SITZUNG VOM 7. JULI 1941.

# Ṯābit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen.

Von
P. Luckey in Tübingen.

Vorgelegt von Herrn van der Waerden.

Mit 7 Figuren.

In seinen Prolegomenen schreibt der Historiker Ibn Ḫaldūn[1]) (1332—1406) im Abschnitt über Algebra: „Der erste, der über diesen Zweig (der Wissenschaft) schrieb, war Abū ʿAbdallāh al-Ḫwārizmī, und nach ihm (schrieb darüber) Abū Kāmil Šuǧāʿ b. Aslam.“ Al-Ḫwārizmī, der in der ersten Hälfte des 9. Jahrhunderts wirkte, geht in seiner Algebra[2]) (*al-ǧabr wal-muqābala*) zur Bildung von Gleichungen aus von den drei Gliedern: *Vermögen* (Mehrzahl, $ax^2$), *Wurzeln* ($bx$) und *Zahl* ($c$) ($a > o$, $b > o$, $c > o$) und bildet durch Kombination sechs Gleichungsformen, nämlich die drei zweigliedrigen Gleichungen $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, und die drei dreigliedrigen, also gemischtquadratischen Gleichungen

*Vermögen* (Mehrzahl) *und Wurzeln sind gleich Zahl*, usw., d. i.

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 + c = bx, \quad ax^2 = bx + c \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0). \qquad (1)$$

Er nennt diese sechs Gleichungsformen u. a. *Kategorien* (*abwāb*, Mehrzahl von *bāb*, eigentlich *Tor, Eingang*, auch *Kapitel*, daher *capitulum* bei den abendländischen Algebraikern).

Die Meinungen darüber, ob er bei den geometrischen Beweisen der Auflösungen der gemischtquadratischen Normalformen unter griechischem Einfluß steht, sind immer noch geteilt. J. Tropfke[3]) bejaht, S. Gandz[4]) ver-

1) Ibn Ḫaldūn, Text: Notices et extr. $18_1$, Paris 1858, S. 98; franz. Übers.: Notices et extr. $21_1$, Paris 1868, S. 136. — P. Cossali (Origine ... dell'Algebra I, Parma 1797, S. 178) und H. Th. Colebrooke (Algebra with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit usw., London 1817, S. LXX) sagen, daß schon Qazwīnī (1203—1283) und andere al-Ḫwārizmī als den ersten bezeichnen, der den Muslimen die Algebra brachte. Cossali beruft sich hierbei auf Casiri. S. a. Ḥaǧǧī Ḫalīfa, Lexicon V Nr. 10012.

2) The Algebra of Moh. b. Musa. Ed. and transl. by Frederic Rosen, London 1831.

3) J. Tropfke, Zur Geschichte der quadratischen Gleichungen über dreieinhalb Jahrtausend. Jahresb. d. D. Math.-Vrg. 43, 1933, S. 98—107, 44, 1934, S. 26—119. — J. Tropfke, Gesch. d. Elementar-Mathematik III, 3. Aufl. 1937.

4) S. Gandz. The mishnat ha middot. Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math., Astr. u.

neint dies. Das nach der obigen Angabe von Ibn Ḫaldūn nächste arabische Algebrawerk ist dasjenige von Šuǧā' b. Aslam[5]), „dem Ägypter". Šuǧā' beruft sich bei dem geometrischen Beweis für die Lösungen der genannten Gleichungsformen ausdrücklich auf Euklid II. Leider wissen wir nichts Genaueres über die Person und die Lebenszeit dieses Gelehrten. Er zitiert al-Ḫwārizmī, an den er anknüpft, und zu seiner Algebra verfaßten al-Iṣṭaḫrī (vielleicht 858—940) und 'Alī b. Aḥmad al-'Imrānī (starb 955 oder 956) Kommentare, die uns nicht erhalten sind. H. Suter[6]) schrieb vorsichtig, daß Šuǧā' „ca. zwischen 850 und 930" lebte. J. Weinberg[5]) (S. 5) macht daraus ohne ersichtliche Unterlage: „. . . lebte von ca. 850 bis 930".

Durch die kurze Abhandlung von Ṯābit b. Qurra (∼ 834 bis 901), die ich hier nach der einzigen bisher bekannten Handschrift Istanbul, Aya Sofya 2457, 3 in Text und Übersetzung mitteile[7]), bekommen wir festeren Boden unter die Füße. Ṯābit gehört der zweiten Hälfte des Jahrhunderts al-Ḫwārizmīs an, und er lebte wie dieser am Kalifensitz Bagdad, wo besonders in jenem Jahrhundert die Quellen griechischer mathematischer Wissenschaften mit den persischen und indischen Quellen zusammenströmten. Dieser Ṯābit nun, selbst die erste Autorität seiner Zeit für die richtige Übersetzung und Erklärung griechischer mathematischer und astronomischer Texte, sieht sich veranlaßt, hier in einer besonderen Abhandlung die geometrischen Wege zur Auflösung der drei reduzierten gemischtquadratischen Gleichungsformen

*Vermögen* (Einzahl) *und Wurzeln ist gleich Zahl*, usw., d. i.

$$x^2 + px = q, \quad x^2 + q = px, \quad x^2 = px + q \quad (p > 0,\ q > 0) \qquad (2)$$

Phys. A, 2, 1932. — S. Gandz, The origin of the term algebra. Amer. Math. Monthly 33, 1926, S. 437—40. — S. Gandz, The sources of al-Khowārizmī's algebra. Osiris 1, 1936, S. 261—77. — S. Gandz, The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek, and early Arabic algebra. Osiris 3, 1937, S. 405—557. — Vgl. auch Scientia 62, 1937, S. 249—257 und Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital., Firenze, 1937, S. 528 bis 531.

5) J. Weinberg, Die Algebra des Abū Kāmil Šoǧā' ben Aslam. Diss. München 1935. — Dies ist eine Übersetzung der Münchener hebräischen Handschrift cod. hebr. 225, 2, einer Übersetzung des Mordechai Finzi (um 1473), dem wahrscheinlich eine spanische Übersetzung vorgelegen haben soll. In neuester Zeit sind Handschriften des arabischen Textes bekannt geworden: Šuǧā' b. Aslam, *Kitāb al-ǧabr wal-muqābala*, Istanbul, Kara Mustafa P. 379; Mešhed XVII, 32, 98. Auch Šuǧā's Schrift über Berechnung von Vermächtnissen mit Hilfe der Algebra, von der wir bisher nur den Titel durch den Geschichtsschreiber Ḥaǧǧī Ḫalīfa (1609—1657) kannten, liegt jetzt als arabische Handschrift vor: Šuǧā' b. Aslam, *al-waṣāyā bil-ǧuḏūr*. (Wird wohl heißen müssen: *bil-ǧabr*.) Mōṣul 294, 3.

6) Bibl. math., 3. Folge, 10, 1910, S. 33.

7) Die von mir benutzte Photographie verdanke ich Herrn Professor Dr. H. Ritter in Istanbul.





aufzuweisen und auf Euklid zurückzuführen. Er nennt diese Formen *Grundformen* (*uṣūl Wurzeln, Elemente*), und es sind dieselben Formen, auf die auch al-Ḫwārizmī bei der Auflösung der Zahlenbeispiele seine drei *Kategorien* (1) zurückführt. Nicht ersichtlich ist, ob auch Ṯābit $p$ und $q$ als ganze oder gebrochene rationale Zahlen voraussetzt, wie das bei al-Ḫwārizmī in den Zahlenbeispielen nach Herstellung der Formen $x^2 + px = q$ usw. der Fall ist. In Šuǧā's Algebra und in seiner Abhandlung über das Fünfeck und Zehneck[6]) begegnen uns auch irrationale Koeffizienten.

Ṯābit löst geometrisch in der Form einer Analysis die erste und dritte seiner Grundformen unter ausdrücklicher Zurückführung auf Euklid II 6 und die zweite ebenso unter ausdrücklicher Zurückführung auf Euklid II 5. Ob er dabei eine eigene Erkenntnis oder das Wissen anderer mitteilt, ist hier wie zuweilen auch sonst bei dem zugleich klugen und vielbelesenen Manne zweifelhaft.

Von dem Verfahren, auf das ihn diese geometrische Analyse führt, sagt er zutreffend, es sei „übereinstimmend" (*muwāfiq*) mit dem Verfahren „der der Algebra Beflissenen" (*aṣḥāb al-ǧabr*[8])) oder der „Algebraleute" (*ahl al-ǧabr*) bei der rechnerischen Lösung der drei Fälle. Den Ausdruck *al-ǧabr*, den ich mit „Algebra" wiedergebe, gebraucht er nicht für die Auffüllung eines negativen Gliedes, die in der Schrift nicht vorkommt. Vielmehr bezeichnet er durch den bloßen Ausdruck *al-ǧabr* ohne Hinzufügung von *wal-muqābala* ein Gebiet, um nicht zu sagen einen Zweig der Mathematik. Es gibt nach der Überschrift der Abhandlung „Probleme der Algebra" (*masā'il al-ǧabr*), und nach dem Anfangssatz „kommen" die meisten dieser Probleme auf die oben genannten drei gemischtquadratischen reduzierten Formen „zurück", d. h. lassen sich auf sie zurückführen oder laufen auf sie hinaus. „Probleme der Algebra" werden also hiernach Gleichungen zweiten und sicher auch solche ersten Grades oder Aufgaben sein, die auf solche Gleichungen führen. Im Schlußsatz wird die rechnerische Lösung jedes der drei Grundprobleme als „Verfahren seiner Lösung durch die Algebra" dem „Verfahren seiner Lösung durch die Geometrie" gegenübergestellt.

So früh also schon wird dieser Wissenschaftszweig durch das bloße *al-ǧabr* ohne den Zusatz *wal-muqābala* bezeichnet, der sich nach Suters[9]) Meinung „im Laufe der Zeit" verlor. Zugleich dürfte in den Ausdrücken „die der Algebra Beflissenen", „die Algebraleute" die älteste bisher bekannte Sonderbenennung von Menschen vorliegen, die sich mit *al-ǧabr* beschäftigen oder

8) Die Handschrift hat *aṣḥāb al-ǧaḏr die der Wurzel Beflissenen*, aber das dürfte ein Schreibfehler statt *aṣḥāb al-ǧabr* sein.

9) Enzykl. d. Islam, Artikel Djabr. I S. 1031—32.

hierüber Bücher schreiben. Wie Ruska[10]) bemerkt, findet sich um das Jahr 1000 im ersten Lehrbrief der „Treuen Freunde" (*Iḫwān aṣ-ṣafā'*) und ein Jahrhundert später bei 'Omar Ḫaiyāmī[11]) die Bezeichnung „die Algebraiker" (*al-ǧabriyyūn*), bei letzterem auch das bloße *al-ǧabr*. Nach Suter[9]) gebraucht Abū Zakarīyā al-Ḥaṣṣār (vor 1200) den bloßen Ausdruck *al-ǧabr* überall in seiner Abhandlung über Rechenkunst. Anscheinend hat man bisher den Gebrauch des bloßen Wortes *al-ǧabr* im Titel der hier von mir vorgelegten Schrift nicht gewertet. Daß uns die letztere erhalten ist, wissen wir zwar erst seit 1936[12]), aber den Titel der Schrift gab Ibn al-Qifṭī[13]) (S. 119) an, und H. Suter[14]) (S. 36) und A. G. Kapp[15]) übersetzten ihn. Auch der 987 geschriebene Fihrist[16]) gebraucht den Ausdruck *al-ǧabr*. Er sagt von Hipparch (I S. 269) und von Diophant (I S. 269), daß sie über die „Kunst der Algebra" (*ṣinā'at al-ǧabr*) schrieben. Nach dem Fihrist (I S. 283, Suter[16]) S. 39) und Ibn al-Qifṭī[13]) (S. 288) schrieb Abul-Wafā' (940—998) außer einem Kommentar über die Algebra (*al-ǧabr wal-muqābala*) von al-Ḫwārizmī einen Kommentar der Schrift des Diophant über die Algebra (*al-ǧabr*) und einen solchen der Schrift des Hipparch über die Algebra (*al-ǧabr*)[17]).

Da ein Mann vom Gewicht eines Ṯābit b. Qurra die Abfassung dieses geometrischen Richtigkeitsnachweises für angebracht hält, wird zum mindesten einem Teil seiner Leser die Zurückführbarkeit der Lösungen der Normalformen (2) auf Euklid II neu gewesen sein. War sie den „Algebraleuten" bekannt, denen Ṯābit sich selbst nicht zurechnet?

Mit umständlicher Sorgfalt zeigt Ṯābit, wie die einzelnen geometrischen Schritte und Gebilde denjenigen „auf dem Gebiet der Rechnung und der Zahl" (*fī bāb al-ḥisāb wal-'adad*) oder „auf seiten der Rechnung und der Zahl" (*'alā ǧihat al-ḥisāb wal-'adad*) oder „nach dem Verfahren der Rechnung"

10) J. Ruska, Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst. Sitzgsber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss., Phil.-hist. Kl., 1917, 2, S. 13. Vgl. hierzu die Besprechung von H. Suter, Arch. d. Math. u. Phys. 28, S. 56—61.

11) F. Woepcke, L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî. Paris 1851. — Vgl. die von Gandz in der zweiten seiner oben [4]) genannten Arbeiten S. 439 angeführten Stellen.

12) M. Krause, Stambuler Handschriften usw., Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math. usw. Abt. B, 3, 1936, S. 455.

13) Ibn al-Qifṭī's *Ta'rīḫ al-ḥukamā'* hrsg. v. J. Lippert. Leipzig 1903.

14) H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen d. Arab. usw. Leipzig 1900.

15) A. G. Kapp, Arab. Übersetzer u. Kommentatoren Euklids usw. II. Isis (Bruges) 23, 1935, S. 65.

16) *Kitāb al-Fihrist*, hrsg. v. G. Flügel, Leipzig 1871. — Vgl. H. Suter, Das Mathematikerverzeichnis im Fihrist usw. Abh. z. Gesch. d. Math. 6, 1892, S. 22.

17) Die Angabe Hipparchs als Verfassers einer Algebra ist bekanntlich bestritten. Vgl. die von Cantor I[3] S. 363 angeführte Literatur.





(*'alā maḏhab al-ḥisāb*) entsprechen. Was *sie*, die Algebraleute, tun, d. h. das rein Rechnerische, stellt er dem gegenüber, was *wir* tun, d. h. was er selbst bei der geometrischen Behandlung vornimmt. Am Schluß der Abhandlung heißt es, das Ziel derselben sei der Einklang des geometrischen mit dem algebraischen Auflösungsverfahren. Anders stellt übrigens 'Omar Ḫaiyāmī[11]) (S. 11, Übers. S. 17—18) die geometrische Lösung derjenigen durch die Zahl gegenüber. Er meint mit der Zahl nur die ganzzahlige Lösung.

Eine Korrespondenz des Geometrischen mit dem Rechnerischen, über die man auch Woepcke[11]) (S. XII, Fußnote 2) vergleichen möge, war dem neunten Jahrhundert und der Folgezeit auch auf einem anderen Gebiet geläufig und bewußt: in der Trigonometrie. Schon Ptolemäus hat ja in seinem Analemma dem konstruktiven ein ihm genau parallel laufendes rechnerisch-trigonometrisches Verfahren gegenübergestellt. Wenn man eine Vorschrift von al-Māhānī[18]), das Azimut $a$ eines Gestirns aus seiner Höhe $h$, seiner Deklination $\delta$, der Ortsbreite $\varphi$ und dem Kugelradius $r$ zu konstruieren, Schritt für Schritt ins Rechnerische überträgt, so erhält man genau die rechnerischen Schritte, die al-Battānī[19]) *(Cap. XI)* für die Lösung dieser Aufgabe vorschreibt, und die sich in der Formel

$$\mathrm{Sin}\, a = \frac{r\left|\frac{r\, \mathrm{Sin}\, \delta}{\mathrm{Cos}\, \varphi} \pm \frac{\mathrm{Sin}\, h\, \mathrm{Sin}\, \varphi}{\mathrm{Cos}\, \varphi}\right|}{\mathrm{Cos}\, h}$$

zusammenfassen lassen. Daß in dieser Zusammenfassung eine zwischen Seiten- und Winkelfunktionen des Kugeldreiecks bestehende Gleichung, der Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie, steckt, kam den arabischen Gelehrten nicht zum Bewußtsein, aber Regiomontan wurde bekanntlich durch sein Studium al-Battānīs zur Aufstellung dieser Formel angeregt. Bei zwei anderen Konstruktionen der sphärischen Astronomie nimmt al-Māhānī in derselben Abhandlung selbst die schrittweise Übertragung der graphischen in die rechnerische Lösung vor. An der einen Stelle heißt es da: „Eingang hierzu durch die Rechnung" (*bāb ḏālik min al-ḥisāb*), und an der anderen: „Wünschen wir dies nun von seiten der Rechnung (*min qibal al-ḥisāb*), so vervielfachen wir" usw. Allerdings müßte der Richtigkeitsnachweis dieser ebenen Konstruktionen noch an einer räumlichen Figur erbracht werden. Auch zu graphischen Lösungen al-Kindīs[20]) von sphärisch-astronomischen Aufgaben finden wir später

18) Al-Māhānī, *Ma'rifat as-samt* ... Istanbul, Seray 3342, 3.

19) Al-Battānī, Opus Astronomicum ed. Nallino. Mailand 1899—1903.

20) Al-Kindī, *'Amal al-ruḫāma bil-handasa*. Berlin Ms. or. oct. 2294, fol. $31^b$—$33^a$. Die Veröffentlichung dieses Textes und der oben[18]) genannten Māhānī-Stelle habe ich vorbereitet.

in einem Falle bei al-Battānī, in einem anderen erst bei Regiomontan das rechnerische Gegenstück.

Ṯābit behandelt seine drei „Grundformen“ (*uṣūl*) in derselben Reihenfolge wie al-Ḫwārizmī. Auch ermittelt er wie dieser zuerst $x$ und hieraus durch Quadrieren $x^2$. Wie al-Ḫwārizmī findet er für die zweite Form $x^2 + q = px$, falls sie überhaupt für ihn lösbar ist, beide positive Wurzeln. Im Gegensatz zu ihm gibt er die geometrische Verifikation nicht an Zahlenbeispielen, sondern allgemein. Ferner spricht er bei der geometrischen Darstellung sauber von den Vielfachen der (Längen)einheit, in der die Linien gemessen werden.

Folgende Fachausdrücke Ṯābits stimmen mit Fachausdrücken al-Ḫwārizmīs überein:

| | | |
|---|---|---|
| *ǧaḏr* | *Wurzel* | $x$ |
| *māl* | *Vermögen* | $x^2$ |
| *'adad* | *Zahl* | $q$ |
| *ya'dil* | *ist gleich* | $=$ |

***Al-'adad die Zahl*** als Terminus für das absolute Glied kann also auch eine nicht ganze Zahl bedeuten, wie $20\frac{1}{4}$ oder $23\frac{1}{25}$ in Beispielen al-Ḫwārizmīs. Als Ausdruck des Gleichseins in der Bestimmungsgleichung hat dieser Ṯābittext stets, auch wenn mehrere Subjekte vorhergehen, ***ya'dil ist gleich***, während wir in Rosens al-Ḫwārizmī-Ausgabe auch ***ta'dil sind gleich*** lesen; doch kommt dies vielleicht auf Rechnung Rosens, der angibt, daß in seiner Oxforder Handschrift die meisten diakritischen Punkte fehlen.

In der Benennung des linearen Gliedes $px$ und seines Koeffizienten $p$ folgt Ṯābit nicht dem Ḫwārizmī, dessen Terminologie in diesem Punkte sehr eigenartig ist. Sowohl das Glied $bx$ einerseits wie sein Koeffizient $b$ andererseits heißt bei al-Ḫwārizmī *die Wurzeln* oder *Wurzeln.* Aber er benutzt zwei verschiedene Mehrzahlformen des Wortes *ǧaḏr*, nämlich *ǧuḏūr* und *aǧḏār.* Die Form ***ǧuḏūr Wurzeln*** gebraucht er an den Stellen ٩, 2 und ١٠, 5 als Symbol eines allgemeinen linearen Ausdrucks $ax$, ferner insbesondere stets bei der allgemeinen Formulierung seiner „Kategorien“ für das lineare Glied $bx$, also in Sätzen wie *Vermögen und Wurzeln sind gleich Zahl* ($ax^2 + bx = c$) usw. Das sind Sätze, die als feste Merksprüche, Formeln, ein besonderes Gewicht haben und möglicherweise von Vorgängern übernommen sind. Sonst verwendet er stets den Plural *aǧḏār.* Diesen gebraucht er insbesondere für den Koeffizienten $p$ in der oft wiederholten, also ebenfalls formelhaften Lösungsvorschrift für die Bildung des Ausdrucks $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$ und der beiden entsprechenden, also wenn er z. B. sagt: *Die Vorschrift (qiyās) ist, daß du die Wurzeln halbierst,* d. h. die Zahl $p$ der Wurzeln. Oder: *Ziehe davon die Hälfte*





***der Wurzeln ab,*** d. i. $\frac{p}{2}$. An den Stellen ٤, 8 und ٥, 17 wird vorgeschrieben, daß zur Herstellung der reduzierten Form die Rechnung, die $ax^2$ in $x^2$ überführt, auch mit $bx$ (und $c$) vorzunehmen ist. Wem hier ***al-aǧḏār*** für $bx$ auffällt, dem kann erwidert werden, daß die Operation mit der Zahl $b$ der Wurzeln, d. i. mit dem Koeffizienten $b$ vorzunehmen ist. In seiner Vorstellung ist $bx$ nicht eine Zahl, sondern eine Anzahl von Dingen.

Für den des Arabischen Unkundigen sei hierzu bemerkt, daß viele arabische Wörter mehr als einen Plural bilden können. So hat das Wort ***ǧaḏr Wurzel*** die Mehrzahlformen ***ǧuḏūr*** und *aǧḏār.* Die zweite dieser Formbildungen wird, wenn sie wie hier nicht die einzige Mehrzahlform des betreffenden Wortes ist, nach der Lehre der arabischen Grammatiker nur für Personen und Dinge in der Höchstzahl 10 gebraucht. Doch gilt diese Verwendung als „Mehrzahl der Wenigkeit“ nur eingeschränkt und kommt im vorliegenden Fall nicht in Frage[21]), wie ja auch al-Ḫwārizmī sogar für $p = 101$ (٢٠, 3, 6) *al-aǧḏār* sagt. Man könnte vermuten, daß die Sprache die in ***ǧuḏūr*** vorliegende Pluralbildung für die Dinge selbst und die in ***aǧḏār*** vorliegende für die Anzahl dieser Dinge gebrauche, aber darüber ist mir nichts bekannt. Doch kommt es im Arabischen vor, daß verschiedene Mehrzahlformen desselben Wortes verschiedenen Bedeutungen dieses Wortes entsprechen.

Man könnte also nun versucht sein, diesen Gebrauch von *ǧuḏūr* für das lineare Glied und *aǧḏār* für seinen Koeffizienten als Ansatz zu einer terminologischen Unterscheidung von $bx$ und $b$ in der Wortsymbolik al-Ḫwārizmīs anzusprechen. Diese Unterscheidung wäre aber z. B. für $p = 1$ nicht eindeutig durchführbar gewesen, ohne der Sprache Gewalt anzutun. So gebraucht er denn in diesem Falle (٤٦, 3—7), sofern der Text zuverlässig ist, sowohl für $px$ wie für $p$ denselben Ausdruck, nämlich den Singular ***al-ǧaḏr*** die Wurzel.

Daß dem Ḫwārizmī aber eine bewußte straffe Terminologie dieser Art fern lag, zeigt die Betrachtung seiner Sprache besonders da, wo die Wahrscheinlichkeit am größten ist, daß wir den Autor selbst sprechen hören, nämlich in der Durchführung der Zahlenbeispiele und in seinen an Zahlenbeispielen erbrachten geometrischen Richtigkeitsnachweisen. In den zahlreichen Beispielen heißt $3x$, $10x$ usw. stets *ṯalāṯat aǧḏār*, *'ašarat aǧḏār* usw. Andererseits bedeutet (٩, 18; ١٠, 9) *al-'ašara al-aǧḏār die zehn Wurzeln* den Koeffizienten 10 von $x$. Man beachte die Stelle ١٠, 10: *Sie* (gemeint ist die Seitenlänge 5 eines Quadrats) ***ist die Hälfte der zehn Wurzeln, die wir auf den beiden Seiten der ersten Fläche hinzufügten.*** Hier ist im Hauptsatz an den Koeffizienten 10,

21) Vgl. M. Sl. Howell, A Grammar of the Classical Arabic Language, I, 3. Allahabad 1880, S. 887.

im Relativsatz aber an das Glied $10x$ zu denken, das er in Form von zwei Rechtecken $5 \cdot x$ an die Seiten des Quadrats $x^2$ gelegt hat. Also etwa: *Sie ist die Hälfte der Zehnzahl der Wurzeln, die wir ...* Daß bei den geometrischen Veranschaulichungen eine Strecke oder eine Fläche meistens nicht von ihrer Maßzahl unterschieden wird, trägt zur Verschwommenheit der Sprache bei. In unserem Sinne korrekt drückt sich al-Ḫwārizmī aus, wenn er (١٢, 11) den Koeffizienten $p$ von $px$ als *Zahl der Wurzeln* (*ʿadad al-aǧḏār*) bezeichnet. Hiermit vergleiche man (٩, 2) *aʿdād ǧuḏūr Zahlen von Wurzeln* für den Koeffizienten des Produktes $zx$, wo $z$ eine beliebige positive Zahl ist. Diese beiden Stellen sind aber vereinzelt.

Hierzu kommt noch, daß al-Ḫwārizmī $x$ als Unbekannte des Problems auch *šaiʾ Ding* nennt und deshalb seinen Koeffizienten $p$ auch (z. B. ٢٤, 14) mit *al-ašyāʾ die Dinge* bezeichnet.

An Stelle dieser unglücklichen Terminologie von al-Ḫwārizmī für $bx$ und $b$ hat Ṯābit im vorliegenden Text zwar nicht je einen einzigen festen Terminus, dafür aber folgende eindeutige und sprachlich unmittelbar verständliche Ausdrücke:

| | | |
|---|---|---|
| *al-ǧuḏūr* / *al-aǧḏār* | *die Wurzeln* | $px$ |
| *al-ʿidda al-mafrūḍa* { *lil-ǧuḏūr* / *lil-aǧḏār* } | *die gegebene Menge*[22]) *der Wurzeln* | $p$ |
| *ʿiddat al-ǧuḏūr al-mafrūḍa* | *die gegebene Menge der Wurzeln* | $p$ |
| *ʿadad al-aǧḏār* | *die Zahl der Wurzeln* | $p$ |
| *ʿiddat al-aǧḏār* | *die Menge der Wurzeln* | $p$ |

Von den beiden Ausdrücken für $px$ bevorzugt er *al-ǧuḏūr*, das er insbesondere bei der Formulierung seiner Grundformen (2) wie al-Ḫwārizmī bei der Formulierung seiner Kategorien (1) verwendet.

Bei Diophant[23]) findet sich, wie schon Woepcke[11]) (S. IX Fußnote) bemerkte, für die Koeffizienten der εἴδη $x^0$, $x^1$, $x^2$, ... eine primitive Ausdrucksweise, die derjenigen al-Ḫwārizmīs entspricht, z. B. (I 304, 5—7): *Wir multiplizieren die Hälfte der* $x$ (ς) *mit sich selbst ... und die* $2x^2$ ($\Delta^Y \bar{\beta}$) *mit der* 18 ($\overset{0}{M}\,\overline{\iota\eta}$), d. h. wir bilden zu $6x + 18 < 2x^2$ die Ausdrücke $(\frac{6}{2})^2$ und $2 \cdot 18$. Ähnlich (I 402, 14—16): *Man muß zu der Hälfte der* ς *mal sich selbst die* $\Delta^Y$ ⟨*mal den* $\overset{0}{M}$⟩ *hinzufügen*, d. h. man muß, wenn $ax^2 + bx = c$ vorliegt, $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac$ bilden. Er sagt aber auch (I 238, 7): Die $\Delta^Y$ 1 ist $\frac{1}{2}$ von den ς 2 *der Menge*[22]) *nach* (τῷ πλήθει), d. h. bei $1x^2$ und $2x$ ist der Koeffizient von $x^2$ gleich der Hälfte des Koeffizienten von $x$. Und so sagt er an einer anderen Stelle (I 342, 1): *die Menge* (πλῆθος) *der* $\Delta^Y$, d. i. der Koeffizient von $x^2$. Das von Ṯābit gebrauchte *ʿidda*, das ich mit *Menge* übersetzte, dürfte, wie schon Woepcke vermutet, dem griechischen πλῆθος entsprechen. Leider sind uns die Übersetzung und der Kommentar, die nach Ibn Abī Uṣaibiʿa (I 245) Ṯābits Zeitgenosse Qusṭā b. Lūqā zu der Arithmetik des Diophant machte, nicht erhalten. Daß der im griechischen Denken geschulte Ṯābit die Bezeichnungsweise von al-Ḫwārizmī verbesserte, nimmt nicht wunder. Vielleicht hat auch schon Diophant auf ihn eingewirkt.

22) Das arabische *ʿidda* und das griechische πλῆθος übersetze ich mit *Menge*, da eine Kollision mit dem Mengenbegriff der modernen Mathematik nicht zu befürchten ist und *Quantität* eher dem griechischen ποσόν und dem arabischen *kamīya* entspricht.

23) Diophant, Op. ed. P. Tannery. Leipzig 1893—95. — Vgl. Tropfke[8]) III[3], 1937, S. 29.





Bei den Indern liegt eine ähnliche Erscheinung vor, wobei aber die Eigenart der Wortzusammensetzungen in indischen Merkversen zu berücksichtigen ist. Im 18. Kapitel des *Brāhma-sphuṭa-siddhānta*[24]) von Brahmagupta (* 598), und zwar in Vers 48, der die Formel für die Auflösung von $ax^2 + bx = c$ enthält, wird von dem mit $4a$ multiplizierten $c$ gesagt, daß es „vereinigt" wird „mit dem Quadrat des Mittleren" (*madhyavargasahitānām*), d. h. also, es wird $4ac + b^2$ gebildet. „Das Mittlere" (*madhyas*, vgl. lat. *medius*) bedeutet eigentlich die Unbekannte $x$ selbst, und so auch im letzten Wort unseres Verses[25]), wird aber hier für den Koeffizienten $b$ von $x$ gebraucht. Colebrooke[1]) übersetzt (S. 346) *the [coefficient of the] middle term.* Ähnliches gilt für *madhyen'onam*, d. i. $-p$ und für den Koeffizienten von $x^2$. Man beachte Brahmaguptas Kommentar, wo es in Colebrookes Übersetzung heißt: *the numeral (anca) which belongs to the square of the unknown is termed [coefficient of the] square* usw. Siehe auch das Entsprechende bei Bāscara (Colebrooke S. 207 ff).

Wie in der früharabischen Algebra, so finden wir also auch bei Diophant und bei den Indern, daß man, besonders in formelhaften Wendungen, die vielleicht von Vorgängern übernommen sind, den Plural oder Singular des Ausdrucks für $x^\nu$ nennt, wenn man seinen Koeffizienten $a_\nu$ meint, und überall begegnet uns außer dieser schlechten Ausdrucksweise ihre Verbesserung in Gestalt einer sorgfältigeren. Wenn ʿAlī, der Fürst der Gläubigen, nach dem

24) Pandit, N. S. 24, S. 490 (314), Benares 1902. — Herrn Staudacher in Tübingen bin ich für sprachliche Hilfe dankbar.

25) Wohl als geometrisches Mittel zwischen 1 und $x^2$ in der Folge der Potenzen von $x$. Man vergleiche übrigens *al-wāsiṭa der mittlere (Grad)* bei al-Karaǧī (= al-Karḫī): F. Woepcke, Extrait du Fakhrî, Paris 1853, S. 71.

Hauptnenner der Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{10}$ befragt, antwortet: „Vervielfache die Tage der Woche mit den Tagen des Jahres (360)!“[26]), so ist das dieselbe, auch heute noch verbreitete mangelhafte Ausdrucksweise. Wir haben es hier wohl mit dem sprachlichen Rudiment einer primitiveren Sprech- und Denkweise zu tun, die die Zahl ($a$, ursprünglich nur natürliche Zahl) der Dinge noch nicht von den gezählten Dingen selbst („Wurzeln“, „Dinge“, $ax$) abstrahierte und schied. Diese Denkweise gehört einer niederen Erkenntnisschicht an, über die sich insbesondere griechisches Denken endgültig erhob, als es die Eigenschaften der Zahlen an sich untersuchte. Näher jener älteren Erkenntnisschicht steht noch der Logistiker niederen Schlages (wie auch das Kind und bewußt der Elementarlehrer), wenn er die Zahlen an den Sinnendingen betrachtet, „weshalb er ihnen auch die Benennung nach den gemessenen Dingen gibt, indem er die einen apfelige (Zahlen) und die anderen schalige (Zahlen) nennt“[27]). Einen Ausfluß jener primitiven Denk- und Redeweise sehe ich auch darin, daß die altbabylonische Algebra zur Bildung einer Gleichung z. B. „Länge“ und „Breite“ multipliziert und die so erhaltene „Fläche“ der Summe von „Länge“ und „Breite“ gleichsetzt. Hier werden für eine Beziehung ($xy = x + y$), die ganz arithmetisch-algebraisch gemeint ist, die dimensionierten Raumgrößen statt ihrer Maßzahlen genannt. Mit Thureau-Dangin[28]) möchte ich annehmen, daß hier die Elemente der Gleichungen den geometrischen Figuren nur *entlehnt* (*empruntés*) sind. Diophant sagt korrekt (z. B. I 432, 19—20): *ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ die in der Fläche, die in der Hypotenuse* (steckende Zahl).

Aus der Gemeinsamkeit einer natürlichen und verbreiteten terminologischen Erscheinung, die allgemein auf eine ältere Schicht wissenschaftlichen Denkens zurückweist, Schlüsse auf bestimmte historische Zusammenhänge zu ziehen, erscheint gewagt. Ich verzichte darauf, Hypothesen aufzustellen, wie ich mich auch aller Folgerungen aus den Aufschlüssen der vorgelegten Ṯābitschrift enthalte und auch nicht Stellung zu der Hypothese von Gandz über die babylonische Herkunft des Ausdrucks *al-ǧabr* nehme. Für die früharabische Mathematikgeschichte ist es nützlich, daß man zunächst den ganzen erreichbaren Stoff gründlich sammelt und untersucht. Gute, mit Verzeichnissen der Fachwörter versehene kritische Ausgaben von al-Ḫwārizmī und anderen früharabischen Mathematikern, insbesondere auch der Übersetzer, sind erwünscht.

26) Behā'eddin, Essenz der Rechenkunst, arab. u. deutsch von G. H. F. Nesselmann, Berlin 1843, S. 19.

27) Proklos, In prim. Eucl. el. usw. ed. Friedlein. Leipzig 1873, S. 40. — Vgl. K. Vogel, Beitr. z. griech. Logistik. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., math.-nat. Abt., 1936, S. 366.

28) Archeion 19. 1937, S. 3.





Übrigens mußte al-Ḫwārizmī auf die indische Algebra stoßen, wenn die Annahme[29]) richtig ist, daß der Sindhind und al-Ḫwārizmīs astronomische Tafeln auf den Brāhma-sphuṭa-siddhānta zurückgehen und er dieses Werk Brahmaguptas ganz kannte. Selbst wenn dies zutrifft und trotz der bekannten Übereinstimmungen müssen aber seine maßgebenden Vorbilder nicht notwendig in Indien oder gar dort allein zu suchen sein. Auch Persien kommt in Frage. Es ist ganz natürlich, das, was er in der Einleitung über die Wissenschaften verflossener Zeiten und dahingegangener Völker sagt, besonders auch auf die Algebra zu beziehen. Er spricht von Völkern. Ob er wohl auch etwas von der Algebra der Babylonier gehört hat?

In welcher Beziehung Šuǧā' und Ṯābit zueinander stehen und ob und wie weit Ṯābits Schrift und seine verbesserte Ausdrucksweise auf die späteren arabischen Algebraiker wirkte, lasse ich offen. Von Šuǧā' und al-Karaǧī (= al-Karḫī) fehlen noch gedruckte Ausgaben des arabischen Textes ihrer Algebrawerke. In Woepckes Ausgabe des *Faḫrī*[25]) von al-Karaǧī ergibt sich aus Stellen wie S. 6, 71, 72 für den Koeffizienten von $x$ eine Ausdrucksweise wie bei al-Ḫwārizmī. Auch 'Omar Ḫaiyāmī[11]) gebraucht gewöhnlich, wenn er die formelhafte, man möchte sagen eingepaukte Lösungsvorschrift angibt, für $p$ wie al-Ḫwārizmī *al-aǧḏār die Wurzeln*. Doch sagt er *'iddat al-aǧḏār die Menge der Wurzeln* bei der Lösung der Gleichung $x^2 = 5x$ (ar. 10, 13 = Übers. 15, 23), denn er konnte für $x = 5$ nicht sagen: *Die Wurzel* ($x$) *ist die Wurzeln* (5), und ebenso korrekt drückt er sich (11, 16 = 17, 21) aus, wo er etwas Besonderes vorbringt. Wie al-Karaǧī hat er Diophant studiert. Bahā'addīn[26]) (1547—1621) bezeichnet in sauberer Terminologie die Unbekannte $x$ mit *šai' Ding*; nur einmal (39, 1) entschlüpft ihm hierfür *ǧaḏr*. Er nennt den Koeffizienten von $x$ immer sorgfältig: *die Zahl der Dinge*.

In den abendländischen Übersetzungen geht al-Ḫwārizmīs Unterscheidung von *ǧuḏūr* für $px$ und *al-aǧḏār* für $p$ verloren. Beides heißt bei Gerhard von Cremona[30]) *radices*, wozu dann noch *res* für *al-ašyā' die Dinge* kommt. Obwohl das Bedürfnis der Mathematiker nach einer sauberen Terminologie sich dagegen hätte sträuben sollen, *radices* oder *res* oder *le cose* sowohl für das Glied $px$ wie für seinen Koeffizienten $p$ zu gebrauchen, ist die Macht der Überlieferung so stark, daß sich diese Zweideutigkeit in der Folgezeit einnistet und durch die Jahrhunderte mitgeschleppt wird. Allerdings finden wir schon bei Leonardo von Pisa im *Liber abbaci* (Scritti I, Roma 1857, S. 406ff. und Libri[30]) II S. 358ff) neben der primitiven Ausdrucksweise *medietas radicum* für $\frac{p}{2}$ die

29) Vgl. Sukumar Ranjan Das in Osiris 2, 1936, S. 205.

30) Vgl. Libri, Hist. d. sciences math. en Italie. Paris 1836—41, I, S. 253—297.

sorgfältigere *numerus medietatis radicum.* Aber Luca Pacioli sagt in der (bei Tropfke III[3] S. 215 wiedergegebenen) Auflösung von $x^2+4x=5$: *Smeçça le cose, hälfte die Dinge,* d. h. den Koeffizienten 4. In Cardanos *Practica arithmeticae* von 1539 finden wir (*Cap. 49*) noch dieselbe Ausdrucksweise, z. B. *dimidia radices, hälfte die Wurzeln,* d. i. $p$, oder *adde dimidium radicum, füge die Hälfte der Wurzeln hinzu,* d. i. $\frac{p}{2}$. In der *Ars magna* von 1545 aber sagt er fast immer korrekt *dimidium numeri rerum.* Tartaglia folgt in allgemeinen Lösungsvorschriften der alten Redeweise *le cose* für den Zahlenfaktor von $x$, so auch in den bekannten Versen für die Lösungsformel der kubischen Gleichung $x^3+px=q$ (Tropfke III[3] S. 136), wo *le cose* nacheinander $px$ und $p$ bedeutet, falls nicht etwa das im zweiten Falle hinzugefügte Wort *neto* das bloße $p$ kennzeichnen soll. Jedoch ist er sich der Mangelhaftigkeit des Ausdrucks bewußt und weist (fol. 5 b seines *General Trattato* von 1560) in einer besonderen Notiz darauf hin, daß die Rechnung nicht mit den *dignità* (d. i. $a_\nu x^\nu$), sondern mit den *numeri simplici* (d. i. $a_\nu$) vorzunehmen sei. In den Lösungsbeispielen ist er meist genau und sagt z. B. *il numero di quelle 6 cose.* Vielleicht ließ er sich durch Cardano belehren. Ich habe nicht gesucht, bei welchen anderen Algebraikern das terminologische Gewissen oder das bessere Vorbild den Sieg über die schlechte Tradition davongetragen hat.

Arithmetische und algebraische Zeichensymbolik, die ja auch bei Indern und späteren „Arabern" in ihren Anfängen beobachtet wird, konnte hier außer Betracht bleiben. Nicht minder wichtig als diese Zeichensymbolik erscheint mir die Wortsymbolik der „rhetorischen" Darstellungsweise, mit der wir es hier zu tun hatten. Worte wie *Vermögen, Wurzel, ǧuḏūr = Wurzeln, aǧḏār = Wurzeln* hatten symbolischen Gebrauch und Kurs, wie es für uns die Zeichen $x^2$, $x$, $px$, $p$ haben. Obwohl die Untersuchung der Wortsymbolik psychologisch reizvoll und historisch aufschlußreich ist, hat man ihr hinsichtlich der Koeffizienten zum Teil wenig Sorgfalt zugewandt. Rosen[2]) übersetzte al-Ḫwārizmīs *aǧḏār* an einigen Stellen mit *the coefficient of the roots* und an anderen bei derselben Bedeutung mit *the roots,* und der verdiente Verfasser einer zweibändigen Geschichte der mathematischen Bezeichnungen[31]) gibt (I S. 84) in einer Probe von al-Ḫwārizmīs rhetorischer Darstellungsweise vertrauensvoll Rosens freie Übersetzung wieder: *Halve the number of the roots.* Im Original heißt es: . . . *daß du die Wurzeln (al-aǧḏār) halbierst.*

31) F. Cajori, A History of Mathematical Notations I. II. Chicago 1928—29.





## Übersetzung[32]) von Aya Sofya 2457, 3.

*Im Namen Gottes, des barmherzigen Erbarmers!* 39a

*Mitteilung von Abul-Ḥasan Ṯābit b. Qurra*

*über die Verifizierung der Probleme der Algebra durch geometrische Beweise.*

*Die Grundformen, auf die die meisten Probleme der Algebra zurückkommen, sind drei. Die erste Grundform ist: Vermögen* (Einzahl) *und Wurzeln ist gleich Zahl. Die Art und Weise in der Auflösung hiervon durch den sechsten Lehrsatz des zweiten Buches der Schrift Euklids ist so, wie ich (es nun) beschreibe: Wir machen (Fig. 1) das Vermögen zu dem Quadrat abgd, machen (, daß) in bh von den Vielfachen der Einheit, in der die Linien gemessen werden, (ein Betrag) gleich der gegebenen Menge der Wurzeln (enthalten ist,)*[33]) *und vollenden die Fläche dh*[34]). *Dann ist die Wurzel offenbar ab, da das Vermögen das Quadrat abgd ist, und das* (nämlich die Wurzel) *ist auf dem Gebiet der Rechnung und der Zahl gleich dem Produkt ab mal der Einheit, in der die Linien gemessen werden. Also ist das Produkt ab mal der Einheit, in der die Linien gemessen werden, die Wurzel auf seiten der Rechnung und der Zahl*[35]). *Nun ist aber in bh von diesen Einheiten (ein Betrag) gleich der gegebenen Menge der Wurzeln (enthalten), also ist das Produkt ab mal bh gleich den Wurzeln des Problems auf dem Gebiet der Rechnung und der Zahl. Es ist aber das Produkt ab mal bh die Fläche dh, weil ab gleich bd ist. Also ist die Fläche dh nach dieser Weise gleich den Wurzeln des Problems. Also ist die ganze Fläche gh gleich dem Vermögen zusammen mit den Wurzeln. Nun ist aber das Vermögen mit den Wurzeln zusammen gleich einer bekannten Zahl. Also ist die Fläche gh* 39b *bekannt, und sie ist gleich dem Produkt ah mal ab, weil ab gleich ag ist. Also ist das Produkt ha mal ab bekannt, und die Linie bh ist bekannt, weil die Zahl ihrer Einheiten bekannt ist. So kommt also nun die Sache auf ein gegebenes geometrisches Problem zurück, und zwar folgendes: Die Linie bh ist bekannt. Zu ihr wird ab hinzugefügt, wobei das Produkt ha mal ab bekannt ist. Nun ist im sechsten Lehrsatz des zweiten Buches der Schrift der Elemente bewiesen, daß, wenn die Linie bh im Punkte w gehälftet wird, das*

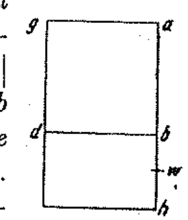



Fig. 1.

32) Das in Klammern und das in den Fußnoten Gesagte und die Figur 2* habe ich teils zur Ergänzung, teils zur Erläuterung hinzugefügt.

33) D. h. machen *bh* gleich soviel Längeneinheiten, wie der Koeffizient des linearen Gliedes beträgt.

34) Ṯābit bezeichnet wie die Griechen ein Rechteck durch die Angabe zweier einander gegenüberliegender Ecken. Daß auch al-Ḫwārizmī dies tut, erscheint mir beachtenswert.

35) Die Wiederholung ist vielleicht durch Hereinnahme einer Glosse in den Text entstanden.

*Produkt ha mal ab zusammen mit dem Quadrat von bw gleich dem Quadrat von aw ist. Es ist aber das Produkt ha mal ab bekannt und das Quadrat von bw bekannt. Also ist das Quadrat von aw bekannt, also aw bekannt; und wenn von ihm bw, das bekannt ist, abgezogen wird, so bleibt ab als bekannt übrig, und das ist die Wurzel. Und wenn wir sie mit sich selbst vervielfachen, so ist das Quadrat abgd bekannt, d. i. das Vermögen, und das ist das, was wir beweisen wollten.*

*Dieses Verfahren ist übereinstimmend mit dem Verfahren der der Algebra*[36]*) Beflissenen bei der Lösung dieses Problems. Daß sie die Hälfte der Zahl der Wurzeln nehmen, ist nämlich so, wie daß wir die Hälfte der Linie bh nehmen, und daß sie sie mit sich selbst vervielfachen, ist ebenso, wie daß wir das Quadrat der Hälfte der Linie bh nehmen. Daß sie die Zahl zu dem, was herauskommt, hinzufügen, ist so, wie daß wir das Produkt ha mal ab hinzufügen, damit aus jenem allem*
40a *das Quadrat | der Summe von ab und der halben Linie (*$bw = \frac{1}{2}bh$*) zusammengebracht werde. Daß sie die Wurzel von dem Herauskommenden nehmen, ist so, wie daß wir sagen: die Summe von ab und der halben Linie ist bekannt, wenn ihr Quadrat bekannt ist*[37]*). Daß sie davon ⌈die halbe Zahl der Wurzeln abziehen, so daß ihnen der Rest herauskommt, und das ist die Wurzel, ist so, wie daß wir die Hälfte von bh* (oder: *den Betrag der Linie bw) abziehen*[38]*)⌉, damit der Rest herauskomme, wie uns ab herauskam. Sie vervielfachten ihn mit sich selbst, und so bestimmten sie das Vermögen, wie wir aus ab sein Quadrat, und das ist das Vermögen, bestimmten.*

*Die zweite Grundform. Sie (lautet): Vermögen* (Einzahl) *und Zahl ist gleich Wurzeln. Die Art und Weise in der Auflösung hiervon nach dem zweiten Buch der Schrift Euklids durch den fünften Lehrsatz ist so, wie ich (es nun) beschreibe: Wir machen (Fig. 2) das Vermögen zum Quadrat abgd und machen (, daß) in ah von den Vielfachen der Einheit, in der die Linien gemessen werden, (ein Betrag) gleich der gegebenen Menge der Wurzeln (enthalten ist). Dann ist offenbar ah länger als ab, da*[39]*) die Wurzeln, die auf dem Gebiet der Rechnung das Produkt ga mal ah sind, größer sind als das Vermögen. Wir vollenden die Fläche gh und beweisen, wie gesagt wurde, daß sie gleich den Wurzeln nach der Weise der Rechnung ist. Und wenn von ihr bg, d. i. das Vermögen, abgezogen wird, bleibt dh gleich der Zahl übrig. Also ist dh bekannt, und es ist gleich dem Produkt ab mal bh, und die Linie ah ist (auch) bekannt. So ist also nun die*

36) Die Handschrift hat *ǧadr Wurzel* statt *ǧabr Algebra.*

37) Handschrift: *wenn sie ein bekanntes Quadrat ist.* Doch entsteht dieser Fehler im Arabischen durch die Änderung eines einzigen Buchstaben.

38) Die in ⌈ ⌉ eingeschlossene Stelle ist die Übersetzung meiner Wiederherstellung des verderbten Textes.

39) Die Handschrift hat *idā wenn* statt *id da.*





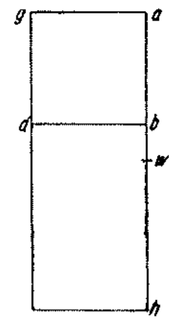



Fig. 2.

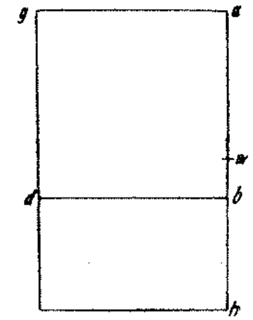



Fig. 2*.

*Sache darauf herausgekommen, daß die Linie ah bekannt ist (und) in b so geteilt wird, daß das Produkt | ab mal bh bekannt ist. Nun ist im fünften Lehrsatz des zweiten Buches der Schrift Euklids bewiesen, daß, wenn ah in w gehälftet wird, das Produkt ab*[40]*) mal bh zusammen mit dem Quadrat von bw gleich dem Quadrat von aw ist. Es ist aber aw bekannt, und sein Quadrat ist bekannt, und das Produkt ab mal bh ist bekannt. Also bleibt das Quadrat von bw als bekannt übrig, also ist bw*[41]*) bekannt, und wenn es (Fig. 2) von aw abgezogen oder (Fig. 2*) zu ihm hinzugefügt wird, kommt ab als bekannt heraus, und das ist die Wurzel. Und wenn wir sie mit sich selbst vervielfältigen, so ist abgd bekannt, d. i. das Vermögen, und das ist das, was wir beweisen wollten.* 40b

*Auch dieses Verfahren ist übereinstimmend mit dem Verfahren der Algebraleute bei der Rechnung dieses Problems. Deshalb läßt dieses nach allen beiden Verfahrungsweisen die Anwendung der Hinzufügung und (die der) Abziehung hinsichtlich der Linie wb zu.*

*Die dritte Grundform. Sie (lautet): Zahl und Wurzeln ist gleich Vermögen. Die Art und Weise in der Auflösung hiervon durch den sechsten Lehrsatz des zweiten Buches der Schrift Euklids ist so, wie ich (es nun) beschreibe: Wir machen (Fig. 3) das Vermögen zu dem Quadrat abgd, machen (, daß) in ah von den der Einheit, in der die Linien gemessen werden, gleichen (Größen) (ein Betrag) gleich der Menge der Wurzeln (enthalten) ist. Dieser ist notwendig bekannt und kleiner als ab, weil die Wurzeln, die nach der Weise der Rechnung das Produkt ga mal ah sind, kleiner als das Vermögen sind, | und vollenden die Fläche gh. Dann ist die Fläche gh gleich den Wurzeln, und es bleibt die Fläche hd gleich der Zahl übrig und ist somit bekannt. Sie ist aber das Produkt ab mal hb. So ist also nun die Sache darauf herausgekommen, daß die Linie ah bekannt ist und zu ihr hb so hinzugefügt wird, daß das Produkt ab mal bh bekannt ist. Nun ist im sechsten Lehrsatz des zweiten Buches der Schrift Euklids bewiesen, daß, wenn ah in w gehälftet wird, das Produkt ab mal bh (zusammen mit dem Quadrat von hw gleich dem* 41a

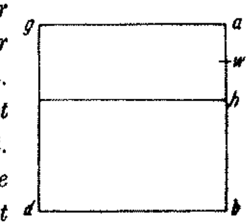



Fig. 3.

40) Die Handschrift hat *ah.*    41) Die Handschrift hat *bd.*

*Quadrat von wb ist. Es ist aber das Produkt ab mal bh) bekannt, und das Quadrat von hw ist bekannt. Also ist das Quadrat von wb bekannt, also die Linie wb bekannt. Auch die Linie wa ist bekannt, da*[39]*) sie die Hälfte des bekannten ah ist*[42]*). Also ist wb bekannt und aw bekannt, also das ganze ab bekannt, d. i. die Wurzel, und wenn wir sie mit sich selbst vervielfachen, ist das Quadrat abgd bekannt, d. i. das Vermögen. Das ist das, was wir beweisen wollten, und (es ist) der Weg dieses Problems, dessen Ziel in der Übereinstimmung des Verfahrens seiner Lösung durch die Geometrie mit dem Verfahren seiner Lösung durch die Algebra besteht.*

*Es endet (die Mitteilung), und Gott ist der Spender der Gnade.*

## Aya Sofya 2457, 3.

Über die Sammelhandschrift AS 2457 vergleiche man die Beschreibung durch M. Plessner[43]). Der hier wiedergegebene Teil 2457, 3, 39a—41a ist nach M. Krause[12]) im Jahre 863 der Flucht, d. i. 1458—59 n. Chr. geschrieben. Die Schrift ist ein schön lesbares punktiertes Nasḫī. Die von mir überstrichenen Teile erscheinen in meiner Photographie schwach und dürften in der Hs. rot geschrieben sein. Einzelne Stellen, so die $111_{1-2}$ angerichtete Verwirrung und das mehrmals rot geschriebene Textwörtchen به, das mit der gerade vorher genannten Strecke به verwechselt wurde, zeigen, daß der Schreiber vom Inhalt nichts verstand. Dies beweisen auch die Figuren, die ich hier in geometrischer Ähnlichkeit mit der Handschrift wiedergebe.

Die in runde Klammern eingeschlossenen Worte habe ich ergänzt. Die vermutlich rot geschriebenen und anfangs außerdem überstrichenen Buchstaben für die Punkte, Strecken und Rechtecke sind, wo ich nichts anderes vermerkt habe, verbunden geschrieben, also z. B. ابجد, wofür ich ابجد schreibe.

Beigefügt ist die von derselben Hand geschriebene Seite *41b*, die Plessner und Krause irrtümlich noch zu der Abhandlung Ṯābits rechnen. Diesen Text vergleiche man mit der Randbemerkung zu *Codex Leidensis* 399, 1 *Pars* I, Kopenhagen 1893, S. 6 Fußnote 2. Zum Inhalt siehe Tropfke[3]) IV, 3. Aufl. S. 50. Mit Ya'qūb b. Isḥāq dürfte al-Kindī gemeint sein.

42) Die Handschrift hat: *wenn die Hälfte von ah bekannt ist.*
43) M. Plessner, Beitr. z. isl. Literaturg. Islamica 4, 1931, S. 526—527.





### Übersetzung von fol. *41b*.

*Von Ya'qūb b. Isḥāq über die Übersetzung der Einleitung der Schrift Euklids.* *41b* *Die Gründe, von denen her die Wissenschaft ist (die Prinzipien, von denen die Wissenschaft ausgeht?), und durch deren Kenntnis das Gewußte umgrenzt wird, sind die Aussage (πρότασις), das Beispiel (ἔκθεσις), das Widersprechende (εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγή), die Überlegung (κατασκευή), die Unterscheidung (διορισμός), der Beweis (ἀπόδειξις) und der Schluß (συμπέρασμα). Die Aussage ist der zur Aufzeigung des Begehrens vor der Erklärung vorausgeschickte bejahende oder verneinende Ausspruch. Das Beispiel ist der Entwurf der Gestalten der Figuren* (oder: *der Entwurf der Figuren der Lehrsätze), über die die Aussage gemacht ist und durch die zu der Bedeutung der Aussage hingeführt wird. Das Widersprechende ist die Wendung der Aussage von ihrer Seite zu dem, was hinsichtlich der Setzung (nicht) möglich ist. Die Überlegung ist die Ordnung des Vorgebrachten hinsichtlich der Ableistung des Beweises der Aussage. Die Unterscheidung ist die Scheidung zwischen der möglichen und der unmöglichen Aussage. Der Beweis ist das Zeugnis über die Verifikation der Aussage, sei diese bejahend oder verneinend. Der Schluß ist das Ziel, dessen Kenntnis man sich vorgesetzt hatte, (und) dessentwegen alles vorausgeschickt wurde, was wir entworfen hatten. Ende.*

---

### Nachtrag zu Seite 96.

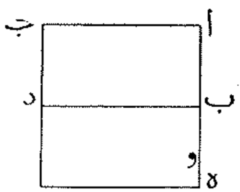
Als Zeit der Sammlung und Redaktion der Lehrbriefe der „Treuen Freunde" pflegt man die Mitte des 10. Jahrhunderts anzusetzen. Zitate in den Lehrbriefen sind der Literatur des 8. und 9. Jahrhunderts entlehnt (vgl. T. J. de Boer, *Iḵhwān al-Ṣafā'*. Enzykl. d. Islam II, S. 489—490). Es könnte also auch der in einer Abschnittsüberschrift des ersten Lehrbriefs vorkommende Ausdruck „die Algebraiker und die Geometer" auf das neunte Jahrhundert zurückweisen, in welchem Ṯābit b. Qurra diese beiden Arten von Mathematikern einander gegenüberstellte.

Ṯābits Schriftchen könnte dadurch veranlaßt sein, daß ihm die Zurückführbarkeit auf Euklid II bis dahin unzulänglich behandelt erschien. Er sagt: *Die Art und Weise in der Auflösung hiervon durch den sechsten Lehrsatz des zweiten Buches der Schrift Euklids ist so, wie ich (es nun) beschreibe.* Die Fassung dieses Satzes und der entsprechenden Sätze an der Spitze der Behandlung der beiden anderen Fälle kann für die Auffassung sprechen, daß die Zurückführbarkeit eine von den Mathematikern erörterte Angelegenheit war.

39a بسم الله الرحمن الرحيم

# قول لابى الحسن ثابت بن قرة
# فى تصحيح مسايل الجبر بالبراهين الهندسية

قال الاصول التى اليها يرجع اكثر مسايل الجبر ثلثة فالاصل الاوّل منها هو مال وجذور يعدل عددا الوجه فى استخراج ذلك بالشكل السادس من المقالة الثانية من كتاب اوقليدس على ما اصف نجعل المال مربّع ابجد ونجعل فى به من اضعاف الواحد الذى تقدّر به الخطوط مثل العدّة المفروضة للجذور ونتمّم سطح ده فمن البيّن انّ الجذر هو اب اذ كان المال هو مربّع ابجد وذلك فى باب الحساب والعدد مثل ضرب اب فى الواحد الذى تقدّر به الخطوط فضرب اب فى الواحد الذى تقدّر به الخطوط هو الجذر على جهة الحساب والعدد ولكن فى به من هذه الآحاد مثل عدّة الجذور المفروضة فضرب اب فى به مساوٍ لجذور المسئلة فى باب الحساب والعدد لكن ضرب اب فى به هو مسطّح ده لانّ اب مثل بد فسطح ده مساو لجذور المسئلة على هذه السبيل فجميع سطح جه مثل المال مع الجذور ولكن جميع المال والجذور مثل عدد معلوم فسطح جه|
39b معلوم وهو مثل ضرب ها فى اب لانّ اب مثل اج فضرب ها فى اب معلوم وخطّ به معلوم لانّ عدد آحاده معلوم فقد يرجع الامر الى مسئلة هندسية مفروضة وهى انّ خطّ به معلوم وزيد عليها اب وكان ضرب ها فى اب معلوما وقد تبيّن فى الشكل السادس من المقالة الثانية من كتاب الاصول انه اذا قسم خطّ به بنصفين على نقطة و وصار ضرب ها فى اب مع مربّع بو مثل مربّع او ولكن ضرب ها فى اب معلوم ومربّع بو معلوم فمربّع او معلوم فاو معلوم واذا نقص منه بو وهو معلوم بقى اب معلوم وهو الجذر واذا ضربناه فى مثله كان مربّع ابجد معلوما وهو المال وذلك ما اردنا ان نبين وهذا المسلك موافق لمسلك اصحاب الجبر فى استخراج هذه



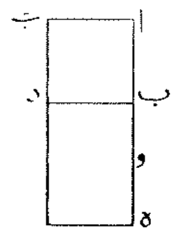

المسئلة وذلك انّ اخذهم نصف عدد الاجذار هو كاخذنا نصف خطّ به وضربهم ايّاه فى مثله هو كاخذنا مربّع نصف خطّ به وزيادتهم العدد على ما يجتمع هو كزيادتنا ضرب ها فى اب ليجمع من ذلك كلّه مربّع |
40a مجموع اب مع نصف الخط واخذهم جذر المجتمع هو كقولنا انّ مجموع اب مع

2. الحسن] الحسين — 5. يعدل] so! — 6. ابجد] اجد — تقدّر] يقدر — به] rot! — 7. ابجد] اجد — 8. تقدّر] يقدر — به] rot! — 9. تقدّر] يقدر — به] rot! — 13. فضرب ها] فضرب ها — 15. عليها] so! — 16. او] و schwarz! — 18. بقى اب معلوم] so! — 19. الجبر] الجذر — 21. وزيادتهم] وزدناهم —





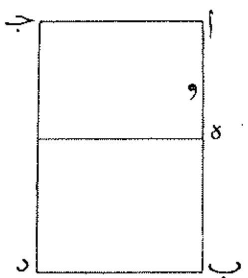
نصف الخط معلوم اذا كان مربّعه معلوما ونقصهم [من ذلك نصف عدد الاجذار فحصل لهم الباق وهو الجذر هو كنقصنا نصف به (مقدار خطّ بو :oder)] ليحصل الباق كما حصل لنا اب وضربوه فى مثله فعرفوا المال كما عرفنا من اب مربّعه وهو المال الاصل الثانى وهو مال وعدد يعدل جذورا الوجه فى استخراج ذلك من المقالة الثانية من كتاب اوقليدس بالشكل الخامس على ما اصف نجعل المال مربّع ابجد ونجعل فى اه من اضعاف الواحد الذى تقدّر به الخطوط مثل العدة المفروضة للاجذار فبيّن انّ اه اطول من اب اذ كانت الجذور وهى فى باب




الحساب ضرب جا فى اه اعظم من المال ونتمّم سطح جه ونبيّن كما قيل انه مساو للاجذار على مذهب الحساب واذا نقص منه بج وهو المال بقى ده مساويا للعدد فده معلوم وهو مثل ضرب اب فى به وخطّ اه معلوم فقد حصل الامر على انّ خطّ اه معلوم قسم على ب فكان ضرب|
40b اب فى به معلوما وقد تبيّن فى الشكل الخامس من المقالة الثانية من كتاب اوقليدس انه اذا قسم اه بنصفين على و فانّ ضرب اب فى به مع مربّع بو مثل مربّع او لكن او معلوم ومربّعه معلوم وضرب اب فى به معلوم فيبق مربّع بو معلوما فبو معلوم واذا نقص من او او زيد عليه حصل اب معلوما وهو الجذر واذا ضربناه فى مثله كان ابجد معلوما وهو المال وذلك ما اردنا ان نبيّن وهذا المسلك ايضا موافق لمسلك اهل الجبر فى حساب هذه المسئلة ولذلك احتملت على المذهبين جميعا استعمال الزيادة والنقصان فى خط وب الاصل الثالث وهو عدد وجذور يعدل مالا الوجه فى استخراج ذلك بالشكل السادس من المقالة الثانية من كتاب اوقليدس على ما اصف نجعل المال مربّع ابجد ونجعل فى اه من امثال الواحد الذى يقدر به الخطوط مثل عدّة الاجذار وواجب ان يكون معلوما وان يكون اقصر
41a من اب لانّ الجذور وهى على مذهب الحساب ضرب جا فى اه اقلّ من المال | ونتمّم سطح جه فسطح جه مثل الجذور ويبق سطح هد مساويا للعدد فهو اذن معلوم وهو ضرب اب فى هب فقد حصل الامر عل انّ خطّ اه معلوم وزيد فيه هب فكان ضرب اب فى دب معلوما وقد تبيّن فى

1. مربّعه] مربّعا — 1–2. Statt der in [] eingeschlossenen Worte hat die Hs. folgenden, anscheinend durch Hereinnahme von Verbesserungen oder Glossen verderbten Text: نصف عدد الاجذار هو كنقصنا نصف به فحصل لهم الباق وهو مقدار ونقصهم من ذلك نصف مقدار خطّ بو الجذر كنقصنا خطّ بو — 4. يعدل] so! — 5. تقدّر] يقدر — به] rot! — 6. اذ] اذا — 10. اه معلوم قسم] so! — 12. اب] اه — 13. فبو] فبد — 16. احتملت] so! — 17. يعدل] so! — 19. يقدر] so! — به] rot! — 21. هد] هو — 22. فيه] so! —

الشكل السادس من المقالة الثانية من كتاب اوقليدس انه اذا قسم اه بنصفين على و كان ضرب اب فى به (مع مربّع هو مثل مربّع وب ولكن ضرب اب فى به) معلوم ومربّع هو معلوم فمربّع وب معلوم فخط وب معلوم وخطّ وا معلوم اذ كان نصف اه المعلوم فوب معلوم واو معلوم فجميع اب معلوم وهو الجذر واذا ضربناه فى مثله كان مربّع ابجد معلوما وهو المال وذلك ما اردنا ان نبيّن وسبيل هذه المسئلة التى قبلها فى موافقة طريق استخراجها بالهندسة طريق استخراجها بالجبر




تم والله ولى التوفيق

41b ليعقوب بن اسحق فى ترجمة صدر كتاب اوقليدس انّ الاسباب التى يكون منها العلم وبمعرفتها يحاط بالمعلوم هى الخبر والمثال والخلف والنظر والفصل والبرهان والتمام امّا الخبر فهو القول الموجب او السالب المقدّم لاظهار البغية قبل التفسير وامّا المثال فهو رسم صور الاشكال المخبر عنها المدلول بها على معنى الخبر وامّا الخلف فصرف الخبر من جهته الى ما يمكن فى الوضع وامّا النظر فهو ترتيب القول فى تادية برهان الخبر وامّا الفصل فالفرقان بين الخبر الممكن وغير الممكن وامّا البرهان فهو الحجة على تحقيق الخبر موجبا كان الخبر او سالبا واما التمام فالغرض المقصود معرفته الذى من اجله قدّم جميع ما كنّا رسمناه تم

2. معلوم ومربّع] معلوما ومربّع — 3. اذ] اذا — 4. المعلوم] معلوما — الجذر] الجذور — 12. المخبر] للمخبر — جهته] oder جهة ?





## Verzeichnis der Fachausdrücke.

آحاد s. واحد.

اخذ die Hälfte einer Zahl 110 20, einer Strecke 111 20, das Quadrat einer Strecke 110 21 *nehmen, bilden*, die Wurzel aus einer Zahl *ausziehen* 110 23.

اصل pl. اصول *Grundform* = reduzierte Form einer quadratischen Gleichung 110 4. 1; 111 3. 17 كتاب الاصول *die Schrift der Elemente* (*Στοιχεῖα*) von Euklid 110 15.

برهان pl. براهين *Beweis* 110 3.

بقى *übrig bleiben* nach der Abtragung einer Strecke 110 18; 111 9, nach der Subtraktion eines Quadrats 111 13. 21; الباق *das Übrigbleibende, der Rest* einer Zahlensubtraktion 111 2.

باب *Kategorie, Gebiet*: فى باب الحساب (والعدد) *auf dem Gebiet der Rechnung (und der Zahl)* im Gegensatz zum geometrischen Verfahren 110 8. 10; 111 6, vgl. جهة und مذهب.

بيّن *zeigen, beweisen* 110 19; 111 7. 15; 112 6. تبيّن *es wurde, es ist bewiesen* 110 15; 111 11. 22. فمن البيّن ان 110 7 *und so ist offenbar, daß.* فبيّن ان 111 6,

جبر *Algebra* 110 3. 4 (. 19); 111 15; 112 7.

جذر *Wurzel* = Quadratwurzel 110 23. جذر *Wurzel* = $x$ = erste Potenz der Unbekannten einer quadratischen Gleichung 110 7. 9. 18; 111 14; 112 4. Daher جذور *Wurzeln* = lineares Glied einer quadratischen Gleichung, z. B. 110 4. 7. 10. 12, 12. اجذار dasselbe 110 20; 111 6. 8. Vgl. عدد und عدّة.

جمع: يجمع eine Summe *wird zusammengebracht* 110 22. ما يجتمع *was* beim Quadrieren einer Zahl *herauskommt* 110 22. مجتمع *Ergebnis* einer Addition, *Summe* 110 23. مجموع *Summe* einer Strecke mit (مع) einer Strecke 110 22. 23. جميع المال والجذور *das Vermögen mit den Wurzeln zusammen* 110 12.

حساب *Rechnung* 110 8. 9. 10; 111 7. 8. 20, *rechnerische Lösung* 111 16.

حصل *herauskommen* bei der Subtraktion von Zahlen 111 1, von Strecken 111 2. 2. 11, bei der Addition von Strecken 111 14. حصل الامر على ان *die Sache läuft darauf hinaus, daß* 111 10. 22.

خطّ pl. خطوط *Linie* = Strecke z. B. 110 6. 8. 9. 13. 11. 16. S. a. قدّر.

مذهب: على مذهب الحساب *auf die Weise der Rechnung* 111 8. 16. 20, vgl. باب und جهة.

مربّع *Quadrat* als geometrische Figur z. B. 110 6. 7. 16. 17. 17. 17. 18.

رجع *zurückkommen, hinauslaufen, reduziert werden können auf* (الى) 110 4. 14.

زاد (i) eine Strecke zu (على, aber 111 22 فى) einer anderen *hinzufügen* 110 14; 111 14, das Produkt zweier Strecken 110 22, eine Zahl 110 21, zu (على) einer anderen *hinzufügen, addieren.*

مسئلة pl. مسائل *Problem* z. B. 110 3. 4. 10.

سبيل *Weg, Lösungsverfahren* eines Problems 112 6.

سطح *Fläche,* für ein Rechteck gebraucht z. B. 110 7. 12. 12. مسطّح *Fläche,* ebenso gebraucht 110 11.

مسلك *Weg, Verfahren* 110 19. 19; 111 15. 15;

مساوٍ mit ل *gleich* z. B. 110 10. 11.

شكل *Lehrsatz, Theorem* z. B. 110 5. 15.

تصحيح *Richtigkeitsnachweis, Verifikation* 110 3.

ضعف pl. اضعاف *Vielfache* 110 6; 111 5.

ضَرَبَ *vervielfachen, multiplizieren* eine Zahl mit (في) sich selbst 110 21; 111 3, eine Strecke mit (في) sich selbst zur Darstellung des Quadrats ihrer Maßzahlen 110 18

ضَرْب *Produkt* einer Strecke mit (في) der Längeneinheit 110 8. 8–9; *Produkt* einer Strecke mit (في) einer Strecke zur Darstellung des Produkts ihrer Maßzahlen z. B. 110 10. 11. 13. 13. 15. 16. 17.

طريق *Verfahren, Methode* einer Lösung 112 6. 7.

اطول من eine Strecke ist *länger als* 111 6.

عدد *Zahl*, im Gegensatz zu geometrischen Gebilden 110 9. 10; *Anzahl* 110 14; *Zahl* = absolutes Glied in der quadratischen Gleichung z. B. 110 5. 21; 111 4. 9. عدد معلوم *bekannte Zahl* = absolutes Glied in der quadratischen Gleichung 110 12; عدد الاجذار *die Zahl der Wurzeln* = Koeffizient des linearen Gliedes einer quadratischen Gleichung 110 20; 111 1. عِدّة *Anzahl, Menge, Quantität* 110 6; 111 6. عِدّة الجذور 110 10 und عِدّة الاجذار 111 19 *die Menge der Wurzeln* = Koeffizient des linearen Gliedes einer quadratischen Gleichung.

عدل *gleich sein*: يعدل *ist gleich* (=) in einer Bestimmungsgleichung 110 5; 111 4. 17.

اعظم من die Wurzeln (px) sind *größer als* 111 7.

معلوم *bekannt* z. B. 110 13. 13. 14. 14. 17. 17. 17. 18. 18. 18 S. a. عدد.

مفروض *gegeben* 110 7. 10. 14; 111 6.

قدّر *messen*: الواحد الذى تقدّر به الخطوط *die Eins, durch die die Linien gemessen werden* = die Einheitsstrecke, die Längeneinheit 110 6. 8. 9; 111 5. 19. مقدار *Betrag einer Strecke* 111 2.

قسم eine Strecke in (على) einem Punkte *teilen* 111 10. قسم بنصفين eine Strecke in (على) einem Punkte *hälften* 110 16; 111 12; 112 1.

اقصر من eine Strecke ist *kürzer, kleiner als* 111 19.

اقل من ein Produkt (Rechteck) ist *kleiner als* 111 20.

مثل pl. امثال m. Gen. *Gleiches, Gleichwert*, z. B. مثل العدة *Gleichwert der Menge*, d. h. *ein der Menge gleicher Wert* 110 8, اب مثل اج *ab ist gleich ag* 110 13, ضربناه فى مثله *wir vervielfachen sie* (die Wurzel) *mit sich selbst* 110 18.

مال *Vermögen* = Quadrat der Unbekannten in einer quadratischen Gleichung z. B. 110 4. 6. 7.

مع *mit, zusammen mit*, d. h. plus 110 12; 111 12.

نصف *Hälfte* einer Zahl 110 20, einer Strecke z. B. 110 21. S. a. قسم.

نقص eine Strecke von (من) einer anderen *abziehen, abtragen* 110 17; 111 2. 14. 16, ein Quadrat von (من) einem Rechteck 111 8, eine Zahl von (من) einer anderen *abziehen* 111 1.

نقطة Punkt 110 16.

هندسة *Geometrie* 112 7. هندسى *geometrisch* 110 3. 14.

جهة: على جهة الحساب والعدد *auf Seiten der Rechnung und der Zahl* 110 9. Vgl. باب und مذهب.

واحد pl. آحاد *Eins, Einheit* 110 6. 9. 9. 14; 111 5. 19, vgl. قدّر.