Verzicht auf jede rein optische Festlegung der Lichteinheit soll als Einheit der Lichtstrom gelten, der in irgendeiner näher zu kennzeichnenden lichtelektrischen „Normalapparatur" die elektrische Leistung von 1 Watt erzeugt; das ist das sogenannte „Lichtwatt".

Die angedeuteten Gedankengänge sind natürlich nicht für die Unterstufe bei Besprechung des Photometers geeignet. Sie lassen sich aber recht fruchtbringend in den Schülerübungen oder im zusammenfassenden Endunterricht in OI verwenden. Die Versuche selbst sind so einfach, daß man sie unbedenklich von Primanern ausführen lassen kann.

Auf wieviel verschiedene Arten läßt sich ein Geldbetrag in kleiner Münze ohne und mit Benutzung des Vierpfennigstücks auszahlen?

Von PAUL LUCKEY in Marburg.

Vor dem Kriege wurde in dieser Zeitschrift (XVI, 1910, S. 90, XVII, 1911, S. 31) die Preisfrage gestellt und gelöst: „Auf wie viele verschiedene Arten läßt sich ein Taler in deutschem Gelde wechseln?" Inzwischen ist das Talerwechseln eine seltenere Beschäftigung geworden, und nach Zeiten der runden Zahlungen kommt der Pfennig wieder zu Ehren. Um einen gewissen Begriff vom Nutzen der Einführung des Vierpfennigstücks zu bekommen, fragen wir: Auf wieviel verschiedene Arten läßt sich der Betrag von n Pfg in roter und gelber Münze *ohne* und *mit* Benutzung des Vierpfennigstücks auszahlen?[1]) Die Zahlentafel gibt die Antwort für $n = 1$ bis $n = 30$. Es lassen sich danach z. B. 28 Pfg *ohne* das Vierpfennigstück auf 82 Arten, *mit* ihm auf 231 Arten auszahlen.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f (1, 2, 5, 10; n)	1	2	2	3	4	5	6	7	8	11	12	15	16	19	22
f (1, 2, 4, 5, 10; n)	1	2	2	4	5	7	8	11	13	18	20	26	29	37	42

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
f (1, 2, 5, 10; n)	25	28	31	34	40	43	49	52	58	64	70	76	82	88	98
f (1, 2, 4, 5, 10; n)	51	57	68	76	91	100	117	128	149	164	187	204	231	252	285

Mit $f(a_1, a_2, \ldots, a_k; n)$ bezeichnen wir die Anzahl der verschiedenen Auszahlungsmöglichkeiten von n Pfg bei Verwendung von Münzen zu a_1 Pfg, a_2 Pfg, ..., a_k Pfg. Diese Funktion f ist nichts anderes als die Anzahl der nicht negativen ganzzahligen Lösungen der diophantischen Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k = n.$$

Zahlungen, bei denen der Empfänger etwas herausgibt, lassen wir also außer Betracht.

Es gilt die Formel

$$f(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}; n) = f(a_1, \ldots, a_k; n) + f(a_1, \ldots a_k, a_{k+1}; n - a_{k+1}). \tag{1}$$

Denn die Auszahlungen von n Pfg in Münzen zu a_1 Pfg, ..., a_{k+1} Pfg enthalten zum Teil *keine* Münze zu a_{k+1} Pfg — das gibt $f(a_1, \ldots, a_k; n)$ Möglichkeiten. Zum anderen Teil enthalten sie *mindestens eine* Münze zu a_{k+1} Pfg — dann sind die übrigen $(n - a_{k+1})$ Pfg noch auf $f(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}; n - a_{k+1})$ verschiedene Arten auszahlbar.

Die Formel (1) gilt zunächst nur für $n > a_{k+1}$. Sie gilt aber für jedes ganzzahlige n, wenn wir festsetzen, daß die Funktion f für $n = 0$ den Wert 1 und für negative $n = -m$ den Wert 0 erhält.

Da man einen Betrag nur auf *eine* Art in Einpfennigstücken auszahlen kann, so ist $f(1; n) = 1$ für alle positiven Werte von n. Nach der Festsetzung ist ferner $f(1; 0) = 1$ und $f(1; -m) = 0$. Damit ist die Tafel für $f(1; n)$ aufgestellt. Gehen wir nun zu $f(1, 2; n)$ über, so kennen wir nach der Festsetzung schon $f(1,2; -m) = 0$ und $f(1, 2; 0) = 1$. Die Werte der Funktion $f(1, 2; n)$ für $n = 1, 2, \ldots$ können wir dann nacheinander mit Hilfe der Formel (1) berechnen. Auf demselben Wege finden wir hierauf nach-

[1]) Natürlich sind für die Stückelung der Scheidemünze mancherlei Gesichtspunkte maßgebend. Ferner spielt die *Wahrscheinlichkeit* der Auszahlbarkeit einer Summe durch vorgeschriebene Münzsorten eine Rolle. Diese Wahrscheinlichkeit hängt von den in Umlauf befindlichen Mengen der einzelnen Sorten ab. Da bei größeren Beträgen die Zahlungen mit allzuvielen Geldstücken seltener sind, kann man auch fragen: Auf wieviel Arten sind n Pfg durch höchstens i Geldstücke auszahlbar?

einander die Werte von f (1, 2, 4; n), f (1, 2, 5; n), f (1, 2, 4, 5; n) und schließlich die Werte der obigen Zahlentafel. Schablonen mit Fenstern für die drei Zahlen der Formel (1) erleichtern die schrittweise Niederschrift dieser Tabellen.

Die Darstellung der Funktionen f durch geschlossene Ausdrücke ist ein Problem der partitio numerorum, das im allgemeinen tiefer gehende mathematische Hilfsmittel erfordert (Literatur bei L. E. DICKSON, History of the Theory of Numbers, Vol. II, Chapt. 3, Washington 1920; dazu: W. KAPTEYN, Amst. Ak. Versl. Nat. Afd. 28 [1920], 480—487). Daß aber in Sonderfällen elementare Lösungen möglich sind, sollen die folgenden Beispiele zeigen.

Soll man eine gerade Zahl n Pfg in Ein- und Zweipfennigstücken auszahlen, so enthält die Auszahlung entweder gar kein Zweipfennigstück, oder eines, oder zwei, ..., oder höchstens $\frac{1}{2}$ n Zweipfennigstücke[1]). Das sind $\frac{1}{2}(n+2)$ Auszahlungsmöglichkeiten. Für ungerades n erhält man entsprechend $\frac{1}{2}(n+1)$ Auszahlungsarten. Beide Fälle fassen wir zusammen in der für jedes nicht negative n gültigen Formel

$$f(1, 2; n) = \tfrac{1}{4}(2n+3) + \tfrac{1}{4}(-1)^n. \tag{2}$$

Auf Grund derselben Überlegung finden wir für jedes durch 5 teilbare nicht negative $n = 5\nu$

$$f(5, 10; 5\nu) = \tfrac{1}{4}(2\nu+3) + \tfrac{1}{4}(-1)^{\nu}. \tag{3}$$

Man kann schreiben

$$n = 10\, n_{10} + r_{10},$$

wo r_{10} die Einerziffer von n ist und n_{10} die Zahl, die sichtbar bleibt, wenn man die Einerziffer verdeckt.

Es sei zunächst r_{10} eine der Zahlen 5, 6, 7, 8, 9. Dann ist

$$\begin{aligned} f(1,2,5,10;n) &= f(5,10;0)\cdot f(1,2;n) + f(5,10;5)\cdot f(1,2;n-5) \\ &\quad + f(5,10;10)\cdot f(1,2;n-10) + f(5,10;15)\cdot f(1,2;n-15) \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad + f(5,10;10\,n_{10})\cdot f(1,2;n-10\,n_{10}) \\ &\qquad + f(5,10;10\,n_{10}+5)\cdot f(1,2;n-10\,n_{10}-5). \end{aligned} \tag{4}$$

Denn es stellt z. B. der vierte Summand die Anzahl aller Auszahlungen von n Pfg dar, bei denen 15 Pfg in Fünf- und Zehnpfennigstücken und die übrigen (n — 15) Pfg in Ein- und Zweipfennigstücken ausgezahlt werden. Jede Auszahlung von 15 Pfg in gelber Münze ist mit jeder Auszahlung von (n — 15) Pfg in roter Münze zu kombinieren; daher das Malzeichen. Statt (4) schreiben wir kürzer

$$\begin{aligned} f(1, 2, 5, 10; n) = \sum_{i=0}^{n_{10}} [&f(5, 10; 10\,i)\cdot f(1, 2; n-10\,i) \\ &+ f(5, 10; 10\,i+5)\cdot f(1,2; n-10\,i-5)]. \end{aligned}$$

Setzt man hier die Werte der Funktionen f nach (2) und (3) ein und rechnet aus, so ergibt sich

$$f(1,2,5,10;n) = \sum_{i=0}^{n_{10}} (i+1)(n-10\,i-1) = -10\sum_0^{n_{10}} i^2 + (n-11)\cdot\sum_0^{n_{10}} i + (n-1)(n_{10}+1).$$

Nun wendet man die Summenformeln für die ersten und die zweiten Potenzen der natürlichen Zahlen an, ersetzt n durch $10\,n_{10} + r_{10}$ und findet schließlich

$$f(1, 2, 5.\ 10; n) = \tfrac{1}{6}(n_{10}+1)(n_{10}+2)(10\,n_{10} + 3\,r_{10} - 3).$$

Ist r_{10} eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, so gilt dieselbe Ableitung mit der Abänderung, daß man das zuviel hinzugefügte letzte Glied von (4) wieder abziehen muß. Die Ausrechnung ergibt für dieses Glied den Wert $\frac{1}{4}(n_{10}+1)[2\,r_{10} - 7 - (-1)^{r_{10}}]$. Somit gilt für beliebige nicht negative ganzzahlige Werte von n die Formel

$$f(1, 2, 5, 10; n) = \tfrac{1}{6}(n_{10}+1)(n_{10}+2)(10 n_{10} + 3\,r_{10} - 3) + z\,(n_{10}+1), \tag{5}$$

wobei $z = 2$ für $r_{10} = 0$

$z = 1$ für $r_{10} = 1$ und $r_{10} = 2$

$z = 0$ für die 7 übrigen Werte von r_{10}.

Beispiel: Für $n = 22$ ist $n_{10} = 2$, $r_{10} = 2$, $z = 1$, also $f(1, 2, 5, 10; 22) = 49$, wie es auch die Zahlentafel anzeigt.

Ich gebe drei weitere derartige Formeln an, deren Beweis dem Leser überlassen sei.

1. Ist r_5 der kleinste nicht negative Rest der Teilung von n durch 5, so gilt

$$f(1, 2, 5; n) = \tfrac{1}{20}[(n+4)^2 - (r_5 - 1)^2] + \delta. \tag{6}$$

[1]) Eine wiederholte Anwendung der Formel (1) läuft auf dieselbe Überlegung hinaus.

Bei Anwendung dieser Formel auf gegebene Zahlenwerte von n braucht man das Glied

$$\delta = \frac{1}{8}\,[(-1)^n + (-1)^{r_4}],$$

das seinem absoluten Werte nach kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, gar nicht auszurechnen, wenn man festsetzt, daß der Wert des vorhergehenden Ausdrucks, falls er keine ganze Zahl ist, auf die nächstliegende ganze Zahl auf- oder abzurunden ist.

2. Ist r_4 der kleinste nicht negative Rest der Teilung von n durch 4, so gilt

$$f(1, 2, 4; n) = \frac{1}{16}(n - r_4 + 4)\,[n + r_4 + 3 + (-1)^n]. \tag{7}$$

3. Ist endlich n_{20} die ganze Zahl, welche angibt, wie oft 20 in n enthalten ist (es darf ein Rest da sein), und n_4 die entsprechende Zahl für die Teilung von n durch 4, so gilt für jedes nicht negative ganze n

$$f(1, 2, 4, 5; n) = \frac{1}{120}(n_4 + 1)\,[16\,n_4\,(2\,n_4 + 1) + 24\,n_4\,(r_4 + 4) + 6\,(r_4 + 4)^2 + 15 \cdot (-1)^n] - \frac{5}{8}\,n_{20} - \frac{1}{4} \pm \varepsilon, \tag{8}$$

wo wiederum $\pm\,\varepsilon$ nur dazu dient, den Wert des vorhergehenden Ausdrucks auf die nächstliegende ganze Zahl auf- oder abzurunden.

Unser Problem aus dem Zahlungsverkehr des Bäckerladens ist auf andere Gebiete, z. B. auf die Stückelung der Briefmarken, übertragbar.

Zur Schulreform.

Die „Anordnung" im Biologieunterricht.

Von Iso Richard, Nürnberg.

Seit Junge spielt der Kampf um das Anordnungsprinzip eine bedeutsame Rolle. In der Tat ist die Form der Aufreihung des Stoffes immer ein charakteristisches Zeichen für das Vorwiegen eines bestimmten methodischen Gedankens. Als die Systematik im Mittelpunkt der Wissenschaft stand, da war auch die Anordnung nach systematischen Gesichtspunkten die Folge. Die Alten schritten ganz systematisch vor vom Urtier zum Affen[1]); später wurde der Weg umgekehrt beschritten.

Durch Herausstellen bestimmter Typen als Vertreter einer größeren Gruppe, etwa der Säugetiere, Vögel, kam schon ein gewisser psychologischer Zug in die Unterrichtspraxis. Hier stockte die geradlinige Entwicklung. Die systematische Ordnung blieb, obgleich das System in den Hintergrund trat, wahrscheinlich, weil man durch diese dogmatische Darbietung des Systems auch systematische Kenntnisse zu vermitteln glaubte. Man kehrte nun zu den Anregungen des großen Methodikers Junge zurück und verwendete die Idee der Lebensgemeinschaft als Anordnungsprinzip aufs neue. Wieder waren es die Volksschule und ihre Vertreter, die vorangingen und die Gedanken der Lebensgemeinschaft zu einem brauchbaren, führenden pädagogischen Hilfsmittel gestalteten. Nun strebt aber der Biologieunterricht an den höheren Schulen teilweise andere Ziele an als die Volksschule, so daß auch die Wege auseinander gehen. In der Volksschule ist der gesamte Unterricht in einer Hand vereinigt. In den höheren Schulen herrscht der Fachunterricht vor, dessen Hauptziel wissenschaftliche Vertiefung ist. Die Anordnung nach dem Prinzip der Lebensgemeinschaft führt aber immer zu einer gewissen Verflachung, da der eingehende Vergleich der verschiedenen Typen unmöglich ist. Von Methodikern wie Schoenichen[2]), Schäffer[3] und Müller[4]) sind vor Jahren schon grundsätzliche Bedenken gegen die Verwendung dieser Anordnung geäußert worden. Trotzdem hat diese Form der Stoffaufreihung im biologischen Unterricht manche Freunde gewonnen.

In der Tat hat dieses Verfahren auf den ersten Blick etwas überaus Bestechendes. Erst das eingehende Studium zeigt, daß den psychologischen Vorteilen schwere Nachteile gegenüberstehen. Alle Erlebnisse der Jugend in der Natur, alle Beobachtungen an Objekten geschehen innerhalb von Lebensgemeinschaften, unter dem Einfluß dieser Beziehungen. So ist denn auch verständlich, daß man die Natur„geschichte" in der Schule in dieser Form wieder erstehen lassen will. Zur Naturgeschichte der Haustiere gehört auch die Betrachtung der Bandwürmer, auch die der sie befallenden Insekten usw. Soll aber diese Besprechung zur Vergleichung aller Formen, zur Schaffung von morphologischen und systematischen Kenntnissen führen, so wird diese Anordnung bald versagen, da zu verschiedene Typen nur einen oberflächlichen Vergleich erlauben. Scheidet man diese Typen und ordnet ihre Vertreter nach ökologischem Prinzip, dann fallen

[1]) Jahresbericht der Kreisrealschule, Nürnberg 1878.
[2]) Methodik des naturgesch. Unterrichts von W. Schoenichen, Aufl. Leipzig 1926.
[3]) Ubl. Nr. 7, 1928. [4]) Nat. Monatsh. Nr. 3, 1928.