Materie vorgetäuscht angibt, sondern darum, daß andere Bewegungsformen in Betracht gezogen werden müssen. Es tritt auch bei allen Arbeiten hervor, daß zunächst das primitive Bild der Arbeitshypothese erweitert wird. Hier ist auch der Ort, um auf den Verlust hinzuweisen, den die deutsche Astronomie erfahren hat, als am 19. Februar 1934 Bottlinger in Babelsberg starb, denn gerade seine Arbeiten haben wesentlich zur Klärung dieser Fragen beigetragen. Die Struktur des Milchstraßensystems als Spiralen mit Sternwolken wird theoretisch von Reichenbächer in Königsberg behandelt. Beachtenswert ist in seinen Arbeiten, die als Weiterführung der Untersuchungen von Vogt in Jena anzusehen sind, daß neben der Erklärung für die Auslösung der Materie aus dem Zentralgebiet und der Bildung der symmetrischen Spirale mit der genähert logarithmischen Form die Veränderlichkeit des Weltkrümmungshalbmessers zu folgern ist. Die bisher angenommene Konstanz geht auf Einstein mit seiner Annahme der Gleichverteilung der Materie zurück. Auffallend ist, daß die bisher angegebenen Werte starke Unterschiede von 5 Millionen bis 2 Milliarden Parsec aufweisen. Diese Unterschiede sind nicht auf Fehler zurückzuführen, sondern hängen von der Wahl des Materials ab. Der Weltradius ist umgekehrt proportional der örtlichen Sterndichte, für die Milchstraße ist er am kleinsten, weil dort die Dichte am größten, größten Wert nimmt er an in Gegenden, wo die vereinzelten Spiralen sind, dort wo der Raum nahezu als leer anzusehen ist.

8. Die Struktur der Welt. Hier liegen vor allem zahlreiche Arbeiten vor, die sich mit der kosmologischen Konstanten, mit dem Lambdaglied befassen. Es werden die Näherungslösungen betrachtet, die eine Welt in Ausdehnung liefern, in allen wird vom Linienelement einer Raum-Zeit Mannigfaltigkeit ausgegangen. Eine völlig neue Bearbeitung ist im Januar 1933 von Milne erschienen. Er hebt hervor, daß die bisherige Behandlung der Frage nach der Ausdehnung eine Frage der Metrik war, beide Fälle waren möglich, die Ausdehnung und die Schrumpfung oder periodische Bewegung. Jetzt wird die Frage von kinematischem Gesichtspunkt aus behandelt. Es wird der Beweis geführt, daß diese Ausdehnung eine notwendige Erscheinung kinematischer Natur ist für ein System, das sich nicht im Gleichgewicht befindet, deren Teile sich in einem Raum bewegen und sich gegenseitig nicht beeinflussen. Milne gelangt zu seinen Ergebnissen ohne Metrik, ohne geometrisation of physics, nur mit der Voraussetzung der speziellen Relativitätstheorie, seine Aussagen sind nicht vom Beobachtungsort und nicht vom Bewegungszustand des Beobachters abhängig. Diese Arbeit gab natürlich Anlaß zu Einwänden anderer und deren Widerlegung durch Milne.

Vorliegender Bericht kann keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben, Zweck desselben ist lediglich ein Umreißen der Forschungsarbeit und der Ziele derselben während des vergangenen Jahres. Benützte Literatur: Zeitschrift für Astrophysik, Monthly Notices of the Royal Society, Astrophysical Journal und eigene Referate für die Physikalischen Berichte.

Wurzelfreie Kreisrechnung auf der Mittelstufe.

Von Josef Ehrenfried Hofmann in Nördlingen und Paul Luckey in Bonn.

Wir wollen im folgenden den Versuch machen, die verschiedenen Untersuchungen der letzten Jahre über die wurzelfreie Kreisrechnung[1]) zu einer Darstellung zusammenzufassen, die nicht bloß auf dem Papier steht, sondern wirklich

[1]) Diese Untersuchungen sind über mehrere Jahrgänge der U[nterrichtsblätter für] M[athematik und] N[aturwissenschaften] und der Z[eitschrift für] M[athematischen und] N[aturwissenschaftlichen] U[nterricht] hin verstreut: P. Luckey, Kreisberechnung ohne Wurzeln. UMN **37**, 1931, S. 219—225. — Bemerkungen zu dem Aufsatz: Kreisberechnung ohne Wurzeln. UMN **38**, 1932, S. 62. — Elementare

im Rahmen der Mittelstufe verwendet werden kann. Die augenblicklichen Lehrpläne setzen die Kreisrechnung an das Ende von U II bzw. O III; voraus geht die Vieleckslehre, in der Algebra die Technik der Umformungen von Quadratwurzeln. Wenn der Lehrer aus irgendeinem Grund ins Gedränge gerät, so wird die Kreisrechnung nur mehr gestreift — es bleibt eine peinliche Lücke im Lehrgang, die sich später rächen kann. Wir würden die Kreisrechnung lieber vorausnehmen und direkt an den Sehnen- und Sekantensatz anschließen. Da unsere Rechnung wurzelfrei geführt wird, ist die Quadratwurzeltechnik überflüssig geworden; sie kann zugunsten begrifflich wertvollerer Gegenstände etwas eingeschränkt werden. Die Vieleckslehre tritt getrost an den Schluß des Schuljahrs. Muß sie wegen Zeitnot gekürzt werden, so leidet nichts Wichtiges Schaden.

Die neue Kreisrechnung gründet sich auf eine Annäherung des Viertelkreises durch unregelmäßige Vielecke. Das „Nächstliegende" ist freilich der Archimedische Weg über die regelmäßigen Vielecke. Der Lehrer sollte nach unserer Meinung im Verlauf der einführenden Betrachtungen diesen klassischen Weg zur Berechnung des Kreises andeuten und auf die auftretenden Rechenschwierigkeiten hinweisen. Den Kunstgriff bei der Annäherung durch unregelmäßige Vielecke wird kein Schüler finden; das ist klar. Hier muß die Führung durch den Lehrer eintreten. Es bedeutet noch lange nicht, daß man den Schüler unselbständig macht, wenn man ihn gelegentlich einmal vor vollendete Tatsachen stellt.

Je nach Art der Klasse und Temperament des Lehrers sollte die neue Kreislehre in 3—5 Unterrichtsstunden durchgenommen werden können. Es kommt nur auf drei unterrichtliche Einheiten an. In den vorbereitenden Untersuchungen soll an die früheren Kenntnisse aus der Unterstufe angeknüpft, der Archimedische Gedanke entwickelt, seine rechnerische Unzweckmäßigkeit gestreift und der neue Gedanke dargelegt werden. Die Hilfsaufgabe und ihre Lösung bezieht sich auf die feinere Untersuchung eines Teilstücks der gewählten unregelmäßigen Näherungsfigur; ihre Bedeutung muß aus den vorbereitenden Untersuchungen klar sein. An den Schluß der allgemeinen Überlegung tritt das Rechenschema mit der Berechnung des Tangentenvielecks. Die Teilstücke werden gruppenweise berechnet. Jetzt folgt die eigentliche Kreisrechnung: nach Ausrechnung des Tangentenvielecks wird die Fehlerrechnung durchgeführt und die Berechnung des Kreisumfanges angeschlossen. Daß unser Verfahren auch für die Kreisteile dienlich ist, wird nur mehr gesagt, nicht aber ausgeführt. Hauptsache bleibt eine kurze, klare und durchsichtige Linienführung, die nicht über die Aufnahmefähigkeit der Schüler hinausgeht. Wir halten es für empfehlenswert, die häufig wiederkehrende Abb. 1 nicht an der Tafel zu entwerfen, sondern als Kohlezeichnung aufzuhängen und den Schülern dauernd vor Augen zu lassen.

1. Vorbereitende Untersuchungen. Der Schüler weiß von der Unterstufe her, daß man die Kreisfläche durch die Fläche eines umbeschriebenen regelmäßigen Vielecks annähert. Er erinnert sich an die anschauliche Zerschneidung, aus der ihm klar wurde, daß der Kreis und ein Rechteck über dem halben Kreisumfang als

Kreisquadratur ohne Wurzelrechnung. ZMNU **62**, 1931, S. 433—448. — J. E. Hofmann, Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn P. Luckey: Kreisberechnung ohne Wurzeln. UMN **38**, 1932, S. 317—320. Darin am Schluß eine Erwiderung von P. Luckey. — H. Fuhr, Kreis- und Kugelmessung. ZMNU **64**, 1933, S. 4—11. — E. Wicke, Einfache Berechnung der Kreisfläche. ZMNU **64**, 1933, S. 26—27. — P. Luckey, Zur Kreisquadratur ohne Wurzelrechnung. ZMNU **64**, 1933, S. 48. — Die in dieser Notiz erwähnte Arbeit von L. Geoffroy, Nouvelle méthode pour le calcul du rapport de la circonférence au diamètre (Journal de math. él. et spéc. **5**, 1881, S. 49—55 und S. 97—103) zielt nur auf Reihenentwicklungen ab. Unsere didaktischen Ziele liegen ihr fern. — Nochmals die Kreisberechnung ohne Wurzeln. ZMNU **64**, 1933, S. 247—248. — H. Fuhr, Zur elementaren rationalen Kreisberechnung. ZMNU **64**, 1933, S. 264—268.

Grundlinie und mit dem Halbmesser als Höhe flächengleich sind. Ferner hat er dauernd das feste Verhältnis zwischen Kreisumfang und Kreisdurchmesser im Rechnen benutzt. Dieses Verhältnis mag erneut durch die bekannten Meßversuche bestimmt werden, indem man einen Faden zehnmal um zylindrische Walzen verschiedenen Durchmessers herumschlingt. Hoffentlich hat der Schüler den Meßversuch als etwas Ungenaues erkannt und wünscht ihn durch eine bessere Methode zu ersetzen.

Unschwer sieht er an Hand des regelmäßigen einbeschriebenen Zwölfecks ein, daß der Kreisinhalt größer ist als $3r^2$, und erkennt aus dem regelmäßigen ein-

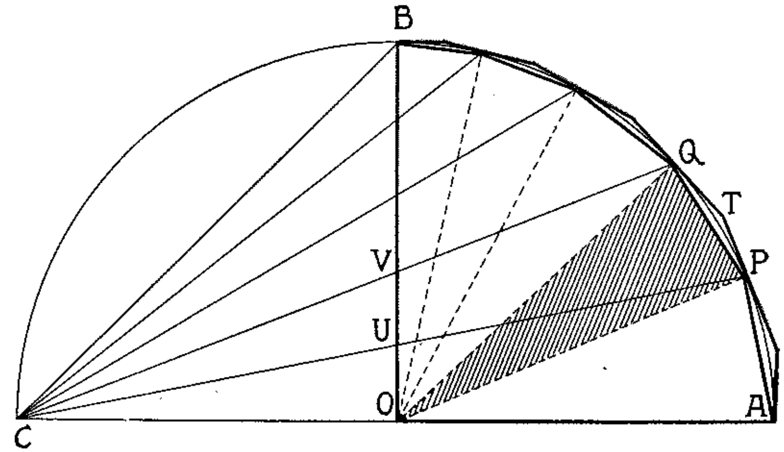

Abb. 1.

beschriebenen Sechseck, daß der Kreisumfang größer ist als $6r$. Obere Grenzen werden aus den entsprechenden umbeschriebenen Vielecken gewonnen; die Näherung wird durch Verdoppeln der Eckenzahl verbessert. Rationale obere Grenzen liefert von allen regelmäßigen Tangentenvielecken nur das Quadrat. Die Wurzelschwierigkeiten machen einen anderen Weg rätlich.

Wir beginnen (Abb. 1) mit dem Halbkreis über Durchmesser $AOC = 2r$ und ziehen den Halbmesser OB senkrecht zu AC. Diesen Halbmesser OB teilen wir in eine größere Anzahl gleicher Stücke (unsere Figur enthält 5 Stücke; es kann irgendeine Stückzahl gewählt werden, also allgemein n Stücke). Die Strahlen aus C durch die Teilpunkte (zu denen wir O und B mitrechnen) werden mit dem Viertelbogen AB geschnitten und je zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte auf dem Viertelbogen untereinander verbunden. So erhalten wir ein Sehnenvieleck zwischen OA, OB, dessen Fläche f_n wir nach der Zahl n der gewählten Teilstücke auf OB bezeichnen wollen. Der Viertelkreis ist größer als die Fläche f_n dieses Sehnenvielecks.

Weiterhin legen wir durch A, B und die andern Teilpunkte des Viertelbogens AB die Kreistangenten und bringen je zwei aufeinanderfolgende von ihnen zum Schnitt. So erhalten wir zwischen OA, OB ein (sinnentsprechend bezeichnetes) Tangentenvieleck F_n, dessen Fläche größer ist als jene des Viertelkreises.

Somit gilt die Beziehung

(1) $$f_n < \text{Viertelkreisfläche} < F_n.$$

Unsere Vorstellung sagt uns sofort, daß die Flächen f_n und F_n mit zunehmender Zahl n der Teilstücke immer enger an die Viertelkreisfläche herankommen und eine bessere Näherung ergeben.

Wir ziehen nun die Radien aus O zu den Teilpunkten des Viertelbogens und zerschneiden auf diese Weise das Sehnenvieleck f_n in n Teildreiecke, das Tangentenvieleck F_n in n Teilvierecke. Sie gilt es jetzt zu berechnen. Mit dem ersten, dem Radius OA anliegenden Teilviereck wird der Schüler leicht fertig werden. Denn dieses Viereck wird durch seine Symmetrieachse in zwei dem bekannten Dreieck COU kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Wir wollen aber jede der Teilfiguren berechnen. Eine beliebige dieser Teilfiguren sei OPQ bzw. OPTQ, die wir nun eigens behandeln wollen.

2. Hilfsaufgabe. Wir entwerfen die gesonderte Abb. 2. Zuerst legen wir wieder den Durchmesser $AOC = 2r$ und über ihm den Halbkreis. Dann ziehen wir den senkrechten Radius OB und wählen auf ihm die Punkte U, V ganz beliebig.

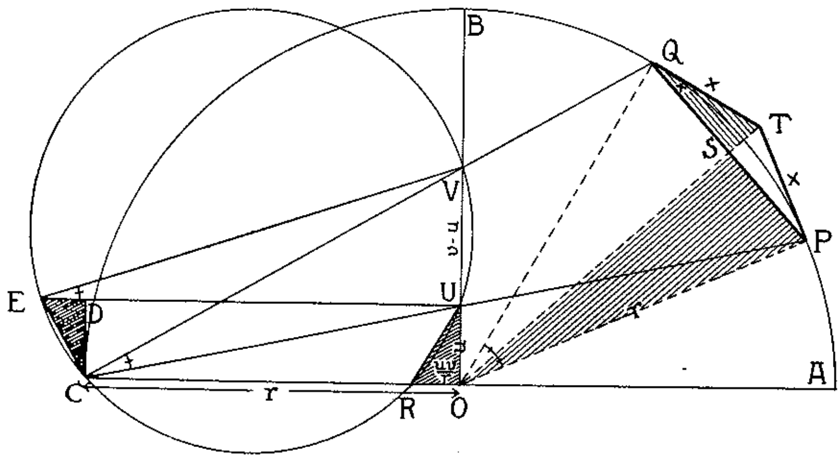

Abb. 2.

Hierauf schneiden wir CU und CV mit dem Viertelkreis in P, Q, ziehen die Sehne PQ und schneiden die Kreistangenten durch P, Q in T. Jetzt ziehen wir noch OP, OQ, OT und erkennen die Dreiecke OPT, OQT als symmetrisch bezüglich OT. Nun steht $\sphericalangle$ PCQ als Umfangswinkel mit Mittelwinkel $\sphericalangle$ POQ über gleichem Bogen PQ; also ist $\sphericalangle PCQ = \frac{\sphericalangle POQ}{2} = \sphericalangle POT$.

Schließlich führen wir folgende Bezeichnung ein:
$OA = OP = OQ = OB = OC = r =$ Radius; $OU = u$, $OV = v$, $PT = QT = x$.

Unsere Aufgabe soll darin bestehen, das Viereck OPTQ auszurechnen:

(2) $$\text{Viereck } OPTQ = 2 \cdot \text{Dreieck } OPT = rx.$$

Die Rechnung gelingt leicht, wenn wir den Hilfskreis durch die Punkte C, U, V legen und den Sekantensatz bezüglich C anwenden. Der Hilfskreis treffe CO im Punkt R. Jetzt gilt

(3) $$\overline{RO} \cdot \overline{CO} = \overline{UO} \cdot \overline{VO}, \text{ d. h. } RO = \frac{uv}{r}.$$

Dann legen wir UE parallel zu CR und fällen das Lot CD auf EU[1]). Jetzt ist das Viereck CRUE ein gleichschenkliges Trapez; folglich ist

$$\triangle EDC \cong \triangle ROU \text{ und } ED = RO = \frac{uv}{r}.$$

[1]) Natürlich kann E auch ohne den Hilfskreis gewonnen werden: in E trifft das Lot zu VC durch C auf die Parallele zu OC durch U.

Also erhalten wir

$$\text{(4)} \qquad EU = ED + DU = RO + CO = \frac{uv}{r} + r.$$

Weiterhin sind die Winkel $\sphericalangle UEV$ und $\sphericalangle UCV$ als Umfangswinkel über gleichem Bogen des Hilfskreises gleich und gleich $\sphericalangle POT$, wie wir oben gesehen haben. Weiterhin ist $\sphericalangle EUV$ gleich 90^0. Also ist $\triangle OPT \sim \triangle EUV$ und es gilt

$$\frac{PT}{OP} = \frac{UV}{EU} \text{ oder } \frac{x}{r} = \frac{v-u}{r + \frac{uv}{r}}\ ^{1)}$$

und hieraus folgt

$$\text{(5)} \qquad \square\, OPTQ = \frac{r^3(v-u)}{r^2 + uv}.$$

Wir wollen für unsere praktischen Zwecke haben, daß U, V auf bestimmte Teilpunkte des Radius OB fallen. Unser Radius OB war in n Teile geteilt, ein Teil mißt also $\frac{r}{n}$. Wir benutzen für u, v vorteilhaft folgende Darstellung: $u = p \cdot \frac{r}{n}$, $v = q \cdot \frac{r}{n}$. Hier verstehen wir unter p, q zwei (aufeinanderfolgende) ganze Zahlen zwischen 0 und n einschließlich. Setzen wir jetzt in (5) ein, so bekommen wir schließlich die Formel:

$$\text{(6)} \qquad \square\, OPTQ = rx = r^2 \cdot \frac{n(q-p)}{n^2 + pq}.$$

So ist Teilviereck OPTQ auf einfache Weise ausgedrückt. Wir berechnen gleich noch das Dreieck OPQ und das „Fehlerdreieck" PTQ. Es sei S der Schnittpunkt von OT und PQ (Abb. 2). Offenkundig ist $\triangle PTQ = 2 \cdot \triangle PST$; $\triangle OPQ = 2 \cdot \triangle OSP$. Die Dreiecke $\triangle PST$ und $\triangle OSP$ sind ähnlich; also gilt

$$\frac{\triangle PTQ}{\triangle OPQ} = \frac{\triangle PST}{\triangle OSP} = \frac{\overline{PT}^2}{\overline{OP}^2} = \frac{x^2}{r^2}.$$

Andrerseits ist $\triangle PTQ + \triangle OPQ = \square\, OPTQ = rx$.

Somit folgt

$$\text{(7)} \qquad \triangle OPQ = \frac{r^2}{r^2 + x^2} \cdot rx, \quad \triangle PTQ = \frac{x^2}{r^2 + x^2} \cdot rx$$

und schließlich

$$\text{(8) Sehnendreieck } OPQ = \frac{r^3 x}{r^2 + x^2} < \text{Sektor } OPQ < \text{Tangentenviereck } OPTQ = rx.$$

3. Berechnung des Kreisinhaltes. Für die Zahlenrechnung ist das Tangentenvieleck geeigneter als das Sehnenvieleck. Obendrein schmiegt es sich dem Viertelkreis besser an als das Sehnenvieleck. Wir bilden eine Tabelle, in der jedes Teilviereck einmal erscheint und berechnet wird. Wir halten es für zweckmäßig, diese Tabelle für ein ganz bestimmtes n anzulegen und nur zu sagen, daß es „auch allgemein geht". Je nach der gewünschten Genauigkeit kann man etwa $n = 10$ oder 20 oder höher wählen. Wir führen als ganz einfaches Beispiel den Fall $n = 10$ durch. Die einzelnen Rechnungen werden in Gruppenarbeit erledigt und durch den Lehrer beim Vorlesen kontrolliert. Dann folgt die Summierung der einzelnen Werte (am besten in zwei Fünferkolonnen), die uns zum Wert von F_{10} führt:

[1]) Das ist im Grunde eine rein geometrische Herleitung für die trigonometrische Formel $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$, die sich im Unterricht weit besser empfehlen dürfte als das bisher geübte Divisionsverfahren. Vgl. auch J. E. HOFMANN, Rein geometrischer Nachweis für das Additionstheorem der Tangens-Funktion. Bayrische Blätter für das Gymnasial-Schulwesen 70, 1934, S. 108—110.

	p	q	$\square OPTQ = r^2 \cdot \frac{n(q-p)}{n^2+pq}$	4 Dezimalen		p	q	$\square OPTQ = r^2 \cdot \frac{n(q-p)}{n^2+pq}$	4 Dezimalen
1)	0	1	$r^2 \cdot \frac{10}{100} = r^2 \cdot \frac{1}{10}$	$r^2 \cdot 0{,}1000$	6)	5	6	$r^2 \cdot \frac{10}{100+5\cdot 6} = r^2 \cdot \frac{1}{13}$	$r^2 \cdot 0{,}0769$
2)	1	2	$r^2 \cdot \frac{10}{100+1\cdot 2} = r^2 \cdot \frac{5}{51}$	$r^2 \cdot 0{,}0980$	7)	6	7	$r^2 \cdot \frac{10}{100+6\cdot 7} = r^2 \cdot \frac{5}{71}$	$r^2 \cdot 0{,}0704$
3)	2	3	$r^2 \cdot \frac{10}{100+2\cdot 3} = r^2 \cdot \frac{5}{53}$	$r^2 \cdot 0{,}0943$	8)	7	8	$r^2 \cdot \frac{10}{100+7\cdot 8} = r^2 \cdot \frac{5}{78}$	$r^2 \cdot 0{,}0641$
4)	3	4	$r^2 \cdot \frac{10}{100+3\cdot 4} = r^2 \cdot \frac{5}{56}$	$r^2 \cdot 0{,}0893$	9)	8	9	$r^2 \cdot \frac{10}{100+8\cdot 9} = r^2 \cdot \frac{5}{86}$	$r^2 \cdot 0{,}0581$
5)	4	5	$r^2 \cdot \frac{10}{100+4\cdot 5} = r^2 \cdot \frac{1}{12}$	$r^2 \cdot 0{,}0833$	10)	9	10	$r^2 \cdot \frac{10}{100+9\cdot 10} = r^2 \cdot \frac{1}{19}$	$r^2 \cdot 0{,}0526$
			add.	$r^2 \cdot 0{,}4649$				add.	$r^2 \cdot 0{,}3221$
				$r^2 \cdot 0{,}3221$					
			$F_{10} =$	$r^2 \cdot 0{,}7870$					

Der Schüler wird durch angedeuteten Übergang von n zu 2n erkennen, daß $F_{2n} < F_n$ ist und sich dem Viertelkreis besser anschmiegt; er wird vermuten, daß das Verfahren bei hinreichend großem n zu beliebig genauer Annäherung des Viertelkreises dienen kann. Jetzt kommt es darauf an, daß wir den Fehler in passender Weise abschätzen, ohne die ungefügen Formeln (7) zu verwenden.

Wir sehen unmittelbar aus Abb. 1, daß unter den Tangentenstücken $PT = x$ das erste, nämlich $\frac{r}{n}$, das größte ist. Wer der direkten Anschauung nicht vertrauen will, kann es auch leicht geometrisch oder rechnerisch nachweisen. Das erste Fehlerdreieck PT Q hat den Wert:

$$\frac{x^2}{r^2+x^2} \cdot rx \text{ für } x = \frac{r}{n}\colon\ \triangle PTQ = \frac{1}{n^2+1} \cdot rx = \frac{1}{n^2+1} \cdot \square OPTQ.$$

Für die andern Fehlerdreiecke PTQ gilt die Beziehung $\frac{\triangle PTQ}{\triangle OPQ} = \frac{x^2}{r^2} < \frac{1}{n^2}$. Lassen wir jetzt auf Dreieck PT Q **einen** Teil gehen, so gehen auf Dreieck OP Q **mehr** als n^2 Teile und auf Viereck OPT Q **mehr** als $n^2 + 1$ Teile; d. h. **ein Teil ist kleiner** als $\frac{\square OPTQ}{n^2+1}$. Folglich gilt

$$\triangle PTQ \leqq \frac{1}{n^2+1} \cdot \square OPTQ, \tag{9}$$

und zwar ist das Gleichheitszeichen nur für das erste Fehlerdreieck richtig. Wenn wir jetzt alle Fehlerdreiecke addieren, so erhalten wir den Überschuß $F_n - f_n$ des Tangentenvielecks über das Sehnenvieleck; wenn wir aber alle Vierecke addieren, so erhalten wir das Tangentenvieleck F_n. Wir bekommen also

(10) Flächenüberschuß $F_n - f_n < \frac{1}{n^2+1} \cdot F_n$ und $F_n \left\{1 - \frac{1}{n^2+1}\right\} = \frac{n^2}{n^2+1} \cdot F_n < f_n$.

Somit können wir die Ungleichungen (1) ersetzen durch die bequemeren

$$\frac{n^2}{n^2+1} \cdot F_n < \text{Viertelkreis} < F_n;\ \text{Fehler } F_n - f_n < \frac{F_n}{n^2+1}. \tag{1*}$$

Nehmen wir insbesondere $n = 1$, so ist $F_1 = r^2$ das Quadrat über $OA = r$. Ist aber $n \geqq 2$, so ist F_n ganz in F_1 enthalten. Wir bekommen also die (sehr schlechte) allgemeine Abschätzung

$$\text{Fehler } F_n - f_n < \frac{r^2}{n^2+1}. \tag{1**}$$

Immerhin geht aus ihr hervor, daß wir den Viertelkreis durch unser Verfahren so genau annähern können wie wir nur wollen. Soll der zulässige Fehler $F_n - f_n$ kleiner werden als die (vorgeschrieben kleine) positive Zahl $r^2 \cdot \varepsilon$, so müssen wir n so groß machen, daß $\frac{1}{n^2+1} \leqq \varepsilon$ wird. Wir halten fest:

(1*) ist etwas ungenauer als (1), aber sehr viel einfacher berechenbar[1]).

In unserem Fall $n = 10$ ist der Fehler kleiner als $\frac{r^2}{100+1} < 0{,}01 \cdot r^2$; d. h. er beträgt weniger als eine Einheit der zweiten Dezimale bei Annäherung des Viertelkreises. Wir haben daher den Abkürzungsfehler bei unserer Dezimalenausrechnung (höchstens 10 halbe Einheiten der 4. Dezimale = eine halbe Einheit der 3. Dezimale) so niedrig gehalten, daß er unser Ergebnis nicht mehr stört. Der Gesamtfehler bei Annäherung des Vollkreises durch $4 \cdot F_n = 3{,}148 \cdot r^2$ ist kleiner als 4 Einheiten der 2. Dezimale, d. h. wir haben die Näherung

(11) $\pi < 3{,}15$; Fehler: $-0{,}02$.

4. Berechnung des Kreisumfanges. Die Berechnung des Kreisumfanges muß in passender Weise zurückgeführt werden auf die Ungleichungen (1). Wir wiederholen aus Abb. 2 das Viereck OPTQ (Abb. 3), ziehen ferner die Sehne $PQ = s$ und fällen die Höhe $QF = h$ auf OP. Aus der Abbildung lesen wir die Ungleichung ab:

(12) Sehne $PQ = s <$ Kreisbogen $PQ <$ Streckenzug $PTQ = 2x$.

Indem wir mit $\frac{r}{2}$ multiplizieren, erhalten wir

$$\frac{rs}{2} < \frac{r}{2} \cdot \text{Kreisbogen } PQ < rx = \square\, OPTQ.$$

Außerdem ist die Sehne s größer als die Höhe h (Dreieck FPQ), also

$$\triangle\, OPQ = \frac{rh}{2} < \frac{rs}{2}.$$

Folglich ergibt sich

(13) Dreieck $OPQ < \frac{r}{2} \cdot$ Kreisbogen $PQ <$ Viereck $OPTQ$.

Wird nunmehr über alle Dreieck OPQ summiert, so erhalten wir das Sehnenvieleck f_n; wird über alle Vierecke OPTQ summiert, so erhalten wir das Tangentenvieleck F_n; wird schließlich über alle Kreisbögen PQ summiert, so erhalten wir den Viertelsumfang AB. Durch Summieren wird also (13) zu

(14) $f_n < \frac{r}{2} \cdot$ Viertelsumfang $< F_n$.

Wird jetzt n hinreichend groß gemacht, so kann $F_n - f_n$ vorgeschrieben klein gemacht werden; mit $n \to \infty$ folgt durch Vergleich mit Ungleichung (1):

$\frac{r}{2} \cdot$ Viertelsumfang = Viertelkreisfläche oder

(15) $\frac{r}{2} \cdot$ Kreisumfang = Kreisfläche.

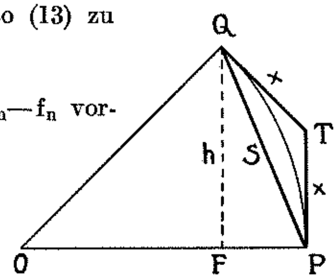

Abb. 3.

So verlockend manche weitere Möglichkeiten wären, auch solche zur Verfeinerung der Genauigkeit: der praktische Unterricht wird schwerlich viel Nutzen davon haben können. Der Schüler soll mit Einzelheiten und Einzelrechnungen möglichst wenig belastet werden.

[1]) Die Fehlerabschätzung könnte natürlich mittels der Gedankengänge von HUYGENS (De circuli magnitudine inventa, Leiden 1654) sehr verbessert werden, aber diese Abschätzung geht weit über die Auffassungskraft eines Sekundaners hinaus.