In ganz großer Ausführung wird die Pumpe mit drei übereinander angeordneten Stufen geliefert. Die Räume der einzelnen Stufen sind auch hier durch Abdichtungen mit Quecksilberringen analog (8) der Fig. 4 getrennt. Die oberste Stufe wirkt als Hochvakuumpumpe, die mittlere Stufe anfangs als Dampfstrahlpumpe, später als Diffusionsluftpumpe, während die unterste Stufe nur als Dampfstrahlpumpe wirkt. Dem Dampfstrahl wird an der Hochvakuumstufe durch besondere Formgebung der Ausströmungsdüsen eine sehr hohe Geschwindigkeit erteilt, so daß die Diffusionsspaltweite hier 11 mm groß gemacht werden kann, wodurch die große Saugleistung von 60 l pro Sekunde erreicht wird. Ein Vorvakuum von 20 mm Quecksilbersäule, das durch eine Wasserstrahlluftpumpe erzeugt werden kann, genügt zum Betrieb dieser Pumpe.

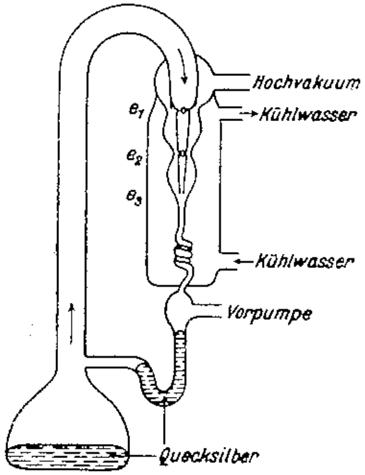


Fig. 5.

Die Diffusionsluftpumpen werden in Deutschland von verschiedenen Firmen hergestellt. In der beigefügten Skizze Fig. 5 ist noch ein von Hauff & Buest in Berlin geliefertes Modell aus Jenaer Supraxglas dargestellt. Die beigeschriebenen Bezeichnungen dürften zur Erklärung genügen. Die Pumpe arbeitet mit drei Stufen. Die Spalte e_1 und e_2 wirken nach dem Diffusionsprinzip, der Spalt e_3 nur nach dem Stauprinzip; der hier austretende Dampfstrahl komprimiert die vom zweiten Spalt kommende Luft auf etwa 20 mm Druck, so daß diese durch eine Wasserstrahlluftpumpe als Vorpumpe abgesogen werden kann.

Als Haupteigenschaft der Diffusionsluftpumpen sei zum Schluß noch einmal auf ihre große Sauggeschwindigkeit hingewiesen, die unabhängig vom erreichten Vakuum ist, die aber bei leichten Gasen eine größere ist als bei schwereren. Sie liefern ein unbegrenzt hohes Vakuum.

Literatur: W. Gaede, Annalen der Physik 46, 357. 1915. W. Gaede, Zeitschrift für technische Physik 4, 337. 1923.

Kleine Mitteilungen.

Einiges über Flächen gleicher Böschung. (Mit 1 Figur im Text.) *Allgemeines:* Der Inhalt F einer beliebigen ebenen Fläche steht zum Inhalt F' ihrer rechtwinkligen Projektion auf eine zur F-Ebene unter dem spitzen Winkel α geneigte Grundebene bekanntlich in der Beziehung

$$F = \frac{F'}{\cos\alpha} = F' \sec\alpha. \qquad (1)$$

Dieselbe Beziehung muß gelten, wenn es sich allgemeiner um eine *Fläche F gleicher Böschung*, d. h. allseitig gleicher Neigung α gegen ihre Grundfläche F', handelt.[1])

1) Man denke etwa an eine allseitig gleich geneigte Dachfläche F über einem gewissen Grundriß F'.

Insbesondere. a) Die *regelmäßige n*-seitige *Pyramide* von der Höhe h — Grundfläche F_n' mit Inkreishalbmesser ϱ — hat also eine Mantelfläche

$$F_n = F_n' \sec\alpha, \text{ wo } \sec\alpha = \sqrt{\varrho^2 + h^2} : \varrho. \qquad (2)$$

b) Der *gerade Kreiskegel r, h* über $F' = r^2\pi$ hat den Mantel

$$F = F' \sec\alpha = r^2\pi \cdot \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r} = r\pi\lambda, \qquad (3)$$

wo α den Böschungs-(Basis-)Winkel des Kegels und λ die Länge der Erzeugenden (Mantellinie) bezeichnet. Für den gewöhnlichen Kegel*stumpf R, r, λ* wird der Mantel

$$F = F' \sec\alpha = (R^2 - r^2)\pi \cdot \frac{\lambda}{R-r} = (R+r)\pi\lambda. \qquad (3\,a)$$

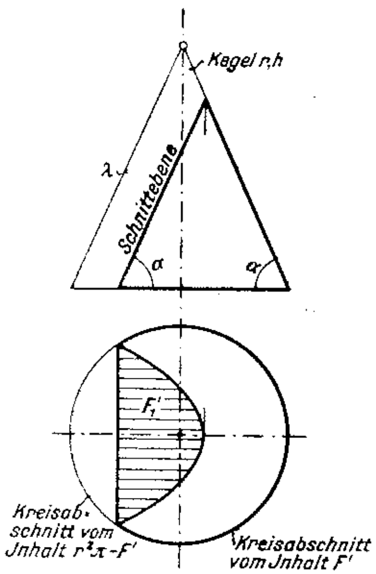
c) Über dem *beliebigen Dreieck* $F' = \varrho s$ (ϱ = Inkreishalbmesser, s = halber Umfang) sei eine *Pyramide als Fläche gleicher Böschung* α errichtet. Die Mantel-(Böschungs-)Fläche ist

$$F = F' \sec\alpha = \varrho s \cdot \frac{\sqrt{\varrho^2+h^2}}{\varrho} = s h_s, \qquad (4)$$

wo h_s die gleiche Höhe der 3 Seitenflächen bezeichnet. Wo liegt die Spitze dieser Pyramide?

d) Der die Spitze nicht enthaltende *Stumpf* (Huf) *eines parabolisch geschnittenen geraden Kreiskegels* bildet eine Fläche gleicher Böschung (s. Figur). Die *Gesamtoberfläche* dieses auf der Grundfläche (Kreisabschnitt) F' stehenden Hufes ist

$$F = F'(1 + \sec\alpha). \qquad (5)$$



Für die *gewölbte* Oberfläche des Hufes (F_λ) bzw. des die Spitze enthaltenden Kegelteils (F_s) hat man, wenn $r^2\pi$ die (ganze) Kegelgrundfläche und F_1' den Inhalt der auf die Grundfläche projizierten Schnittparabel bezeichnet,

$$F_\lambda = (F' - F_1') \sec\alpha \qquad (6)$$

bzw.

$$F_s = (r^2\pi - F' + F_1') \sec\alpha. \qquad (7)$$

Beim *elliptisch oder hyperbolisch* geschnittenen Kegel ist die „Böschung" der Schnittfläche eine *andere* wie die Böschung α des Kegels.

Anmerkung. Diese Beispiele sollen genügen. Sie zeigen — besonders im letzten Falle — den Wert dieser Betrachtungsweise.

Leipzig. M. Hauptmann.

Rechengeräte für Regeldetri, Proportions- und Mischungsrechnung. (Mit 3 Figuren im Text.) *1. Aufgabe: 7* kg *kosten 26* RM; *wieviel kosten 3* kg*?* In Fig. 1, deren rechte Hälfte man sich zunächst wegdenken kann, mögen die Ziffern auf dem drehbaren Maßstab die Gewichte, diejenigen an der Parallelenschar die Preise bedeuten. Stelle 7 kg auf 26 RM; dann zeigt der Teilstrich 3 kg auf 11 RM.

Im Klassenunterricht ist ein großes Modell dienlich. Der Schüler kann mit Papierstreifen oder einem nach Millimetern geteilten Lineal auf einem passend hergerichteten Bogen Millimeterpapier rechnen; das Scharnier ist dabei nicht nötig. Die Maßstäbe von Grundblatt und Drehleiter sind innerhalb der Möglichkeitsgrenze einerseits und der Genauigkeitsgrenze andererseits voneinander unabhängig. Denkt man sich durch den Drehpunkt als Nullpunkt ein rechtwinkliges Geradenkreuz gelegt, dessen eine Gerade den Parallelen gleichlaufend ist, so kann man in jeder Viertelebene eine Parallelenschar mit anderem Abstandsmaß und Bezifferungsbereich zeichnen. Auch kann man statt des einen Dreharms ein Kreuz mit 4 solchen Armen herstellen, wie die Windmühlenflügel, oder ein Rad mit einer beliebigen Anzahl von Speichen. Jeder Arm oder

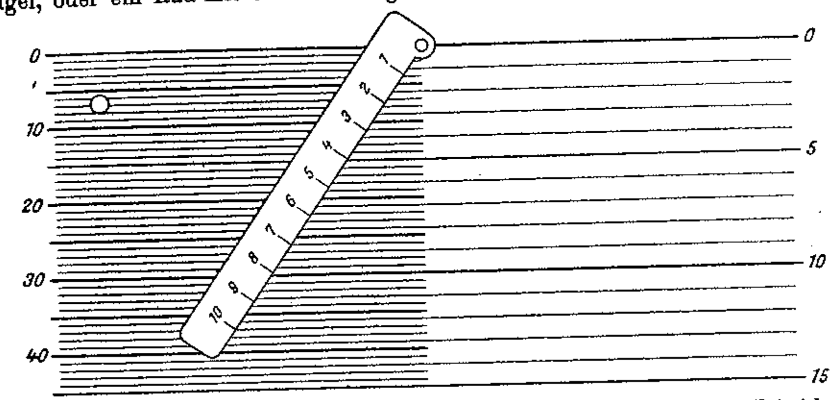


Fig. 1. Dreher zur Berechnung der Proportionalteile beim Logarithmenrechnen. Beispiel: Tafeldifferenz 37, letzte Ziffer des Numerus 7. Stellt man 10 auf 37, so zeigt 7 auf den gesuchten Proportionalteil 26.

jede Speiche trägt eine Teilung von anderem Maßstab und Bereich. Das gibt dann mit den verschiedenen Bereichen der Parallelenscharen mannigfaltige Kombinationen. Den verschiedenen Maßstäben wird man zweckmäßige Größenverhältnisse geben, so daß bei manchen Rechnungen auf dem einen Arm die Einstellung, auf dem anderen die Ablesung vorzunehmen ist. Mit einem solchen *Rechenrad* kann man dieselben Rechnungen ausführen, wie an einem Spalt eines logarithmischen Rechenschiebers. Trotz mäßiger Genauigkeit reicht das Gerät doch für viele Zwecke aus; in anderen Fällen liefert es wenigstens rasch eine Näherungslösung, die etwa als Rechenkontrolle dienen kann. Die Anwendung von Funktionsteilungen eröffnet natürlich neue Möglichkeiten. So kann man Dreiecke nach dem Sinussatz berechnen, wenn der Dreharm eine Sinusleiter trägt.

Werkaufgaben: 1. Stelle einen Schnellrechner für die Berechnung von Jahreszinsen für beliebige Kapitale bei beliebigem Zinsfuß her; triff auch Einrichtungen für die gleichzeitige Ablesung der halb-, vierteljährlichen, monatlichen, mehrjährlichen Zinsen. 2. Beim Kleinverkauf im Fleischerladen heißt es so oft: „Es ist etwas mehr!" Verfertige ein Rechenrad für die beim Ausrechnen der Zahlung erforderlichen Einschaltungen (Interpolationen).

Die Wahl der Bereiche und die ganze Anlage richtet sich nach dem Verwendungszweck. So dient das in Figur 1 dargestellte Gerät zum Interpolieren

in der Logarithmentafel. Ist die Mantissendifferenz in einer vierstelligen Logarithmentafel 37 und die vierte Ziffer des Numerus 7, so stellt man, wie die Figur es zeigt, 10 auf 37; dann zeigt 7 auf den gesuchten Proportionalteil 26. Beim Aufsuchen des Numerus ist die Einstellung dieselbe, nur ist jetzt der Proportionalteil auf dem Grundblatt gegeben und die Ziffer auf der Drehleiter gesucht. Da man den Numerus auf die vierte gültige Ziffer und den Proportionalteil der Mantisse auf die vierte Dezimale beschränkt, so fällt die Interpolation nach dem Augenmaß weg; man nimmt einfach immer die nächstgelegene Parallele oder den nächstgelegenen Teilstrich. Die linke Hälfte wird für die Mantissendifferenzen von 15 bis 43 gebraucht. Ein Stoßknopf verhindert die zu ungenaue Verwendung der linken Hälfte für Tafeldifferenzen unter 15. Für diese, also für die Differenzen von 4 bis 15, gebraucht man die rechte Hälfte.

2. Aufgabe: Man mischt $m_1 = 8$ kg *Wasser von* $t_1 = 32^0$ *mit* $m_2 = 4$ kg *Wasser von* $t_2 = 17^0$*; wie groß ist die Mischungstemperatur?*

Lege, siehe Figur 2, die bewegliche gleichförmige Leiter der Temperaturen so auf das Grundblatt, daß der Teilpunkt $t_2 = 17$ auf die Gerade $m_1 = 8$ und der Teilpunkt $t_1 = 32$ auf die Gerade $m_2 = 4$ fällt; dann zeigt die mit 0 bezifferte Gerade des Grundblatts auf der beweglichen Leiter den gesuchten Wert $t = 27$ an.

Die Richtigkeit des Verfahrens leuchtet ein, wenn man die Mischungsgleichung

$$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}$$

in der Form $\frac{t_1 - t}{t - t_2} = \frac{m_2}{m_1}$ schreibt.

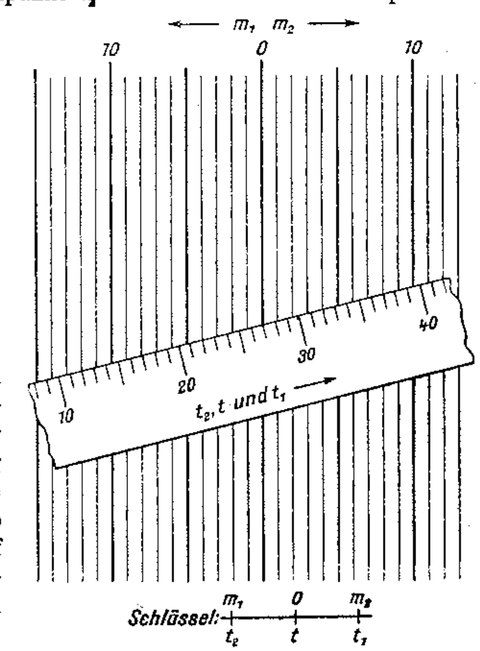


Fig. 2. Drehschieber für die Mischungsformel $t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}$.

Beispiel: $m_1 = 8$, $t_1 = 32$, $m_2 = 4$, $t_2 = 17$, $t = 27$.

Jede der 5 Veränderlichen kann als Unbekannte auftreten. Der Maßstab der beweglichen Leiter ist wieder innerhalb gewisser Grenzen unabhängig vom Maßstab der Parallelenabstände des Grundblatts. Weitere Bereiche beherrscht man also, wenn man auf demselben Grundblatt mit Leitern verschiedenen Maßstabs, auf jedem Lineal oder Papierstreifen 2, arbeitet.

Die Rechentafel kann auch zur Berechnung der Schwerpunktsabszisse t zweier Massenpunkte mit den Massen m_1 und m_2 und den Abszissen t_1 und t_2 dienen, ferner zur Berechnung des Mittelwerts t zweier Messungen t_1 und t_2 von den Gewichten m_1 und m_2. Auch gehorcht dieser Formel die Gaskonstante eines Gemisches zweier Gase und die spezifische Wärme eines Gemisches zweier Flüssigkeiten oder Gase. Bei mehr als zwei Komponenten bestimmt man zuerst t und $m = m_1 + m_2$ für die Mischung *zweier* Komponenten, fügt dann die dritte hinzu, usw.

Vom Standpunkt der nomographischen Formenlehre aus betrachtet gehört Fig. 1 in die Klasse der *Dreher*, deren ehrwürdigster Vertreter das ebene Astrolabium ist. Das Gegenstück zu den Drehern bilden die reinen *Schieber*, die eindimensionalen und zweidimensionalen. Auf die letzteren, die ich *Flächenschieber* nenne, hat sich erst in jüngster Zeit die Aufmerksamkeit gelenkt. Das von P. Hanck in dieser Zeitschrift (52, 1921, S. 261—263) mitgeteilte Nomogramm für die Zinseszinsformel ist ein ganz einfaches Beispiel für diese Flächenschieber, bei denen das bewegliche Blatt nicht gedreht, sondern nur verschoben wird, und zwar im allgemeinen in beliebigen Richtungen. Bei den allgemeinsten Rechentafeln mit einem beweglichen Blatt wird dieses *verschoben und gedreht*. Ein sehr einfaches Beispiel für solche *Drehschieber* ist Fig. 2. Während aber im allgemeinen dem beweglichen Blatt eines Drehschiebers 3 Freiheitsgrade zukommen, hat die bewegliche Leiter in Fig. 2 nur 2 wesentliche Freiheitsgrade, da eine Verschiebung in der Richtung der Parallelen des Grundblatts hier bedeutungslos ist. Abgesehen von meinen „Stechzirkelnomogrammen", die sich auch als Drehschieber ausbilden lassen, aber unter diesen auch nur eine spezielle Klasse darstellen, sind wohl auch noch keine Anwendungsbeispiele für Drehschieber allgemeinerer Form bekannt.[1])

Marburg. P. Luckey.

Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Studienrat M. Breitar in Viersen (Burgstr. 2 c).

(Alle das Aufgaben-Repertorium betreffenden Zusendungen und Anfragen sind an die Adresse dieses Herrn zu richten.)

A. Auflösungen.

841. Sind a und b die Katheten, c die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist stets $2ab \leqq c^2$. Gleichheit gilt nur für das gleichschenklige Dreieck. (Bd. 54, Heft 4, Mahrenholz-Cottbus.)

Lösung. Für $a \neq b$ ist $(a-b)^2 > 0$, $a^2 + b^2 - 2ab > 0$, $a^2 + b^2 > 2ab$, $c^2 > 2ab$. Ist $a = b$, so ist $c = a\sqrt{2}$, $c^2 = 2a^2$. — Vgl. Bd. 51, S. 246 und Bd. 52, S. 152.

Bücking. Conrad. Diez. Chambré. Fiebig. Heymann. Hoffmann. Hörting. Huth. Kraus. Kasper. Lindemann. Lohnes. Mahrenholz. Mertens. Müller. Riediger. Ruff. Schaalmann. Schreck. Sohnius. Tafelmacher. Thielmann.

842. Man zeige auf induktivem und deduktivem Wege, daß das von der Parabel $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, der Abszissenachse und den zu $x_1 = a$ und $x_2 = b$ gehörigen Ordinaten begrenzte Flächenstück $F = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ sich derart zwischen zwei Grenzen einschließen läßt, daß $m + \frac{M-m}{4} \leqq \frac{F}{b-a} \leqq M - \frac{M-m}{4}$ ist, wenn M das Maximum, m das Minimum der Funktion in dem Intervall $a \ldots b$ bedeutet. (Bd. 54, Heft 4, Schneider-Siegen.)

1) Vgl. meine Aufsätze in der Zeitschrift f. ang. Math. u. Mech., 3, 1923, S. 46—59; 4, 1924, S. 61—80; 5, 1925, S. 254—267; ferner Maschinenbau 5, 1926, S. 6—11.

Lösung. Es gibt vier Möglichkeiten: 1.) $m = a^2$, $M = b^2$; 2.) $m = b^2$, $M = a^2$; 3.) $m = 0$, $M = a^2$; 4.) $m = 0$, $M = b^2$. — Man teile, nachdem man im Abstande m eine Parallele zur x-Achse gezogen und auf M so die Strecke $M - m$ erhalten hat, diese Strecke in vier gleiche Teile. Zieht man durch den ersten und letzten Teilpunkt die Parallelen zur x-Achse, so findet man Rechteck $(b-a)\left\{m + \frac{M-m}{4}\right\} < F <$ Rechteck $(b-a)\left\{M - \frac{M-m}{4}\right\}$ (Gleichheit tritt ein für $a = b$).

Auch deduktiv ist der Beweis leicht zu führen.

Conrad. Diez. Chambré. Lindemann. Mahrenholz.

Anmerkung. Vgl. Lukács, Verschärfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung für rationale Polynome, Math. Zeitschr. II (1918) S. 304. — Polya und Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II (1925), S. 96, Aufgabe 109. — L. Fejér, Journal für reine und angewandte Mathematik 146 (1915), S. 53—82, bzw. Comptes rendus 157 (1913), S. 506—509.

Mahrenholz.

843. Im Dreieck ABC sei:

$$1.)\ \alpha = 2\beta;\quad 2.)\ 2\alpha + \gamma = \beta;\quad 3.)\ 2\alpha + \gamma = 180 + \beta.$$

Welche Beziehungen bestehen zwischen den Seiten, und welche geometrischen Örter beschreiben die Ecken A, B, C, wenn jedesmal die Gegenseite konstant genommen wird. (Bd. 54, Heft 4, Scheffler-Zerbst.)

Lösung. Für $\alpha = 2\beta$ ist $a^2 = b(b+c)$; für $2\alpha + \gamma = \beta$ ist $a^2 = b(b-c)$; für $2\alpha + \gamma = 180 + \beta$ ist $a^2 = b(b+c)$. Nimmt man als Koordinatenachsen die konstant genommene Seite und die zugehörige Höhe, so ergibt sich als Ort für eine Ecke die Slusesche Konchoïde: $(2x+a)(x^2+y^2) - 4ax^2 = 0$, für die zweite, die Pascalsche Schnecke: $(x^2+y^2-2bx)^2 - b^2(x^2+y^2) = 0$, für die dritte, die Hyperbel $3\left(x - \frac{2}{3}c\right)^2 - y^2 = \frac{c^2}{3}$.

Conrad. Chambré. Diez Hoffmann. Lindemann. Mahrenholz. Scheffler. Schaalmann.

844. Für ein Sehnenviereck $ABCD$ ist:

$$\frac{BC}{DA} + \frac{CA}{DB} + \frac{AB}{DC} + \frac{BC}{DA} \cdot \frac{CA}{DB} \cdot \frac{AB}{DC} = 0;$$

für ein Sehnenfünfeck $ABCDE$ gilt:

$$\overline{EA}^2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{DC} + \overline{EB}^2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{DA} + \overline{EC}^2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{DB} + \overline{ED}^2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0.$$

(Bd. 54, Heft 4, Böger-Hamburg.)

Lösung. Für vier beliebige Punkte einer Ebene ist $ABC = DAB + DBC + DCA$. Vorzeichenrichtige Gleichungen für ein Dreieck erhält man nur, wenn man jeder Seite einen bestimmten Sinn beilegt. Der Inhalt eines solchen Dreiecks ist $-\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} : 2r$, wo $2r$ die Sehne des umbeschriebenen Kreises ist, die zum Umfangswinkel $\frac{\pi}{2}$ gehört. Legt man jeder der sechs Seiten eines Kreisvierecks einen Sinn bei, und zwar einen solchen Sinn, daß der Satz vom Umfangswinkel richtig bleibt, so hat für jedes Dreieck, das sich aus drei Ecken des Vierecks bilden läßt, $2r$ denselben Wert. Aus der ersten