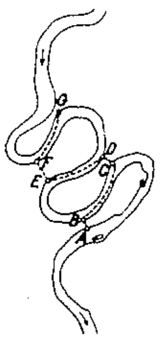
Pädagogik, Philosophie, Allgemeines.

L. v. Bertalauffy, Lebenswissenschaft und Bildung. 82 S. Erfurt 1930, Stenger. Geh. *RM* 3.50.
O. Fechner, Das Verhältnis der Kategorienlehre zur formalen Logik. Rostock 1927, Hinstorff.
H. Geidel, Münchens Vorzeit. 116 S. München 1930, Knorr & Hirth. Geh. *RM* 4.50.
E. König, Ist Kant durch Einstein widerlegt? Ein Beitrag zur Prinzipienlehre der Naturwissenschaft. 171 S. Sondershausen 1929, Eupel. Brosch. *RM* 7.50.

Lustige Ecke.

115. Die Figur stellt ein Stück des Laufes des Mississippi dar. Wie kann man von dem Punkte A nach dem strom*aufwärts* gelegenen Punkte G kommen, indem man mit einem Paddelboot sich strom*abwärts* treiben läßt? Der punktierte Weg zeigt die Lösung. Man muß allerdings das Boot bei AB, CD und EF über Land tragen.



116. „Goldener Schnitt“ und „schlanke Linie“. Herr J. Nix, Mayen (Rhl.) sendet einen Bericht über Versuche, die er mit Schülerinnen des Lyzeums in Mayen zum Kapitel „Goldener Schnitt“ angestellt hat. Er ließ sie zunächst von 20 Rechtecken karierten Papiers von gleicher Breite und verschiedener Höhe das auswählen, das am besten gefiel. Dann ließ er aus einem rechteckigen Stück unliniertem Papier „ein besonders schönes Rechteck“ falten. Die Versuche wurden drei Wochen danach wiederholt, doch so, daß zum ersten Versuch unliniertes, zum zweiten kariertes Papier genommen wurde. Das Ergebnis faßt der Verfasser so zusammen:

1. Die „schlanken“ Rechtecke werden stets bevorzugt (2,08; 1,74; 1,92; 1,84 Seitenverhältnis, gegen 1,62 beim Goldenen Schnitt).
2. Bei kariertem Papier ist die Bevorzugung der „schlanken“ Rechtecke größer (2,08; 1,84) als bei unliniertem Papier (1,92; 1,74).
3. Die ausgewählten Rechtecke sind schlanker (2,08; 1,92) als die angefertigten Rechtecke (1,84; 1,74).

Vermischtes. — Sprechsaal.

Der Deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts hält seine 32. Hauptversammlung von 13. bis 17. April 1930 in Würzburg ab. In der ersten allgemeinen Sitzung werden sprechen: Kerschensteiner, Mathematik und Naturwissenschaften als Bildungsfächer, und Caspar, Kepler und seine Bedeutung für unsere Zeit. In der zweiten allgemeinen Sitzung sprechen Ebert, Neue Brücken zwischen Chemie und Physik, Flury, Biologische Grenzgebiete des chemischen Unterrichts, Sommerfeld, Über die Anschaulichkeit in der modernen Physik. Die verschiedenen Fachsitzungen bringen zahlreiche weitere Vorträge.

Anschauliche Summierung der Quadratzahlen und Berechnung des Pyramideninhalts.

Von P. Luckey in Marburg.

Mit 14 Figuren im Text.

Die Archimedische Formel

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{II}$$

kann bekanntlich zu einer sauberen „elementaren“ Berechnung des Inhalts von Pyramide, Kegel, Kugel, des Parabelsegments und anderer, auch physikalischer Größen dienen. Bei Verwendung der Formel kann man das sogenannte Cavalierische Prinzip, das ja auf der Schule oft in anfechtbarer Weise eingeführt und angewandt wird, entbehren, und die Formel erschließt zugleich den natürlichen Eingang zur Integralrechnung, indem sie zu dem Integral $\int_a^b x^2 dx$ führt[1]), ebenso wie die noch elementarere Formel

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{I}$$

zum Integral $\int_a^b x\,dx$. Dieser Eingang zur Integralrechnung steht zugleich mit der geschichtlichen Entwicklung seit Archimedes im Einklang und hat den Vorteil, daß man mit konkreten Einzelaufgaben anfängt. In Anbetracht dieser ihrer wichtigen Rolle soll die Formel (II) im folgenden *anschaulich* abgeleitet werden. Die anschauliche Ableitung, zu der der Schüler ein Modell anfertigen kann, und die auch der Ausbildung der räumlichen Anschauung dient, läßt sich in natürlicher Weise in die rechnerische Ableitung überführen. In engem Zusammenhang mit der Ableitung wird sich dann eine von dem üblichen Verfahren abweichende Methode zur Berechnung des Pyramideninhalts ergeben. Als Anhang, aber auch im Zusammenhang mit dem Vorhergehenden, soll schließlich eine ganz elementare Berechnung des regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes durch Zerlegung mitgeteilt werden, die einerseits als Vorbereitungsaufgabe für die Berechnung des allgemeinen Pyramidenstumpfes dienen, andererseits vielleicht etwas Licht auf eine Frage der ägyptischen Mathematik werfen kann.

1. Summierung der natürlichen Zahlen und der Quadratzahlen. Zur Erläuterung der anschaulichen Summierung der Quadratzahlen zeigen wir zunächst die entsprechende anschauliche Summierung der natürlichen Zahlen. Die in Fig. 1 dargestellte Treppenfigur stellt die Summe $(1 + 2 + \cdots + n)$ dar. Legen wir zwei solcher Treppenfiguren nach Fig. 2 zusammen, so entsteht

1) Vgl. die Verwendung bei W. Lietzmann und P. Zühlke, Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis. Oberstufe. Ausgabe B, 7. Aufl. Leipzig und Berlin 1929.

das Quadrat $(n+1)^2$, aus dem aber $(n+1)$ in der Diagonale aufgereihte Einheitsquadrate herausgeschnitten sind. Wir erhalten also

$$2(1+2+\cdots+n) = (n+1)^2 - (n+1). \tag{1}$$

Sondert man rechts $(n+1)$ ab und dividiert durch 2, so erhält man

$$(1+2+\cdots+n) = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{I}$$

Man kann die beiden Treppenfiguren auch wie in Fig. 3 zu dem Rechteck mit den Seiten n und $(n+1)$ zusammenlegen. Dann ergibt sich sofort

$$2(1+2+\cdots+n) = n(n+1) \tag{2}$$

$$(1+2+\cdots+n) = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{I}$$

Der Kern des Verfahrens nach Fig. 2 ist folgender Gedanke: Wir können zwar die Rechtecke $1, 2, \ldots, n$ der Fig. 1 nicht zu einem Quadrat zusammen-

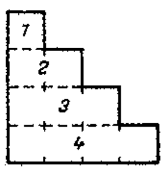


Fig. 1.

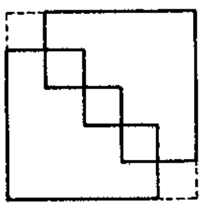


Fig. 2.

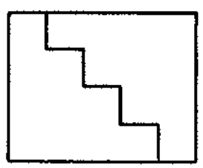


Fig. 3.

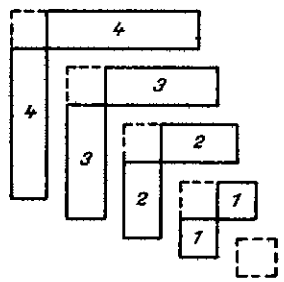


Fig. 4.

legen, wohl aber die „Gnomone" der Fig. 4 zu dem Quadrat $(n+1)^2$. Der $k$te dieser Gnomone besteht aus zwei Rechtecken k und einem ergänzenden Ein-

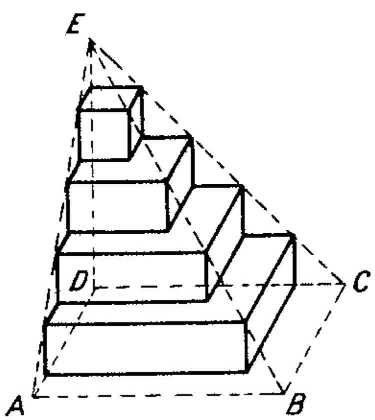


Fig. 5.

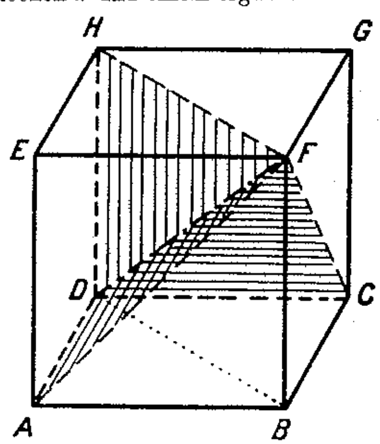


Fig. 6.

heitsquadrat. Die Summierung geht vom „nullten" Gnomon, der nur aus dem ergänzenden Einheitsquadrat besteht, bis zum $n$ten.

Wir gehen nun zur Summierung der Quadratzahlen über. Die Summe $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ stellen wir dar durch den Treppenkörper Fig. 5. Die oberste Platte ist ein Einheitswürfel, die zweite besteht aus vier Einheitswürfeln, die $k$te aus k^2 und die letzte aus n^2 Einheitswürfeln. In Fig. 5 ist dem Treppenkörper die vierseitige Pyramide $ABCDE$ umbeschrieben. Drei solcher Pyramiden lassen sich nach Fig. 6 zu einem Würfel $ABCDEFGH$ zusammenlegen. Sie stoßen dabei alle drei in der Raumdiagonale DF zusammen und haben ihre Spitzen alle in F, während ihre Grundflächen in der diametral gegenüberliegenden Ecke D zusammenstoßen. Dreht man eine der Pyramiden um 120^0 um die Raumdiagonale DF, so kommt sie mit einer anderen Pyramide zur Deckung. Dementsprechend lassen sich drei Treppenkörper $(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$ nach Fig. 7 zu einem „Würfel mit Löchern" mit der Kante $(n+1)$ zusammenlegen, wobei die Löcher folgendermaßen gekennzeichnet werden können: Längs der Raumdiagonale DF sind $(n+1)$ Einheitswürfel hohl geblieben. Zu jedem dieser Würfel mit Ausnahme des in die oberste Ecke F fallenden führen drei aufeinander senkrechte prismatische „Kanäle" von quadratischem Querschnitt, die den Hohlwürfel mit der rechten, vorderen und oberen Grenzfläche verbinden (Fig. 8). Bezeichnen wir die „Diagonalwürfel" als den nullten, ersten, $\ldots$, $n$ten, so enthält jeder der zum $k$ten Diagonalwürfel führenden Kanäle k Einheitswürfel. Die Höhlungen setzen sich also folgendermaßen zusammen:

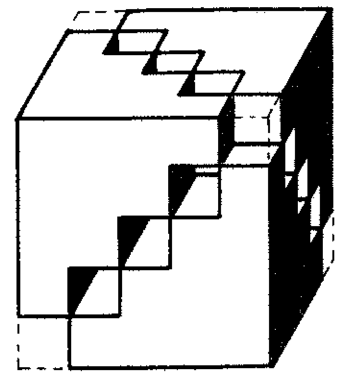


Fig. 7.

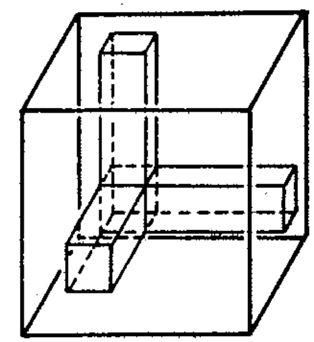


Fig. 8.

$$\underbrace{(n+1)}_{\text{Diagonalwürfel}} + \underbrace{3(1+2+\cdots+n)}_{\text{Kanäle}} = (n+1) + \underbrace{\frac{3n(n+1)}{2}}_{\text{(nach Formel I)}} \tag{3}$$

und wir erhalten

$$\underbrace{3(1^2+2^2+\cdots+n^2)}_{\text{3 Treppenkörper}} = \underbrace{(n+1)^3}_{\text{Würfel}} - \underbrace{\frac{3n(n+1)}{2}}_{\text{Kanäle}} - \underbrace{(n+1)}_{\text{Diagonalwürfel}} \tag{4}$$

Sondern wir auf der rechten Seite $(n+1)$ ab, dann n, und dividieren wir dann die Gleichung durch 3, so ergibt sich die gesuchte Formel

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{II}$$

Man kann die drei Treppenkörper auch wie in Fig. 9 lückenlos zusammenfügen. Fügt man dann noch die darüber gezeichnete, aus $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Einheitswürfeln bestehende „Treppenplatte“ hinzu, so erhält man den Quader $(n+1)n(n+1)$. Wir haben also

$$\underbrace{3(1^2+2^2+\cdots+n^2)}_{3\text{ Treppenkörper}} = \underbrace{n(n+1)^2}_{\text{Quader}} - \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{Treppenplatte}} \qquad (5)$$

Sondert man rechts $n(n+1)$ ab und dividiert durch 3, so hat man wieder die Summenformel (II).

Der Kern des Verfahrens nach Fig. 7 ist folgender Gedanke: Wir können zwar die quadratischen Platten $1^2, 2^2, \ldots, n^2$ der Fig. 5 nicht zu einem Würfel zusammenlegen, wohl aber die „Raumgnomone“, deren einer in Fig. 10 dargestellt ist, zu dem Würfel $(n+1)^3$. Der $k$te „Raumgnomon“ besteht aus drei quadratischen Platten k^2, drei quadratischen Säulen k und dem Einheitswürfel 1. Da der $k$te Gnomon die Differenz der Würfel $(k+1)^3$ und k^3 ist, so erhalten wir für diesen Gnomon die Darstellung

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1. \qquad (6)$$

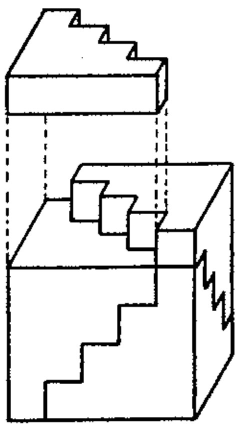


Fig. 9.

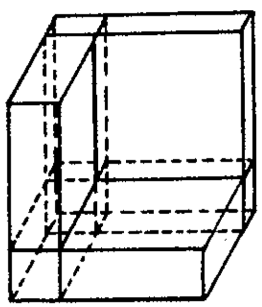


Fig. 10.

Summiert man diese Gleichungen von $k=0$ bis $k=n$, so hebt sich links immer ein Würfel mit dem positiven Vorzeichen gegen den gleichen Würfel mit dem negativen Zeichen der folgenden Gleichung weg, und wir kommen so auf die bekannte rechnerische Ableitung der Formel für die Quadratsummen, die sich auch auf höhere Dimensionen ausdehnen läßt.[1])

2. Die Archimedischen Ungleichungen. Eigentlich braucht Archimedes zu seinen Kubaturen gar nicht die Summationsformeln (I) und (II), sondern nur die ihnen entsprechenden *Ungleichheitsformeln*

$$2(1+2+\cdots+n) > n^2 > 2(1+2+\cdots+(n-1)) \qquad (\mathrm{Ia})$$

$$3(1^2+2^2+\cdots+n^2) > n^3 > 3(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2). \qquad (\mathrm{IIa})$$

Diese lassen sich natürlich leicht rechnerisch aus den Gleichungen (I) und (II) gewinnen, indem man in ihnen für n nacheinander n und $(n-1)$ setzt. Auch unser geometrisches Darstellungsverfahren veranschaulicht diese Ungleichungen. Und, was das Schöne ist, es veranschaulicht sie *unmittelbar,* d. h. wir können die Ungleichungen (Ia) und (IIa) aus der Figur oder dem Modell herauslesen, ohne überhaupt die Formeln (I) und (II) mit den geschlossenen Summenausdrücken vorher abgeleitet zu haben.

1) Vgl. Lietzmann-Zühlke, a. a. O. — Ersetzt man die Einheitsquadrate und -würfel meiner Veranschaulichung durch ihre Mittelpunkte, so hat man die „Dreieckszahlen“ und die „Pyramidalzahlen“ mit quadratischer Basis der griechischen Arithmetik. Es ist mir nicht bekannt, ob sich meine Zusammensetzung der Zahlenpyramiden zu einem Würfel in der Literatur findet.

Aus der Fig. 11a liest man folgende Formel heraus:

$$\sum n + \sum (n-1) = n^2. \qquad (\mathrm{Ib})$$

In ihr sind die beiden Ungleichungen (Ia) enthalten. Mit $\sum n$ ist hierbei die Summe $1+2+\cdots+n$ bezeichnet. Im Unterricht wird man ein solches Symbol erst nach längerem Arbeiten mit dem ausführlichen Ausdruck einführen, wenn sich der Begriff festgesetzt und das Bedürfnis nach einer Abkürzung fühlbar gemacht hat. Natürlich kann man aus (Ib) auch wieder die Summenformel (I) ableiten, indem man $(n+1)$ statt n sagt und $n+1+\sum n$ statt $\sum (n+1)$ schreibt.

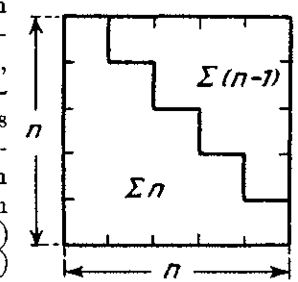


Fig. 11a.

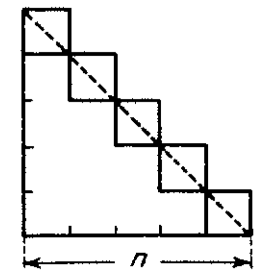


Fig. 11b.

In Fig. 11b veranschaulicht das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck $\frac{n^2}{2}$ mit seiner umbeschriebenen Treppenfigur $\sum n$ und seiner einbeschriebenen Treppenfigur $\sum (n-1)$ die durch 2 dividierte Formel (Ia).

Nehmen wir die Zahl der Einheiten, aus denen die Kante des durchlöcherten Würfels Fig. 7 besteht, von jetzt ab statt gleich $n+1$ ebenfalls gleich n, so stellt jeder der drei nunmehr $(n-1)$-stufigen Treppenkörper die Summe $\sum (n-1)^2$ dar. Es ist also der volle Würfel n^3 größer als das dreifache dieser Summe. Das ist die eine der Ungleichungen (IIa). Um *einen* der drei Treppenkörper $\sum (n-1)^2$ in einen n-stufigen Treppenkörper $\sum n^2$ überzuführen, muß man in Fig. 7 die an ihn grenzenden Löcher des Würfels n^3 ausfüllen. Um alle drei Treppenkörper in n-stufige umzuwandeln, wäre jeder der „Diagonalwürfel“ von Fig. 7 dreimal, jeder zu ihm führende Kanal zweimal auszufüllen. Also ist $n^3 < 3\sum n^2$. Das ist die andere der Ungleichungen (IIa). Auch Fig. 9 ergibt diese Ungleichungen. Sind in dieser Figur die Treppenkörper $(n-1)$-stufig, so ist die *größere* Quaderkante n, also sind die drei Treppenkörper zusammen kleiner als der Würfel n^3. Betrachten wir aber die Treppenkörper als n-stufig, so wird die *kleinere* Quaderkante n, und der aus den drei Treppenkörpern gebildete Körper übertrifft den Würfel n^3.

Haben in Fig. 5 die drei in D zusammenstoßenden Kanten der vierseitigen Pyramide $ABCDE$ gleichfalls die Länge n, so zeigt diese Figur den $(n-1)$-stufigen *ein*beschriebenen Treppenkörper $\sum (n-1)^2$. Man denke sich nun jede Platte um eine Stufenhöhe gehoben und unter die größte Platte $(n-1)^2$ noch als unterste die Platte n^2 gelegt. Dann hat man den der vierseitigen Pyramide $ABCDE$ *um*beschriebenen Treppenkörper $\sum n^2$ hergestellt. Mit ihrem ein- und ihrem umbeschriebenen Treppenkörper veranschaulicht diese vierseitige Pyramide $\frac{n^3}{3}$ dann die durch 3 dividierte Formel (IIa).

Wir fassen zusammen:

Die Formeln (Ia) *und* (IIa), *auf die Archimedes die Mehrzahl seiner Inhaltsberechnungen gründet, werden dargestellt durch das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck (Fig. 11b) mit seiner ein- und umbeschriebenen Treppenfigur und durch die bei der Würfelzerlegung (Fig. 6) entstehende Pyramide (Fig. 5) mit ihrem ein- und umbeschriebenen Treppenkörper.*

3. Der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide. Mit Hilfe der Summenformel für die Quadratzahlen kann man den Inhalt einer beliebigen Pyramide in der bekannten Weise (s. z. B. Weber-Wellstein, Enz. d. El.-Math., Bd. II) als gemeinsamen Grenzwert eines umbeschriebenen und eines einbeschriebenen Treppenkörpers berechnen, wobei man von dem Satz Gebrauch macht, daß beliebige zur Grundfläche parallele Schnittflächen zur Grundfläche im Verhältnis der Quadrate der Höhen oder der entsprechenden Abschnitte einer anderen durch die Spitze gehenden Geraden stehen. Wir wollen aber die Ableitung des Pyramideninhalts in einer Form geben, die in inniger Beziehung zu der vorhin gegebenen Veranschaulichung der Quadratsummierung steht und von Proportionen keinen Gebrauch macht.

Gegeben sei ein beliebiges, schiefes oder gerades Parallelflach (Parallelepiped, Spat) $ABCDEFGH$ mit den Kanten a, b, c und dem Rauminhalt V. Der Würfel Fig. 6 mag als sein Bild dienen, man muß ihn sich nur in ein Parallelflach affin transformiert denken. Die drei vierseitigen Pyramiden, in die das Parallelflach nach Fig. 6 zerlegt wird, sind im allgemeinen[1]) nicht mehr kongruent. *Wir behaupten, daß sie inhaltsgleich sind.*

Jede der Kanten des Parallelflachs teilen wir in n gleiche Teile. Legen wir durch die Teilpunkte Ebenen parallel zu den Ebenen des Parallelflachs, so zerfällt dieses in n^3 kleine kongruente Parallelflache mit den Kanten $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n}$ und dem Inhalt $v = \frac{V}{n^3}$, ebenso wie der Würfel in n^3 kleine Würfel zerfiel. Überhaupt lassen sich jetzt alle früheren, an die Fig. 5—7 geknüpften Betrachtungen auf die affin transformierten Körper übertragen. Wie früher den Treppenkörper Fig. 5 und den durchlöcherten Würfel Fig. 7 aus kleinen Würfeln, so können wir jetzt die entsprechenden affinen Körper aus lauter kleinen Parallelflachen v aufbauen. Die drei Treppenkörper der Fig. 7 sind jetzt zwar im allgemeinen nicht mehr kongruent. Jeder von ihnen setzt sich aber wie früher aus der gleichen Anzahl von Bausteinen zusammen, nämlich jetzt aus $\sum (n-1)^2$ kleinen Parallelflachen v. Die drei nicht kongruenten Treppenkörper der Fig. 7 sind also inhaltsgleich, und das gilt für jedes, auch noch so große n. Lassen wir n unbegrenzt wachsen, so werden die Löcher von Fig. 7 zu verschwindend feinen Poren, und Fig. 7 geht immer mehr in Fig. 6 über.

Mag dem Anfänger diese Betrachtung hinreichend beweiskräftig für die Gleichheit der drei Teilpyramiden des Parallelflachs Fig. 6 erscheinen, so läßt sich für höhere Ansprüche der Grenzübergang folgendermaßen strenger gestalten: Stellt in Fig. 5 $ABCDE$ *eine beliebige* der drei Teilpyramiden von Fig. 6 dar — die Grundfläche ist jetzt ein Parallelogramm —, so besteht der *umbeschriebene* schiefe Treppenkörper nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts

1) Beim Rautenflächner (Rhomboeder) sind sie noch kongruent.

aus $\sum n^2$ kleinen Parallelflachen v, der *ein*beschriebene aus $\sum (n-1)^2$ ebensolchen Bausteinen, und die Inhalte dieser beiden Treppenkörper unterscheiden sich um den Inhalt der untersten Platte $n^2 \cdot v = n^2 \cdot \frac{V}{n^3} = \frac{V}{n}$. Dadurch, daß man n hinreichend groß wählt, kann man diesen Unterschied kleiner als einen beliebigen Quader machen (Eudoxisch-Archimedisches Axiom). Der ein- und der umbeschriebene Treppenkörper streben also für unbegrenzt wachsendes n demselben Grenzwert zu, und diesen Grenzwert definieren wir als den Rauminhalt der vierseitigen Pyramide. Da wir den Grenzübergang für *eine beliebige* der drei Teilpyramiden von Fig. 6 vorgenommen haben, so ergibt sich für alle drei derselbe Rauminhalt, und zwar $\frac{V}{3}$. Das *rechnerische* Bild dieser Ableitung erhalten wir, wenn wir von der mit v multiplizierten Archimedischen Ungleichheitsformel (IIa) ausgehend den Grenzübergang machen. Für die Ableitung ist also nicht die Gleichung (II), sondern es sind nur die Ungleichungen (IIa) nötig, die wir unabhängig von der Formel (II) anschaulich hergeleitet haben.

Wir wissen also jetzt, daß in Fig. 6 das Parallelflach V durch die drei schraffierten Ebenen in drei inhaltsgleiche vierseitige Pyramiden zerlegt wird. Nun zerlegt die Diagonalebene $DBFH$ dieses Parallelflach in zwei inhaltsgleiche Prismen, deren jedes aus einer vierseitigen und einer dreiseitigen Pyramide besteht. Nehmen wir von jedem Prisma die vierseitige Pyramide weg, so bleiben die dreiseitigen Pyramiden $ABDF$ und $DBCF$ übrig. Diese sind also gleich, d. h. die dreiseitige Pyramide $ABDF$ ist die Hälfte der vierseitigen Pyramide $ABCDF$ und somit ein Sechstel des Parallelflachs. So ist also endlich *die dreiseitige Pyramide $ABDF$ ein Drittel des Prismas $ABDEFH$, das mit ihr dieselbe Grundfläche und die gleiche Höhe hat.* Da sich *jede* dreiseitige Pyramide $ABDF$ nach Fig. 6 zu einem Parallelflach $ABCDEFGH$ ergänzen läßt, so ist damit der Inhalt einer beliebigen dreiseitigen Pyramide auf den eines Prismas zurückgeführt.

Selbstverständlich erfüllt unsere Ableitung nicht alle Forderungen wissenschaftlicher Strenge. Wenn wir notwendigerweise bei vielen Gegenständen der Schulmathematik auf die letzte Strenge verzichten — hier beim Rauminhalt müssen wir das — so haben wir doch als Lehrer unser wissenschaftliches Gewissen dadurch zu beruhigen, daß wir uns darüber klar werden, wo — vom wissenschaftlichen Standpunkt betrachtet — die wunden Stellen unserer Behandlung liegen, und uns zu fragen, ob und wie unser Verfahren zu einem wissenschaftlich strengen ausgebaut, das didaktische Verfahren also in das wissenschaftliche eingegliedert werden könnte.

Der Hauptmangel meines Verfahrens, so sagte ich mir, liegt darin, daß ich den um- und den einbeschriebenen Treppenkörper, als deren gemeinsamen Grenzwert wir den Inhalt definieren, für jede spezielle Pyramide aus Parallelflachen von spezieller Gestalt und Lage aufgebaut habe. Die kleinen „Bausteine" sind nämlich jedesmal Parallelflache, die dem großen Parallelflach $ABCDEFGH$, zu dem sich die Pyramide nach Fig. 6 ergänzen läßt, ähnlich sind, und jede ihrer Kanten ist derselbe ganzzahlige Teil der entsprechenden Kante der großen Pyramide. Sie sind ferner in ähnlicher Lage zur großen Pyramide ein- oder umgebaut, und eine ihrer Ecken fällt in die entsprechende Ecke D der Pyramide. Es müßte also das Inhaltsmaß als unabhängig von der Gestalt und Lage der als Bausteine verwandten Parallelflache erwiesen werden. Bei einer Verallgemeinerung einer derartigen Betrachtung, so schloß ich weiter, ergäbe sich für Körper, die gewisse Voraussetzungen erfüllen, der Satz: „Inhaltsgleiche Körper gehen durch eine affine Transformation wiederum in inhaltsgleiche Körper über“. Dieser Satz, ein Prinzip von der Art des „Cavalierischen Prinzips“, würde dann gestatten, aus der Zerlegung des Würfels nach Fig. 6 in drei kongruente vierseitige Pyramiden ohne weiteres auf die entsprechende Zerlegung eines beliebigen Parallelflachs in drei inhaltsgleiche vierseitige Pyramiden zu schließen, woraus dann wie oben der Inhalt der dreiseitigen Pyramide leicht zu gewinnen wäre. Das Prinzip liefert z. B. auch in der Ebene den Ellipseninhalt aus dem Kreisinhalt, im Raume den Inhalt eines Ellipsoids aus dem Kugelinhalt.

An diesem Punkte meiner Überlegungen und Wünsche angekommen, mußte ich Einblick in die wissenschaftliche Literatur nehmen. Eine Arbeit von Erhard Schmidt[1]), auf die mich Herr Prof. M. Krafft in Marburg freundlichst hinwies, erfüllte meine Wünsche. Abgesehen von dem strengen, in der Mengenlehre begründeten Aufbau der Lehre vom Inhaltsmaß überhaupt wird hier vor allem die Unabhängigkeit des Inhaltsmaßes von der Lage der Würfelnetze bewiesen, die zur Bildung des ein- und umbeschriebenen Körpers dienen, und es wird dann durch zwei Transformationssätze der Übergang zum Inhalt affiner Transformationen der ursprünglichen Körper ermöglicht. Die eine Transformation streckt oder staucht einen Körper in der Richtung einer gegebenen Geraden nach einem konstanten Verhältnis, nach welchem dann auch der Inhalt vergrößert oder verkleinert wird. Die andere verwandelt ein gerades Prisma in ein schiefes von derselben Grundfläche und gleicher Höhe und läßt den Inhalt ungeändert. Sie ist der einfachste Sonderfall der vom Cavalierischen Prinzip umfaßten, viel allgemeineren Formwandlungen. Diese Transformationssätze legte übrigens, wie Erhard Schmidt angibt, schon Carathéodory dem Aufbau der Inhaltslehre in seinen „Vorlesungen über reelle Funktionen“ zugrunde. Erhard Schmidt findet den Inhalt einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche durch Transformation in die Pyramide, deren Grundfläche der Grundfläche eines Würfels und deren Spitze dessen Mittelpunkt ist, so daß ihr Inhalt ein Sechstel von dem des Würfels ist. Der oben von uns eingeschlagene Weg ist nicht wesentlich verschieden hiervon, da man die von Erhard Schmidt benutzte Pyramide durch zwei Achsenschnitte in vier kongruente Pyramiden der von uns benutzten Form (Fig. 5) zerlegen kann.

Es sei noch bemerkt, daß die durch Zerlegung des Würfels (Fig. 6) und auch noch die durch die entsprechende Zerlegung des Rhomboeders mit der Achse DF (Fig. 6) entstehenden sechs paarweise symmetrischen dreiseitigen Pyramiden zu den wenigen bekannten Pyramiden gehören, die endlich-zerlegungsgleich mit Quadern sind. (Hillsche Tetraeder erster Art.) Durch die affine Transformation wird also die Zerlegung des Würfels in sechs endlich-zerlegungsgleiche Pyramiden übergeführt in die Zerlegung des Parallelflachs in sechs „grenzgleiche“ Pyramiden, oder zweier dreiseitiger Prismen in je drei grenzgleiche dreiseitige Pyramiden. Die Zerlegung jedes der dreiseitigen Prismen ist die aus der Schule und Euklids Elementen bekannte.

1) Erhard Schmidt, „Über die Darstellung der Lehre vom Inhalt in der Integralrechnung“ (Math. Zeitschr. **12**, 298—316, Berlin 1922).

4. Der Inhalt des regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes. Während man noch darüber stritt, ob die alten Ägypter im Rechenbuch des Ahmes die richtige „Formel“ für den Dreiecksinhalt kannten, ergab die Untersuchung des aus der Zeit um 1800 v. Chr. stammenden Moskauer mathematischen Papyrus, daß sie den regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpf richtig nach der Formel $\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$ ausrechneten.[1]) Diese Leistung mag uns verblüffen, weil wir vielleicht zunächst an ein Äquivalent der heute üblichen Ableitung für einen beliebigen Pyramidenstumpf denken, deren Schwierigkeit nach Lietzmanns[2]) Bemerkung Hasenclevers „Sohn“ um das Reifezeugnis brachte. In der Tat erfordert diese Ableitung Kenntnisse der Proportionslehre und der Algebra, die man einem Ägypter des zweiten Jahrtausends v. Chr. nicht zutrauen darf. Wir müssen aber beachten, daß es sich nur um den regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpf handelt, und daß die einfachsten und natürlichsten und darum wohl auch die geschichtlich ältesten Inhaltsbestimmungen von Figuren und Körpern darin bestehen, daß man die Figur oder den Körper in Teilstücke zerlegt und diese Teilstücke zu einem Körper bekannten Inhalts zusammensetzt.

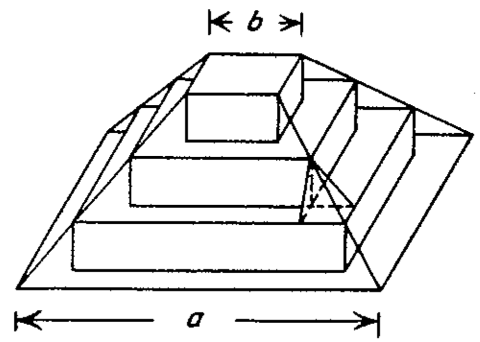


Fig. 12.

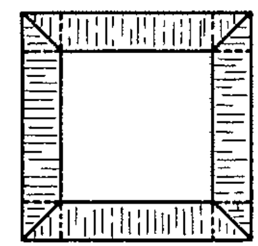


Fig. 13a.

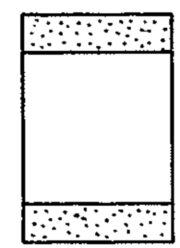


Fig. 13b.

Wenn wir im folgenden eine Zerlegung des ägyptischen Pyramidenstumpfes vornehmen und einen Zerlegungsbeweis — soweit ein solcher möglich ist — zu führen versuchen, werden wir, hoffe ich, einsehen, daß die Berechnung des regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfs kaum über das sonstige mathematische Niveau der Ägypter, wie es uns im Papyrus Rhind entgegentritt, emporragt.

Fig. 12 stellt einen regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpf dar mit der Grundkante a, der Deckkante b und der Höhe h. Durch zwei zur Grundfläche parallele Ebenen zerlegen wir den Stumpf in drei Teilstümpfe von gleicher Höhe $\frac{h}{3}$. In jeden der Teilstümpfe beschreiben wir eine quadratische Platte ein, so daß dem ganzen Pyramidenstumpf ein Treppenkörper einbeschrieben ist. Fig. 13a sei der Grundriß eines der drei Teilstümpfe. Der Teilstumpf läßt sich

1) Vgl. H. Wieleitner, Zur ägyptischen Mathematik. Diese Zeitschr. **56** (1925), S. 136. Siehe auch die Bemerkungen von Peet über den Moskauer Papyrus. T. Eric Peet, The Rhind Mathematical Papyrus. London 1923. Auch Peet versteht unter *štl* die Höhe. Es ist mir nicht bekannt, ob die von Professor Struve in Moskau geplante Bearbeitung des Moskauer Papyrus erschienen ist.

2) W. Lietzmann, Methodik des mathematischen Unterrichts II, Leipzig 1923, S. 156.

zerlegen in die genannte quadratische Platte, vier liegende gerade Prismen, deren Querschnitt ein rechtwinkliges Dreieck ist, und vier vierseitige „Eckpyramiden", deren eine in Fig. 12 eingezeichnet ist. Man kann wohl annehmen, daß den Ägyptern diese Zerlegung nicht fremd war, da sie ihre Pyramiden zunächst als Treppenkörper bauten und die zur abschrägenden Ausfüllung nötigen Steinmassen veranschlagen, um nicht zu sagen berechnen, mußten. Wir schneiden nun aus dem Teilstumpf Fig. 13a die vier Eckpyramiden heraus; ferner legen wir zwei gegenüberliegende der Prismen so auf die beiden anderen, daß zwei Säulen von rechteckigem Querschnitt entstehen. So ist der Teilstumpf (Fig. 13a) ohne die Eckpyramiden in den Quader Fig. 13b verwandelt worden. In Fig. 14a, 14b, 14c sind mit ausgezogenen Linien die drei Quader im Grundriß

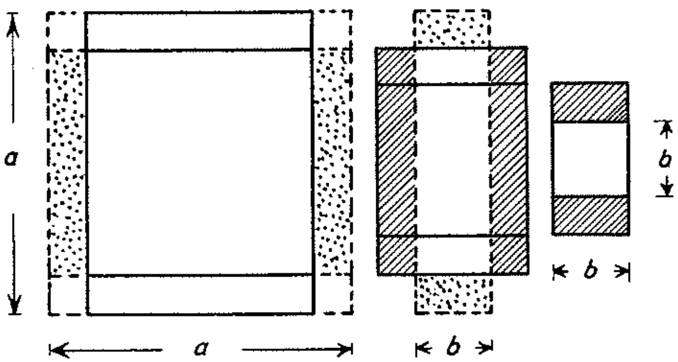


Fig. 14a—c.

dargestellt, die durch diese Verwandlung aus den ihrer Eckpyramiden beraubten Teilstümpfen hervorgehen. Nun schneiden wir von dem mittleren Körper (Fig. 14b) die schraffiert gezeichneten Säulen von rechteckigem Querschnitt ab und setzen sie an den untersten Körper (Fig. 14a) so an, wie es durch Punktierung eingezeichnet ist. Ferner nehmen wir von dem Quader Fig. 14c die durch Schraffierung bezeichneten beiden Säulen weg und setzen sie an den Quader Fig. 14b so an, wie die Punktierung zeigt.

Nun fehlen in Fig. 14a noch die vier „Eckquader" von quadratischer Grundfläche. Gelingt es, die zwölf „Eckpyramiden" in diese vier Eckquader zu verwandeln, so haben wir den ganzen Stumpf verwandelt in drei Quader mit den Grundflächen a^2, ab, b^2 und der Höhe $\frac{h}{3}$. Der Inhalt ist also $\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$. Ist die Neigung der Seitenflächen des Stumpfes zur Grundfläche ein halber Rechter, die Stufenbreite also gleich ihrer Höhe $\frac{h}{3}$, so haben die „Eckpyramiden" die Form der in Fig. 6 gezeichneten und lassen sich zu je drei zu einem Eckwürfel für Fig. 14a zusammenfügen. Den Steinmetzen, die oft solche Eckpyramiden herzustellen hatten, mag diese Würfelzerlegung früh bekannt gewesen sein. Ist aber die Neigung der Seitenfläche des Pyramidenstumpfes beliebig, so ist es allerdings nicht mehr möglich, durch eine endliche Zahl von Zerlegungen und Zusammensetzungen nachzuweisen, daß drei der Eckpyramiden zusammen einem der Eckquader von Fig. 14a inhaltsgleich sind. Erteilen wir

der Würfelzerlegung Fig. 6 in der Richtung einer Kante eine Dehnung oder eine Stauchung nach dem Verhältnis $1:k$, so bleiben eben die drei Teilpyramiden des entstandenen Quaders von quadratischer Grundfläche nicht mehr kongruent, und einen strengen Beweis ihrer Inhaltsgleichheit können wir den Ägyptern nicht zutrauen. Es war dem griechischen Geist vorbehalten, die fundamentale hier vorliegende Schwierigkeit zu meistern und das Infinitesimale zu bezwingen, indem sie durch einen Eudoxischen Exhaustionsbeweis zeigten, daß Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Können wir nun zwar von den Ägyptern keinen strengen Beweis erwarten, so ist es darum doch möglich, daß ihnen die *Tatsache* bekannt war, daß auch der durch eine affine Streckung oder Stauchung zu einer quadratischen Säule gemachte Würfel in drei inhaltsgleiche Pyramiden zerfällt. Für den Pyramidenbau und für Böschungsarbeiten mußte diesem Baumeistervolk die Kenntnis wertvoll sein, daß der Inhalt einer solchen Eckpyramide ein Drittel des entsprechenden Quaders ist. War die Würfelzerlegung Fig. 6 bekannt, so lag der Analogieschluß auf den Quader nahe. Und vielleicht war es auch mehr als ein Analogieschluß, und vielmehr eine Intuition. Man konnte sich die drei Teilpyramiden des Würfels *näherungsweise* mit kleinen würfel- oder quaderförmigen Bausteinen ausgefüllt denken, die man nun in Gedanken alle im Verhältnis $1:k$ streckte oder stauchte, so daß auch der ganze Inhalt jeder der drei Teilpyramiden im selben Verhältnis $1:k$ zu- oder abnahm. Diese gleichmäßige Inhaltsänderung des Ganzen mit den Teilen leuchtet dem naiven Verstand unmittelbar ein. Wer es lieber will, mag sich vorstellen, daß die Ägypter die Quaderzerlegung mit Sand oder durch Wägung erwiesen haben. Ich möchte ein so krasses Experimentieren selbst einem ägyptischen Mathematiker nicht zutrauen. Jedenfalls mußte er aber den Gedanken in seinem Geiste erfaßt haben, ehe er — etwa aus didaktischen Gründen — die Zerlegung experimentell dartat.

Natürlich läßt sich auch die regelmäßige vierseitige Vollpyramide durch Zusammensetzung aus vier „Eckpyramiden" finden.

Herons Zerlegung des Pyramidenstumpfs (*Vermessungslehre* II, 8 u. 9)[1] in ein schiefes Parallelflach, zwei schiefe Prismen und eine in einer Ecke des Stumpfes stehende Pyramide dürfte wohl späteres griechisches Gut sein. Die Verwandlung dieser Teilkörper in Quader liefert übrigens den Inhalt des regelmäßigen vierseitigen Stumpfes in der Form

$$h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right].$$

5. Schlußbetrachtung. Die reife und strenge Pyramidenberechnung, wie sie uns bei Euklid entgegentritt, ist gekennzeichnet durch die Verwendung der durch Eudoxus vertieften, nämlich das Irrationale umfassenden Proportionslehre, durch eine kunstvolle Zerlegung der dreiseitigen Pyramide in eine Folge von Prismen, die eine unendliche geometrische Reihe bilden, durch den Exhaustionsbeweis, der das Eudoxisch-Archimedische Stetigkeitsaxiom verwendet, und durch die Zerlegung des dreiseitigen Prismas in drei dreiseitige Pyramiden. Nach dem Zeugnis

1) Herons von Alexandria *Vermessungslehre,* griechisch und deutsch von Hermann Schöne. Leipzig 1903, S. 112—119.

des Archimedes[1]) hat zuerst Eudoxos einen strengen Beweis für den Pyramideninhalt gegeben, ebenso wie er auch den Kegelinhalt streng ableitete und höchstwahrscheinlich auch den Satz, daß sich Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Zweifellos hat sich Eudoxos bei diesen Sätzen seiner vertieften Proportionslehre und des Exhaustionsverfahrens bedient. Diese reife Methode hat aber Unterschichten gehabt. Auch der Hermes und die anderer Meisterwerke eines Praxiteles, seines großen Zeitgenossen, hatten Vorläufer! Die erste Unterschicht bezeugt uns Archimedes an der eben genannten Stelle: Demokrit sprach den Satz vom Pyramideninhalt aus, und eine Plutarchstelle läßt vermuten, daß er eine Zerlegung in („unendlich“?) dünne Scheiben vornahm, also wohl in der Weise des Cavalierischen Prinzips vorging, ohne sich schon zu einem Exhaustionsbeweis aufzuschwingen.[2]) Nun sagt zwar Archimedes an der erwähnten Stelle, daß Demokrit *zuerst* den Ausspruch über den Pyramideninhalt tat. Sollte denn wirklich Demokrit am Anfang aller Pyramidenberechnung stehen?[3]) Zwingt uns nicht das Zeugnis des Moskauer Papyrus und zugleich das Gefühl für die allmähliche Entwicklung unserer geometrischen Wissenschaft dazu, unter der vermuteten Demokritischen Indivisiblenbehandlung, die doch auch schon auf hoher Stufe steht und einen Archimedes zur Entdeckung wichtigster Sätze führte, primitivere Unterschichten zu suchen? Sollte nicht in diesen archaischen Unterschichten die

1) Archimedes, *Opera omnia,* ed J. L. Heiberg. 2. Aufl. Leipzig 1913, II. Bd., S. 430. Archimedes' *Werke,* übersetzt von Heath und Kliem. Berlin 1914, S. 414.

2) Vgl. Sir Thomas L. Heath, A History of Greek Mathematics. Oxford 1921, I, S. 179. Heath-Kliem, Archimedes' *Werke,* S. 414—415.

3) Archimedes ist schöpferischer Forscher, nicht Historiker der Mathematik. Fern von Alexandrien, verfügte er auch schwerlich über die Literatur zu geschichtlichen Studien. Im Vorwort der Schrift *Über die Kugel und den Zylinder I* klingt es noch, als habe Eudoxos zuerst von allen Sterblichen den Satz vom Pyramideninhalt bemerkt. Als Archimedes aber die *Methode* schrieb, hatte er gehört oder gelesen, daß schon Demokrit den Pyramideninhalt gefunden, wenn auch noch nicht streng bewiesen hatte, streng im Sinne eines Eudoxischen Exhaustionsbeweises. — Die *Methode* halte ich, freilich im Gegensatz zu maßgebenden Historikern, aber in Übereinstimmung mit T. Kierboe und F. Arendt (*Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge, Bd. 14, S. 33—40 und 289—311) für eine Spätschrift. Zu den überzeugenden Gründen besonders auch terminologischer Art, die die genannten Verfasser beibringen, möchte ich folgendes hinzufügen: Die *Methode* ist ihrem ganzen Zweck und Ton nach geradezu ein *Vermächtnis,* in dem der Gelehrte, nachdem er die Höhe seiner Leistungen und seines Ruhmes erklommen hat, seinen „Zeitgenossen und Nachfolgern“ Winke darüber gibt, wie er seine Entdeckungen machte, ehe er sie streng bewies, damit diese Zeitgenossen und Nachfolger mit Hilfe der Methode neue Sätze finden können, auf die Archimedes selbst noch nicht gekommen ist. Das ist nicht mehr die Sprache des Archimedes der anderen großen Werke, des Archimedes, der den alexandrinischen Herren Aufgaben stellte, sogar solche mit absichtlich falschen Behauptungen, und der eifrig bedacht war, im strengen Aufbau der Entwicklungen seine Erfinderspuren zu verwischen, um seine Überlegenheit zu zeigen. Die Stelle der *Methode,* S. 446, Zeile 4—15 (*Opera* ed. Heiberg, II, 1913) ... ἡ ἔννοια ἐγένετο ... hat memoirenhaften Charakter. Durch die mechanisch-heuristische Indivisiblenmethode fand Archimedes zuerst den Kugel*inhalt.* Mit Recht hielt es später der Forscher für wert, der Nachwelt die denkwürdige Mitteilung zu hinterlassen, wie nun durch ihn nach der Analogie der Beziehung zwischen Kreisumfang und -inhalt auch die schwierige Kugel*oberfläche* zum erstenmal in der Geschichte des wissenschaftlichen Denkens gefunden wurde. Für die *Veröffentlichung* aber schuf der jüngere Archimedes zunächst den strengen Beweis, durch den zuerst die *Oberfläche* berechnet wird.

Zerlegung des Würfels in Pyramiden und die entsprechende Zerlegung der quadratischen Säule wegen der großen praktischen Bedeutung der vierseitigen „Eckpyramiden“ eine Rolle spielen, wobei dann die Erhaltung der Gleichheit der Teilpyramiden bei der affinen Streckung oder Stauchung des Würfels einerseits intuitiv erschaut, andererseits unstreng bewiesen werden konnte durch annähernde Zerlegung in beliebig kleine Prismen? Nach der Analogie der *ebenen* Inhaltsberechnungen, bei denen man vom Rechteck zum Parallelogramm und zum Dreieck übergeht, lag dann die andere Affintransformation, die „Schiefmachung“, nahe, bei der, gleichfalls zunächst rein intuitiv, erfaßt wurde, daß sie den Rauminhalt nicht ändert.[1]) Eine allgemeinere Formulierung des Cavalierischen Prinzips war dabei für die Pyramidenberechnung nicht nötig. Will man solche Vorstufen nicht als *Wissenschaft* gelten lassen, so verweise man sie in die praktische Stereometrie des Baumeisters. Dann hat eben Demokrit die Pyramidenberechnung zuerst in die offizielle wissenschaftliche Geometrie der Griechen hineingebracht.

Auch wenn derartige historische Mutmaßungen hinfällig sein sollten, dürfte unseren Gedankengängen ein *didaktischer* Wert bleiben. Die immer noch verbreitete schulmäßige Behandlung des Pyramideninhalts, zunächst orientiert an Euklid, ist ein Rückfall in primitivere, unstrenge Methoden. Die Zerlegung des dreiseitigen Prismas in drei Pyramiden wurde freilich beibehalten, aber alle Edelsteine sind aus der Krone gebrochen, denn für den Nachweis der Gleichheit der drei Teilpyramiden wird auf die streng das Irrationale umfassende Verwendung der Proportionslehre meist verzichtet, ebenso auf die kunstvolle Pyramidenzerlegung[2]) von Euklid XII, 5 und auf den Exhaustionsbeweis, um das intuitiv erfaßte, nicht streng bewiesene, unnötig allgemeine Cavalierische Prinzip an deren Stelle zu setzen.

Meine Anregungen gehen in folgender Richtung: Man steige auf der vorbereitenden Unterrichtsstufe zu einer noch tieferen Schicht hinab, nämlich zu der Zerlegung des Würfels in vierseitige Pyramiden und zu der Berechnung der „Eckpyramiden“. Ferner führe man statt des Cavalierischen Prinzips, zunächst intuitiv, die beiden affinen Transformationen, die Dehnung (Stauchung)

1) Beziehungen zwischen affinen Figuren und Beziehungen zwischen affinen Körpern müssen schon sehr früh in naiver Intuition erfaßt worden sein. Das gilt insbesondere auch für die *ähnlichen* Figuren und Körper und den Satz, daß sich ihre Inhalte wie die Quadrate oder Kuben entsprechender Stücke verhalten. Den Satz, daß sich die Inhalte von Kreisen wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten (Euklid XII, 2), pflegt man bis auf Hippokrates von Chios zurückzuverfolgen, der vielleicht zuerst eine Art unvollkommener Exhaustion zum Beweise des Satzes versucht haben wird. Es muß aber betont werden, daß schon die Ägypter des Papyrus Rhind von diesem Satze wie von etwas Selbstverständlichem Gebrauch machten, wenn sie den Inhalt *jedes* Kreises zu $^{64}/_{81}$ vom Inhalt des umbeschriebenen Quadrats berechneten. Die unvergleichliche Leistung der *Griechen* besteht darin, daß sie das anscheinend Selbstverständliche formulierten, darauf den Finger legten, die darin verborgenen Schwierigkeiten aufdeckten, Beweise verlangten und so erst solche Sätze — nicht entdeckten, sondern in das von ihnen geschaffene System des wissenschaftlichen Denkens heraufhoben. Auch bei diesem Satz von den Kreisen war es, wie oben schon gesagt, höchstwahrscheinlich erst Eudoxos, der die logische Steilwand des Grenzübergangs durch sein strenges Exhaustionsverfahren erklomm.

2) H. Wieleitner hat sie für den Unterricht vorgeschlagen. Vgl. H. Wieleitner, Über den Rauminhalt der Pyramide. Unterr. Blätter f. Math. u. Naturw. 31, S. 91—92. Berlin 1925.

in der Richtung einer Würfelkante und die „Schiefmachung" ein. Das Cavalierische Prinzip ist als intuitiv-heuristisches Prinzip überaus wertvoll, als strenges Beweismittel aber in seiner allgemeinen Form für die Schule ungeeignet und unnötig. Auf einer höheren Unterrichtsstufe kann man unter Verzicht auf die Proportionsrechnung den Grenzprozeß auf die oben im dritten Abschnitt gekennzeichnete Weise durchführen.

Eine neue Einführung der Parallelperspektive.

Von A. Baur in Lübeck.

Mit 11 Figuren im Text.

Im folgenden soll eine neue Art, die Schrägbilder im Unterricht, etwa auf UII einzuführen, beschrieben werden.

A. Die Einführung der drei Hauptsätze. Die beiden Sätze

I. *Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade* und

II. *Die Bildgeraden von Parallelen sind unter sich parallel*

werden durch das bekannte Beispiel des Sonnenschattens anschaulich gemacht und leicht bewiesen.

Es werden weiter zuerst nur solche geometrische Gebilde betrachtet, die in einer waagerechten Ebene H liegen. Die Zeichentafel V steht senkrecht. Damit läßt sich das Bild $\mathfrak{P}$ eines Punktes P der Ebene H mit Hilfe seiner Umklappung P' in die Ebene V wie üblich zeichnen (Fig. 1):

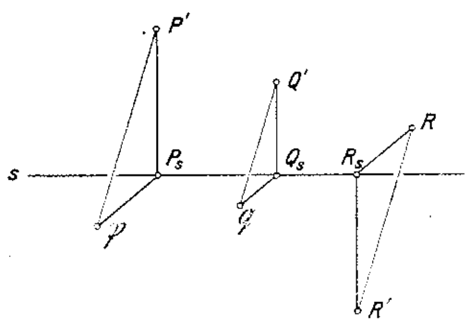


Fig. 1.

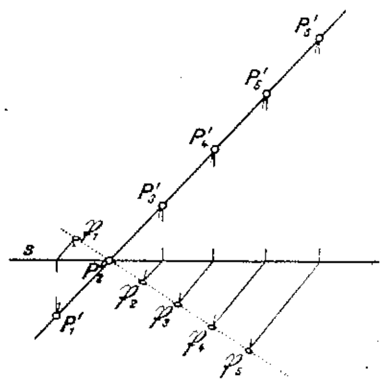


Fig. 2.

Die Dreiecke $P'P_s\mathfrak{P}$, $Q'Q_s\mathfrak{Q}$ usf. sind als Bilder räumlicher paralleler rechtwinklig-gleichschenkliger Dreiecke ähnlich (nach II).

Man kann jetzt die *1. Aufgabe* anschließen: Zeichne die Bilder vieler Punkte, die auf einer Geraden g der Ebene H liegen! (S. Fig. 2.) Prüfung durch Satz I.

2. Aufgabe: Abbildung zweier sich schneidender Geraden g, h; der Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ der Bilder $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ ist das Bild des Schnittpunktes S von g, h.

3. Aufgabe: Abbildung von Quadrat und Rechteck (auch in allgemeinen Lagen). (S. z. B. Fig. 3.) Vermutung und Beweis des Satzes:

III. *Teilverhältnisse von Strecken mit derselben Richtung bleiben bei der Abbildung erhalten.*

B. Abbildung beliebiger ebener Gebilde. Mit der Abbildung des Quadrats läßt sich jetzt ein in H eingeführtes kartesisches Koordinatensystem abbilden. Damit beherrscht man die ganze Ebene H und ihr Bild: *Die Eigenschaft, Koordinatensystem zu sein, ist bei der Abbildung invariant.*

4. Aufgabe: Bilde ein in H liegendes kartesisches Koordinatensystem ab! (Verschiedene Lagen.) S. Fig. 4, 5.

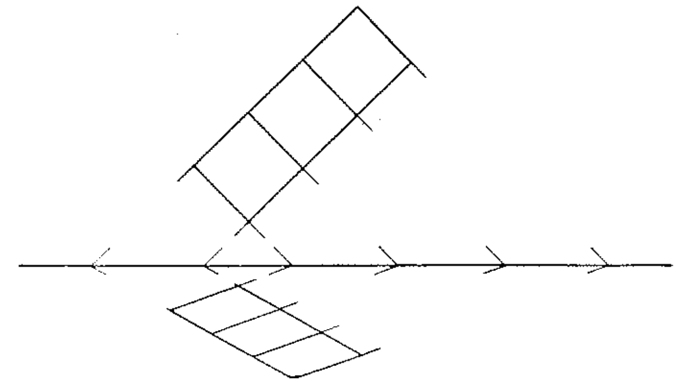


Fig. 3.

Jetzt kann man jedes beliebige ebene Gebilde genau oder durch Annäherung abbilden. Gleichzeitig kann der Übergang zur freien Parallelperspektive erfolgen. Das Bild der Ebene H wird von der Umklappung in V getrennt gezeichnet.

5. Aufgabe: Bilde mit Hilfe eines Koordinatensystems das Muster[1]) der Fig. 6a ab! S. Fig. 6a, b.

Hieran schließen sich Aufgaben über die Abbildung krummer Linien der Ebene H. Man führt natürlich die Abbildung von Kreisen, Parabeln, kubischen Parabeln, unter Umständen auch von Kreisbüscheln durch. Die Fig. 7a, b zeigen die Abbildung der sinus-Linie. Die Übertragung der Fig. 7a in 7b geschieht punktweise durch Schätzen. Dieses Schätzen könnte als Mangel des Verfahrens auffallen. Es findet aber seine Berechtigung in Satz III:

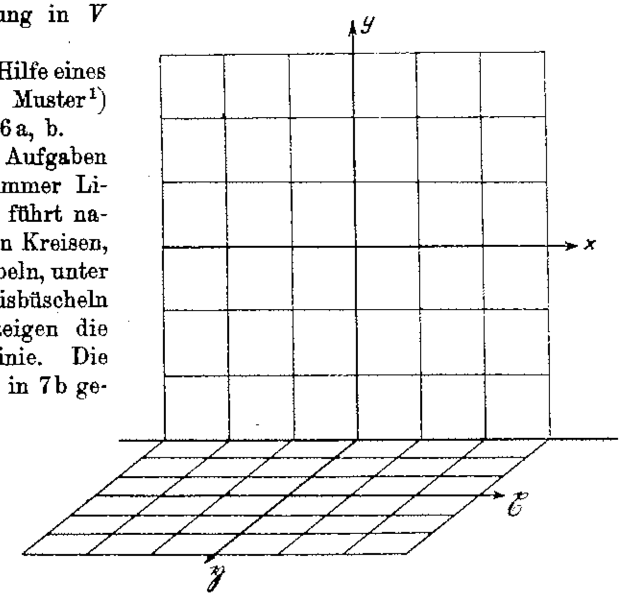


Fig. 4.

Die Invarianz der Teilverhältnisse ist die theoretische Grundlage sicheren Schätzens.

Deshalb ist das Verfahren auch auf Parallelprojektionen beschränkt: *Die Zentralprojektion läßt sich nicht genau so behandeln.*

Die grundsätzlichen Vorteile des Verfahrens sind:

1. Alle ebenen Gebilde lassen sich bequem und genau abbilden.

1) S. Timerding, Zeichnerische Geometrie. Leipzig 1928.