ist zwar Gruppenarbeit möglich, aber auch hier wird mit irrationalen Intervallenden gearbeitet, denn die Näherungswerte sind Summen von Quadratwurzeln.

Es wäre doch wirklich viel schöner und klarer, wenn wir bei der elementaren Berechnung der Irrationalzahl π ganz ohne sonstige Irrationalzahlen auskämen, wenn wir die Zahl π also in Intervalle mit rationalen Enden eingrenzen könnten. Dabei wäre allerdings zu verlangen, daß das Verfahren geometrisch ebenso leicht faßlich und ebenso anschaulich sei, wie das herkömmliche. Auch müßte mit einem erträglichen Maß numerischer Arbeit eine hinreichende Genauigkeit verbunden sein. Im folgenden mache ich einen Versuch zu einer solchen elementaren Kreisberechnung ohne Wurzeln[4]). Als Vorkenntnisse verlangt das Verfahren neben der rationalen Buchstabenrechnung nur die Elementargeometrie bis zur Lehre von der Aehnlichkeit und der Flächenberechnung geradliniger Figuren.

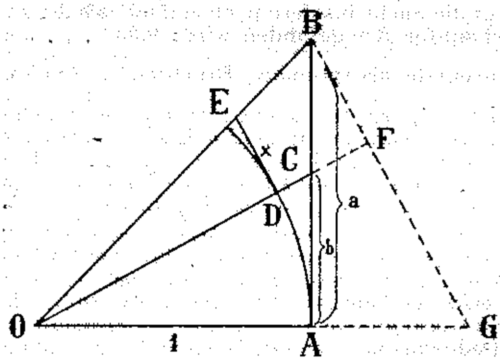


Fig. 1.

Wir lösen zunächst folgende

Aufgabe: Von dem rechtwinkligen Dreieck O A B (Fig. 1) sind gegeben die Katheten $OA = 1$ und $AB = a$. Wir tragen von A aus auf A B die gegebene Strecke $AC = b < a$ ab und verbinden C mit O. Ferner beschreiben wir um O mit dem Halbmesser $OA = 1$ den Kreis, der O C in D schneiden möge. In D legen wir die Tangente an den Kreis, die O B in E schneiden möge. Die Strecke $DE = x$ ist zu berechnen.

Auflösung: Wir fällen von B das Lot auf die Verlängerung von O C und verlängern es über seinen Fußpunkt F hinaus bis zum Schnitt mit der Verlängerung von O A. Der Schnittpunkt heiße G Dann ist

$$\frac{x}{1} = \frac{DE}{OD} = \frac{FB}{OF} \quad \text{(Strahlensatz),}$$

[2]) H. Deutsch, Die Berechnung des Kreisinhalts durch Zerlegung in Trapeze. Zeitschr. f. math. u. nat. Unterr., 46 (1915), 319—328.

[3]) A. Flechsenhaar, Die Kreismessung mit Hilfe der Simpsonschen Regel. Zeitschr. f. math. u. nat. Unterr. 46 (1915), 329—332.

[4]) Andere Vorschläge dieser Art mache ich in dem Aufsatz: Elementare Kreisquadratur ohne Wurzelrechnung, der in der Zeitschr. f. math. u. nat. Unterr. erscheinen wird.

ferner

$$\frac{FB}{OF} = \frac{CB}{OG} \quad (\text{da } \Delta\, BCF \sim \Delta\, OGF),$$

also

$$x = \frac{CB}{OG} = \frac{CB}{OA + AG}.$$

Nun ist $CB = a - b$, $OA = 1$, $AG = ab$ (da $\Delta\, AGB \sim \Delta\, ACO$ und demnach $AG : a = b : 1$ ist).

Folglich

(1) $$x = \frac{a-b}{1+ab}.$$

Nun gehen wir dazu über, Inhalt und Umfang des Kreises mit dem Halbmesser 1 in Grenzen einzuschließen. Die Ableitungen lassen sich leicht auf den Kreis mit dem Halbmesser r übertragen. Alle Strecken erhalten dann den Faktor r, alle Flächen den Faktor r^2.

O A B (Fig. 2) sei ein Achtelkreis vom Halbmesser $OA = 1$. In A sei die Tangente angelegt, die die Verlängerung von O B in C schneiden möge. Die Strecke $AC = 1$ teilen wir in n gleiche Teile; D E sei das i-te Teilstück. (Man wird natürlich die Entwicklungen, die ich hier gleich für allgemeines n geben werde, bei der ersten Darbietung an einem konkreten Beispiel, etwa für $n = 10$, durchführen, und auch alle Betrachtungen und Berechnungen, in denen der laufende Zeiger i vorkommt, wird man zunächst nacheinander für $i = 1, 2, \ldots$ ausführen. Es ist ein Vorteil unseres Verfahrens, daß wir zur Erlangung der Näherungswerte nicht fortgesetzt von n auf 2 n aufsteigen müssen, sondern sogleich einen beliebigen, endgültigen Wert von n annehmen können.) Alle Teilpunkte D, E verbinden wir mit O. Die Verbindungslinien O D und O E mögen den Kreis in F und G schneiden. In F legen wir die Tangente an den Kreis, die O E in H schneiden möge. Die in dem Teildreieck O D E ausgeführten Konstruktionen denken wir uns auch in allen übrigen Teildreiecken vollzogen.

Die Strecke F H nennen wir t_i. Das rechtwinklige Dreieck O F H heiße D_i; als G r ö ß e soll D_i den Flächeninhalt des Dreiecks bezeichnen. Aus Teildreiecken D_i können wir ein u n g l e i c h s e i t i g e s T a n g e n t e n - 4 n - e c k des Vollkreises bilden; wir müssen sie nur richtig zusammenlegen. Spiegeln wir die Figur 2 an O A, so entsteht ein zu D_i symmetrisches Teildreieck D_i'. Nun denken wir uns alle Dreiecke D_i der Figur und alle ihre Spiegelbilder D_i' ausgeschnitten und jedes D_i' mit seiner Hypotenuse so an die Hypotenuse von D_i gelegt, daß ein Drachen entsteht. Alle diese Drachen legen wir mit ihren spitzen Winkeln in O aneinander. Durch diese Umgruppierung der Sektoren ist ein Quadrant des Tangenten-4n-ecks hergestellt, und ebenso bilden wir die drei übrigen Quadranten. Dieses Tangenten-4n-eck, das den Umfang 8mal Summe aller t_i und den Inhalt 8mal Summe aller D_i hat, soll die o b e r e Grenze für Kreisinhalt und -umfang liefern.

Wir berechnen t_i, indem wir in die Formel (1) einsetzen:

$$a = AE = \frac{i}{n}, \qquad b = AD = \frac{i-1}{n}, \qquad a - b = DE = \frac{1}{n}.$$

Es ergibt sich

(2) $$t_i = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{i(i-1)}{n^2}} = \frac{n}{n^2 + i(i-1)}.$$

Ferner ist

(3) $$D_i = \frac{1}{2}\, OF \cdot FH = \frac{1}{2}\, t_i.$$

Demnach ist der F l ä c h e n i n h a l t d e s T a n g e n t e n - 4 n - e c k s

(4) $$F = 8(D_1 + D_2 \cdots + D_n) = 4(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)$$

$$F = 4n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 2\cdot 1} + \frac{1}{n^2 + 3\cdot 2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2 + n(n-1)}\right).$$

Für $n = 30$ erhalten wir

$$F = 0{,}06\left(\frac{1000}{450} + \frac{1000}{451} + \frac{1000}{453} + \frac{1000}{456} + \cdots\cdots + \frac{1000}{856} + \frac{1000}{885}\right).$$

Das ist nun etwas Rechenarbeit. Zum Glück können wir sie durch G r u p p e n - a r b e i t leicht bewältigen. Jede Schülergruppe berechnet und addiert von einer zur nächsten Stunde die von ihr übernommenen Summanden; der Lehrer prüft die Ergebnisse mit einer Tafel der Reziproken nach. Man erhält

$$\begin{aligned} F &= 0{,}06\,(2{,}22222 + 2{,}21730 + \cdots + 1{,}12994 \pm 0{,}00015) \\ &= 3{,}1423992 \pm 0{,}0000090. \end{aligned} \tag{4a}$$

Wir fällen (Fig. 2) von F das Lot auf O G; der Fußpunkt sei I. Die Strecke F I bezeichnen wir mit s_i, das rechtwinklige Dreieck O F I und seinen Inhalt mit d_i. Nach der vorhin vorgenommenen Umgruppierung der Sektoren bilden die Dreiecke d_i ein Sehnen-4n-eck, dessen Inhalt

$$f = 8\,(d_1 + d_2 + \cdots + d_n) \tag{5}$$

uns als untere Grenze für den Kreisinhalt dienen soll. Statt f zu berechnen, schätzen wir seinen Unterschied gegen F ab. Es verhält sich

$$\begin{aligned} \Delta\,F\,H\,I : \Delta\,O\,H\,F &= (D_i - d_i) : D_i = \\ = H\,F^2 : O\,H^2 &= H\,F^2 : (O\,F^2 + F\,H^2) = \\ &= t_i^2 : (1 + t_i^2). \end{aligned}$$

Also ist

$$D_i - d_i = D_i \frac{t_i^2}{1 + t_i^2} < t_i^2 D_i \leq t_1^2 D_i. \tag{6}$$

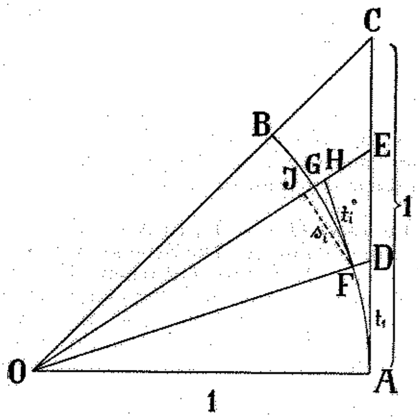


Fig. 2.

Hier haben wir zuletzt t_i durch t_1 ersetzt. Das ist möglich, da $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$. Nun ist der Unterschied, das Intervall i_n zwischen dem Tangenten- und dem Sehnen-4n-eck

$$i_n = F - f = 8\,[(D_1 - d_1) + (D_2 - d_2) + \cdots (D_n - d_n)].$$

Nach (6) ergibt sich hierfür weiter

$$i_n < 8\,(t_1^2 D_1 + t_1^2 D_2 + \cdots + t_1^2 D_n) = t_1^2 \cdot 8\,(D_1 + D_2 + \cdots + D_n) = t_1^2 F.$$

Da nun $t_1 = \frac{1}{n}$, wie aus (2) oder unmittelbar aus der Figur hervorgeht, so folgt

$$i_n = F - f < \frac{1}{n^2} F\,. \tag{7}$$

Mit dieser Abschätzung des Intervalles zwischen ein- und umbeschriebenem 4n-eck ist auch eine untere Grenze für den Kreisinhalt gewonnen. Für n = 30 erhalten wir nach (7) und (4a)

$$i_{30} < \frac{3{,}143}{900} < 0{,}003493. \tag{7a}$$

Also ergibt sich für den Inhalt des Einheitskreises, den wir π nennen wollen,

$$F - i_n < \pi < F \tag{8}$$

und für n = 30:

$$\mathbf{3{,}13889 < \pi < 3{,}14241.} \tag{8a}$$

Wir sind zu einem genaueren Ergebnis gelangt, als wenn wir nach der herkömmlichen Methode π zwischen die halben Umfänge des ein- und umbeschriebenen regelmäßigen 64-ecks eingeschlossen hätten.

Um auch den halben Umfang des Einheitskreises einzugrenzen, benutzen wir als obere Grenze den halben Umfang des für den Inhalt benutzten Tangenten-4n-ecks. Er beträgt

$$\frac{1}{2} U = 4\,(t_1 + t_2 + \cdots + t_n). \tag{9}$$

Nach (4) hatten wir für F denselben Ausdruck. Er ist schon berechnet.

Als untere Grenze des Kreisumfangs wählen wir nicht den Umfang des für den Inhalt benutzten Sehnen-4n-ecks, weil seine Seiten 2 s_i irrational sind. Wir gruppieren die Sektoren so um, daß nicht nur je zwei spiegelbildliche Dreiecke d_i und d_i' zusammenstoßen, sondern je zwei Paar solcher Dreiecke, und zwar so, wie Fig. 3 dies zeigt. Das geht, weil im Vollkreis ja vier Paar vorhanden sind. Ziehen wir noch die Sehne A C = S_i, so erhalten wir für den Inhalt des Vierecks O A B C

$$\frac{1}{2} O\,B \cdot A\,C = \frac{1}{2} A\,C = 4\,d_i,$$

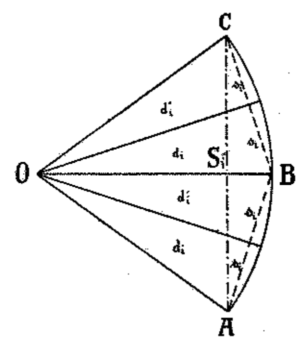


Fig. 3.

also

(10) $$AC = S_l = 8\,d_l.$$

S_l ist also eine Sehne von rationaler Länge. Nun ist der halbe Umfang des von den Sehnen S_l gebildeten einbeschriebenen $2n$-ecks

(11) $$\frac{u}{2} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = 8\,(d_1 + d_2 + \cdots + d_n).$$

Nach (5) ist dieser Ausdruck gleich f. Wählen wir also dieses Sehnen-$2n$-eck als **untere** Grenze für den Umfang des Einheitskreises, so haben wir den Umfang des Halbkreises in dieselben Grenzen $\frac{u}{2} = f$ und $\frac{U}{2} = F$ eingeschlossen wie vorhin den Inhalt des Vollkreises. Der halbe Umfang ist also gleich π.

Während man bei der herkömmlichen Kreisberechnung vom n-eck zum 2n-eck, von diesem zum 4n-eck usw. aufsteigen muß und also schon zur Erlangung eines Näherungswertes von π eine (endliche) Intervallschachtelung nötig hat, gibt unsere Methode für geeignet angenommenes n ohne weiteres das Intervall i_n von gewünschter Genauigkeit. Will man aber strenger vorgehen, so kann man den Inhalt π und den ebensogroßen halben Umfang des Einheitskreises **durch eine unendliche Intervallschachtelung definieren**, indem man sich n unbegrenzt verdoppelt denkt. Dann fallen, wie man sich leicht für die in Fig. 2 gezeichnete ursprüngliche Gruppierung der Teildreiecke klar macht, je zwei Teildreiecke D_{2n} des umbeschriebenen 8 n-ecks ganz in die Fläche eines Teildreiecks D_n des umbeschriebenen 4 n-ecks und ferner fällt immer ein d_n ganz in die Fläche zweier d_{2n}. Nach (7) strebt aber die Größe i_n der Intervalle für unbegrenzt wachsendes n der Grenze 0 zu, da F für jedes $n > 1$ sicher kleiner als 4 ist.

Hiermit ist die Kreisberechnung durch Einschließung des Umfangs und des Inhalts in eine Folge von Intervallen mit rationalen Enden ausgeführt.

Man darf kaum Anstoß **daran** nehmen, daß die Formel (1) eine verkappte trigonometrische Formel ist[5], nämlich diejenige für $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$. Denn auch bei der herkömmlichen Verwendung **regelmäßiger** Vielecke kommen jedesmal verkappte trigonometrische Formeln vor, nämlich **Halbwinkelformeln**. Während aber die Halbwinkelformeln Quadratwurzeln enthalten, ist das Additionstheorem der Tangensfunktion wurzelfrei[6]).

Um das Verhältnis der erreichten Genauigkeit zur aufgewandten toten Zahlenrechnerei günstiger zu gestalten, wollen wir jetzt unser Verfahren verfeinern. Zunächst ist es möglich, das Intervall zwischen umbeschriebener und einbeschriebener Figur zu verkleinern. Wie wir schon sagten, ist $s_l = FI$ in Fig. 2 irrational. Man kann aber folgende Abschätzung vornehmen, bei der wir der Einfachheit halber bei t_l und s_l die Zeiger i weglassen:

$$\frac{t^2}{s^2} = \frac{FH^2}{FI^2} = \frac{OH^2}{OF^2} = \frac{OF^2 + FH^2}{OF^2} = \frac{1+t^2}{1},$$

also
$$t^2 - s^2 = s^2\,t^2,$$

(12) $$t - s = \frac{s^2 t^2}{t+s} < \frac{s^2 t^2}{2s} = \frac{t^2}{2}\,s < \frac{t^2}{2}\,t.$$

(Diese Ungleichungen geben Maße für die Genauigkeit, mit der man Sinus und Tangens eines kleinen Winkels gleichsetzen kann.) Aus (12) folgt

(13) $$t_l - s_l < \frac{t_l^2}{2}\,t_l.$$

Für die Inhaltsberechnung wählen wir jetzt als umbeschriebenes Vieleck dasselbe Tangenten-4n-eck wie früher, als einbeschriebenes Vieleck aber das von den Sehnen FG (Fig. 2) begrenzte 8n-eck, dessen Teildreieck OFG den Inhalt

(14) $$\delta_l = \frac{1}{2}\,OG \cdot FI = \frac{1}{2}\,s_l$$

hat. Nach (3), (14) und (13) ist jetzt

(15) $$D_l - \delta_l = \frac{1}{2}\,t_l - \frac{1}{2}\,s_l < \frac{t_l^2}{2} \cdot \frac{t_l}{2} = \frac{t_l^2}{2} \cdot D_l.$$

---

[5]) Uebrigens sind eigentlich umgekehrt die trigonometrischen Formeln verkappte geometrische.

[6]) Eine andere direkte Ableitung des Additionstheorems der Tangensfunktion für spitze Winkel gibt H. DÖRRIE in der Arbeit: Elementare Herleitung der wichtigsten Eigenschaften von arc tg x, Zeitschr. f. d. math. u. nat. Unterr. 38 (1907), 514—522.

Die Intervallabschätzung der Teildreiecke ist also die Hälfte der früheren, in der Ungleichung (6) ausgesprochenen. Folglich treten an die Stelle von (7) und (8a) jetzt die Ungleichungen

$$i_n' < \frac{1}{2\,n^2} F \quad \text{und} \tag{16}$$

$$3{,}14064 < \pi < 3{,}14241. \tag{16a}$$

Die Genauigkeit kommt der des Archimedischen 96-ecks nahe. (Mit Hilfe unserer Formel (12) findet man für das Intervall zwischen dem halben Umfang des dem Einheitskreise ein- und umbeschriebenen regelmäßigen ν-ecks leicht den Näherungswert $i_\nu \approx \frac{\pi^3}{2\,\nu^2}$).

Dieselbe Eingrenzung wie für den Inhalt des Einheitskreises erhalten wir nun auch für dessen halben Umfang, wenn wir als umbeschriebenes Vieleck wie früher das aus den t_l gebildete $4n$-eck benutzen, als einbeschriebenes Vieleck aber jetzt einfach das aus den Sehnen $2\,s_l$ zu bildende $4n$-eck.

Eine wesentliche Entlastung von Rechenarbeit gibt uns ferner die erneute Anwendung der Formel (1). Bezeichnen wir mit A (t) den Flächeninhalt des zur Tangente t gehörigen Kreisausschnittes, so ist nach Fig. 1

$$A(a) = A(b) + A(x) \tag{17}$$

Nehmen wir z. B. $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, so ist nach (1) $x = \frac{1}{3}$, und wir erhalten die schon von Euler zur Berechnung von π verwandte Formel

$$\frac{\pi}{8} = A(1) = A\left(\frac{1}{2}\right) + A\left(\frac{1}{3}\right). \tag{17a}$$

In unserem Rechenbeispiel $n = 30$ entfallen auf $A\left(\frac{1}{2}\right)$ die ersten 15 und auf $A\left(\frac{1}{3}\right)$ die ersten 10 der 30 auf den Oktanten entfallenden Teildreiecke D_l. Also tritt an die Stelle von (4) der Ausdruck

$$\begin{aligned} F' &= 8\,[(D_1 + D_2 + \cdots + D_{15}) + (D_1 + D_2 + \cdots + D_{10})] \\ &= 8\,(2\,D_1 + 2\,D_2 + \cdots + 2\,D_{10} + D_{11} + \cdots + D_{15}). \end{aligned} \tag{18}$$

Diese Summe hat nur noch 15 Summanden.

Setzen wir ferner in (1) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$, so erhalten wir $x = \frac{2}{9}$, und es ist $A\left(\frac{1}{2}\right) = A\left(\frac{1}{4}\right) + A\left(\frac{2}{9}\right)$. Setzt man das in (17a) ein, so ergibt sich

$$\frac{\pi}{8} = A(1) = A\left(\frac{1}{3}\right) + A\left(\frac{1}{4}\right) + A\left(\frac{2}{9}\right) = A\left(\frac{12}{36}\right) + A\left(\frac{9}{36}\right) + A\left(\frac{8}{36}\right). \tag{17b}$$

Teilen wir also die Tangente 1 in 36 gleiche Teile, so ergibt sich als Inhalt eines umbeschriebenen Vielecks die nur noch 12-gliedrige Summe

$$\begin{aligned} F'' &= 8\,(3\,D_1 + 3\,D_2 + \cdots + 3\,D_8 + 2\,D_9 + D_{10} + D_{11} + D_{12}) \\ &= 0{,}072 \left[3\left(\frac{1000}{648} + \frac{1000}{649} + \frac{1000}{651} + \frac{1000}{654} + \frac{1000}{658} + \frac{1000}{663} + \frac{1000}{669} + \frac{1000}{676}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2000}{684} + \frac{1000}{693} + \frac{1000}{703} + \frac{1000}{714} \right] = 3{,}1423644 \pm 0{,}0000105\,. \end{aligned} \tag{18a}$$

Die Intervallabschätzung bleibt in diesen Fällen dieselbe wie früher. Im letzten Beispiel erhalten wir nach (16)

$$i_{36}' < \frac{3{,}1424}{2 \cdot 36^2} < 0{,}001213, \tag{19}$$

folglich

$$3{,}14114 < \pi < 3{,}14238. \tag{19a}$$

Diese Genauigkeit liegt zwischen der des 96-ecks und des 128-ecks der Archimedischen Methode. Die Genauigkeit auf der Schule noch weiter zu treiben, wäre unsinnig. Bleistifte spitzt man nicht mit dem Rasiermesser!

Man kann noch andere Formeln von der Art der Gleichungen (17a) und (17b) benutzen; z. B. lassen sich auch Formeln wie die von Gauss, Machin, Buzengeiger [7])

---

[7]) S. z. B. E. Beutel, Die Quadratur des Kreises, Math.-Phys. Bibl. Bd. 12, Leipzig und Berlin 1913.

für unseren Zweck dienstbar machen und ersparen dann noch mehr Rechenarbeit. Abzuleiten sind sie alle aus der Formel (1).

Unsere Kreisberechnung ist die Auswertung eines bestimmten Integrals. Da $2\,D_i = t_i = \frac{n}{n^2 + i\,(i-1)}$ größer ist als $\frac{n}{n^2 + i^2}$ und kleiner als $\frac{n}{n^2 + (i-1)^2}$, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\,D_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i(i-1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{\frac{i}{n}=0}^{1} \frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

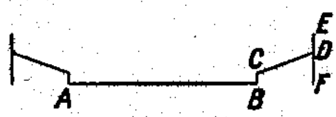
Mancher mag vielleicht eine gewisse Scheu überwinden müssen, wenn ihm zugemutet wird, den Kreis, das alte Sinnbild der Vollkommenheit und Regelmäßigkeit, mit unregelmäßigen Tangenten- und Sehnenvielecken zu berechnen. In dem schönen Handbuch des mathematischen Unterrichts von KILLING und HOVESTADT werden die Kreisberechnungen durch unregelmäßige Vielecke ausdrücklich in Betracht gezogen. Haben die Verfasser aber recht, wenn sie sagen, bei Verwendung unregelmäßiger Vielecke müsse man recht viele lästige Formeln bewältigen?

Die Verwendung der Schwerewellen an der Wasseroberfläche im physikalischen Unterricht.

Von JOHANNES BLUME in Dortmund.

Die Benutzung der Schwerewellen an der Wasseroberfläche zur Demonstration von Wellenvorgängen im Unterricht ist keineswegs neu. In der gesamten, ungefähr 30 Jahre alten Literatur treten zwei Tatsachen klar in die Erscheinung: 1. Ueber die Anschaulichkeit und den didaktischen Wert der Demonstrationen sprechen sich alle Autoren geradezu begeistert aus. 2. Ebenso nachdrücklich heben sie hervor, daß das Gelingen der Versuche große Ausdauer, Zeit und Geschicklichkeit erfordert. Tatsächlich sind alle bis heute erschienenen Apparaturen des Handels ebenfalls reichlich kompliziert und teuer. An diesen Dingen mag es liegen, daß die genannten Demonstrationen seither meistens nur in Einzelstunden einmal gezeigt wurden, daß aber ein organischer Einbau dieser so instruktiven Wellenversuche in den laufenden Physikunterricht fehlt. Demgemäß beabsichtigen die folgenden Ausführungen zweierlei: 1. Es soll eine Apparatur angegeben werden, die absolut schnell, einfach und einwandfrei ohne besondere Vorbereitung die Wasserwellen in der gewöhnlichen Arbeitsstunde vorzuführen gestattet. 2. Aus dem weiten Anwendungsgebiet soll am Beispiel der Wellenoptik die didaktische Auswertungsmöglichkeit der systematischen Verwendung der Wasserwellen gezeigt werden.

1. Die Apparatur besteht zunächst aus einer zweckmäßig gebauten Zinkwanne, deren Aufriß Fig. 1 angibt. Der rechteckige Boden A B hat die Ausmaße $40 \cdot 55$ cm² und ist von einer niedrigen, senkrechten Wand BC umgeben. In diesen Raum paßt eine Kristallglasplatte, deren unterer Boden schwarz lackiert ist und die den Raum bis zur Höhe C ausfüllt. In C geht die Wand B C in einen schräg ansteigenden Rand C D von 8 cm Breite über, der in D von einer senkrechten Wand E F begrenzt wird.



Die Zweckmäßigkeit dieser Bauart ist leicht einzusehen: Die Glasplatte liefert einen vollkommen ebenen Boden, so daß man mit geringer Wassertiefe auskommt. Ihr dunkler Anstrich vermeidet eine lästige doppelte Spiegelung des auffallenden Lichtes vom Wasserboden her. Der schräge Rand läßt die Wellen sich totlaufen und verhindert störende Reflexionen. Die senkrechte Wand E F vermeidet ein Ueberlaufen des Wassers und macht die Wanne auch bei Füllung mit Wasser bequem tragbar. Man stellt die Wanne zur Benutzung einfach auf einen horizontalen, ebenen Tisch und gießt bis zur Hälfte des schräg ansteigenden Randes Wasser hinein. Vor sie wird eine Bogenlampe ohne jede Optik gestellt, so daß bei einem Einfallswinkel von rund 35° ihr Lichtkegel unter die weiße Zimmerdecke von der Wasseroberfläche reflektiert wird. Bei ruhendem Wasserspiegel erscheint eine gleichmäßig helle Fläche unter der Decke. Beim Wellenverlauf heben sich die Täler als schmale weiße und die Berge als breite dunkle Streifen schön plastisch von der Decke ab. Als Wellenerreger benutzt man eine starke Latte vom Ausmaß $200 \cdot 5 \cdot 2$ cm³. Man klammert sie auf einem gleichhohen Tisch an einem