EBÛ NASR MANSUR'UN SİNÜS KANUNUNUN TANITI ÜZERİNE BEYRUNÎ'NİN MEKTUBU

Ord. Prof. Dr. AYDIN SAYILI

Beyrunî'nin aşağıdaki sayfalarda Arapça metni ile Türkçe ve İngilizce çevirileri sunulmakta olan kısa yazısı, son cümlesinden görüldüğü üzere, Ebû Said adlı bir kimseye yazdığı bir mektuptur. Bu mektup Leiden'de Lugduno Batavae Akademisi Kitaplığındaki bir Arapça yazma risaleler koleksiyonu cildinde sayfa 134b'den 136a'ya kadar dört sayfalık bir kısmı işgal etmektedir. Bu kitaplıkta bu cilt 1007 numarada (Codex 168 Golii) kayıtlıdır. Beyrunî'nin bu kısa makalesi Suter tarafından yayımlanan Almanca tercümesiyle bilim dünyasına tanıtılmış bulunmaktadır. [1]

Makalenin ilk kelimelerinden anlaşıldığı üzere, Beyrunî'nin bu mektubu Ebû Nasr Mansur ibn Ali ibn Iraak'ın trigonometriye bazı katkılarını haber verip gün ışığına çıkarmaktadır. Ebû Nasr'ın bu katkısı kendisinin sinüs kanunu ispatıdır ve bu ispat, daha doğrusu, ispatlar, bu kanun kapsamına giren bütün özel hallere ilişkin teoremlerin tümünü içine almaktadır. Bilindiği üzere, Ebû Nasr Mansur, Beyrunî'nin hocasıydı. Ebû Nasr, anlaşıldığına göre, Beyrunî'nin gerek yetişmesinde ve gerekse genç yaşlarındaki çalışma ve araştırmalarının teşvikinde önemli payı olan bir kimsedir. Kendisi ünlü bir matematikçi ve astronom olduğu gibi, 995 yılına kadar Batı Harezm'de egemen olan hanedana mensup bir prensti.

Bu makalede Ebû Nasr Mansur'un sinüs kanununu keşfetmiş olduğu kesinlikle söylenmemektedir. Nitekim, metnin konuyu ilgilendiren ilk sözcüğü "çıkarma", yani "tanıt tarzı" olup "keşif" veya "buluş" değildir. Bu ifade tarzını, sinüs kanununun ilkin başkası ya da başkaları tarafından ortaya konduğu ve Ebû Nasr Mansur'un buna ilişkin teoremlere sadece yeni bazı tanıtlar getirdiği şeklinde yorumlamak şüphesiz mümkündür. Yine, bu kısa sözdeyişin, ilkin bu kanunu

[1] Heinrich Suter, "Zur Trigonometrie der Araber", *Bibliotheca Mathematica*, seri 3, cilt 10, Heft 2, Leipzig 1910, s. 156-160.

Ebû Nasr'ın ortaya koymamış olmasına rağmen, onun bu konudaki katkısının bu kadarcıkla, yani zaten bilinen ve ispatlanmış olan teoremlere yeni birtakım ispatlar bulmakla kalmayıp daha özgün ve daha dolgun olduğu izlenimini uyandırabileceği de düşünülebilir.

Beyrunî'nin, yakın zamanlara kadar kayıp sayılmış olmasına rağmen günümüze değin gelmiş olan[2] ve Nasîruddin et-Tusî'nin yaptığı alıntılardan anlaşıldığına göre bu ve buna yakın konuları daha ayrıntılı bir biçimde ele alan bir eseri daha mevcuttur. Bu kitap *Makaalîdu İlmi Hey'âti mâ Yahdisu fî Basiti'l-Küreti ve Gayrihi* (Yüzeysel Küresel ve Diğer Şekillerin Özellikleri Bilgisinin Anahtarları) adını taşımaktadır. Nasîruddin'den öğrendiğimize göre, Beyrunî bu eserinde, bu konuda Ebû'l-Vefa Muhammed ibn Muhammed el Buzcânî ile Ebû Muhammed Hâmid ibn el-Hıdr el Hocendî'nin öncelik iddia etmiş olmalarına rağmen, galip ihtimalle, sinüs kanununu en genel şekliyle ilkin Ebû Nasr Mansur'un bulup ortaya atmış olduğunu söylemektedir.[3]

Vakıa Nasîruddin bu konuda çekimser bir tavır takınır gibi görünüyor.[4] Fakat bu meselede Beyrunî'nin düşüncesine büyük ağırlık verilmesi gereklidir. Binaenaleyh, sinüs kanununun bazı özel hallerine ilişkin teoremleri ve muhtemelen düzlemsel trigonometriye ilişkin olanlarını ilk bulan ve böylece bu kanunun kapsamını genişleterek onu genelleştiren kimsenin Ebû Nasr olduğu akla gelmektedir.

Gerçekten, durumun böyle olduğu düşünülebilir. Çünkü, Nasîruddin'in sinüs kanununun tarihi ile özellikle küresel trigonometri çerçevesi içinde ilgilenmiş olduğu görülmektedir. Nitekim, kitabında Nasîruddin'in sinüs kanununun küresel üçgenlere ilişkin özel halleri için muhtelif matematikçilerin buldukları tanıtlar konusunda oldukça zengin ayrıntı bilgisi vermesine karşılık,[5] bu kanunun düzlemsel üçgenlere uygulanışının tarihine değinmemekte olduğu müşahede ediliyor.

Öte yandan, az sonra işaret edileceği üzere, sinüs kanununun ilkin küresel üçgenlere ilişkin olarak saptandığını, düzlemsel üçgenlere ise

[2] Bkz. *Isis*, cilt 64, Na. 225, 1973, s. 69 (madde 1007).

[3] Nasiruddin at-Tûsî, *Kitabu Şekli'l-Kattâ*, A. Caratheorori neşir ve tercümesi, İstanbul 1891, metin, s. 108, ter., s. 140.

[4] Nasiruddin, aynı eser, metin, s. 108, 125, ter., s. 140, 162-163.

[5] Nasiruddin, aynı eser, metin, s. 108-125, ter., s. 140-163.

daha sonra uygulanıp genelleştirildiği düşüncesini akla yakın gösteren birtakım ipuçlarına sahip bulunmaktayız ki, bu da Ebû Nasr Mansur'un bu bilgiye katkısının mahiyeti hakkında bize bir fikir verir niteliktedir. Mamafih, yine de, kaynaklarımızda açık ve şüpheye yer bırakmayacak nitelikte kanıtlara raslanmamakta olması dolayısiyle, söz konusu genelleştirme şerefinin sadece Ebû Nasr Mansur'a ait olduğunu kesinlikle ileri sürmek mümkün değildir.

Eldeki kısa makaleye Beyrunî eserlerinin kendi tarafından düzenlenen ayrıntılı listesinde raslanmamaktadır. Oysa, Suter'in kabul ettiği gibi bu mektup Ebû Said es-Siczî'ye (veya Sicezî) (ölümü takriben 1024'te) yazılmışsa, yazılış tarihinin söz konusu listenin kaleme alınış tarihinden (1036) önce olması gerekiyor. Mektup metninin eldeki yazmasında geçen ad sadece "Ebû Said" dir. Bunu Suter'in "Ebû Said es-Siczî" olarak kabul etmesinin ne gibi bir sebep ya da delile dayandığını saptayamadım.

Mamafih, kime yazılmış olursa olsun, mektubun ilk cümlesinden yazılış tarihinin bir hayli eski olup Beyrunî daha yirmiüç yaşına gelmeden kaleme alınmış olduğu görülmektedir. Çünkü burada zamanın hükümdarı olarak İbn Iraak hanedanına atıf yapılmakta ve buradaki ifade tarzından mektubun yazılışı sırasında bu hükümdarın henüz hayatta ve iktidarda olduğu anlaşılmaktadır. Batı Harezm'de egemen olan İbn Iraak sülâlesinin son hükümdarının ise 995 yılında Doğu Harezm hükümdarı tarafından öldürülmüş ve bu hanedanın egemenliğinin de böylece sona erdirilmiş olduğu bilinmektedir. Demek ki, Beyrunî bu mektubunu 995 yılından önce yazmış olmaktadır.

Vakıa bu yorumun kilit tümcesindeki *Mevlâ Emîri'l-mü'minîn* ifadesini Suter "Mü'minlerin Emîri'nin âzad edilmiş kölesi" şeklinde tercüme ediyor ve bu manalandırma tarzı bu sözün tarihlendirme bakımından belirleyici yön ve niteliğini tamamen ortadan kaldırıyor. Fakat bu tercüme şeklinin yanlış olduğu kesinlikle söylenebilir. Beyrunî'nin, Ebû Nasr Mansur'dan söz ederken bu ifade tarzını sık sık kullandığı görülmektedir. Sachau da Beyrunî'nin Ebû Nasr Mansur münasebetiyle kullandığı *mevlâ* sözcüğünü "âzad edilmiş köle" şeklinde tercüme etmiş ve bu tümcedeki *Emîrü'l-mü'minîn* ifadesinde zamanın Samanî hükümdarına bir atıf bulunduğuna da ayrıca karar vermiştir.[6]

[6] Bkz. Beyrunî, *El-Âsârü'l-Bâkiye*, Sachau neşri, Giriş, s. 33.

Bu biçimdeki bir atıf pek mutad değildir ve Beyrunî'nin Ebû Nasr Mansur'dan tekrar tekrar "âzad edilmiş köle" şeklinde söz etmesi de biraz acayip düşmektedir. *Emîrü'l-mü'minîn* isim tamlaması herhangi bir hükümdar için sık sık kullanılmaktaydı. Ayrıca, *mevlâ* sözcüğünün bir anlamı "yakın akraba"dır. Öte yandan, uzun adındaki İbn Iraak kısmının da gösterdiği üzere, Ebû Nasr Mansur Batı Harezm'in egemen hanedanına mensup bir prensti. Bu durum karşısında, Beyrunî'nin kendisi için kullandığı bu betimleyici ifadeyle, onun Harezm hükümdar ailesine mensup olduğunu ve zamanın hükümdarı ile yakın akrabalık bağlarını belirtmek istediğinden şüphe etmek için bir sebep olmasa gerektir.

Eserlerinin ayrıntılı listesini kaleme alırken gençlik günlerine ait bir mektubu hesaba katmayı Beyrunî'nin unutmuş olmasını ya da esasen bir başkasının bilimsel katkıları konusunda bir haberi içine alan böyle bir yazıyı listeye almaya gerek görmemesini tabiî karşılayabiliriz. Metnin son cümlesi bu yazının Beyrunî'nin kaleminden çıktığını göstermeye yeter bir delil teşkil ettiği gibi, esasen bu mektubun muhtevasının Beyrunî'yi yakından ilgilendiren ve daha dolgun yayımlarından hiç değilse bir tanesinde de daha ayrıntılı bir şekilde ele aldığı bir konuya ilişkin olduğunu az önce görmüş bulunuyoruz. Binaenaleyh bu kısa risalenin Beyrunî'ye ait olduğunda şüphe ve tereddüde pek yer kalmadığını kabul edebiliriz.

Yukarıda işaret edildiği üzere, Nasîruddin sinüs kanununun sadece küresel trigonometri alanına giren özel hallerinin tarihi üzerinde ayrıntılı bir biçimde durmaktadır. Üstelik, kitabının zamanımıza kalan metninde bu teoremlere ilişkin resimler genellikle sarahatten yoksun sayılmaktaydı. Bunun bir sonurgusu olarak İslâm Dünyasında trigonometri tarihi üzerine kaleme aldığı kitapta Von Braunmühl metnin bu kısmındaki teferruat bilgisini pek söz konusu etmemişti. Bu koşullar altında, İslâm Dünyasında trigonometrinin gelişme seyri gereği gibi yansıtılmamış, onüçüncü yüzyıl başarılarının önemi daha önceki yüzyılların zararına olmak üzere biraz mübalağalı bir tarzda belirginleştirilmişti.[7] İşte, Beyrunî'nin eldeki kısa yazısı bu sakıncalı izlenimi düzeltmek bakımından en önemli belgeler arasında yer almaktadır.

[7] Suter, aynı eser, s. 156-157.

Böylece, Beyrunî'nin bu mektubunun İslâm Dünyasında trigonometri tarihi açısından oldukça önemli bir belge olduğu açıkça görülmektedir. Bu sebeple, daha önce Almanca tam bir tercümesi yayımlanmış olmasına rağmen, Arapça metnin de ayrıca basılmasında fayda mülâhaza edilmiştir. Ayrıca, Suter'in metni tespitinde bazı tashihe muhtaç noktalar bulunduğu sonucuna varılmış olduğundan, metnin İngilizce tercümesini de sunmakta yarar gördüm.

Arapça yazma yer yer kurt yeniği yüzünden delinmiş durumdadır. Mamafih, konunun genel bağlam ve örgüsü noksan metin kısımlarını karine ile kolayca doldurup tamamlamayı mümkün kılmaktadır. Bu noksan kısımları tamamlamak için ilâve edilen harfler ve sözcükler basılı metinde köşeli parantezler içine alınmıştır. Yazma metninde dört yerde sinüs kelimesi unutulmuş ve atlanmıştır. Bunun hata sonucu olduğunda da şüphemiz olamaz. Bu sebeple bunlar da basılı metne eklenmiş ve çengelli parantez içinde gösterilmiştir.

Aynı suretle, yazma metninin sonuna doğru müstensihin takriben bir satırlık bir kısmı yanlışlıkla atladığı görülmektedir. Bu hususu metnin bağlamı sarahatle gösterdiği gibi, atlanan kısım "açısının sinüsü" şeklindeki iki ifade arasında yer almaktadır. Yazmada bu ifade sadece bir defa geçmekte ve aralarındaki metin kısmı atlanmış bulunmaktadır. Başka bir deyimle, metnin bu durumunun küçük bir dikkatsizlik sonucu hata yapılmasını kolaylaştıran bir durum olduğu görülmektedir. Buraya ilâve edilen aşağı yukarı bir satırlık kısım da basılı metinde çengelli parantez içinde gösterilmiştir.

Bunlar dışında yazma iyi muhafaza edilmiş ve okunaklıdır. Sadece iki yerinde kelime tashihi yapılmıştır. Bunları dipnotlarda görmek mümkündür.

Suter metindeki son ispatın, yahut da, benim ifade tarzıma göre, beşinci özel halin, metne sonradan ilâve edilmiş olduğu ve bu ilâvenin muhtemelen "Beyrunî tarafından" yapıldığı olasılığını ileri sürmüştür.[8] Yazının esasen Beyrunî'ye ait bulunduğu düşünülünce Suter'in bu ifade tarzı biraz tuhaf kaçmaktadır. Bu sözleriyle Suter'in, kısmen, bu son tanıtı Beyrunî'nin eklediğini kastettiğinde şüphe yoktur. Fakat böyle bir iddianın da pek yerinde olmadığı söylenebilir. Çünkü,

[8] Suter, aynı eser, s. 160, not 2.

Suter'in kendisinin de söylediği üzere, bu son kısımdaki ispat tarzı daha öncekilerden hiç de farklı değildir.

Suter'in bu müphem iddiası esas itibariyle bu son kısımdaki üçgen harflerinin diğerlerine uymamasına dayanmaktadır. Daha önceki üçgenler A, B, ve G harfleri ile belirlenmişken, bu son kısma ilişkin üçgen ADG şeklinde harflendirilmiştir (basılı metnimizin 5 numaralı şekli). Buna ilâve olarak, Suter bu son paragrafın metnin diğer bölümlerine kıyasla daha kısa ve özlü olduğuna dikkati çekmektedir. Suter, ayrıca, metnin bu kısmının kusurlu olduğuna ve burada söz konusu edilmesi gerekli bazı oranların atlanmış bulunduğuna da işaret etmektedir.

Metnin bu son paragrafı hakkında Suter'in ileri sürdüğü bu düşüncelerin isabetli olmadığında şüphe olmasa gerek. Kanımca, burada Suter'i yanıltan ilk nokta basılı metnimizde 4 numaralı olarak gösterilen ve sondan bir önceki özel hale ilişkin olan yazma resmini yanlış yorumlamış olmasıdır. Bu şekildeki AH ve AG doğru parçaları yazmada birbirlerinden oldukça küçük bir açıyla ayrılmış olmaktan başka resmin H ve G harflerinin işaretlendiği kısmı kurt yeniği yüzünden seçilememektedir.

Suter bu harflerden G'nin solda ve H'nin sağda (Suter'de 6 numaralı şekil) olduğunu kabul etmiştir. Bu durumda ABG üçgeni geniş açılı bir üçgen olmaktadır. Oysa, yazmada "beşinci özel hal"e ilişkin üçgen de (yazmada ve basılı metnimizde şekil 5, Suter'de şekil 7) geniş açılı bir üçgendir. Böylece, son iki özel hal birbirlerinin aynı durumuna girmektedir. Suter'in metnin son paragrafını ondan hemen önceki metin kısmının bir tekrarı sayması kısmen bu durumun bir sonucu olmuştur.

Konudaki bir sarahatsizlik de söz konusu şekil 4'ün yazmada bir başka bakımdan da sarih olmayışıdır. Çünkü bu resimde bahsi geçen doğrulardan (AH ile AG) sağdakinin mi yoksa soldakinin mi tabana dik çizildiği pek belli olmamaktadır. Benim yorumuma göre, G noktası sağdaki nokta, H noktası da soldaki noktadır. Böylece, metnimizin sondan bir önceki şekli (basılı metnimizde şekil 4) dar açılı bir üçgeni, son şekil ise (metnimizde şekil 5) esasen yazmada açık seçik bir şekilde görüldüğü üzere geniş açılı bir üçgeni temsil etmektedir. Böylelikle, bu şekillerin bağlı bulunduğu iki özel hal, yani metindeki son iki ispat, birbirlerinin tekrarı olmaktan çıkmakta ve Suter'in ileri sürdüğü şüphe ve tahminlere yer kalmamaktadır.

Söz konusu ispatlar düzlemsel üçgenler şıkkını kapsamaktadır. Bunlara ilişkin şekillerin böylece birbirlerinden farklı özel halleri göstermesi durumu metinde küresel üçgenlerde aynen görülmektedir. Nitekim, metnin daha önceki kısmında dar açılı ve geniş açılı küresel üçgenlere ilişkin özel hallerin her birine ayrı birer şekil tahsis edilmiştir (basılı metnimizde şekil 2 ve 3). Demek ki, Suter'de yapılan bu tashihle metnin bu iki kısmı arasında bir paralellik de sağlanmış olmaktadır. Son paragraf metninin metnin düzlemsel üçgenlere ilişkin daha önceki kısımlarına nazaran daha kısa ve özlü bir biçimde kaleme alınmış olduğu yolunda Suter'in yaptığı müşahedeye gelince, bunu iki sebebe bağlamak mümkündür.

Bunlardan bir tanesi esasen bu paragrafta bir satır kadar bir kısmın atlanmış olmasıdır. Ayrıca, metnin düzlemsel üçgenlere ilişkin daha önceki kısımları, bazı düzlemsel trigonometri kavramlarının tanımlanıp açıklanmış olması dolayısiyle, metnin diğer bölümlerine kıyasla göreli olarak biraz uzun yazılmış izlenimini vermektedir. Bu tanım ve kısa açıklamalar son paragrafa da uymakta olduğundan, son paragrafta bunlara tekrar değinilmemesinin yadırganması söz konusu değildir. İşte bu hususlar da bu paragrafın biraz kısa ve özlü olma intibaını uyandırmasına yol açmaktadır.

Bunlara ilâve olarak, yazının kapanış cümlesi mektubu sarih bir ifade tarzıyla sona erdirmekte ve son paragraftan önce mektubun sona erdiği izlenimini yaratacak herhangi bir deyiş izi ile karşılaşılmamaktadır. Ayrıca, eldeki yazının iki ana bölümden oluşacak tarzda kaleme alınmış olduğu intibaını uyandırdığının da bu münasebetle dikkate alınması yerinde olur. Bunlardan birincisi mektubun küresel üçgenlere ilişkin kısmı, ikincisi ise düzlemsel üçgenleri ele alan bölümüdür.

Gerçekten, "bu ise aranan ispattı" ifadesine mektupta sadece bu kısımların sonunda rastlanmakta, diğer daha dar kapsamlı özel haller için bu ifade kullanılmamaktadır. Bu ifadelerin ikincisinin son paragrafın sonunda yer almakta olması, bu durumda, bu paragraf olmaksızın da esasen ispatlar zincirinin sona ermiş olduğunu ve bu son paragrafın sadece sondan bir önceki ispata ek mükerrer bir kısım mahiyetini taşıdığı düşüncesini pek destekler görünmemektedir. Böylece, mektubun çeşitli kısımları, tümüyle iyi toparlanmış bir bütünü oluşturacak şekilde birbirleriyle konu açısından bağdaşmakta olmaktan başka, özellikle başlangıç ve sonuyla, bu mektup yazı ve ifade tarzı bakımından da bütünüyle bir birlik ve tutarlılık vasfı göstermektedir.

Bu müşahedeye karşılık, "beşinci özel hal"in *ibâretun uhrâ* sözüyle başlamakta olduğuna dikkati çekebiliriz. Çünkü Suter bu ifadeyi, aşağı yukarı, ispatı verilmiş bir özel hal için yeni ve değişik bir ispat anlamında yorumlamaktadır. Fakat bu ifadeyi "tümleyici bir bağlantı" ya da "bir başka açıklama" tarzında manalandırmak mümkündür. Söz konusu kelimenin lugat anlamında ters yönde zorlayıcı bir taraf yoktur. Böylece, metnin son iki bölümünün, sırasıyla, dar açılı ve geniş açılı düzlemsel üçgenleri ele aldığı, fakat yine de bunların çok keskin çizgilerle birbirlerinden ayrılmış olmasının da gerekmediği, mektuptaki ifade tarzının bu durumun icaplarına iyi uyduğu görülmektedir. Nitekim, dar açılı ve geniş açılı küresel üçgenler mektup metninde birlikte ve toplu bir şekilde ele alındığı halde, öte yandan da bu iki özel halin birbirlerinden ayırdedilebilmeleri amacıyla metin bunlara ilişkin iki ayrı şekille donatılmıştır.

Az sonra işaret edileceği üzere, eldeki metnin göze çarpan bir özelliği, küresel üçgenleri ele alan kısımlarının düzlemsel üçgenlere ilişkin kısımlarına nazaran daha kısa ve özlü oluşudur. Bu özellik sinüs kanununun dik açılı düzlemsel üçgen ile dar açılı düzlemsel üçgeni konu alan bölümde belirgin bir biçimde görülmektedir. Buna rağmen, bu iki özel hal metinde bir tek şekille temsil edilmişlerdir. Böylelikle, bir bakıma, Beyrunî'nin bu iki özel hal arasında bile kesin bir ayırım yapma gereğini duymadığı müşahede edilmektedir. Oysa, bunların ilki yardımcı teorem mahiyetini taşımaktadır.

Bu şartlar altında ve, daha doğrusu, herhangi bir şart altında, son iki özel hal tanıtlarının tamamen aynı oluşu çok tabiî karşılanmalıdır. Başka bir deyimle, çeşitli özel hallere ortak bir ispat yönteminin uygulanmış olması, bir anlamda, metnin bunlara tekabül eden bölümlerinin birbirlerinin tekrarı olduğuna delâlet etmek şöyle dursun, bunların birbirleriyle tutarlı olduğunu gösterir. Çünkü, bunlar birbirlerinin tümleyicileri olduğundan aynı metodun uygulanmasına elverişlilik göstermektedirler. Metindeki dördüncü ve beşinci özel hallerin birbirlerinin tekrarı olmadıkları görüşünü pekiştirmek maksadıyla bu hususa dikkatin çekilmesinde yarar vardır.

Gerçekten, yazmanın son paragrafında atlanmış olan takriben bir satırlık metnin tespiti, bir önceki özel hali ele alan kısımdaki ifade ve sözcüklerin dışına çıkmadan yapılabilmiştir. Yine, ayni ifadelerin mektup metninin küresel üçgenlere ilişkin daha önceki bölümlerinde de küçük değişikliklerle mevcut olduğu görülmektedir. Çünkü aynı özellikler bu özel haller için verilen ispatlarda da aynen mevcuttur. Daha doğrusu, bu ispat tarzı düzlemsel ve küresel dar açılı ve geniş açılı üçgenlere ilişkin özel hal teoremlerinin hepsi için ortak olup sadece dik açılı düzlemsel ve küresel üçgenler özel halleri buna bir istisna teşkil etmektedir.

Arapça metinde şekillere atıf yapmağa yarayan harfler Latin alfabesinde bunları karşılayan harflere dönüştürülmüştür. Bundan güdülen amaç, sadece baskıda kolaylık sağlanılması değil, aynı zamanda, gerek metin ve gerekse tercümeleri için bir tek şekil grubundan faydalanılabilmeyi mümkün kılmak düşüncesi olmuştur. Arapça metin, aslında paragraflara ayrılmış durumda değildir. Yazmada noktalama da yoktur. Basılı metnin paragraflara ayrılmış ve noktalamalı olarak sunulması anlaşılmada kolaylık sağlamak maksadıyla uygun görülmüştür. Yazmada, arada bir noksan olan harf noktaları ilâve edilip tamamlanmış, seyrek bir şekilde karşılaşılan harekelerin bazıları basılı metinde gösterilmemiştir. Basılı metinde görülen birkaç hemze işareti yazmaya ait değildir. Yazmada hemze işareti ile karşılaşılmamaktadır.

Yazmadaki birinci şekil üç boyutlu oluşunun gerektirdiği görünüm kurallarına uygun olmadığından açık seçik olmayıp üzerindeki doğru parçalarının birbirleriyle münasebetini iyi gösterememektedir. Matematiğe ilişkin ortaçağ yazmaları şekillerinde özellikle müstensihlerin konuya nüfuz etmeksizin yazmaları kopya etmeleri yüzünden bu gibi sarahatsizliklere oldukça sık raslanmaktadır. Basılı metnimize yazmanın bu birinci şekli yerine Suter'in tercümesine koyduğu sarih resim alınmıştır. Suter, tercümesine, ayrıca, yazmanın müphem birinci şeklinin bir kopyasını da eklemişse de, metnin ayrıntılarını kolaylıkla takip etmek bakımından eldeki yazmanın bu şekline ihtiyaç olmadığından ve büyük olasılıkla Beyrunî'nin aslında yazmaya eklediği şeklin tashihli şeklimize esasen daha yakın olmuş olacağı düşünülebileceğinden, yazmadaki resmin bir kopyasının da sunulmasında bir yarar görülmemiştir. Bu yüzden, basılı metnimizin birinci şekli Suter'deki şekil 2'ye tekabül etmektedir.

Daha önce söz konusu edildiği üzere, yazmamızdaki şekil 4'te de bazı sarahatsizlikler bulunmaktan başka, bir kısmında da kurt yeniği vardır. Bu şekil basılı metnimizde de 4 numaralı şekildir. Suter'de 6 numaralı olan bu şekil, daha önce verilen tafsilâttan da anlaşılacağı üzere, basılı metnimizin 4 numaralı şekline nazaran G ve H noktalarının birbirleri arasında yer değiştirmiş olmaları bakımından bir farklılık göstermektedir. Ayrıca, Suter, yazmanın üçüncü ve dördüncü özel halleri birlikte temsil eden bu şeklini, her iki özel hal için ayrı birer şekil vermek suretiyle, iki farklı şekil haline getirmiş, böylece, metin çevirisini dik açılı düzlemsel üçgen için müstakil bir resimle donatmıştır. Burada bu bakımdan Suter'e uyulmayarak yazmadaki duruma sadık kalınmıştır. Çünkü, gerek dik açılı ve gerekse dar açılı düzlemsel üçgenler özel halini bu tek resimden takip etmek mümkün olduğu gibi, esasen metinde de her iki özel hal için aynı şekle atıf yapılmaktadır. Metin şekilleri konusunda verilen bu ayrıntılar sonucu, Suter çevirisinde yedi şekil bulunmasına karşılık, basılı metnimiz için burada, aynen yazmada olduğu gibi, beş şekil verilmektedir.

Şekillerimizden 2, 3, ve 4 numaralı olanlarının yazmadaki orijinallerinde şekillerin yanı başında birtakım doğru parçaları yer almaktadır. Bu gibi doğru parçaları eklentileriyle başka ortaçağ yazmaları şekillerinde de karşılaşılmaktadır. Anlaşıldığına göre, bunları şekillere eklemekten maksat, bazan başka başka nitelikte de olabilen çeşitli nicelikleri, örneğin doğru parçaları uzunluklarıyla sinüs değerlerini ve yay uzunluklarını, bir tek ölçeğe göre ve aynı nicelikler cinsinden ifade edilmiş olarak göstermektir. Aynen Suter'in şekillerinde olduğu gibi bizim resimlerimizde de bu doğru parçaları eklentilerine yer verilmemiştir.

Metnin ilginç bir özelliği, sinüsleri belirleyen daire ve küre yarıçaplarının hep birim kabul edilmesi ve bu trigonometrik fonksiyonların doğru parçaları ile ifade edilmiş olmalarıdır. Uzun süre yaygınlaşmadığı görülen bu koşultunun, yani konvansiyonun, böylece Beyrunî'nin gençlik çağına kadar geri gittiği saptanmış olmaktadır.

Trigonometrik fonksiyonlarda yarıçapın birim kabul edilmesi usulünü Nasîruddin, Beyrunî'ye atfetmektedir.[9] Eğer, Nasîruddin'in

[9] Nasiruddin, aynı eser, metin, s. 136, ter., s. 175. Yine bkz. metin, s. 140-142, ter., s. 180-184; Salih Zeki, *Âsâr-i Bâkiye*, cilt 1, İstanbul 1329 H. (1913), s. 61.

yarattığı izlenime uygun olarak bu koşultu gerçekten ilkin Beyrunî tarafından düşünülüp ileri sürülmüşse, böyle bir olgunun trigonometri tarihi bakımından taşıyacağı değere ilâve olarak, bu bilgi ayrıca elimizdeki metin açısından da değerlendirilebilmek durumundadır. Çünkü bundan, bu mektuptaki ispat tarzlarının Ebû Nasr Mansur'a ait olmalarına rağmen, bunların sunuluş tarzında ve metin ifadesinin biçimlendirilmesinde Beyrunî'nin, muhtemel olarak, kendi katkı ve tercihlerine serbestçe yer vermiş olduğu sonucunu çıkarmak mümkündür. Bu ise, bu yazısında, Beyrunî'nin, hocası Ebû Nasr Mansur'un metnini değiştirmeksizin aynen aktarmakta olduğu ve sadece son paragrafının muhtemelen Beyrunî'den geldiği yolunda Suter'in uyguladığı örtük sayıntıya aykırı düşmektedir.[10]

Nasîruddin, sözü geçen kitabında, sinüs kanununun küresel üçgenlere ilişkin teoremleri için Ebû Nasr Mansur'a ait dört ispat tarzı sunmaktadır.[11] Bunların hiç birinin cümle ve ifadeleri elimizdeki yazma metnindekilerin aynı değildir. Bundan, eldeki yazma metninin Ebû Nasr Mansur'un cümlelerini ve ifadelerini ayniyle temsil etmediği sonucunu çıkarmak akla geliyor. Fakat bundan emin olamayız. Çünkü Nasîruddin'in metninde de Ebû Nasr Mansur'un ifade tarzına sadık kalınıp kalınmadığını bilmemekteyiz. Nitekim, söz konusu tanıtlardan bir tanesinin Ebû Nasr ile Ebu'l Vefa'nın ortak ispatları olduğunu, "ancak, aralarında söz ve ifade tarzlarında farklılıklar bulunduğunu" bize Nasîruddin söylemektedir.[12]

Nasîruddin'in sunduğu bu tanıtlarda da yarıçapların birim kabul edildiği görülüyor. Mamafih, bu özellik, Nasîruddin'in bu ispatları kelimesi kelimesine asıllarından almamış olup sadece ispatların özel mahiyetlerini göstermeği amaçlamış bulunmasından ileri gelmekte olabilir. Gerçekten, sinüs kanununa ilişkin bütün teorem ispatlarında metinleri Nasîruddin'in hep birim yarıçap temeline oturttuğu müşahede edilmektedir.

Beyrunî'nin bu yazısının başka bir özel vasfı burada ilkin küresel üçgenlere ilişkin teoremlerin zikredilmesi, düzlemsel üçgenlerle ilgili teoremlerin bunlardan sonra ele alınmış olmasıdır. Bundan başka, metinde, düzlemsel açılar ölçülerinin bunların gördüğü daire yayları

[10] Bkz. yukarıda s. 173 ve not 8.

[11] Nasiruddin, aynı eser, metin, s. 109-114, 121-122, ter., s. 143-148, 160-162.

[12] Nasiruddin, aynı eser, metin, s. 111, ter., s. 145.

ölçülerine denkliği üzerine dikkatimizin önemle çekildiği görülüyor. Gerçekten, şekil 4'ün temsil ettiği iki özel hal münasebetiyle bu husus iki kez zikredilmekte, ayrıca, yine bu vesile ile, düzlemsel bir açının sinüsünün tanımı da verilmektedir. Oysa, küre yüzeyinde kesişen iki büyük daire yayı arasında kalan açılar ölçüsünün göreli olarak daha az basit ve daha aydınlatılmaya muhtaç olduğu haklı olarak iddia edilebilmesine rağmen, bunlar için böyle açıklama veya tanımların verilmediği, daha doğrusu, bu hususa pek kısa ve kısmî bir biçimde değinildiği görülüyor.

Bütün bunlardan, sinüs kanununun ilkin küresel üçgenlere ilişkin teoremlerinin bulunmuş olduğu, düzlemsel üçgenlere daha sonra uygulanarak genelleştirildiği izlenimi uyanmaktadır. Gerçekten, böyle bir süresel sıralanış esasen trigonometrinin İslâm Dünyasındaki gelişim seyrine uygun düşmektedir. Çünkü trigonometri bilgisine gösterilen ilgi ve bu alanda yapılan inceleme ve araştırmalarda küresel trigonometri daha ön koşunda yer almaktaydı. Bunun da sebebi trigonometrinin bu çağlarda bağımsız bir matematik dalı gözüyle bakılan bir disiplin olmaktan fazla astronomiye yardımcı bir araç olarak ele alınıp araştırılan bir konu mahiyetini taşımış olmasıdır.

Düzlemsel açılara ilişkin olarak yazmada verilen tanımlar, böyle açıları gördükleri yaylarla belirleme ihtiyacının duyulduğunu ve trigonometrik fonksiyonları bir noktada birleşen iki doğru arasında kalan düzlem kısmıyla değil de yaylarla münasebete getirmenin tercih edildiğini göstermektedir. Metnin bu ayrıntıları, yuvarlak bir ifade ile, düzlemsel trigonometrinin bu çağda henüz ilk gelişme devreleri içinde bulunduğu ve düzlemsel üçgenlere trigonometri fonksiyonlarının uygulanmasında yanılmalardan kaçınmak için tetikte bulunma yoluna gidildiği izlenimini uyandırıyor. Bunun bir sebebi, belki de, eldeki yazıda olduğu gibi, yarıçapların birim kabul edilerek trigonometri fonksiyonlarının sadece doğru parçaları uzunluğu ile gösterilmiş olmasıdır. Çünkü, göreli olarak, küresel üçgenlerde dikkatin trigonometrik fonksiyonları ele alınan daire yaylarına ve bu yayların merkezlerine daha otomatik bir biçimde çekilmekte olduğu söylenebilir.

Merkezsel açılar, yayları ile aynı ölçüye sahip olduklarına, daha doğrusu, yayları ile ölçüldüklerine göre, bu noktaya dikkatin çekilmesinde, şüphesiz, yadırganacak bir taraf yoktur. Yine, sinüs bir oran olduğundan, iki sinüs kıyaslanırken, bu oranları temsil eden kesirlerin paydaları, yani yarıçaplar, eldeki metinde olduğu gibi geri koşunda tutulup açıkça işe karıştırılmadıkları takdirde, kıyaslamanın böyle bir ortak öğe ile temellendirilmesi konusunda ihtiyatlı davranılması elbette makul ve hatta lüzumludur. Fakat burada dikkati çeken nokta bu gibi ihtiyat tedbirlerine küresel üçgenlerle ilgili olarak başvurulmayıp sadece düzlemsel üçgenler vesilesiyle bunların söz konusu edilmekte olmasıdır. İşte, düzlemsel trigonometri ile ünsiyetin küresel trigonometriye kıyasla daha küçük olmuş olduğu intibaını uyandıran şey de budur.

*

Beyrunî'nin bu mektubu üzerinde yapılan bu yorumlar münasebetiyle burada, bir de, Beyrunî'nin sunduğu Ebû Nasr Mansur ispatlarını, daha kolay gözden geçirilebilmelerini sağlamak için, özetlemenin faydalı olacağı düşünülmüştür. Günümüzde daha alışık olduğumuz ifade tarzlarıyla, metindeki beş özel hal için verilen ispatlar şunlardır:

1) Birinci özel halde (Şekil 1) A açısı dik olan ABG küresel üçgeninde $\frac{\sin AB}{\sin BG} = \frac{\sin G}{\sin A}$ münasebetinin ispatı istenmektedir. Bunun için ilkin EDB ve ZLH üçgenlerinin benzer olduğu gösterilmektedir. GZH, GZT, HLZ, BDZ, ve BEZ açılarının hepsi de çizimle dik açılardır. EDB ve ZLH üçgenlerinin benzerliği dolayısıyla

$\frac{BD}{BE} = \frac{HL}{HZ}$'dir. .... (1)

Oysa, BD = sinAB, BE = sinBG, HL = sinG, ve HZ = sinA' dır. (1) münasebetinde bunları yerine koyarsak $\frac{\sin AB}{\sin BG} = \frac{\sin G}{\sin A}$ münasebeti elde edilir. Bu ise ispatı istenen bağıntıdır.

2) Şekil 2 ve 3'teki ABG üçgenlerinde aynı bağıntının geçerli olduğu saptanmak istenmektedir. Bu sefer üçgenimiz dik açılı değildir. Demek ki, tanıtımızın gerek dar açılı ve gerekse geniş açılı küresel üçgenleri kapsamı içine alması gerekmektedir.

DB yayını söz konusu iki şekilde AG ve AD yaylarına dik olarak çizeriz. Meydana gelen ABD ve BDG dik küresel üçgenlerinde yukarıdaki birinci özel hal gereğince şu bağıntıları yazabiliriz:

$\frac{\sin AB}{\sin BD} = \frac{\sin D}{\sin A}$ ve $\frac{\sin BD}{\sin BG} = \frac{\sin G}{\sin D}$. Bunları taraf tarafa çarpalım. $\frac{\sin AB}{\sin BG} = \frac{\sin G}{\sin A}$ münasebetini elde ederiz. Demek ki teoremimiz ispatlanmıştır.

3) Şekil 4'te görülen ABG düzlemsel üçgeninde $\frac{AB}{AG} = \frac{\sin G}{\sin B}$ münasebetinin ispatlanması gerekmektedir.

G açısı dik olduğu takdirde, AB = sinG ve AG = sinB'dir. Bu eşitlikleri taraf tarafa bölecek olursak, $\frac{AB}{AG} = \frac{\sin G}{\sin B}$ münasebetini elde ederiz. Böylece de teoremimiz dik açılı düzlemsel üçgen için ispatlanmış olur.

4) Üçgenimizin dar açılı bir üçgen olması halinde ise (şekil 4), AGH ve AHB dik üçgenleri için $\frac{AH}{AB} = \frac{\sin B}{\sin H}$ ve $\frac{AG}{AH} = \frac{\sin H}{\sin G}$ münasebetlerini yazabiliriz. Bunları taraf tarafa çarpalım. Çarpım sonucu $\frac{AG}{AB} = \frac{\sin B}{\sin G}$'dir. Demek ki bu teoremimiz de böylece ispatlanmış olur.

5) AGD üçgeninde (şekil 5) $\frac{AG}{AD} = \frac{\sin D}{\sin G}$ bağıntısının ispatlanması söz konusudur. Bu sefer üçgenimiz geniş açılı bir düzlemsel üçgendir. DG doğru parçasını G'den itibaren uzatarak buna AB dikmesini indirelim. AGB ve ABD dik üçgenlerinde şu bağıntılara sahibiz: $\frac{AG}{AB} = \frac{\sin B}{\sin G}$ ve $\frac{AB}{AD} = \frac{\sin D}{\sin B}$. Bunları taraf tarafa çarpalım. $\frac{AG}{AD} = \frac{\sin D}{\sin G}$ bağıntısını elde ederiz ve teoremimiz de böylece ispatlanmış olur.

AL-BAYRÛNÎ'S LETTER ON ABÛ NAṢR MANṢÛR'S DEMONSTRATION OF THE SINE LAW

Dr. AYDIN SAYILI

The little tract of Al-Bayrûnî, presented here in its Arabic text as well as Turkish and English translations, is, as is attested by its closing sentence, a letter written by him to someone called Abû Sa'îd. It occupies pp. 134b-136a in a volume made up of a collection of Arabic manuscripts. The volume is in Leiden, in Bibliotheca Academia Lugduno Batavae and is registered there under number 1007 (Codex 168 Golii). This short article of Al-Bayrûnî was brought to the attention of the scholarly world through its German translation by Suter.[1]

As its opening words indicate, this letter of Al-Bayrûnî announces and brings to light certain contributions of Abû Naṣr Manṣûr ibn 'Alî ibn 'Irâq to plane and spherical trigonometry. This contribution is Abû Naṣr's proof for the sine law, and it contains the theorems covering all the special cases of the sine law. Abû Naṣr Manṣûr was the teacher and patron of Al-Bayrûnî. He was a prince of the family of the dynasty which ruled Western Khwârazm until 995 A.D., and he was an outstanding mathematician and astronomer.

It is not stated in this article explicitly that the law of sines was discovered by Abû Naṣr. For the very first word of the tract relevant to this question is "derivation" and not "discovery". It would seem therefore possible from this wording that the law itself may have been of earlier date and that Abû Naṣr may simply have supplied new proofs for it. Or, again, the connotation of this pithy statement may be that Abû Naṣr's contribution was somewhat more substantial, though he was not fully responsible for the announcement of the law for the first time.

[1] Heinrich Suter, "Zur Trigonometrie der Araber", *Bibliotheca Mathematica*, series 3, volume 10, Heft 2, Leipzig 1910, pp. 156-160.

Al-Bayrûnî has another work which is still extant, though considered lost until recently,[2] in which he takes up this and other closely related topics in greater detail, as we gather from Naṣîruddîn aṭ-Ṭûsî's reference to it. This book is entitled *Maqâlîdu 'Ilmi Hay'âti mâ Yaḥdithu fî Basîṭi'l Kurati wa Ghayrihi (The Keys to the Knowledge of the Properties of Superficial Spherical and Other Figures)*. According to Naṣîruddîn, in fact, Al-Bayrûnî states in this work that it was, with the greatest likelihood, Abû Naṣr who was first able to establish this law in its most general form, covering all its special cases, though Abû'l Wafâ Muḥammad ibn Muḥammad al Buzjânî and Abû Maḥmûd Ḥâmid ibn al Khiḍr al Khujandî also claimed priority in this respect.[3]

It is true that Naṣîruddîn seems somewhat non-committal in this question.[4] But Al-Bayrûnî's opinion in this matter should certainly carry considerable weight, and it is therefore quite likely that Abû Naṣr generalized and extended the law of sines by discovering some of its special cases for the first time, possibly those dealing with plane triangles.

This may possibly have been the case. For apparently Naṣîruddîn aṭ-Ṭûsî was interested in the history of the subject especially in so far as spherical trigonometry is concerned. His text in fact contains considerable detail on the proofs found by various mathematicians for the sine law as applied to spherical triangles.[5] But he has nothing to say about contributions of mathematicians to the subject of the sine law for plane triangles.

It seems reasonable, indeed, as we shall see a bit further on, to conjecture that the sine law was generalized and extended to plane triangles after having first been established for the case of spherical triangles. We obviously cannot be sure, in the face of lack of unequivocal and conclusive evidence in our sources, however, that the honor of making such a generalization and extention belonged solely to Abû Naṣr Manṣûr.

[2] See, *Isis*, vol. 64, No. 225, 1973, p. 69 (item 1007).

[3] Naṣîruddîn aṭ-Ṭûsî, *Kitâbu Shakli'l-Qaṭṭâ'*, ed. and tr. A. Caratheodori, Istanbul 1891, text, p. 108, tr., p. 140.

[4] Naṣîruddîn, *op. cit.*, text, pp. 108, 125, tr., pp. 140, 162-163.

[5] Naṣîruddîn, *op. cit.*, text, pp. 108-125, tr., pp. 140-163.

The present little article, or letter, is not included in Al-Bayrûnî's detailed list of his own works, although, if it is true, as asserted by Suter, that the letter was written to Abû Sa'îd as-Sijzî (or Sijazî) (d. ca. 1024), it should be of earlier date than the said list, which was prepared in 1036. In the manuscript itself only the name Abû Sa'îd occurs. I do not know what evidence Suter has for considering this to refer to Abû Sa'îd as-Sijzî.

Apart from these considerations, however, it is clear from the first sentence of the text that Al-Bayrûnî wrote it before he had reached the age of 23, i.e., before Abû 'Abdullâh Muḥammad ibn Aḥmad ibn 'Irâq, the last king of the family of Ibn 'Irâq, rulers of Western Khwârazm, was overthrown by the ruler of Eastern Khwârazm in 995. For Al-Bayrûnî refers to him here, in his opening sentence, as a man still living and as a ruler still in power.

It is true that Suter translates the key expression here, *mawlâ Amîri'l-mu'minîn*, as the "freed slave of the *amîr* of the believers", and this would render the chronological connotation of that statement vague. Al-Bayrûnî uses this expression quite frequently when speaking of Abû Naṣr Manṣûr. Sachau also translated this word *mawlâ*, used by Al-Bayrûnî when speaking of Abû Naṣr Manṣûr, as "freed slave", and he decided that the term *Amîru'l-mu'minîn* occurring together with it should refer here to the Samanid king of the time. [6]

Such a reference is quite unusual, however, and it is rather odd that Al-Bayrûnî should have repeatedly used it in the sense of "freed slave" when speaking of Abû Naṣr Manṣûr. The term *amîru'l-mu'minîn* was used frequently and for any ruler, and one of the meanings of the word *mawlâ* is "close relative". It is known, on the other hand, that, as the part of his name "Ibn 'Irâq" also indicates, Abû Naṣr Manṣûr belonged to the ruling family of Western Khwârazm. There should be no doubt therefore that the meaning of this expression, as used in this context by Al-Bayrûnî, is 'the close relative of the king of Khwârazm', as I have interpreted it.

It is quite understandable of course that Al-Bayrûnî should have forgotten to include this letter of his youthful days in the list of his works prepared at a considerably later date or that he should not have

[6] See, Al-Bayrûnî, *Al-Âthâru'l-Bâqiya*, ed. Sachau, Introduction, p. 33.

even considered it necessary to include such a letter concerning someone else's work, learned though it may be, in the list of his own publications. The last sentence of this tract constitutes sufficient evidence that it was written by Al-Bayrûnî, and, as we have just seen, we are in possession of clear evidence that the subject of this letter was one which was of great interest to him and to which he referred in greater detail in at least one of his more substantial works. We should therefore not doubt the authenticity of its attribution to Al-Bayrûnî.

As mentioned above, Naṣîruddîn speaks of the history of the sine law in detail only in connection with spherical triangles. Moreover, the figures concerning these theorems that occur in the text of Naṣîruddîn's work which has survived were considered often wanting in clarity. These details were consequently omitted in Von Braunmühl's history of trigonometry in Islam, and this had resulted in the creation of a slightly distorted image of the course of progress of trigonometry in Islam. For it had brought the thirteenth century somewhat into prominence at the expense of underestimating certain achievements, especially in plane trigonometry, belonging to the earlier centuries.[7] Al-Bayrûnî's present short tract was one of the most important documents serving to correct that impression.

As this letter of Al-Bayrûnî is thus obviously of considerable significance to the history of trigonometry in Islam, it was deemed advisable to publish it, although, as mentioned before, Suter has already made a full German translation of it available. I also thought it might not be superfluous to publish on this occasion an English translation of it too, as my reading and understanding of the text differ in certain respects from those of Suter.

The manuscript is badly worm-eaten in parts. Fortunately, however, the context makes it possible to emend and complete, without much difficulty, the small lacunas that have thus come into being. The words and letters added in order to fill these gaps have been placed in square brackets in the printed text. In four places the word *sine* is missing in the manuscript, and there is no question of their not having been left out by mistake. These have been added therefore to the text and inserted in braces. Likewise, toward the end of the

[7] Suter, *op. cit.*, pp. 156-157.

manuscript something like a full line was skipped by the copyist. This is quite obvious from the context and also because the missing part occurs between two expressions in the form "the sine of the angle", and the manuscript has this expression only once and lacks the intervening words. The missing part of about one line which has been added has also been inserted within braces in the printed text. The manuscript is otherwise quite legible and clear, and it contains only two other errors which have been corrected as can be seen from the footnotes.

Suter makes the conjecture that the last demonstration, or, as I call it, the fifth special case, set forth in the article is a later addition, appended possibly "by Al-Bayrûnî himself".[8] This is a somewhat strange statement, for the whole letter was penned by Al-Bayrûnî anyway. Suter apparently means also to say that this last proof is probably a contribution to the subject due to Al-Bayrûnî. But such a claim too would not seem much to the point. For, as Suter himself says, this proof is not different at all from the other proofs set forth in the text.

Suter's vaguely phrased conjecture is based mainly on the lettering of the triangle connected with this last special case as ADG (our figure 5), as compared to the lettering ABG that occurs in the triangles of the preceding parts of the text. He also says that this last paragraph is briefer and more concise as compared to the earlier treatments of the examples of triangles, and he adds incidentally that this part of the text is defective, for certain parts of ratio's involved in the intended proof are missing.

Suter's views concerning this last part of the text are certainly mistaken and unsatisfactory. I have come to the conclusion that what has misled Suter in the first place is his interpretation of the figure of the text which I have reproduced here as figure 4 and which belongs to the one-before-last case dealt with in the text. The lines AH and AG in this figure are quite close to each other in the figure of the manuscript, and the part of the figure where the letters H and G are located is worm-eaten.

[8] Suter, *op. cit.*, p. 160, note 2.

Suter takes G to be on the left-hand side of H (figure 6 in Suter). This makes the triangle ABG an obtuse-angled triangle. But the final figure belonging to the "fifth special case" (the manuscript's and our figure 5, and Suter's figure 7) also represents an obtuse-angled triangle, and the two final cases dealt with thus become the same. That is why the final case appears to Suter to be some kind of a repetition of the one coming immediately before it.

This confusion is also caused partly by the lack of clarity of the same figure 4 as to whether the line to the left or whether the one to the right (i. e., AH and AG) is perpendicular to the base line. I have come to decide that G belongs to the point on the right and H to the point on the left, the point H being the foot of the perpendicular to the base line as explicitly stated in the text. This makes the one-before-last figure of the text (my figure 4) an acute-angled triangle and the last figure an obtuse-angled triangle as is clear from the figure of the manuscript anyway (figure 5 of our printed text). The two special cases to which these figures refer, i. e., the last two proofs in the text, thus cease to be repetitive, and the doubts raised by Suter become pointless.

This way of interpretation of these two figures for plane triangles finds its exact parallel in the two previous figures of the handwritten text (our figures 2 and 3) for spherical triangles, one of which represents an acute-angled spherical triangle and the other an obtuse-angled spherical triangle. As to Suter's observation that the last paragraph of the text is shorter and more concise as compared to the earlier sections dealing with plane triangles, this simply arises from two circumstances.

It is firstly due to the circumstance that a text of about one line was left out by the copyist in the last paragraph, and it should secondly be pointed out that the earlier sections dealing with plane triangles are a little lengthy because in these sections certain concepts relating to plane trigonometry are elucidated by giving certain definitions. But these definitions and clarifications apply to the last paragraph as well. It is natural therefore that these should not have been repeated, and this too makes the last paragraph shorter and more concise.

Moreover, the terminating sentence of the tract clearly seems to round up the whole article, and there is no trace of a phraseology resembling a terminating statement coming before the fifth special case. It may also be pointed out in this connection that this tract seems to have been conceived as composed of two major parts, viz., the part dealing with spherical triangles, and the part dealing with plane triangles. For the expression Q. E. D. comes only at the ends of these major parts and not at the ends of the other more specific special cases. And as the second of these expressions comes at the end of the last paragraph, this too may be taken to indicate that the last paragraph was not intended as an appendage to an otherwise complete formal treatment. Thus the various parts of the letter fit together rather nicely and contribute towards the formation of a well-integrated whole not only from the standpoint of the subject matter but also from the viewpoint of phraseology and literary expression especially in what concerns the opening and closing sentences.

It is true that what I call the fifth case starts with the words *ibâretun ukhrâ* which Suter interprets to mean something like an alternative proof. But this could mean "another exposition" or "a complementary relation". Such an interpretation would seem reasonable. At any rate, these two cases need not necessarily have been conceived as two cases sharply distinguished from each other. Indeed, the corresponding two cases for spherical triangles are condensed into a single special case in the wording of the letter, although this part of the text is illustrated with two different figures.

As it shall presently be pointed out, one feature of this text is that its parts dealing with spherical triangles are more condensed than the parts treating plane triangles. And this feature holds true for the case concerning the right-angled plane triangle and that dealing with obtuse-angled plane triangle. Nevertheless, they are both represented by a single figure in the manuscript. Thus, in a sense, Al-Bayrûnî did not feel the need of drawing too clear a line of demarcation between these two cases either.

Under these circumstances, or under any circumstance, for that matter, it is quite natural that the proofs of the last two cases should be of exactly the same nature. This identity of method of proof would not constitute repetitiveness but would simply indicate that in a sense these two parts of the text are consistent or consonant with each other.

For, as they are complementary, the same method of proof is simply applied in both cases.

As a matter of fact, I was able to supply the missing part of about a line in this final paragraph by using words and expressions taken from the special case preceding it, and these are found in more or less the same form in the part of the text dealing with spherical triangles. For the same feature occurs in the proofs given for those cases too. To be more exact, this is the common feature of the four special cases dealing with acute-angled and obtuse-angled plane and spherical triangles, i. e., of all the proofs with the exception of those concerning right-angled plane and spherical triangles.

I have changed, in the text, the letters referring to the geometrical figures to the corresponding letters of the Latin alphabet. This was not done only in order to simplify the printing but also to make one set of figures sufficient for both the text and its translations. The manuscript is one continuous text. I have divided it into paragraphs, and the punctuation is all mine. I have added dots of letters occasionaly missing in the manuscript and have omitted some of the diacritical marks of the handwritten text. The manuscript has no *hamza* signs; the few which appear in the printed text do not belong to the manuscript.

The first figure of the manuscript does not conform well to the requirements of the conditions of perspective involved in the representation of the sector of sphere it stands for. The three dimensional situation represented is not clear, therefore, and it is not easy to visualize the lines occurring on it. Such ambiguity of figures is rather common in such manuscript texts due especially to careless reproduction by copyists not familiar with the subject. I have replaced this figure of the manuscript by its improved version supplied by Suter. As this improved figure represents what in reality the text needs and very likely is more similar to what it originally had, I have not reproduced the vague figure of the manuscript as Suter has done. For this reason, figure 1 of our printed text corresponds to figure 2 of Suter's translation.

As previously pointed out, figure 4 in the manuscript, which is figure 4 in our text also, is not very clear either and is worm-eaten in one part. This figure of ours is different from the corresponding figure given by Suter (figure 6), as the points G and H are differently situated in them. Moreover, Suter has split this figure 4 of the manuscript into two in order to have an independent additional figure for the special case dealing with a right-angled plane triangle. I have not followed Suter in this respect and have remained faithful to the manuscript. For it is easy enough to follow the case of right-angled and acute-angled plane triangles from this same figure, and the phraseology of the text refers to a single figure for both special cases anyway. The result of all this is that our printed text has five figures, as the manuscript itself, whereas Suter's translation contains seven figures.

Figures 2, 3, and 4 of the present printed text contain in the manuscript certain straight-line segments placed by the sides of these figures. Such appendages to geometrical figures are found in other medieval manuscripts also. They apparently served the purpose of placing side by side and representing such magnitudes, at times non-homogeneous, as sines of angles and lengths of line segments or arcs as magnitudes of the same kind and had the function of expressing them in reference to a common scale. These line segments have been omitted in the figures of our text, as was also done by Suter.

It is interesting to note that in this tract the radii of the spheres or circles to which the sines are referred are taken to be unity throughout. This interesting convention, which apparently never became widespread, must therefore have dated back to the early years of Al-Bayrûnî.

Naṣîruddîn aṭ-Ṭûsî associates and attributes the adoption of the value of unity for the radius in trigonometry to Al-Bayrûnî.[9] If this means, as Naṣîruddîn seems to imply, that such a convention was first proposed and adopted by Al-Bayrûnî, such a datum would be of special interest to us from the vantage point of our present manuscript also. For this would mean that though the proofs incorporated in the present tract belonged to Abû Naṣr Manṣûr, Al-Bayrûnî may have had his own way in the matter of their formal presentation. This too, incidentally, would run counter to what we may call Suter's

[9] Naṣîruddîn, *op. cit.*, text, p. 136, tr., p. 175. See also, text, pp. 140-142, tr., pp. 180-184, and, Salih Zeki, *Âthâr-i Bâqiye*, vol. 1, Istanbul 1329 H. (1913 A. D.), p. 61.

more or less tacit assumption that in this letter Al-Bayrûnî probably simply reproduces a text belonging to his master Abû Naṣr, possibly adding to it the final paragraph.[10]

Naṣîruddîn reproduces four proofs of Abû Naṣr Manṣûr for the theorems of the sine law for spherical triangles.[11] The texts of none of these is the same as the present manuscript text. This may again be interpreted to indicate that our manuscript text was not a copy of Abû Naṣr Manṣûr's own wording. We cannot be sure, however, that any of the texts given by Naṣîruddîn was a faithful copy of the original either. In fact, one of these proofs is sepcifically stated by Naṣîruddîn to belong to both Abû Naṣr and Abû'l Wafâ "though their actual wordings are different".[12]

It may be noted that in these proofs too the radius is taken to be unity. But this is apparently because Naṣîruddîn was not interested in quoting the texts of other mathematicians word for word but only in reproducing the specific nature of each proof. In fact the adoption of the value of the radius as unity is a common feature of all the different proofs connected with the sine law as reproduced by Naṣîruddîn.

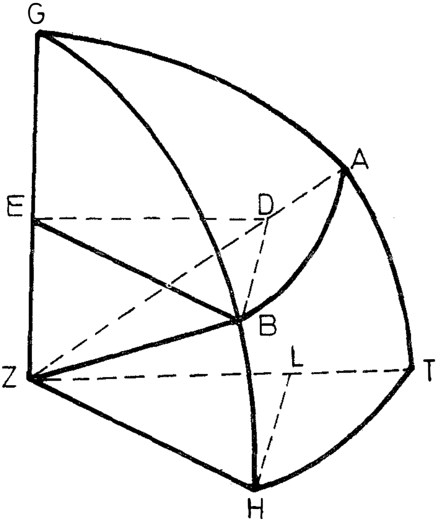
Another peculiarity of the present tract is that in it the law of sines for plane triangles is mentioned after the cases dealing with spherical triangles. Moreover, the equivalence of the measure of a plane angle and the arc of circle subtended by it is explicitly stated. In fact, this definition is set forth twice when treating the cases represented by figure 4, and likewise, the sine of a plane angle is defined on this occasion, whereas no such definitions are given for the case of a diedral angle, e.g., or rather, a very brief and partial reference is made thereto, although it may naturally be claimed that the latter case is less simple and more in need of clarification.

All this would seem to create the impression that the law of sines was first discovered for the case of spherical triangles and then extended and generalized to the case of plane triangles. Such a circumstance may in fact be said to be in conformity with the general

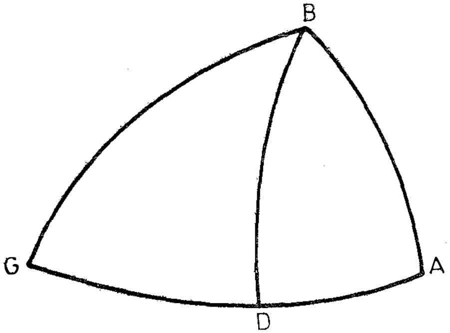
[10] See above, p. 187 and note 8.

[11] Naṣîruddîn, *op. cit.*, text, pp. 109-114, 121-122; tr. pp. 143-148, 160-162.

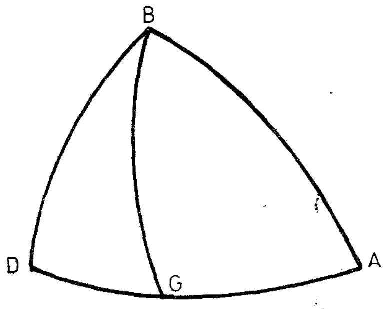
[12] Naṣîruddîn, *op. cit.*, text, p. 111, tr., p. 145.



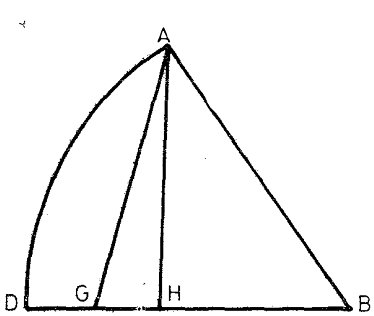
1



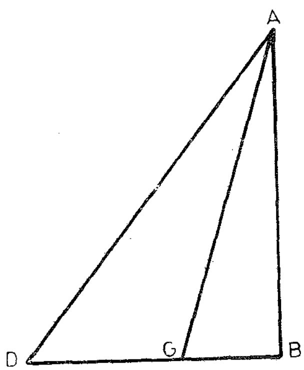
2



3



4



5

course of the history of trigonometry in Islam. For spherical trigonometry was much more in the foreground in the cultivation and progress of knowledge in this branch of mathematics, and this was due to the circumstance that work in trigonometry was motivated largely in its capacity of a mathematical tool needed by astronomy.

These definitions given in connection with plane angles in the text seem to indicate that a need was felt to refer a plane angle to the arc subtended by it and to associate trigonometric functions with such arcs rather than with the space bounded by two lines coming together in a point. The peculiar turn of such details in the present text would seem to suggest that plane trigonometry was, roughly speaking, in its stage of infancy at the time and that in utilizing trigonometric functions in plane triangles care was taken not to make mistakes, perhaps especially when, as in the present text, radii were taken equal to unity and trigonometric functions were simply represented by straight-line segments. Spherical triangles may presumably have offered the advantage of drawing attention more automatically to the center of the arcs whose trigonometric functions came into play, as well as to the arcs themselves.

As central angles have the same measure as their arcs, or, rather, as they are measured by their arcs, there is of course nothing odd in drawing attention to this point. Likewise, as sines are ratios, in comparing different sines it is necessary to refer them to denominators of the same value when the denominators are missing. It is therefore reasonable and even necessary to be careful to adhere to this principle when the denominators of the fractions representing these ratios are kept in the background and are not explicitly referred to, as is the case in the present tract. The point here is that such precautions seem to be taken when applying trigonometry to plane triangles and not in applying it to spherical triangles. And this suggests that plane trigonometry was a less familiar subject as compared to spherical trigonometry.

*

It would seem worthwile to summarize the content of our text by presenting summaries of Abû Naṣr's proofs, as transmitted by Al-Bayrûnî in this letter, in modern notations. We have the following five proofs for the five special cases dealt with in the text:

1 — In the first case (figure 1) we want to prove that in the spherical triangle ABG, where the angle A is a right angle, the relation $\frac{\sin AB}{\sin BG} = \frac{\sin G}{\sin A}$ holds. It is first shown that the triangles EDB and ZLH are similar. The angles GZH, GZT, HLZ, BDZ, and BEZ are right angles by construction. From the similarity of the triangles EDB and ZLH it follows that $\frac{BD}{BE} = \frac{HL}{HZ}$ . . . . (1)

BD = sinAB, BE = sinBG, HL = sinG, and HZ = sinA. Replacing therefore the terms occurring in relation (1) by their equals, we have: $\frac{\sin AB}{\sin BG} = \frac{\sin G}{\sin A}$.

Q. E. D.

2 — In the triangles ABG of figures 2 and 3 we wish to prove the same relation. This time the triangle is not a right triangle. Our proof is therefore to apply to the cases of acute-angled and obtuse-angled triangles both.

We draw the arcs BD perpendicular to the arcs AG and AD, respectively. In the spherical right triangles ABD and BDG we have $\frac{\sin AB}{\sin BD} = \frac{\sin D}{\sin A}$ and $\frac{\sin BD}{\sin BG} = \frac{\sin G}{\sin D}$ by virtue of our theorem of the first special case just demonstrated. Multiplying these two proportionalities term by term, we obtain $\frac{\sin AB}{\sin BG} = \frac{\sin G}{\sin A}$.

Q. E. D.

3 — In the plane triangle ABG of figure 4 it is required to prove that $\frac{AB}{AG} = \frac{\sin G}{\sin B}$.

In case the angle G is a right angle, then, AB = sinG and AG = sinB. Dividing both sides of these equalities term by term respectively and setting them equal, we obtain $\frac{AB}{AG} = \frac{\sin G}{\sin B}$.

Q. E. D.

4 — In case the triangle ABG is an acute-angled plane triangle (figure 4), we have in the right triangles AGH and AHB $\frac{AG}{AH} = \frac{\sin H}{\sin G}$

and $\frac{AH}{AB} = \frac{\sin B}{\sin H}$. Multiplying these term by term, we obtain $\frac{AG}{AB} = \frac{\sin B}{\sin G}$.

Q. E. D.

5 — In the triangle AGD it is to be proved that $\frac{AG}{AD} = \frac{\sin D}{\sin G}$. The triangle AGD is an obtuse-angled plane triangle (figure 5). DG is produced beyond G and the perpendicular AB is dropped on it. In the right triangles AGB and ABD we have

$$\frac{AG}{AB} = \frac{\sin B}{\sin G} \quad \text{and} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{\sin D}{\sin B}.$$

Multiplying these, we obtain $\frac{AG}{AD} = \frac{\sin D}{\sin G}$.

Q. E. D.

رسالة ابى الريحان البيرونى

فى الشكل المغنى و طريق استخراج دعاوى هذا القانون

لابى نصر منصور بن على بن عراق *

بسم الله الرحمن الرحيم . صلى الله على سيدنا محمد وآله وصحبه وسلم .
استخراج الشيخ الفاضل ابى نصر منصور بن على مولى امير المؤمنين ايده الله .

مثلث ABG على الكرة من الدواير العظام و زاوية A قائمة. {شكل 1} .
اقول انّ نسبة جيب AB الى جيب BG كنسبة جيب زاوية G الى جيب زاوية A .

برهانه انا نتم ربعى الدايرة وهما GBH ، GAT و نرسم قوس HT التى هى بمقدار زاوية G [ونصل نقط H ، T ، A ، G] بمركز الكرة وهو Z بخطوط HZ ، TZ ، AZ ، GZ المستقيمة ونخرج جيوب HL ، BD ، BE و نصل ED .

فمن اجل انّ AZ الفصل المشترك لسطحى دايرتى GAT ، AB و BD عمود على AZ فانه عمود على سطح دايرة GAT و لذلك ايضا HL عمود على هذا السطح اعنى سطح دايرة GAT فـ HL ، BD متوازيان ولانّ HG ربع دايرة فانّ زاوية HZG قايمة وكذلك زاوية BEZ 134b/135a
قايمة و HZ ، BE فى سطح واحد لانهما فى سطح دايرة GBH فـ HZ ، BE متوازيان فسطح مثلث DBE يوازى سطح مثلث LHZ ويفصلها

* Bu kısım bu yayında yapılmış bir ilâvedir. Yazma metninde başlık yoktur. (No such heading occurs in the manuscript text. It has been added here merely for convenience).

سطح دايرة GAT لانّ نقط D، E، L، Z فى هذه الدايرة فمثلثا HLZ[1]، BED متشابهان فنسبة BD الذى هو جيب AB الى BE الذى هو جيب BG كنسبة HL الذى هو جيب زاوية G الى HZ الذى هو جيب زاوية A. { شكل 1 } .

ولتكن ايضا زاوية [A غير ا (؟)] قايمة[2] . فنقول انه تكون نسبة جيب AB الى جيب BG كنسبة {جيب} زاوية G الى {جيب} زاوية A.

برهان ذلك انا نخرج عمود BD من دايرة عظيمة على AG فلانّ نسبة جيب AB الى جيب BD كنسبة جيب زاوية D الى جيب زاوية A و نسبة جيب BD الى جيب BG كنسبة { جيب } زاوية G الى { جيب } زاوية D فبالمساواة فى النسبة المضطربة تكون نسبة جيب AB الى جيب BG كنسبة جيب زاوية G الى جيب زاوية A و ذلك ما اردنا بيانه . { شكل 2 ، 3 } .

135a / 135b

مثلث ABG مفروض . { شكل 4 } . اقول انّ نسبة AB الى AG كنسبة جيب زاوية G الى جيب زاوية B.

برهانه : ينبغى اولا ان يعلم من قولنا جيب زاوية كذا انا نريد فى المثلث من الخطوط المستقيمة جيب القوس التى تكون على تلك الزاوية اذا كانت الزاوية على مركز دايرة ، وبعد [ذلك ؟] نجعل نقطة B مركزا وندير عليه ببعد BA قوس AD و نخرج [خط BG من] نقطة G على استقامة ، وليلقها على نقطة D.

فان كانت زاوية G قايمة فانّ AG جيب AD و AD بمقدار زاويه B التى على المركز ولانّ AB نصف قطر هذه الدايرة فـانّه جيب زاوية G التى اذا كانت على المركز كان الذى يوترها من الدايرة ربعها . فقد صح الدعوى اذا كانت G قايمة . { شكل 4 } .

[1] HKZ.

[2] زاوية A ليست بقائمة (؟).

ثم نجعلها غير قايمة ونخرج من نقطة A على خط BD عمود AH. فنسبة AG الى AH كنسبة جيب زاوية H القايمة الى جيب زاوية G وذلك انّ AH اذا كان ذلك كذلك يكون جيب زاوية G فى الدايرة التى نصف قطرها AG ، ونسـبة AH الى AB كنسـبة جيب زاويه B 135b/136a الى جيب زاوية H القايمة لانّ AH يكون جيب زاوية B فى الدايرة التى نصف قطرها AB. فبالمساواة فى النسبة المضطربة نسبة AG الى AB كنسبة جيب زاوية B الى جيب زاوية G. {شكل 4} .

عبارة اخرى : مثلث AGD مفروض . {شكل 5} . اقول انّ نسبة خط AG الى خط AD من مثلث AGD كنسبة جيب زاوية D الى جيب زاوية G.

برهانه انـا نخرج DG ، AB حتى يلتقيا على نقطة B على زاوية قايمة . فبين انّ نسـبة AG الى AB كنسبة جيب زاوية B الى جيب زاوية G وكذلك[1] نسـبة AB الى AD كنسـبة جيب زاوية D الى جيب زاوية {B. فبالمساواة فى النسبة المضطربة نسبة AG الى AD كنسبة جيب زاوية} D الى جيب زاوية G. وذلك ما اردنا بيانه .

نسخة كتاب ابى الريحان الى ابى سعيد ، رحمهما الله تعالى .

[1] ولذلك .

ARAPÇA METNİN TÜRKÇE ÇEVİRİSİ

Esirgeyen ve yarlıgayan Tanrı'nın adıyla. Efendimiz Muhammed'e, ailesi fertlerine, ve yakınlarına Tanrı dirlik ve esenlik versin.

Müminlerin Emîri Başbuğumuzun — Tanrı onu korusun ve güçlü kılsın — yakın akrabası erdemli şeyh Ebû Nasr Mansur ibn Ali'nin tanıtlama yolları.

ABG üçgeni küre üzerinde bulunup kenarları büyük daire yayları ve A açısı diktir (Şekil 1). AB'nin sinüsünün BG'nin sinüsüne oranının G açısının sinüsünün A açısının sinüsüne oranına eşit olduğunu savlıyorum.

Tanıtlanmasına gelince: GB ve GA yaylarını çeyrek daireye tamamlayalım. Meydana gelen çeyrek daire yayları GBH ve GAT'dir. G açısının ölçüsünü veren HT yayını çizelim ve H, T, A, ve G noktalarını HZ, TZ, AZ, ve GZ doğru parçaları aracılığıyla küre merkezi olan Z noktasıyla birleştirelim. Yine, sinüs olan HL, BD, ve BE doğru parçalarını çizelim ve D ile E'yi ED doğru parçasını çizerek birleştirelim.

İmdi, AZ doğrusu GAT ve AB daireleri düzlemlerinin ara kesiti olduğundan ve BD doğru parçasının AZ'ye dik oluşundan, BD zorunlulukla GAT dairesi düzlemine diktir ve aynı sebeple HL de bu düzleme, yani GAT dairesi düzlemine diktir. Böyle olunca da, HL ile BD birbirlerine paraleldirler. Öte yandan, HG bir çeyrek daire olduğundan, HZG açısı bir dik
134b/135a açıdır. Aynı suretle, BEZ açısı da | diktir. Ayrıca, HZ ile BE aynı düzlemdedir. Çünkü her ikisi de GBH dairesi düzlemi içinde bulunmaktadırlar. Böylece, HZ ile BE paraleldirler ve DBE üçgeninin düzlemi LHZ üçgeninin düzlemine paraleldir. Öte yandan, bu üçgenler GAT dairesi düzlemi tarafından kesilmektedirler. Çünkü D, E, L, ve Z noktaları bu daire düzlemi içindedirler. Binaenaleyh [bu üçgenlerin ED ve LZ kenarları da paraleldir ve] HLZ ve DBE üçgenleri benzer üçgenlerdir. Demek ki, AB'nin sinüsü olan DB'nin, BG'nin sinüsü olan BE'ye oranı G

açısının sinüsü olan HL'nin, A açısının sinüsü olan HZ'ye oranına eşittir (Şekil 1).

Şimdi de A açısının da dik olmaması halini ele alalım (Şekil 2 ve 3). AB'nin sinüsünün BG'nin sinüsüne oranının, G açısının sinüsünün A açısının sinüsüne oranına eşit olduğunu beyan ediyoruz.

Bunun ispatını şu yoldan yaparız: BD büyük daire yayını AG'ye dik olarak çizeriz. İmdi, AB'nin sinüsünün BD'nin sinüsüne oranı D açısının sinüsünün A açısının sinüsüne oranına ve BD' nin sinüsünün BG'nin sinüsüne oranı G açısının sinüsünün D açısının sinüsüne oranına eşit olduğundan, bu iki orantının taraf tarafa çarpımı AB'nin sinüsünün BG'nin sinüsüne oranının G açısının sinüsünün A açısının sinüsü oranına eşitliği bağıntısını
135a | 135b verir. Böylece de teoremimiz ispatlanmış olur (Şekil 2 ve 3).

Bu kez ABG üçgeni verilmiş olsun (Şekil 4). AB'nin AG'ye oranının, G açısının sinüsünün B açısının sinüsüne oranınına eşit olduğunu beyan ediyorum.

Tanıtı: İlkin, kenarları doğru parçalarından oluşma bir üçgene ilişkin olarak "falanca açının sinüsü" sözümüzle, bir daire merkezinde bulunduğunda bu açının göreceği yayın sinüsünü ifade etmek istediğimiz bilinmelidir. Bu belirtmeden sonra, B noktası merkez olmak üzere bu nokta etrafında BA yarıçapıyla AD yayını çizer, BG doğru parçasını G noktası ötesinde uzatırız. BG'nin bu uzantısı AD yayını D noktasında kessin.

İlkin G açısının dik olması halini ele alalım. AG doğru parçasının AD'nin sinüsü olduğunu ve AD'nin merkezsel B açısının ölçüsünü verdiğini biliyoruz. Ayrıca, AB doğru parçası bu daire yarıçapı olduğundan, bu doğru parçası, merkezde bulunduğu takdirde bir çeyrek daire yayını görmek durumunda olan G açısının sinüsüdür. Böylece de, G açısının dik olması şıkkı için teoremimiz ispatlanmış olur (Şekil 4).

Şimdi de G açısının dik olmadığını farz edelim. A noktasından BD doğrusuna AH dikmesini indirelim. AG'nin AH'ye oranı H dik açısının sinüsünün G açısının sinüsüne oranına eşittir. Bu da şundan ötürüdür ki, eldeki durumda AH doğru

parçası, yarıçapı AG olan dairede G açısının sinüsüdür. Yine,
135b/136a AH'nin AB'ye oranı, B açısının sinüsünün | H dik açısının sinüsüne oranına eşittir. Çünkü AH, yarıçapı AB olan dairede B açısının sinüsüdür. Eldeki bu iki orantıyı taraf tarafa çarparsak, AG'nin AB'ye oranının, B açısının sinüsünün G açısının sinüsüne oranına eşitliği bağıntısını elde ederiz (Şekil 4).

Bir başka açıklama (veya, tümleyici bağlantı) da şudur: AGD üçgeni verilmiş olsun (Şekil 5). AGD üçgeninde, AG doğru parçasının AD doğru parçasına oranının, D açısının sinüsünün G açısının sinüsüne oranına eşit olduğunun saptanması söz konusudur.

Bu bağlantıyı ispatlamak için DG doğru parçasını A'dan indirilen AB dikmesiyle B noktasında kesişinceye kadar uzatalım. GA'nın AB'ye oranının, B açısının sinüsünün G açısının sinüsüne oranına eşitliği saptanmış bulunuyor. Aynı suretle, AB'nin AD'ye oranının, D açısının sinüsünün B açısının sinüsüne oranına eşit olduğunu da biliyoruz. Bu orantıların taraf tarafa çarpımı ise AG'nin AD'ye oranının, D açısının sinüsünün G açısının sinüsüne oranınına eşitliği sonucunu verir. Böylece de aradığımız ispat elde edilmiş olur.

Bu yazı Ebû'r-Reyhan'ın Ebû Said'e mektubunun bir kopyasıdır. Yüce Tanrı her ikisine de rahmet etsin.

TRANSLATION OF THE ARABIC TEXT

Derivations found by the virtuous *shaykh* Abû Naṣr Manṣûr ibn ʿAlî, the close relative of the Amîr of the Believers, may God support and sterngthen him.

Let the triangle ABG be on the surface of a sphere, its sides being arcs of great circles, and let the angle A be a right angle. (Figure 1). I assert that the ratio of the sine of AB to the sine of BG is equal to the ratio of the sine of the angle G to the sine of the angle A.

Its proof is as follows: Let us complete GB and GA to quarters of circles. These are GBH and GAT. We draw the arc HT, which is of the magnitude of the angle G, and we join the points H, T, A, and G to Z, the center of the sphere, through the straight line segments HZ, TZ, AZ, and GZ. We then draw the sines HL, BD, and BE, and we likewise draw ED by joining E to D.

Now, because AZ is the line of intersection of the planes of the circles GAT and AB and BD is perpendicular to AZ, BD is necessarily perpendicular to the plane of the circle GAT, and for the same reason HL is also perpendicular to the same plane, i. e., to the plane of the circle GAT. HL and BD are therefore parallel, and because HG is a quarter of a circle, HZG is a right angle. Like-
134b/135a wise, the angle BEZ | is a right angle; and HZ and BE are in the same plane, for they are in the plane of the circle GBH. Therefore, HZ and BE are parallel, and the plane of the triangle DBE is parallel to the plane of the triangle LHZ. And these triangles are intersected by the plane of the circle GAT. For the points D, E, L, and Z are on the plane of this circle. Therefore, [the line segments ED and ZL are parallel, and] the triangles HLZ and BED are similar. Consequently, the ratio of DB, which is the sine of AB, to BE, which is the sine of BG, is equal to the ratio of HL, which is the sine of the angle G, to HZ, which is the sine of the angle A. (Figure 1).

Let now the angle A too not be a right angle. (Figures 2, 3). We state that the ratio of the sine of AB to the sine of BG is equal to the ratio of the sine of the angle G to the sine of the angle A.

Its proof is as follows: We draw the arc of great circle BD perpendicular to AG. Now, as the ratio of the sine of AB to the sine of BD is equal to the ratio of the sine of the angle D to the sine of the angle A and the ratio of the sine of BD to the sine of BG is equal to the ratio of the sine of the angle G to the sine of the angle D, their products being likewise equal, one obtains the result that the ratio of the sine of AB to the sine of BG is equal to the ratio of the sine of the angle G to the sine of the angle A. (Figures 2 and 3).

135a Q. E. D.

135b Let next the triangle ABG be given. (Figure 4). I assert that the ratio of AB to AG is equal to the ratio of the sine of the angle G to the sine of the angle B.

As to its proof, it is necessary first of all to know that by the expression "the sine of such and such an angle" in a triangle whose sides are made up of straight-line segments we mean to refer to the sine of the arc which such an angle subtends when this angle is located at the center of a circle. We describe then with the point B as center and with AB as radius the arc AD and produce the line BG beyond the point G. Let this extention of BG meet the arc AD at the point D.

Now, in case the angle G is a right angle, AG is the sine of AD which is of the same magnitude as the angle B taken at the center of this arc. And, as AB is the radius of this circle, it is the sine of the angle G, which, if located at the center, would subtend an arc of a quarter of a circle. Thus, the theorem is verified for the case wherein the angle G is a right angle. (Figure 4).

Next we suppose G not to be a right angle. From the point A we drop the perpendicular AH upon the line BD. The ratio of AG to AH is equal to the ratio of the sine of the right angle H to the sine of the angle G, and this is because, under these

circumstances, AH is the sine of the angle G in the circle whose radius is AG. Moreover, the ratio of AH to AB is equal to the
135b/136a ratio of the sine of the angle B | to the sine of the angle H which is a right angle. For AH is the sine of the angle B in the circle the radius of which is AB. Consequently, by multiplying and setting equal both sides of these two equalities one obtains the relation that the ratio of AG to AB is equal to the ratio of the sine of the angle B to the sine of the angle G. (Figure 4).

Another exposition: Let the triangle AGD be given. (Figure 5). It is to be proved that the ratio of the side AG of the triangle AGD to its side AD is equal to the ratio of the sine of the angle D to the sine of the angle G.

Its proof: We produce DG and drop from A a perpendicular to it. Let them meet at B. It is clear that the ratio of AG to AB is equal to the ratio of the sine of the angle B to the sine of the angle G. Likewise, the ratio of AB to AD is equal to the ratio of the sine of the angle D to the sine of the angle B. By multiplying and setting equal both sides of these two equalities, we have: the ratio of AG to AD is equal to the ratio of the sine of the angle D to the sine of the angle G.

Q. E. D.

This is the copy of Abû ar-Rayḥân's letter to Abû Sa'îd, may God, He is exalted, have mercy on them both.