ЎЗБЕКИСТОН ССР ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ
АБУ РАЙҲОН БЕРУНИЙ НОМИДАГИ ШАРҚШУНОСЛИК ИНСТИТУТИ

АБУ РАЙҲОН БЕРУНИЙ

(973—1048)

ТАНЛАНГАН АСАРЛАР

VII

ТОШКЕНТ
ЎЗБЕКИСТОН ССР «ФАН» НАШРИЁТИ · 1987

АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ВОСТОКОВЕДЕНИЯ им. АБУ РАЙХАНА БЕРУНИ

АБУ РАЙХАН БЕРУНИ

(973—1048)

ИЗБРАННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

VII

ТАШКЕНТ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ФАН» УЗБЕКСКОЙ ССР · 1987

В издание вошли три трактата, написанные Беруни в Газне в 20-х годах XI в.: «Обособление трактования проблемы теней», известный под названием «Гномоника», «Об определении хорд в круге при помощи ломаной линии, вписанной в него» и «Об уравнении Солнца». В них содержатся ценные сведения по средневековой математике и астрономии, истории естественнонаучной и общественной мысли народов Востока.

Для востоковедов и историков науки и культуры Востока.

ПЕЧАТАЕТСЯ
ПО РЕШЕНИЮ ПРЕЗИДИУМА АН УзССР И КОМИТЕТА ПО ИЗУЧЕНИЮ И ПОПУЛЯРИЗАЦИИ НАУЧНОГО НАСЛЕДИЯ
АБУ РАЙХАНА БЕРУНИ

А $\frac{1701000000-3445}{355(06)-87}$ 55—87

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ТРАКТАТЫ

Предисловие, перевод и комментарии
П. Г. БУЛГАКОВА и *Б. А. РОЗЕНФЕЛЬДА*

Ответственный редактор
член-корреспондент АН УзССР,
доктор физико-математических наук *Г. П. МАТВИЕВСКАЯ*

Рецензенты:
кандидаты физико-математических наук *А. АХМЕДОВ, А. АБДУРАХМАНОВ*

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1973 г. по решению ЮНЕСКО мировая научная общественность торжественно отметила тысячелетие со дня рождения великого хорезмийского ученого-энциклопедиста Абу Райхана Мухаммада ибн Ахмада Беруни. В связи с этой знаменательной датой был опубликован ряд новых исследований, посвященных жизни и деятельности гениального средневекового мыслителя, анализу его богатого многогранного научного наследия[1], а также научно комментированных переводов отдельных его трудов с исследовательскими введениями[2]. Широкое освещение в научной литературе жизни и творчества Беруни избавляет нас от необходимости приведения здесь подробных биографических сведений о нем, и мы ограничимся кратким упоминанием основных этапов его долгого творческого пути.

Абу Райхан Беруни родился 4 сентября 973 г. в древней столице Хорезма — г. Кяте (ныне г. Беруни). Данными о его родителях мы не располагаем. Видимо, в самом раннем детстве он остался сиротой, и заботу о его воспитании и образовании взял на себя известный хорезмийский астроном и математик того времени Абу Наср Мансур ибн ʻАли ибн ʻИрак. Пройдя основательную астрономическую и математическую подготовку, Беруни с шестнадцатилетнего возраста начал вести самостоятельные астрономические наблюдения. Около 995 г. он одним из первых в мире создал глобус Земли с целью определения на нем географических координат и расстояний между населенными пунктами.

После взятия Кята в 995 г. эмиром Гурганджа Беруни переезжает в Рей — крупнейший город средневекового Ирана. Там он знакомится с талантливым среднеазиатским астрономом и математиком, изобретателем подземного (траншейного) секстанта Абу Махмудом Ходженди, уроженцем г. Ходжента (ныне г. Ленинабад). В 997 г. Беруни по возвращении в родной Кят вступает в длительную и плодотворную переписку по вопросам натурфилософии и физики с юным Ибн Синой (род. в 980 г.), находившимся в то время в Бухаре.

В конце 998 г. Беруни переезжает в Гурган по приглашению правителя этой области Қабуса ибн Вушмагира, где находится до середины 1003 г. В Гургане Беруни занимается интенсивной научной деятельностью, создав около пятнадцати сочинений преимущественно астрономо-математического и исторического содержания, в том числе известную

---

[1] См.: Булгаков. Жизнь и труды Беруни; Розенфельд, Рожанская и Соколовская. Абу-р-Райхан ал-Бируни; Шарипов. Великий мыслитель Беруни. (Здесь и далее ссылки на литературу даются в сокращениях, которые раскрыты в указателе библиографических сокращений).

[2] Беруни. Фармакогнозия; Беруни. Қанон Масʻуда. Кн. I—II; Беруни, Қнига вразумления.

«Хронологию» («Памятники, оставшиеся от минувших поколений») и оригинальный труд по астролябии «Исчерпание методов, возможных при конструировании астролябии».

В конце 1003 — начале 1004 г. Беруни возвращается на родину, в Хорезм, в его новую столицу Гургандж и до 1018 г. занимается в основном коррекцией наиболее авторитетных астрономических таблиц (зиджей), а также вопросами движения светил.

В 1018 г. после взятия Хорезма газнийским султаном Махмудом Беруни по его приказу был вынужден переехать в Газну, где и прожил до конца своих дней. Умер он в 1048 г. В Газне Беруни создает наиболее крупные свои произведения, в том числе «Геодезию» (1025 г.), «Тафхим»[3] (1029 г.), «Индию» (1030 г.), «Канон Мас‘уда» (около 1037 г.), «Минералогию» (середина 40-х годов XI в.) и «Фармакогнозию» (посмертный незавершенный труд).

В научном наследии величайшего ученого средневековья около 150 работ, практически охватывающих все науки, однако основными направлениями его деятельности были астрономия и математика. Наряду с фундаментальными в этих областях работами широкого профиля Беруни оставил после себя и ряд трактатов, посвященных частным, но весьма актуальным вопросам. Некоторые из них и входят в данный том произведений.

Публикуемый трактат «Об определении хорд в круге посредством ломаной линии в нем», сокращенно называемый нами ниже «Об определении хорд», дошел до нас в Лейденской (Cod, or, 513/5), Стамбульской (Мурад Мулла № 1396/14) и Банкипурской (Индия, Банкипурская Восточная публичная библиотека в Патне № 2648/42) рукописях. Последняя рукопись, представляющая собой сборник математических и астрономических трудов средневековых ученых Востока, содержит следующие трактаты Беруни: «Об анализе и определении частных значений уравнения [Солнца]», «Гномонику» («Обособление трактования проблемы теней»), трактат «Подготовка надежной основы для уточнения понятия прохождения [светила]» и «Книгу об индийских рашиках». Указанные сочинения Беруни были изданы в 1948 г. в Хайдарабаде (Деккан)[4].

Текст трактата «Об определении хорд» в Банкипурской рукописи, некритически воспроизведенный в Хайдарабадском издании, оказался настолько искусно составленной контаминацией из нескольких трудов (причем, как удалось установить, трудов не только одного Беруни), что он является одной из самых запутаннейших текстуальных метаморфоз в рамках всей средневековой арабоязычной письменности.

При первом знакомстве с Банкипурской рукописью создается впечатление, что в ней содержится большое сочинение Беруни, состоящее из четырех глав под общим названием «Об определении хорд в круге посредством свойств ломаной линии в нем». Сочинение с тем же названием в Лейденской рукописи целиком содержит первую главу Банкипурской версии, вследствие чего создается впечатление, что в Лейденской рукописи сохранился лишь начальный раздел данного трактата, а в Банкипурской он приведен в более полном виде. Это впечатление усиливается еще и от того, что перед второй главой в Банкипурской рукописи, в которой, как и в третьей, речь идет об определении уравнения Солнца, содержится небольшое предисловие, где говорится о свойствах ломаной линии в круге. Кроме того, во второй и третьей

[3] Т. е. «Книгу вразумления начаткам науки о звездах».
[4] Библиографию см. в конце данного предисловия под сиглом *Н*.

главах Банкипурской рукописи многие методы определения уравнения Солнца опираются на те же свойства ломаной линии в круге. Начало четвертой главы в Банкипурской рукописи по своему содержанию примыкает ко второй и третьей главам, поскольку в нем также говорится об уравнении Солнца. Дальнейший текст четвертой главы, испорченный переписчиками и переплетчиками, представляет собой хаотический набор разрозненных и местами перепутанных фрагментов (иногда без начала и конца) из какого-то сборника геометрических задач вперемешку с отрывками, связанными с проблемой уравнения Солнца, а завершается четвертая глава фрагментом из трактата об определении хорд и указанием на время написания данного сочинения.

Таким образом, создается полная иллюзия того, что данный трактат дошел до нас в наиболее полном виде только в Банкипурской рукописи, что состоял он как минимум из четырех глав (геометрической, двух астрономических с использованием свойств ломаной линии, и последней — смешанной, астрономо-геометрической), и что в Лейденской рукописи (как и в Стамбульской) сохранилась лишь первая глава этого трактата, хотя и в несколько иной редакции, о чем мы скажем ниже.

Так полагали не только издатели Банкипурской рукописи, но и переиздавший в 1965 г. в Каире ее арабский текст А. С. ад-Дамердаш, который также принял Банкипурскую редакцию за одно сочинение Беруни — трактат об определении хорд. Одно время данную точку зрения разделяли и мы[5].

Некоторые исследователи полагали, что в Банкипурской редакции воедино соединены два сочинения Беруни: трактат «Об определении хорд» и «Трактат об уравнении Солнца»[6]. Как установлено позднее, они были ближе к истине, хотя их вывод не совсем точен. Лишь в процессе работы над переводом текста, изданного в Каире и в Хайдарабаде по Банкипурской рукописи, нам удалось выяснить, что мы имеем здесь не одно сочинение Беруни и контаминацию не из двух его трудов, а из четырех, при том, что один из них не принадлежит Беруни.

Разгадка началась с четвертой главы, с этого беспорядочного набора разрозненных фрагментов из сборника геометрических задач и отрывков, связанных с уравнением Солнца. Последние оказались фрагментами из введения и первой главы самостоятельного трактата Беруни, посвященного проблеме определения уравнения Солнца. Тогда стало ясно, что «внутреннее» предисловие ко второй главе в Банкипурской рукописи является концовкой первой главы этого трактата об уравнении Солнца, а вторая, третья и начало четвертой главы — соответствующие главы из этого трактата, перемешанные с трактатом об определении хорд.

Далее следовало установить, кому принадлежал сборник геометрических задач, отрывки из которого составляют большую часть четвертой главы. А. С. ад-Дамердаш вслед за издателями Хайдарабадского издания отнес эти отрывки к трактату об определении хорд Беруни.

Ключ к разгадке мы обнаружили в обрывке предисловия к данному сборнику, оказавшемся почти в самом конце четвертой главы Банкипурской редакции. В этом отрывке говорится: «... И предложил я [здесь] учащемуся, который уже прочитал мою книгу «Об анализе, построении и других геометрических действиях» и мою книгу «О соприкасающихся кругах», подумать над каждой из этих [задач] ...» (etc.).

[5] Булгаков. Жизнь и труды Беруни, с. 146—147.
[6] Розенфельд, Краснова и Рожанская. О математических работах ал-Бируни, с. 91—92.

Работ с такими названиями у Беруни нет, однако они значатся в списке трудов арабского математика X в. Ибрахима ибн Синана — внука знаменитого астронома и математика Сабита ибн Курры[7]. Более того, автор сборника называет в одном месте Сабита ибн Курру «моим дедом»[8]. И, наконец, известно, что Ибрахиму ибн Синану действительно принадлежит сборник из 41 «труднейших геометрических задач»[9], часть которого и оказалась в Банкипурской рукописи в составе псевдочетвертой главы трактата о хордах Беруни.

В той же главе Банкипурской рукописи содержится еще один анонимный фрагмент, не относящийся по своему содержанию ни к трактатам Беруни об определении хорд и об уравнении Солнца, ни к сборнику геометрических задач Ибрахима ибн Синана. В отличие от задач из данного сборника, носящих конкретный характер, в этом фрагменте содержатся теоретические рассуждения о параллельных. Анализ всех дошедших до нас данных о трудах Ибрахима ибн Синана показал, что у него не было сочинений, связанных с теорией параллельных. Между тем в «Фихристе» Беруни, в котором содержится список его трудов, значится считавшийся полностью утерянным трактат под названием «О том, что свойства величин не делиться до конца подобны положению двух линий, которые сближаются, но не встретятся при продолжении [их] вдаль»[10]. Именно об этом идет речь в данном фрагменте, что и послужило нам основанием считать его отрывком из названного труда Беруни.

Что касается точного названия трактата Беруни об уравнении Солнца, то в «Фихристе» упомянута только одна его работа по данной тематике, а именно: «Об анализе и определении частных значений уравнения [Солнца]»[11].

Все сказанное можно представить в следующем виде:

Банкипурская версия трактата об определении хорд[12]	*De facto*
I глава (с. 1—108)	Собственно трактат «Об определении хорд в круге посредством ломаной линии в нем»
Предисловие ко II главе (с. 109—114)	Заключительная часть I главы трактата «Об анализе и определении частных значений уравнения [Солнца]»
II глава (с. 115—133)	II глава вышеназванного трактата об уравнении Солнца
III глава (с. 133—178).	III глава из того же трактата об уравнении Солнца
IV глава	
а) с. 179—180	Начало IV главы из того же трактата об уравнении Солнца
б) с. 180—184	Фрагмент из трактата Беруни «О том, что свойства величин не делиться до конца подобны положению двух линий, которые сближаются, но не встретятся при продолжении [их] вдаль»

[7] Suter. Die Mathematiker. S. 53—54; Sezgin, V. S. 292—295; МР, II, с. 134—136.

[8] *T*, с. 286. Сиглы раскрыты нами в конце данного предисловия.

[9] Кадри, с. 253.

[10] Chronologie, Einleitung, S. XXXXIV; Boilot, p. 198, N 67; Suter und Wiedemann, S. 86, VIII, N. 7.

[11] Chronologie, Einleitung, S. XXXXI; Boilot, p. 180, № 11. Ранее мы (Булгаков. Жизнь и труды Беруни, с. 147 и др.) переводили название этого трактата менее точно: «Об анализе и детализации [эпициклического] уравнения». Как нам удалось позднее установить, слово تقطيع наряду с обычным значением «детализация» имеет и специфическое «определение частных значений».

[12] Ссылки на страницы даются по Хайдарабадскому изданию.

323 = ?

(318-321) в) с. 184—206 1.6.5	Фрагменты из сборника геометрических задач Ибрахима ибн Синана
322 г) с. 206—209	Отрывок из I главы вышеназванного трактата Беруни об уравнении Солнца
323 д) с. 209—214	? (отрывок без начала и конца с испорченным текстом астрономического содержания) = 1.6.5.
е) с. 214—215	Фрагмент из введения Ибрахима ибн Синана к сборнику геометрических задач
324 ж) с. 215—219	Фрагменты из его сборника геометрических задач
325 з) с. 219—224	Отрывок из введения Беруни к вышеназванному трактату об уравнении Солнца
326 и) с. 224—226	Концовка вышеназванного трактата Беруни об определении хорд с датой написания этого сочинения[13]

Перейдем к характеристике каждого из публикуемого нами в переводе трактатов Беруни.

Трактат «Об определении хорд» был завершен, как указано в Банкипурской рукописи, в Газне в месяце раджаб 418/ августе 1027 г.

В основу трактата положены различные виды доказательств и примеры по практическому применению теоремы Архимеда о свойствах ломаной, вписанной в круг.

Согласно данной теореме, если на ломаную ABC опустить перпендикуляр DE из середины дуги ABC, то всегда $AE = EB + BC$.

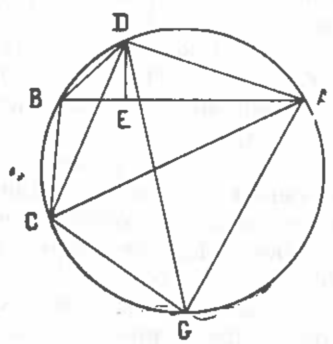

Рис. 1.

Беруни приводит в трактате 21 доказательство этой теоремы, в том числе 5 собственных, 3 принадлежащих Архимеду и 13 — ученым средневекового Востока (Абу Са'ид ад-Дарир ал-Джурджани, ал-Хубуби, аш-Шанни, ас-Сиджизи, Ибн'Ирак, Азархур ибн Уштаз Джашнас, Ибн ал-Хайсам). Эту теорему он называет первым утверждением[14].

Согласно второму утверждению, $AB \cdot BC + BD^2 = AD^2$. Беруни приводит 11 доказательств этого утверждения, в том числе 3 собственных.

Для доказательства третьего утверждения берется произвольная дуга CG и соединяются: C с D, C с G, G с D и с A. Согласно этому утверждению, $AG \cdot CG + CD^2 = DG^2$. Три приведенные им доказательства принадлежат Абу-л-Хасану Ибн Бамшазу, Абу Джа'фару ал-Хазину и неизвестному ученому.

По четвертому утверждению $S_{\Delta ADC} - S_{\Delta ABC} = DE \cdot EB$.

В трактате содержатся три доказательства этого утверждения: одно, принадлежащее самому Беруни, второе — его учителю Ибн 'Ираку и третье — аш-Шанни.

После рассмотрения этих четырех утверждений Беруни приводит ряд задач, решение которых связано со свойствами ломаной, вписанной в круг. В их числе: проведение двух линий в круге через две заданные точки, заключенные в заданный угол, с тем, чтобы сумма или разность, произведение или отношение величин этих линий были равны заданной величине; построение треугольника в заданном круге, сумма сторон которого равна заданной величине; определение площади четырех-

[13] Подробнее о Банкипурской рукописи 2468 см: Hogendijk. Reapranging the manuscript Bankipore 2468.

[14] См.: Сирожиддинов, Матвиевская, Аҳмедов. Беруний — математик, с. 17—20.

угольника, вписанного в круг, и др. Некоторые из этих задач связаны с вопросами астрономии, в том числе с определением угла наклона плоскости эклиптики к плоскости небесного экватора, положения апогея Солнца, площади затмевающегося при затмениях сегмента небесного тела и другие.

В заключительных разделах трактата рассматриваются задачи на определение хорд в круге. В их числе: определение хорды 1/10 и 1/8 окружности, а также хорд дополнения всякой дуги с известной хордой до полукруга, удвоенной дуги с известной хордой, половины дуги с известной хордой, суммы, полусуммы или разности двух дуг с известными хордами и др.

Комбинируя эти задачи, отмечает Беруни, можно, например, определить хорды дуги 3° окружности. В заключительном разделе трактата Беруни рассматривает один из методов трисекции угла в целях определения хорды трети дуги с известной хордой, т. е. хорды 1° окружности.

Многие решения вышеупомянутых задач принадлежат самому Беруни, а некоторые из них — его предшественникам и современникам; мы не будем здесь их перечислять, поскольку в тексте Беруни скрупулезно отмечает, кому принадлежит тот или иной метод решения задачи.

Актуальность трактата «Об определении хорд» для времени Беруни бесспорна. На множестве примеров он показывает, сколь эффективно и широко могут быть использованы свойства ломаной линии в круге и как определить хорды для решения не только отвлеченных математических задач, но и жизненных проблем астрономии его времени. «Совершенно очевидно,— пишет он,— что познание хорд дуг окружности является для астрономии тем же, что для вещества такая стадия состояния, когда оно переходит от потенции к действию»[15]. Разработка и уточнение методов определения хорд в средние века были основным способом совершенствования тригонометрических таблиц. Работу в этом направлении Беруни продолжил позднее в «Каноне Мас'уда», и не случайно тригонометрические таблицы ученого, включенные им в свой последний труд, были наиболее точными в его эпоху.

Большое значение имеет данный трактат и для истории астрономии. В нем приведены цитаты или выдержки из трудов самого Беруни и других не дошедших до нас сочинений («Шахский альмагест» Ибн'Ирака, «Восполнение зиджа Хабаша [теоретическими] обоснованиями и очищение его действий от ошибок», «Опровержение лжи путем приведения доказательств к действиям ал-Хорезми в его зидже» Беруни и др.). Особенно ценные сведения в трактате содержатся о деятельности ученых-математиков, сведениями о которых мы почти или совсем не располагаем (ал-Хубуби, Абу Са'ид ад-Дарир ал-Джурджани, Абу-л-Хасан ибн Бамшаз, Азархур ибн Уштаз Джашнас и др.).

Трактат «Об определении хорд» дошел до нас в двух редакциях. Одна из них отражена в Лейденской рукописи, другая — в Банкипурской. Обе редакции — не авторские. Это доказывается тем, что в первой из них отдельные разделы приведены в более развернутом виде, с прямыми цитатами, а во второй — в сокращении (хотя и умелом) и с пересказами вместо цитат. Однако Банкипурская рукопись содержит ряд разделов, отсутствующих в Лейденской и, следовательно, полнее.

Анализ обеих редакций показал, что редакция *Р* — Банкипурской рукописи ближе к авторскому тексту, чем редакция *Л* — Лейденской. Помимо этого в *Р* содержатся разделы, вообще отсутствующие в *Л*, где

[15] См. ниже, с. 64.

материал изложен в строгой логической последовательности, присущей Беруни. В *Р* сначала рассматриваются все доказательства теоремы Архимеда (первого утверждения), затем ее следствий (второе, третье и четвертое утверждения), и в конце приводятся задачи. В *Л* весь материал произвольно сгруппирован по формальному признаку: вначале даются все задачи и доказательства, принадлежащие одному ученому, затем — другому и т. д. В результате доказательства второго утверждения оказались при первом и т. д. Более того, в *Р* приводится чье-то основное решение задачи и вслед за этим варианты ее решения других ученых, при этом закономерно опускаются общие начальные этапы решения, а излагаются лишь действия с момента их расхождений. Поскольку в *Л* материал расположен по авторскому признаку, и варианты вследствие этого оказались оторванными от основного решения, редактор был вынужден каждый раз заново повторять все с самого начала. Всякому, кто знаком с научной методологией Беруни, ясно, что ему был присущ только первый путь.

Что касается конкретного расхождения редакций в отношении полноты материала, его расположения и формулировки, то дать здесь какое-нибудь схематичное сопоставление или конкорданс невозможно и нецелесообразно, поскольку они слишком велики и многочисленны, а в примечаниях они оговорены.

Стамбульской рукописью трактата мы не располагали, но, судя по отдельным фрагментам, опубликованным А. С. ад-Дамердашем при издании текста Банкипурской рукописи, ее редакция совпадает или очень близка с *Л*.

Первым из европейских ученых, обратившим серьезное внимание на данный трактат Беруни, был известный немецкий историк математики Востока Г. Зутер, который в 1911 г. опубликовал его немецкий перевод с краткими примечаниями[16]. Перевод Г. Зутера надежен, а отдельные мелкие ошибки и опечатки не лишают его авторитетности.

В 1948 г. текст трактата был опубликован в Хайдарабаде (Декан)[17] вместе с некоторыми другими произведениями Беруни. Практически никакой критики текста осуществлено не было, и публикация изобилует ошибками, особенно в буквенных обозначениях при чертежах, где очень часто смешиваются графически близкие буквы (ح и ج, ج и د и т. п.).

В 1961 г. на страницах египетского журнала «Рисалат ал-'илм» А. С. ад-Дамердаш опубликовал неполный текст трактата с математическими примечаниями и приложением фотокопий соответствующих разделов Банкипурской рукописи[18]. В 1965 г. им же был издан арабский текст всей сводной редакции по Банкипурской рукописи (т. е. трактат «Об определении хорд», трактат об уравнении Солнца и фрагменты из сборника геометрических задач Ибрахима ибн Синана), который был им ошибочно принят за одно сочинение Беруни — трактат «Об определении хорд»[19]. В отдельных случаях он параллельно приводит фрагменты из Стамбульской рукописи трактата. Текст данного издания значительно точнее Хайдарабадского, но также содержит отдельные ошибки и опечатки. Вперемешку с текстом Беруни А. С. ад-Дамердаш приводит свои математические примечания, не всегда выделяя их должным образом. Произвольно он включил в текст отрывки из «Канона Мас'уда» Беруни, также не всегда их выделяя. Словесные рассуждения Беруни А. С. ад-Дамердаш нередко передает сокращенно посредством современной

[16] Полную библиографию см. в конце данного предисловия под сиглом *З*.
[17] Idem. Сигл *И*.
[18] Idem. Сигл *Д*.
[19] Idem. Сигл *Т*.

математической символики, что не соответствует требованиям современной текстологии, поскольку это может ввести в заблуждение неискушенного читателя. Тем не менее данный текст при критическом подходе к нему может служить основой для перевода трактата.

В 1963 г. был опубликован русский перевод трактата С. А. Красновой и Л. А. Карповой по Хайдарабадскому изданию[20]. К сожалению, и филологически, и математически перевод весьма неточен[21]. Кроме того, переводчиками не учтены дополнения и варианты по Лейденской рукописи. Крайне краткие и общие примечания содержатся в переводе Б. А. Розенфельда и С. А. Красновой, занимающие всего шесть страниц и состоящие из 68 номеров. Все это обусловило необходимость нового перевода трактата, тем более, что попытка положить в его основу сводный текст (по Банкипурской и Лейденской рукописям) еще никем не была предпринята.

В основу настоящего перевода положен текст Банкипурской рукописи по Каирскому изданию и текст Лейденской рукописи. При необходимости мы обращались к опубликованным в «Рисалат ал-'илм» разделам факсимиле Банкипурской рукописи и Хайдарабадскому изданию последней. Текст Стамбульской рукописи, за исключением отдельных разделов, опубликованных в Каирском издании, к сожалению, был для нас недоступным.

Перейдем к характеристике второго из публикуемых в нашем переводе произведений Беруни.

Точное время написания трактата Беруни «Об анализе и определении частных значений уравнения [Солнца]», который в дальнейшем мы будем сокращенно называть «Об уравнении Солнца», не известно. Можно предположить, что он был завершен до августа 1027 г., т. е. до окончания трактата «Об определении хорд», ибо в последнем Беруни упоминает о своей книге, специально посвященной проблеме определения уравнения Солнца (*Т*, с. 123)[22], а в собственном списке своих трудов по данной тематике он указывает лишь один этот трактат[23], однако такому предположению мешает то обстоятельство, что в трактате «Об уравнении Солнца» Беруни, в свою очередь, ссылается на трактат «Об определении хорд» (*Т*, с. 173). Данный парадокс нетрудно объяснить: Беруни нередко возвращался к своим трудам и добавлял в них ссылки на позднее написанные работы. Но какой из этих двух трактатов был написан раньше, остается неизвестным.

Дошедшие до нас части трактата позволяют предположить, что он состоял из введения и, как минимум, четырех глав.

Во введении, дошедшем в отрывках, Беруни сообщает, что некое лицо не смогло разобраться в величинах уравнения Солнца, составленных по зиджу (т. е. астрономическим таблицам), мервского ученого IX в. Хабаша ал-Хасиба, и обратилось к нему за помощью. Изучая этот вопрос, Беруни выявил метод Хабаша ал-Хасиба определения уравнения Солнца, апробировал его и решил обосновать его собственными геометрическими доказательствами. Затем, по его словам, он «погрузился в мысли о доказательстве других методов». «И открылись мне,—

[20] Idem. Сигл *П*.

[21] См., в частности, ниже, комментарий к переводу трактата «Об определении хорд», прим. 25, 130, 35, 36, 46, 50, 58, 66, 67, 80, 85, 95, 102, 103, 111, 115, 123, 128, 129, 143, 158, 163, 166, 167, 168, 169, 170, 172, 183, 184, 186, 187, 190, 191, 195, 202, 211, 212, 224, 228, 229, 230, 233, 234, 236, 237, 241, 242, 244, 245, 248, 273, 277, 279, 284, 295, 299, 311, 331, 336, 344, 352, 356, 366, 367, 373, 387, 389, 396, 406, 418 и др.

[22] Указатель сиглов см. в конце данного предисловия.

[23] Chronologie, Einleitung, S. XXXXI; Boilot, p. 180, N 11.

пишет далее Беруни,— способы познания их всех, и стали освещаться благодаря настойчивости пути к их доказательствам в мгновенье взгляда в них. Вследствие их множества стало возможным уделить им отдельную книгу, которая содержала бы искусство великой трудности в астрономии, тренируя бегущего от одичалости традиций в зиджах [по направлению] к исследованию остальных присущих ей проблем. И вот эта книга»[24].

Во введении Беруни излагает сущность проблемы, непосредственно связанной с эксцентрической гипотезой движения Солнца Клавдия Птолемея, и знакомит читателя с обозначениями величин, которые могут быть использованы для определения уравнения Солнца.

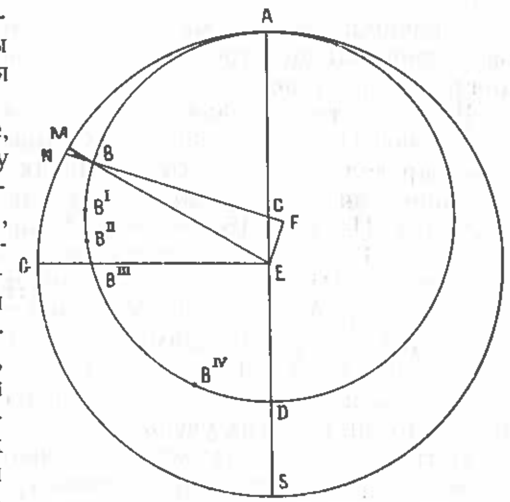

Рис. II.

Согласно данной гипотезе, Солнце (*B*) движется по кругу *ABD*, именуемому эксцентрической орбитой или орбитой апогея, где *A* — точка апогея, а *D* — перигея (рис. II). Центр этой орбиты (*C*) не совпадает с центром мира (*E*), являющимся и центром парэклиптики, т. е. круга, концентричного с эклиптикой (круг *AMS*). Дуга орбиты апогея от Солнца до ближайшей к нему точки апогея или перигея (в данном случае $\smile AB$) называется аргументом Солнца. Угол *ABC* называется углом аргумента или «углом среднего аргумента» ($\bar{\lambda}$ — средняя долгота апогея Солнца); угол *ABE* — «углом исправленного аргумента» или «углом наблюдения аргумента» (λ — истинная долгота апогея Солнца).

Угол *EBF*, измеряемый дугой парэклиптики *NM*, и есть искомое уравнение Солнца (Θ). Следовательно, $\Theta = \bar{\lambda} - \lambda$. Для определения уравнения Солнца используются *CE*, эксцентриситет солнечной орбиты, который Беруни называет «основой», *EF* — что Беруни именует «стороной», *EB*, условно называемая им «гипотенузой» и другие линии, о которых подробнее сказано ниже во введении к трактату Беруни и в прим. 38 к его переводу.

Уравнение Солнца Беруни рассматривает в пределах половины эксцентрической орбиты (*ABD*) и парэклиптики (*ANS*) в пяти вариантах, связанных с различным положением Солнца: *B* — когда Солнце не доходит до четверти круга *ABD*, B^I — когда аргумент ($\smile AB$) равен 90°, B^{II} — когда Солнце не доходит до линии *EG*, ограничивающей квадрант парэклиптики, B^{III} — когда Солнце на линии *EG*, т. е. уравнение Солнца максимальное, и B^{IV} — когда Солнце за линией *EG*, и аргумент измеряется от точки перигея *D*. Поскольку основной задачей в трактате является определение не максимального уравнения Солнца, являющегося постоянной величиной, а частных его значений, Беруни в дальнейшем опускает четвертый вариант.

В первой главе, также дошедшей лишь фрагментарно, Беруни рассматривает некоторые общие и вспомогательные вопросы. Он доказы

[24] См. ниже, с. 81.

вает, почему уравнение Солнца в четвертом из вышеупомянутых вариантов является максимальным. Далее он доказывает равносильность определения уравнения Солнца в пределах одной половины эксцентрической орбиты (т. е. орбиты апогея) для другой ее половины.

Затем Беруни рассматривает теорему Архимеда о ломаной в круге с ее следствиями, которой он посвятил трактат «Об определении хорд», считая ее весьма полезной для определения уравнения Солнца.

Далее Беруни разъясняет, как переводить величины в мерах диаметра эксцентрической орбиты в меры диаметра парэклиптики и наоборот.

В конце первой главы Беруни останавливается на определении сторон прямоугольного треугольника, если известны одна из его сторон и один из острых углов.

Вторая и третья главы трактата, являющиеся основными, сохранились полностью. В 15-ти разделах второй главы Беруни приводит 15 методов определения частного уравнения Солнца с примерами на вычисление уравнения по каждому методу для одного и того же конкретного аргумента. Из этих 15 методов 8 принадлежат самому Беруни, 1 — Птолемею, 1 — популяризатору индийской астрономической традиции ал-Фазари (VIII в.), 1 — известному среднеазиатскому астроному IX в. Абу-л-‘Аббасу Ахмаду ибн Мухаммаду ал-Фергани, 1 — Хабашу ал-Хасибу (IX в.), 1 — Сулайману ибн ‘Исме ас-Самарканди (IX в.), 1 — ал-Баттани (X в.) и 1 — неизвестному ученому. В 16-м разделе второй главы он выявляет ошибки в определении уравнения Солнца ал-Хорезми и некоторых других ученых.

В третьей главе, также состоящей из 15-ти разделов, посвященных тем же самым методам определения уравнения Солнца, Беруни приводит геометрические обоснования этих методов, а в 16-м разделе — обоснования критики неверных методов.

От четвертой главы сохранилось лишь ее начало. Судя по названию и дошедшему до нас отрывку, она представляла собой свод задач на определение по двум заданным величинам третьей: наибольшего уравнения — по частному уравнению и аргументу (сохранился только этот раздел), аргумента — по наибольшему и частному уравнениям Солнца и т. п.

Данный трактат Беруни был весьма актуальным для своего времени поскольку определение положения Солнца путем наблюдения с Земли его годичного неравномерного движения являлось теоретической базой для уточнения календаря и совершенствования службы времени. Трактат имеет и большое историко-познавательное значение. Он позволяет расширить наши знания об астрономических исследованиях самого Беруни и его предшественников, в том числе Сулаймана ибн ‘Исмы ас-Самарканди и других.

Этот трактат не был предметом специального изучения. Исследователи рассматривали его только в связи с характеристикой творчества Беруни и библиографией его работ. О нем упомянуто лишь в краткой статье Э. Кеннеди и А. Муруввы, посвященной математическому выражению действий по определению уравнения Солнца[25]. Данная статья была впоследствии использована М. М. Рожанской в специальной монографии, в которой рассматриваются вопросы развития механики на средневековом Востоке[26]. Ни на один из языков мира этот трактат до сих пор не переведен. Наш перевод основан на каирском издании

[25] Kennedy and Muruwwa. Biruni on the solar equation.

[26] Рожанская. Механика на средневековом Востоке, с. 241—242.

А. С. ад-Дамердаша с привлечением фрагментов из Хайдарабадского издания, отсутствующих в его переводе.

Судьба трактата Беруни «Обособление речи о проблемах теней» («Ифрад ал-макал фи амр аз-зилал»), именуемого нами для краткости «Гномоникой», отлична от большинства известных сочинений ученого. Сохранился лишь один список этого трактата в Банкипурской рукописи (лл. 194 об.—238 об. и 125—130 об.): последние листы оказались в «Книге о движении Солнца» Ибрахима ибн Синана ибн Сабита ибн Курры. Первая группа листов была издана Османийским университетом (Хайдарабад, Индия) в составе «Трактатов ал-Бируни» из указанной рукописи[27], вторая — в составе «Трактатов Ибн Синана» из той же рукописи[28]. В 1976 г. в Алеппо был опубликован английский перевод «Гномоники», осуществленный Э. С. Кеннеди[29], к сожалению, не совсем точный. Одновременно им же был опубликован обстоятельный комментарий к переводу[30].

Общий обзор «Гномоники» и анализ отдельных частных вопросов приведены в работах П. Г. Булгакова[31], А. Абдурахманова[32], Э. С. Кеннеди[33], М. Л. Давидян[34], М. Лесли[35], Г. Херменлинка[36] и Б. А. Розенфельда (отдельно, а также совместно с Л. Г. Уцехой и Н. К. Маруповым)[37].

«Гномоника» была написана Беруни в период между 1022—1030 гг., т. е. после его первой поездки в Индию и до завершения «Индии». Первая хронологическая граница написания этого труда определяется широким использованием в нем материалов, связанных с развитием науки в Индии, вторая тем, что в «Индии» эти материалы уже изложены в уточненном и исправленном варианте. Так, если в «Гномонике» географическая широта Лахора дана приблизительно — «около 32 градусов», то в «Индии» она указана конкретно — 34°10′[38].

«Гномоника» — энциклопедический труд, который в композиционном плане может быть сопоставлен с «Минералогией» Беруни. В «Минералогии» основной тематикой является описание, классификация и определение удельного веса минералов, а также указание места и способов их добычи. Наряду с этим Беруни приводит самые разнообразные сведения, касающиеся минералов — сказки, легенды, суеверия, данные экономического характера, фрагменты из арабской поэзии и др. Основное содержание «Гномоники» — общая характеристика и анализ методов использования тени от гномона, т. е. шеста, установленного на горизонтальной или вертикальной плоскости и используемого для определения тригонометрических величин, времени и положения Солнца в системе горизонтальных координат. Здесь же Беруни рассматривает с точки зрения филолога различные оттенки значения слова «тень», при-

[27] Библиографию см. в конце данного предисловия под сиглом *И*.

[28] Библиографию см. там же под сиглом *С*.

[29] Библиографию см. там же под сиглом *К*.

[30] Kennedy. Commentary.

[31] Булгаков. Жизнь и труды Беруни, с. 155—159; Его же. «Гномоника» Беруни.

[32] Абдураҳмонов. Берунийнинг «Соялар» рисоласи.

[33] Kennedy. Al-Biruni's book about shadows.

[34] Davidian. Al-Biruni on the time of day.

[35] Lesly. Biruni on rising time.

[36] Hermelink. Bestimmung der Himmelrichtungen.

[37] Розенфельд, Уцеха. Астрономический трактат ал-Беруни; Розенфельд. Некоторые вопросы математики; Utsheda. Some mathematical and physical discoveries.

[38] Подробнее о датировке написания «Гномоники» со ссылками на источники см: Булгаков. Жизнь и труды Беруни, с. 154.

водит примеры разнообразного его употребления, описывает различные оптические явления света и тени в природе и, так же, как и в «Минералогии», приводит фрагменты из поэтических произведений, в которых фигурирует «тень» в переносном или прямом значении.

«Гномоника» была написана по просьбе или по заказу некоего шейха Абу-л-Хасана Мусафира, интересовавшегося вопросами астрономии, астрологии и определения моментов времени. Для этого же лица он написал еще две не дошедшие до нас работы: «Исправление [«Тридцати] разделов» ал-Фергани» и «Книгу об использовании кругов азимутов для определения центров [астрологических] *домов*».

«Гномоника» состоит из введения Беруни и 30-ти глав. Свое введение Беруни начинает с теории зрительного восприятия человеком объекта видения. Он справедливо отмечает, что восприятие происходит в пределах конуса, вершина которого находится в глазу человека, а основание охватывает объект видения. Далее Беруни пишет, что существуют две точки зрения относительно сущности процесса зрительного восприятия: одни считают, что этот конус образуется из лучей, исходящих из глаза к объекту зрения, другие — из лучей, образующих образ вещей, цвет их и отражение в стекловидной жидкости глаза. Ниже, в первой главе, Беруни высказывается в пользу теории отражения. Интересно отметить, что примерно в это же время Абу‘Али ибн Сина и Ибн ал-Хайсам также решили этот вопрос в пользу отражения предметов в глазу человека.

Далее Беруни отстаивает право математики на существование перед теми, кто считал ее «греховной наукой». Кое-кто,— пишет он,— «убежден, что математика противоречит религии, расходится с шариатом, и что она — дело нечистое, коего следует избегать и отменить вовсе. К такому убеждению его привела лишь далекость его ума от сущности того, что действительно противоречит вере»[39].

В первой главе речь идет о том, что смена дня и ночи определяется т. н. «первым движением неба» — видимым суточным движением небосвода. Определяя промежуток времени, Беруни сравнивает его с расстоянием между двумя точками и отмечает, что эти расстояния устанавливаются с помощью движения. Он также приводит деление движений на равномерные и смешанные, а неравномерные, в свою очередь,— состоящие из замедленных и ускоренных. О «первом движении» Беруни говорит, что это наиболее устойчивое из существующих движений. Интересно также высказывание ученого о том, что ускоренное движение «в принципе не ограничено по величине, на которой оно закончилось бы; оно может быть [ограничено] в реальности, хотя потенциально оно может увеличиваться подобно числу в сторону его роста»[40].

Во второй главе дается определение тени, основанное на данных геометрической оптики, а также говорится о сущности света и тьмы, затенении и освещенности на Земле, о Солнце, как источнике света, которое «светится само по себе и освещает другие тела лучами, исходящими из него во всех направлениях». Здесь же Беруни рассматривает значения двух основных арабских слов, обозначающих «тень», — *зилл* и *фай'*. Вопреки мнению некоторых языковедов, утверждающих, что *зилл* — это «тень» вообще, а *фай'* — только «послеполуденная тень», Беруни, опираясь на стихотворные цитаты из произведений Абу Зу'айба, Абу-н-Наджма и Зу-р-Руммы, пишет, что такое разграничение понятий — искусственное и ошибочное. В этой же главе Беруни останавли-

[39] См. ниже, с. 122.
[40] См. ниже, с. 125.

вается на различных значениях слова «тень», употребляющихся в Коране.

Примечательны рассуждения Беруни о том, что воздух, пропуская через себя свет, при абсолютной своей чистоте сам не освещается. Если мы видим луч света в воздухе, особенно если он проникает через отверстие в темное помещение, то это еще не значит, что освещается сам воздух: освещаются лишь мельчайшие пылинки, витающие в нем.

Весьма интересна полемика Беруни с ученым IX в. Ахмадом ибн ат-Таййибом ас-Серахси. Беруни обвиняет ас-Серахси в том, что в своих «Основах философии» он сильно преувеличивает мнение Аристотеля о том, что на вершинах высоких гор воздух в силу его чистоты — темный. Это мнение Беруни опровергает словами самого Аристотеля. Беруни пишет: «...гора Кавказ, без сомнения,— исключительно высокая, как об этом свидетельствует Аристотель в книге «О высших явлениях»[41]. Он там приводит доводы в пользу большой ее высоты и утверждает, что туман не поднимается до нее, и не достигают ее ветры. Последнее он доказывает тем, что линии и знаки, сделанные [на ее вершине] на золе [сожженных] жертв и заколотых животных, остались в своем виде, и не стер их ветер и не смыл их дождь. И он не упоминает при этом ничего о черноте воздуха там. Если бы она там была, то [люди, приносившие жертвы в период] их раннего язычества, не смогли бы ориентироваться ни в их следовании на гору, ни в тех действиях, которые они там совершали. Россказни об этой темноте, которая чудеснее, чем что-нибудь другое,— это сказки, которые сочинялись для того, чтобы укрепить религиозные представления тех, кто поднимался [на гору с жертвами], у того, кто слушал их по их возвращении»[42].

Вместе с тем Беруни высказывает резкую критику в адрес тех, кто считает Аристотеля совершенно непогрешимым и в своих попытках скрыть его ошибки готов пойти на подлог. Он пишет: «Беда таких людей заключается в том, что они слишком рьяно защищают любое мнение Аристотеля, исключая возможность его ошибок, хотя они знают, что он — один из усерднейших [в науке], но не непогрешимый столп. А усердие, даже если оно самое великое,— не панацея от опасности заблуждений... Они считают себе дозволенным отстранить всю «Книгу о высших явлениях» от [авторства] Аристотеля из-за упоминания в ней зрительных лучей... и приписать ее другому автору, дабы обелить Аристотеля. И если кто-нибудь, кто представляет себе систему мира в истинном ее виде, будет порицать такую чудовищную ошибку в этой книге, что, де, обитаемая часть суши кончается под кругом летнего солнцестояния, [т. е. на тропике Рака], и невозможна за ним в сторону юга, они потребуют обвинить [этого человека] во лжи за его справедливое порицание. В своих попытках очистить имя Аристотеля от ошибок они стали посмешищем. Я этому посвятил [особую] работу, которую назвал «Выяснение признанной концепции»[43].

Доказав неправильность еще двух частных высказываний Аристотеля в области физики, Беруни в заключение говорит: «Я знаком с одним из достойнейших сторонников Аристотеля. Он сказал мне: «Если бы даже [факты], опровергающие отдельные мнения Аристотеля, оказались верными, убытка тому, что мы знаем из естественных наук, не было бы». Я ответил ему: «Убыток будет принципам, на которых вы основываетесь, и будет такой, что они рухнут. Познание же того, что неверно,

[41] Т. е. в «Метеорологике»
[42] См. ниже, с. 134—135.
[43] См. ниже, с. 135.

не называется наукой. Что же касается течения обстоятельств в природе, то оно соответствует [законам], согласно которым оно существует. И если достигнуто действительное познание этих законов, они обретают название естественных наук. И не правда ли, что знания человека при его практике — лишь частицы, мера которых несоизмерима с абсолютным знанием? Ведь оно — как горы, а знания человека — лишь как прикидка на глаз»[44].

Третья глава начинается с определения положения источника света в небесной сфере с помощью трех координат по трем взаимно перпендикулярным диаметрам сферы и с помощью двух сферических координат — высоты и азимута. Первый из этих способов является первым в истории случаем применения прямоугольных координат в пространстве. Здесь Беруни вновь возвращается к анализу слов, обозначающих тень, к образному употреблению понятия тень в Коране, хадисах, Евангелии и в арабской поэзии.

В четвертой главе говорится, что конец тени гномона описывает на горизонтальной плоскости одно из конических сечений — эллипс, параболу или гиперболу. Здесь же Беруни разъясняет, что причина того, что тени, отбрасываемые солнечным светом, размыты по краям, состоит в том, что Солнце не является точечным источником света. В связи с этим Беруни вновь рассматривает эффект камеры обскуры и, полемизируя с одним утверждением Сабита ибн Курры в его «Занимательных вопросах», впервые описывает явления диффракции, пытаясь дать им объяснение с помощью геометрической оптики.

В пятой главе продолжают рассматриваться случаи, когда тень имеет размытые и резкие края. Здесь же упоминается не известный из других источников трактат прогрессивного философа и естествоведа конца IX — начала X в. Абу-л-'Аббаса ал-Ираншахри «Вопросы природы», посвященный двойной тени. В этой же главе Беруни впервые описывает явления интерференции и критикует высказывания Платона в его «Тимее» о сущности тени.

В шестой главе излагается материал о двух видах теней, применяемых в тригонометрии: а) «распростертая» или «плоская» тень, отбрасываемая гномоном, перпендикулярным к горизонтальной плоскости, которая является линией котангенса; б) «обращенная» тень, отбрасываемая гномоном, перпендикулярным к вертикальной плоскости. Это — линия тангенса.

В седьмой главе описываются основные системы деления гномона на части. Птолемей и другие греческие ученые, как и их последователи, делили гномон на 60 частей, индийские ученые — на 12, ученые мусульманского Востока — на 7 или шесть с половиной частей. В конце главы отмечается, какой вид деления гномона использовали Абу Ма'шар (ум. 886), ан-Найризи (ум. 922), ал-Хашими (X в.), ал-Хасан ибн ас-Саббах (IX в.) и некоторые индийские астрономы.

В восьмой главе Беруни излагает методы перехода от одной системы в другую, т. е. преобразования одних мер в другие.

В девятой главе устанавливается связь между линией котангенса («плоской тенью»), линией косеканса («диагональю плоской тени» — диагональю прямоугольника, построенного на «плоской тени» и гномоне), и линией синуса одной и той же высоты, а также приводятся методы вычисления «плоской тени» по высоте и высоты по «плоской тени» в зиджах.

[44] См. ниже, с. 136.

В десятой главе решаются аналогичные задачи для «обращенной тени» (линии тангенса).

В одиннадцатой главе доказывается, что гномон — среднее пропорциональное между двумя тенями, одна из которых плоская, а другая — обращенная, т. е. что тангенс и котангенс взаимообратны.

В двенадцатой главе приведены таблицы «плоских» и «обращенных» теней в «пальцах», двух видах «стоп» и в «частях» через 1°. Здесь Беруни как и в «Каноне Мас'уда»[45] говорит о «всех таблицах», т. е. о любых функциях, заданных таблицами: в одном месте Беруни называет отрезок «числом» и говорит об умножении и делении линий, т. е. фактически он пользуется расширением понятия числа до положительного вещественного действительного числа, идея которого нашла продолжение в «Каноне Мас'уда»[46].

Далее рассматривается характер изменения «плоской тени» вблизи 0° и «обращенной тени» вблизи 90°, вследствие чего первыми рекомендуется пользоваться при высоте $> 45°$, а вторыми — при высоте $< 45°$. Доказывается также обратная пропорциональность «плоских теней» дуг «обращенным теням» тех же дуг, а также «диагоналей обращенных теней» дуг их «синусам дополнения» (косинусам), а «диагоналей плоских теней» дуг — их синусам.

В тринадцатой главе Беруни излагает способ определения «теней» с помощью астролябии путем соответственной градуировки ее обода; тогда при измерении высоты алидадой астролябии другой ее конец сразу указывает «тень» этой высоты.

В четырнадцатой главе Беруни описывает тангенс-квадранты на спинках астролябий — своеобразные номограммы для определения тангенсов и котангенсов в «пальцах» и «стопах» по дугам, отсчитываемым на ободе астролябии от некоторой начальной точки алидадой. Отмечается, что изобретателем «тангенс-квадрантов» был Мухаммад ал-Хорезми, указываются конструкции ал-Хасана ал-Ахвали, упоминаемого только здесь, и ас-Сиджизи. Здесь также Беруни говорит о числе, представляющем линию, т. е. вновь возвращается к идее расширения понятия о числе.

В пятнадцатой главе излагается метод Хабаша ал-Марвази определения высоты по тени с помощью геометрического построения, использующего тригонометрический круг, метод Йа'куба ибн Тарика, при котором тень гномона отбрасывается на наклонную плоскость, а также метод Мухаммада ибн'Омара ибн Фаррухана, согласно которому тень гномона отбрасывается на сферу, причем гномон может быть расположен вне или внутри сферы.

В шестнадцатой главе излагаются правила определения полуденной тени гномона в зависимости от географической широты и времени года; наряду с точными правилами приводятся и приближенные правила индийцев и Абу'Асима 'Исама (IX в.), основанные на замене функции тангенса линейной функцией или комбинацией из двух линейных функций.

В семнадцатой главе излагаются правила определения полуденнной тени в день весеннего равноденствия по ан-Найризи и Йа'кубу ибн Тарику и, более подробно, по ал-Кинди.

В восемнадцатой главе излагается зависимость азимута в данном городе в данный день от высоты Солнца, а также аналогичная зависи-

[45] Беруни. Канон Мас'уда, I, с. 304—305.
[46] Там же, с. 271.

мость между высотой и гороскопом (точкой пересечения эклиптики с восточной половиной горизонта), а также метод определения направления меридиана с помощью «индийского круга». В одном месте для обозначения алгебраической суммы отрезков Беруни употребляет термин «сумма», что можно объяснить тем, что здесь Беруни рассматривает эти отрезки как ориентированные. Здесь Беруни отмечает, что величина тени гномона «изменяется по величине высоты» (Солнца), т. е. тень он рассматривает как функцию высоты.

В девятнадцатой главе изложен метод уточнения определения линии меридиана, предложенный индийским астрономом V в. Пулисой.

В двадцатой главе изложен метод Брахмагупты (VI в.) определения линии меридиана по трем наблюдениям высоты Солнца в течение одного дня, а также метод решения задачи, предложенный в «Аналемме» Диодора (I в. до н. э.), что, по существу, является одним из ранних примеров применения методов начертательной геометрии; Беруни подробно доказывает правильность метода Диодора.

В двадцать первой главе излагается оригинальное решение задачи определения линии меридиана с помощью методов начертательной геометрии. Наряду с применявшимся Диодором и Птолемеем методом совмещения плоскостей проекции здесь описывается оригинальный метод вращения проекций. В данной главе Беруни вновь употребляет термин «число» применительно к непрерывной величине, а также вновь рассматривает пространственные координаты.

В двадцать второй главе изложены решения задачи определения долготы дня и ночи в книгах индийских астрономов Брахмагупты, Виджаянандина и других, в «Шахском зидже», в зиджах ал-Хорезми, Йа'куба ибн Тарика. Наибольший интерес представляет решение этой задачи с помощью линейных зигзагообразных функций, применявшихся астрономами древнего Вавилона.

В двадцать третьей главе изложены методы определения времени в «косых часах» (равных 1/12 светлого или темного времени суток), а также приведены стихотворные изложения этих методов Мухаммадом ал-Фазари, составленных по аналогии с индийскими стихотворными сочинениями по астрономии. В данной главе Беруни употребляет выражение «сумма двух движений», предвосхищая, тем самым, идею сложения или умножения операций, лежащую в основе одной из важнейших современных математических теорий — теории групп.

В двадцать четвертой главе решаются задачи определения азимута по высоте и высоты по азимуту в данный момент времени, а также момента времени по азимуту и высоте с помощью сферической теоремы синусов.

В двадцать пятой главе излагаются мнения авторитетных мусульманских богословов о мусульманских молитвах, а также приводятся сведения о молитвах евреев, христиан, манихеев и зороастрийцев. Далее описываются способы определения времени для молитвы. В этой главе Беруни сравнивает «моменты времени» с точками линий, однако его высказывание о том, что «моменты времени не настолько обширны» свидетельствуют о склонности Беруни к математическому атомизму, поскольку и моменты времени, и точки линии он считал хоть и небольшими, но конечными размерами. Данная мысль выражена в его философской переписке с Ибн Синой.

В двадцать шестой главе описываются «часовые линии» — линии на тимпанах астролябий, определяющие время молитв, и способы определения времени с помощью астролябий, линии для определения времени молитв в одном из квадрантов спинки астролябий, специальный прибор

для определения времени по Солнцу, «полуцилиндрическая алидада» и различные виды солнечных часов.

В двадцать седьмой главе доказывается теорема тангенсов, которая выводится из сферической теоремы Менелая («предложение о секущих»). Данная теорема применялась для решения задач определения склонения Солнца и «дневной дуги» (дуги малого круга небесной сферы, описываемой Солнцем в течение одного светлого дня).

В двадцать восьмой главе излагаются методы определения расстояний, в том числе расстояний до недоступных предметов, с помощью теорем плоской тригонометрии, причем необходимые углы измеряются с помощью астролябии, а их тангенсы находятся с помощью тангенс-квадрантов астролябии.

В двадцать девятой главе рассматривается измерение расстояний между небесными телами: определение расстояния до Солнца с помощью прохождения пучка лучей через небольшое круглое отверстие; определение того же расстояния по Птолемею, определение расстояния до Луны по методам, предложенным Синаном ибн ал-Фатхом (X в.) и ал-Кинди, а также с помощью наблюдения лунных затмений.

В тридцатой заключительной главе рассматриваются различные задачи: индийская задача о том, насколько высоко следует поднять зонт, чтобы его тень совершенно исчезла; попытка определения расстояния до Солнца; правило ал-Фазари определения площади освещенной части Земли; определение координат Купола Земли и некоторых городов в «Синдхинде» — арабской обработке индийских сиддхант. В конце данной главы Беруни подвергает резкой критике сочинения астрологов, начиная с приписываемых мифическому Гермесу «Восьмидесяти пяти глав». Оговорившись, что он не будет злословить по поводу Гермеса, которому приписывается перенесение «халдейской науки в Египет» (т. е. ознакомление александийских ученых с астрономией древних вавилонян), Беруни все же сравнивает сочинения астрологов с книгами алхимиков и с талисманами, в которых имеются серьезные заблуждения, дающие пищу многочисленным шарлатанам. Беруни считает, что его книга о тенях будет полезна для тех, кто хочет получить истинные знания по вопросам астрономии и измерения времени, основанных на тенях.

«Гномоника» Беруни содержит ряд замечательных открытий Беруни в математике (исследование неравномерного движения, пространственные координаты, расширение понятия числа и идея сложения операций, принятие радиуса тригонометрического круга за 1, доказательства теорем сферической тригонометрии и их применение к задачам астрономии, разработка методов начертательной геометрии) и физике (описание камеры-обскуры и явлений диффракции и интерференции света).

Создавая «Гномонику», Беруни использовал большое количество источников.

В филологических разделах, особенно при анализе образных значений понятия «тень», Беруни, помимо Корана, Евангелия и хадисов, приводит фрагменты из стихотворений Абу Зуайба, Абу-н-Наджма, Зу-р-Руммы, ал-Хали' аш-Ша'ми, Ибн Хузайлы, Абу-л-Фараджа ибн Хинду, Абу-л-Фатха ал-Бусти, а также несколько анонимных цитат. В числе греческих ученых, на которых ссылается Беруни, можно назвать имена Гиппократа, Аристотеля, Платона и Птолемея; в числе индийских — Арйабхату, Пулису, Брахмагупту, Виджаянандина, Йалтабана, Баттешвару и Пртхудакасвамина. Обширен перечень ученых различных стран халифата, трудами которых пользовался Беруни при написании «Гномоники»: ал-Фазари, Йа'куб ибн Тарик, Мухаммад ибн 'Омар ибн ал-Фаррухан, Мухаммад ал-Хорезми, Хабаш ал-Хасиб, Ахмад ас-Серахси, Сабит ибн Курра, ал-Кинди, ал-Джахиз, Абу Ма'шар ал-Балхи, Ибн ас-Саббах, ал-Ираншахри, Ибрахим ибн Синан, ан-Найризи, ал-Хашими, ал-Баттани, ал-Ахвази, Синан ибн Фатх, Хамза ал-Исфахани, Абу-л-Касим ал-Ахвал, Абу Зайд ал-Балхи, ал-Бузджани, Кушйар ибн Лаббан, ас-Сиджизи. Немало привнес Беруни в книгу и собственного материала.

При переводе публикуемых трактатов Беруни мы придерживались тех же установок, что и при переводе его «Канона Мас'уда»[47]. Издания текстов и переводы, привлекаемые нами наиболее часто, обозначаются следующими сиглами:

Д — استخراج الاوتار فى الدائرة بخواصّ الخطّ المنحنى الواقع فيها، تأليف ابى الريحان محمد بن احمد البيرونى، تحقيق الاستاذ احمد سعيد الدمرداش، رسالة العلم، ج ٢ — ٣، القاهرة، ١٩٦١.

З — Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abu'l-Raihan Muh. el-Biruni. Übersetzt und mit Kommentar versehen von H. Suter. Bibliotheca Mathematica, F. 3, Bd. XI, 1911.

И — رسائل البيرونى، دائرة المعارف العثمانية، حيدرباد، ١٩٤٨.

К — The exhaustive treatise on shadows by Abu al-Rayhan Muhammad. b. Ahmad al-Biruni, Translation and commentary by E. S. Kennedy. Vol. I, Translation, Aleppo, 1976.

Л — Лейденская рукопись трактата «Об определении хорд». Cod. or. 513/5.

П — Трактат об определении хорд в круге при помощи ломаной линии, вписанной в круг, Абу-р-Райхана Мухаммада ибн Ахмада ал-Беруни./Пер. С. А. Красновой и Р. А. Карповой//Из истории науки и техники в странах Востока. Вып. III. М., 1963, с. 93—141.

Р — Банкипурская рукопись — сборник астрономических и математических трактатов разных авторов № 2648.

С — رسائل ابن سنان، دائرة المعارف العثمانية، حيدرباد، ١٩٤٨.

Т — استخراج الاوتار فى الدائرة بخواصّ الخطّ المنحنى فيها، تآ ابى لريحان... البيرونى، تحقيق الاستاذ احمد سعيد الدمرداش. القاهرة ١٩٦٥.

На полях перевода цифры без сиглов обозначают страницы *Т* (для трактатов «Об определении хорд» и «Об анализе и определении частных значений уравнения Солнца») и страницы *И* (для «Гномоники»). Когда текст для перевода взят из иных источников, то перед цифрами на полях ставится соответствующий сигл.

Многие страницы в *Т* заняты комментариями издателя или иным посторонним материалом, поэтому цифры на полях перевода иногда «перескакивают» с пропуском одной и более страниц *Т*.

Выражаем благодарность кандидату физико-математических наук А. Ахмедову за отдельные ценные советы при подготовке данной рукописи к печати.

П. Булгаков, Б. Розенфельд

---

[47] См.: Беруни. Канон Мас'уда, I, с. 47—49.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХОРД В КРУГЕ ПОСРЕДСТВОМ СВОЙСТВ ЛОМАНОЙ ЛИНИИ В НЕМ

Я узнал, что ты[1] хотел выяснить у меня причину, побудившую меня [в прошлом] увлеченно заниматься доказательством истинности утверждения древних греков о разделении ломаной линии во всякой дуге пополам перпендикуляром, опущенным на нее из середины [дуги], и уклоняться [при этом] от [анализа] свойств сей [ломаной линии][2]. 32

Из-за этого ты даже приписал мне[3], что я занимаюсь тем же, что упоминает Мухаммад ибн Закарийа ар-Рази[4] относительно достоинств геометрии, не ведая истинной сущности достоинств, коей является прибавление к достаточному в чем бы то ни было[5]. Если бы он [ар-Рази] знал эту [истинную сущность], он нашел бы свою душу запутавшейся в «достоинствах» искушения, которыми он портит сердца, делая их отчуждающимися от веры и, благодаря [наличию] «достоинств» бренного мира, алчущими могущества и господства[6]. Мера достаточности в геометрии — не то, что думает ар-Рази и на что он указывает в своей философии, враждуя затем со всем остальным[7]. А люди — всегда враги того, в чем они невежды. Ведь сказал всевышний Аллах: «И если они не нашли пути с ним, они скажут: «Это — давняя ложь!»[8].

Если бы ты досконально разобрался [в вопросе], что есть геометрия, [ты узнал бы], что она — [путь] определения отношения друг к другу родов, подпадающих под [категорию] количества, и что она — то [средство], коим может быть достигнуто определение величины всего, в чем нуждаются[9], относящееся к тому, что измеряется[10], [отмеривается] объемными мерами[11] и взвешивается, на расстоянии от центра мира и до крайних пределов ощущаемого. И узнал бы ты [также], что с помощью геометрии познаются формы, лишенные материального содержания, и представляется истинность доказательства столь четко, что ценности [достижений] в ней — не преходящи, как преходящи они в логике у многих, постигающих их, как бы [последние] ни придерживались стези искусства логики[12].

Далее, ты поднялся[13] бы посредством тренировки в геометрии от естественных объектов познания к божественным объектам. Вследствие неясности их смысла, трудности их восприятия, тонкости их методов, огромности их сущности и отдаленности [четкого] их представления не всякому дано [познать] их, как и постичь их тому, кто уклонится от законов доказательств по тем же [причинам], по которым и ты отклоняешь меня от этого[14]. Ведь дело заключается в том, что если не удалось получить искомое, ты должен действовать путем, ведущим к нему, не тратя зря время на поиски иных путей. Затем, не следует недооценивать в конечной стадии результаты, являющиеся опорой науки о сфере[15].

Что же касается множественности методов [в этой книге], то причиной, побудившей меня собрать их [здесь], является тренировка обу-
33 чающегося через их разнообразие, а затем — объединение. ‖ [Я собрал их также] и потому, что они были мне любезны на чужбине, и дабы побеседовать [на страницах] с друзьями, с которыми я разлучился, в знак памяти [о них][16]. Я изложил их для тебя, дабы ты изучил их и узнал, как все они сводятся к одному пункту, и как плодотворна польза от сего впоследствии. И да будет уготовано у тебя извинение меня за те мои упреки, коими я окружил сие[17]. Ведь часто порицающий [сам] заслуживает порицания. Нет содействия в успехе ни от кого, кроме как от всевышнего Аллаха.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Если в какой-нибудь дуге окружности прямая линия переломлена не на равные части и на нее опущен[18] из середины этой дуги перпендикуляр, то она разделится им на две половины.

Пример: на ломаную линию AC[19] из середины дуги AC, а это — D, опущен перпендикуляр DE. Я утверждаю, что ломаная линия AC разделилась пополам, т. е. AE равна сумме EB и BC (рис. 1).

Что[20] касается разнообразия положений при этом, то если дуга ABD превосходит[21] половину окружности, то дуга BC неизбежно будет либо короче дополнения [дуги ADB] до [полного] круга, и тогда этот вопрос будет в том же, [т. е. уже разобранном], положении, а
34 чертеж этого — подобен [изображенному], ‖ либо эта дуга, [т. е. BC],

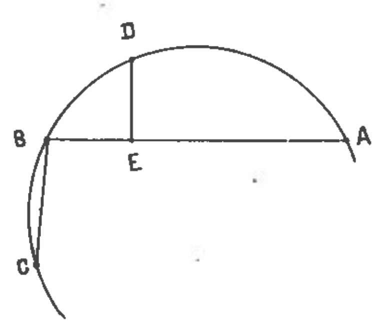

Рис. 1.

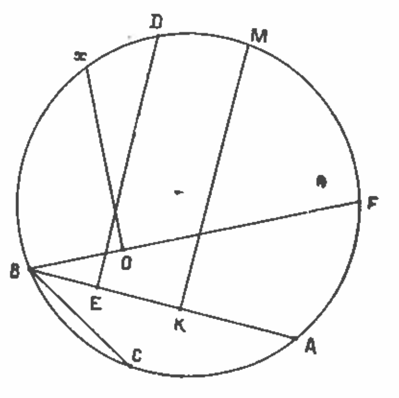

Рис. 2.

будет превосходить дополнение [дуги ADB] до [полного] круга, как, например, дуга BAF[22] на втором чертеже (Рис. 2. В $П$ этот чертеж неполный, отсутствует линия MK). Тогда серединой дуги $ADBC$[23] будет точка X, бóльшей из двух частей ломаной линии — FB, а не[24] AB, и перпендикуляром, опущенным на нее — XO. По данному утверждению FO будет равной сумме OB и BC.

Что касается равенства [дуги BC] дополнению [дуги ADB] до [полного] круга, то это отпадает из данного подразделения [вариантов] благодаря тому, [что ломаная линия переломлена] не на равные

части, поскольку при этом исчезнет изображение ломаной линии, и останется лишь [одна] линия AB[25].

Что касается того, что точка E на хорде AB не оказывается вне круга, то это станет ясным, если мы опустим из точки M, являющейся серединой дуги ADB, перпендикуляр MK на линию AB. Тогда KE необходимо будет равной половине хорды BC. Поскольку дуга MD равна половине дуги BC[26], а вся [дуга] BC короче, чем AB, то половина [BC] короче, чем KB. Поэтому точка E — между точками K и B в любом случае. ‖

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭТОГО, ПРИНАДЛЕЖАЩЕЕ АЗАРХУРУ ИБН УШТАЗУ ДЖАШНАСУ[27] 36

Он говорит[28]: продолжим CB в ее направлении и опустим на нее перпендикуляр DG из D. Соединим A с D (рис. 3), а D с C. Поскольку в треугольниках DGC и DEA углы DGC и DEA прямые, а углы GCD и EAD равные, ибо они [опираются] на одну дугу, эти два треуголь-

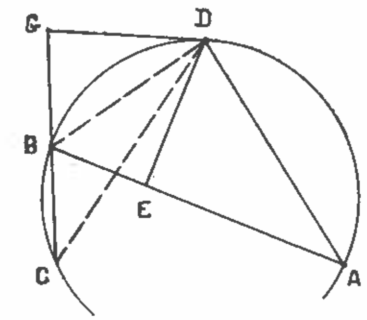

Рис. 3.

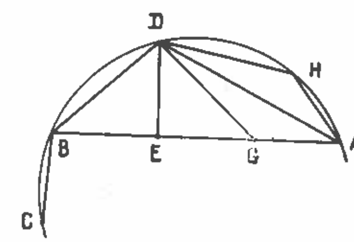

Рис. 4.

ника подобные. AD равна DC, DG равна DE, CG равна AE. Сторона BD квадрирует[29] DG и GB[30], также, как она квадрирует DE и EB[31]. Однако DG равна DE, ‖ и потому квадрату GB остается быть равным 37
квадрату BE. Следовательно, обе [эти линии, т. е. GB и BE] равны и по длине. Однако вся CG равна AE. Следовательно, линии CB и BG, равные в своей сумме линии CG, равны линии AE. Это и есть то, что мы хотели разъяснить. ‖

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭТОГО ИЗ «КНИГИ КРУГОВ» АРХИМЕДА[32] И КНИГИ «НАЧАЛА ГЕОМЕТРИИ» СЕРЕНА ФИВСКОГО[33] 38

Он говорит: отделим дугу DH равную дуге DB (рис. 4), ‖ соеди- 39
ним D с H, а D с B, построим EG, равную EB, и соединим D с G, а D с A. Тогда в силу того, что перпендикуляр DE общий[34], линии DG и DB — равные. Поскольку дуга DB равна дуге DH, а оставшаяся дуга HA[35] равна дуге BC, углы HDA и DAB[36] равны углу DBA, т. е. углу DGB. Однако угол DGB равен [сумме] углов GAD и GDA, и, следовательно, углы GDA и HDA — равные. DG равна DH, а DA — общая [сторона], поэтому основания AG и AH — равные. Но AH равна BC, следовательно и AG равна BC; поскольку же GE равна EB, AG вместе с GE равна EB вместе с BC. ‖

40 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АБУ СА'ИДА АД-ДАРИРА АЛ-ДЖУРДЖАНИ[37]

Абу Са'ид доказывал сие подобно этому[38] и исходил в разъяснении[39] из равенства сторон треугольника AHD сторонам треугольника ADG (рис. 4), но только он начинал с того, что откладывал дугу AH, равную дуге BC. В силу равенства этих двух дуг у него оставались равными дуги DH и DB, а это обуславливает равенство углов HAD и GAD. Затем он откладывал[40] [линию] AG, равную линии AH, и тогда будут равными основания HD и GD. Однако HD и DB — равные[41], следовательно, и DB и DG — равные. Перпендикуляр DE делит основание GB пополам, поэтому AG [в сумме] с GE равна EB в сумме с BC.

Подобное этому самому [доказательству] встречается и у меня в моей книге «Ошибки передаваемого относительно широты и долготы»[42].

АБУ 'АЛИ АЛ-ХАСАН ИБН АЛ-ХАСАН АЛ-БАСРИ[43]

Абу 'Али стремился [доказать это] подобным же образом — по равенству треугольников AHD и AGD (рис. 4), однако он разъяснил сие другим путем[44], а именно: он откладывал дугу DH, равную дуге DB, вследствие чего будут равны углы HAD и GAD. Затем он отложил [линию] EG, равную линии EB, и соединил D с G; отсюда становится ясным равенство DG и DB.

Затем он утверждал, что фигура $AHDB$ в этом круге — четырехугольник[45], и, следовательно, углы AHD[46] и ABD [вместе] соответствуют двум прямым углам. Однако углы DGB и DBG — равные, следовательно, углы AHD и DGB соответствуют [вместе] двум прямым углам, а углы AHD и AGD — равные. Остальное — так же, как раньше[47].

АБУ СА'ИД АХМАД ИБН МУХАММАД ИБН 'АБДАЛДЖАЛИЛ АС-СИДЖИЗИ[48]

Другие шли[49] иным путем в откладывании дуги DH и откладывали ее равную дуге BC (рис. 5). Абу Са'ид ас-Сиджизи провел DH па-
41 раллельно AB и HF параллельно DE. || При этом отделялись дуги AH

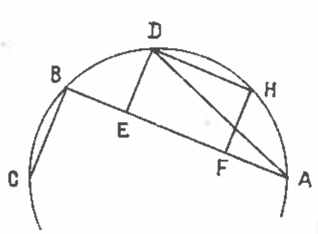

Рис. 5.

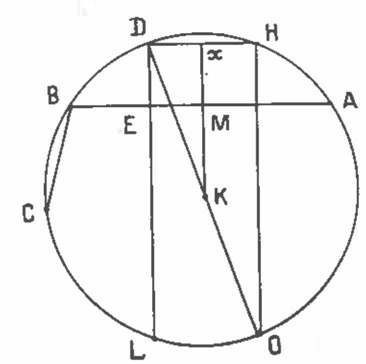

Рис. 6.

и DB, равные друг другу в силу равенства углов ADH и BAD, а дуги HD и BC остаются от каждой из двух половин равных дуг равными друг другу. Хорда DH равна FE, а AH равна DB[50]. Следовательно, AF вместе с FE равна EB вместе с BC[51].

[МОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО]

Вследствие частого применения этой предпосылки в моих рассуждениях [я привожу здесь] этот путь, [показывающий], как я поступал в некоторых из них[52]. Я проводил диаметр DKO (рис. 6), продолжал DE в ее направлении до L, и проводил OH параллельно DL.

Эти две [линии OH и DL] отделяют равные дуги DCL и OAH[53]. Я соединил H с D; тогда угол FHD будет прямым, так как он [вписан]
в полукруг, || а плоскость, [т. е. плоская фигура], $DEFH$ — прямоуголь- 42
ник, и, следовательно, она — с параллельными сторонами. HD в ней равна FE. Я провел из центра K линию KX параллельно ED. Она рассекла каждую из хорд AB и HD пополам, так как она перпендикулярна к ним обоим. HX равна XD, FM равна ME, а оставшиеся AF и EB равны друг другу. HD, равная FE, равна и BC. Поэтому AF вместе с FE равна EB вместе с BC[54].

АБУ 'АБДАЛЛАХ МУХАММАД ИБН АХМАД АШ-ШАННИ[55]

Его метод близок к этому, а именно: он соединял O с L, и тогда плоскость, [т. е. плоская фигура], $FELO$ (рис. 7) — прямоугольна вследствие равенства перпендикуляров LE и OF при равенстве AF и

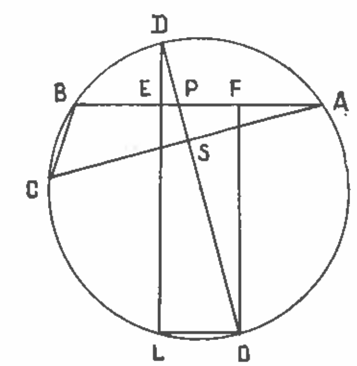

Рис. 7.

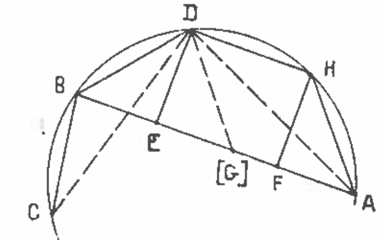

Рис. 8.

EB. Диаметр DO рассекает хорду AC пополам. Поэтому угол S — прямой, а треугольники ASP и DPE подобны. Следовательно, углы ODL и BAC — равные, хорды OL и BC — равные и OL и EF — равные. Отсюда FE и BC — равные, а остальные — так же, как раньше[56]. ||

СУДЬЯ АБУ 'АЛИ АЛ-ХАСАН ИБН АЛ-ХАРИС АЛ-ХУБУБИ[57] 44

Подобным этому путем шел судья Абу 'Али ал-Хубуби. Он отделил [дугу] AH, равную дуге DB, соединил D с B и опустил перпендикуляр HF на AB (рис. 8). Он доказывает равенство треугольников AHF и DEB через равенство углов F и E, поскольку они прямые, углов HAF и DBE, поскольку оба они опираются на равные дуги HDB и AHD, и равенство сторон AH и DB. Отсюда он получает равенство AF и EB, а также перпендикуляров HF и DE. ['Линии], соединяющие концы равных параллельных линий, — равные. Следовательно, HD равна FE.

HD и *BC* — хорды двух равных дуг, следовательно они равны друг другу. Тогда *AF* вместе с *FE* равна *EB* вместе с *BC*.

Если отложить линию *EG*, равную *EB*, и соединить *D* с *G*, *D* с *A* и *D* с *C*, стороны треугольника *ADG*[58] будут равны сторонам треугольника *DBC*. Вследствие этого будут равными *AG* и *BG*, и подтвердится[59] истинность данного утверждения[60].

АБУ НАСР МАНСУР ИБН' АЛИ ИБН 'ИРАК, КЛИЕНТ ПОВЕЛИТЕЛЯ ПРАВОВЕРНЫХ[61]

Некоторые стремились доказать это {утверждение]* различными путями[62], не откладывая ничего на дуге *AD*[63].

Что касается Абу Насра ал-Джа'ди, то он откладывал *EG*, равную *EB* (рис. 9), соединял *D* с *G*[64] и утверждал, что линия *GA* не может быть большей или меньшей, чем *BC*. Если бы это было возможным, пусть она будет сначала бо́льшей. Построим *AH*, равную *BC*, [как] если бы было это возможным. Тогда линии *AH* и *AD*, каждая [в отдельности, т. е. не в сумме], будут {соответственно] равны линиям *BC* и *CD*, каждой [в отдельности, т. е. не в сумме], и углы *A* и *C* будут равными друг другу. Поэтому и основания *DB* и *DH* будут равными друг другу. Однако *EG* равна *EB*, а перпендикуляр *ED* — общий; следовательно, *DG* равна *DB*. Но тогда *DG* и *DH* в треугольнике *GDH* должны быть равными, *ибо если углы *H* и *G* в нем равные, то и стороны *DG* и *DH* — равные. Углы *B* и *H*[65] в треугольнике
46 *BDH* равные. ‖ Следовательно, внешний угол *DGH* треугольника *DBG* равен внутреннему углу *DBG*, противолежащего ему, а это невероятно.

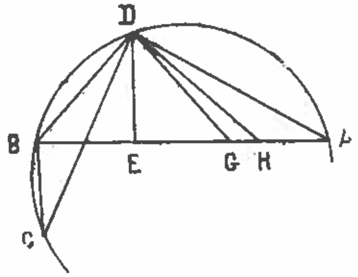

Рис. 9.

Подобным же образом доказывается, что {*GA*] не может быть меньше [*BC*][66]. Следовательно, *GA* равна *BC*[67]. Остальное — как раньше.

[МОИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА]

Я следовал при доказательстве равенства *AG* и *BC* в другом месте, {т. е. в другой работе], путем[68], суть которого следующее: угол *DGB* (рис. 10) равен [сумме] углов *GDA* и *GAD*. Однако углы *DBG* и *DGB* — равные. Поэтому и угол *DBG* равен [сумме] углов *GDA* и *GAD*. Угол *DGB* опирается на половину {данной [нам] дуги, а угол
47 *GAD* — на дугу *DB* из другой половины {данной нам дуги]. ‖ Следовательно, остается угол *GDA* величиной в дополнение данной [нам дуги], т. е. *BC*. Поэтому углы *ADG* и *CDB* равны, и углы *A* и *C* равны. Следовательно, треугольники *AGD* и *CBD* подобны, а поскольку в них стороны *AD* и *DC* равны, то и эти треугольники равны, и *AG* равна *BC*[69].

В книге «Получение успокоения[70] благодаря уточнению обмера площадей»[71] я нуждался[72] в разъяснении подобного же положения при наложении полости дуги[73] на излом ломаной линии, когда обе они, [т. е. дуга и ломаная линия], не противолежат друг другу,[74] т. е. в случае деления пополам [ломаной] линии при делении пополам и дуги. Я откладывал угол *ADG* равным углу *BDG* с тем, чтобы стали равными углы треугольников *ADG* и *BDC* с тупыми углами *G* и *B*[75] и

с равными сторонами *AD* и *DC*[76]. Тогда *AG* становится равной *BC*, и получается искомое.

Если же будут ломаная линия и полость дуги *ADB* противолежать друг другу, {а не совмещаться], а я имею в виду [полость], образуемую при дополнении данной дуги до полной окружности, {т. е. полость дуги AA_1C], перпендикуляр *DE* не разделит эту ломаную линию пополам, а разделит ее пополам перпендикуляр [противолежащей] дуги, т. е. опущенный из конца диаметра, другим концом которого является точка *D*[77].

В моем[78] «Обосновании зиджа Хабаша»[79] я говорил: отложим *EG* равной *EB*, и соединим *D* с *G* и *D* с *B*. Эти две [линии *DG* и *DB*] будут равными. Затем соединим *A* с *D* и *D* с *C* и продолжим *CB* в ее направлении до *H*. Поскольку угол *DBC* опирается на дугу *DAC*, дополнение его[80] до двух прямых, а это — угол *DBH*, будет по величине

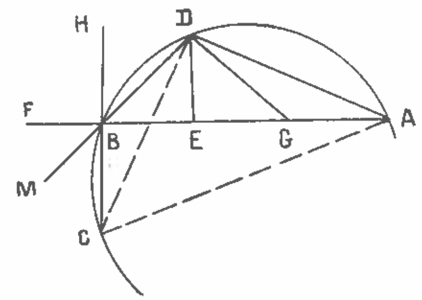

Рис. 10.

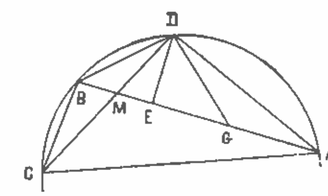

Рис. 11.

дуги *DBC*, равной дуге *AD*, на которую опирается угол *DBA*. Следовательно, углы *DBA*, *DBH* и *DGE* — равные, и оставшиеся углы *DBC* и *DGA* — равные. Углы *DAB* и *DCB* — равные, *DG* равна *DB*, ‖ и, следо- 48
вательно, треугольники *ADG* и *DCB* при их подобности — равные. Таким образом, *AG* равна *BC*[81].

Можно и так сказать: дополнение угла *DBC* до двух прямых есть угол *CBM*, а он — по величине дуги *DBC*. Поэтому углы *MBC* и *DBA* — равные. Если угол *EBC* возьмем как общий, то угол *DBC* будет равен углу *EBM*. Однако угол *EBM* — вертикальный[82] по отношению к углу *DBF*, который равен углу *DGA*. Следовательно, угол *DBC* равен углу *DGA*[83]. ‖

АБУ 'АБДАЛЛАХ АШ-ШАННИ 49

Он шел к выяснению правильности[84] этого путем того, что откладывал *EG*, равную *EB* (рис. 11), соединял *D* с *G* и *A* с *C* и утверждал: поскольку в равнобедренных треугольниках *DGB* и *ADC*[85] углы *C* и *B* опираются на одну дугу, эти треугольники подобны. Следовательно, углы *ADC* и *GDB* равны. Если мы отбросим общий угол *GDM*[86], оставшиеся углы *ADG* и *CDB* будут равными. Стороны *AD* и *AG* треугольника *DAG* [соответственно] равны сторонам *CD* и *DB* треугольника *CDB*. Следовательно, основание *AG* равно основанию *BC*[87].

АБУ 'АЛИ АЛ-ХУБУБИ

Он шел здесь путем дополнения [дуги] до полной окружности[88] и откладывал *EG* (рис. 12), равную *EB*. {Затем] он соединял *D* с *B* и *D* с *G*, продолжал *DG* в ее направлении до *H* и соединял *A* с *H* и *H* с *C*.

Далее он говорил, что углы AGH и DGE, будучи вертикальными,— равные, и углы AHG и DBG, опирающиеся на одну дугу,— равные. Следовательно, углы AHG и AGH — равные. Отсюда AH равна AG. Углы AHG и DHC — равные, поскольку они опираются на равные дуги. Поэтому и углы DHC и AGH—равные. Но они—накрестлежащие, и потому AB параллельна HC. Следовательно, дуги AH и BC равны друг другу, но тогда и хорды AH и BC равны друг другу. Таким образом, AG равна BC [89]. ‖

51 АРХИМЕД В «КНИГЕ КРУГОВ»

Среди них [ученых] есть и такие, кто доказывал истинность этого с другой стороны, иным способом, чем тот, о котором мы рассказывали, как, [например], Архимед в «Книге кругов» и Серен в «Началах геометрии»[90]. Суть сего в том, что он [Архимед] продолжал AB (рис. 13)

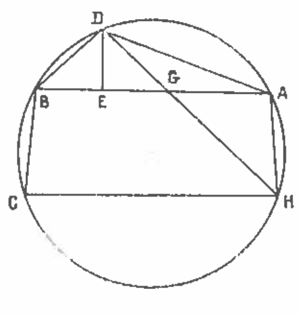

Рис. 12.

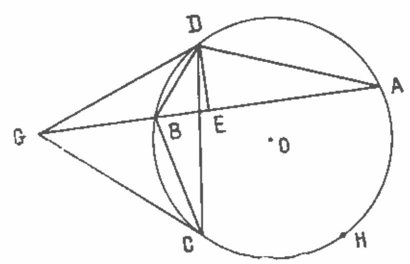

Рис. 13.

в ее направлении, откладывал EG, равную AE, и соединял D с A, D с C, D с G и D с B. Поскольку хорды DA и DC — равные, и DG и DC — равные, то и AD и DC — равные, будучи боковыми сторонами[91]
52 [равнобедренного треугольника][92]. Следовательно, углы DAG, DGB и DCB равны друг другу. Поскольку дуга DA равна дуге DC, ‖ примем дугу AHC за общую, так как дуги $DAHC$ и $DCHA$—равные. Однако угол DBC опирается на дугу $DAHC$, а угол DAB вместе с углом ADB — на дугу $DCHA$. При этом угол DAB опирается на дугу DB, а угол ADB — на дугу BCA. Поэтому угол DBC равен [сумме] углов DAB и ADB. Угол DBG, являющийся внешним углом треугольника ADB, равен [сумме] углов DAB и ADB, которые не смежны с ним; поэтому углы DBC и DBG равны друг другу[93]. Но уже было установлено, что углы DGB и DCB — равные. Поэтому углам CDB и GDB остается быть равными. Но DG равна DC, а DB — общая; следовательно, основания CB и BG — равные. Таким образом, линии CB и BE [вместе] равны линии GE, т. е. EA[94].

АЗАРХУР ИБН УШТАЗ ДЖАШНАС

Он шел иным путем в доказательстве равенства треугольников DCB и DGB. Он соединял C с G (см. выше рис. 13. В *П* это доказательство ошибочно связано с рис. 14) и доказывал равенство линий AD, DG и DC и равенство углов A, G и C так же, как это было раньше. Затем он говорил, что треугольник DCG — с равными боковыми сто-

ронами DC и DG, и поэтому углы DCG и DGC — равные. Если мы вычтем из [каждого] из них равные углы DCB и DGB, оставшиеся углы BCG и BGC будут равными. Отсюда BG равна BC. BG вместе с BE равны EA, и поэтому BC вместе с BE тоже равны EA[95]. ‖

АРХИМЕД И НЕКОТОРЫЕ ГРЕКИ 53

У Архимеда в «Книге кругов» и у Серена[96] есть третье доказательство. Его же я нашел среди задач, принадлежащих грекам, возможно — Аполлонию[97], которые перевел Йуханна ибн Йусуф[98].

Он [Архимед] говорил:[99] поскольку DC — хорда в круге, [а не диаметр] (см. выше рис. 13) сегмент DBC будет меньше полукруга;[100] он не может быть больше полукруга, поскольку дуга AD равна дуге BC[101], а невозможно отделить от окружности две равные дуги, каждая из них больше половины окружности, если только они не имеют общей части.

Противолежащий [хорде DC] угол DBC — тупой[102]. Поскольку AD — хорда, [а не диаметр] в круге, то сегмент ACD[103] будет больше полукруга. Противолежащий [хорде AD] угол DBA — острый; следовательно, угол DBG — тупой. Углы DGB и DCB — равные, и линии DC и DG — равные. ‖ Отношение их обоих к общей линии DB одинаковое. 54
Следовательно, в треугольниках DBG и DCB угол одного из них, а именно C, равен углу другого, а именно G, а стороны, охватывающие два других угла, пропорциональны. Каждый из углов DBC и DBG больше прямого, а остальные углы [этих треугольников] — равные. Следовательно, эти два треугольника — подобные, и они также — равные[104].

[МОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО]

Я говорил в моей книге «Полезные вопросы и верные ответы»[105] о теоретических обоснованиях зиджа ал-Хорезми:[106] продолжим AB в ее направлении (см. рис. 14. В *П* с этим доказательством ошибочно связан нижеследующий рис. 15), построим BG, равную BC, соединим C с G, D с G и D с A и опустим перпендикуляр BF на CG. Он разделит основание CG пополам вследствие равенства боковых сторон CB и

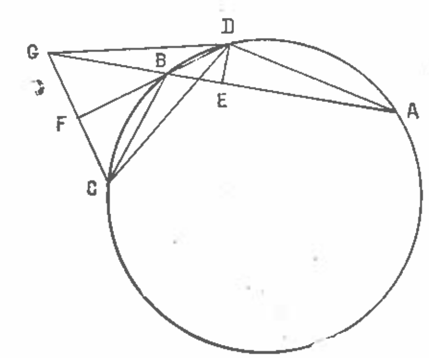

Рис. 14.

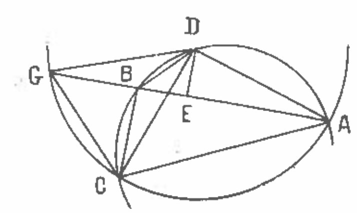

Рис. 15.

GB[107]. Треугольники FCB и FBG будут равными, и их углы, соответственно друг другу,— [равными]. Поскольку внешний угол ABF треугольника FGB равен двум внутренним углам BFG и BGF, а внешний угол DBC треугольника BFC равен двум внутренним углам BCF и

CFB, и сумма углов *BFG* и *BGF* равна сумме углов *BCF* и *CFB*, то углы *ABF* и *DBC* также равны друг другу. Однако сумма углов *ABF* и *FBG* равна сумме углов *DBC* и *CBF*. Так как сумма углов *ABF* и *FBG* равна двум прямым, то и сумма углов *DBC* и *CBF* также равна двум прямым. Поэтому линия *DBF* — одна прямая линия, и она — высота треугольника *DGC*, делящая его основание пополам. В силу этого *DC* и *DG* равны, и *AD* и *DC* равны. *AD* равна *DG*. Перпендикуляр *DE* делит пополам *AG*, поэтому *AE* равна *EB* вместе с *BG*. Однако *BG* была задана равной *BC*. Следовательно, *AE* равна *EB* вместе с *BC*[108]. ||

56 АБУ СА'ИД АС-СИДЖИЗИ

Что касается Абу Са'ида, то он продолжал *AB* в ее направлении (см. рис. 15. В *П* это доказательство ошибочно связано с нижеследующим рис. 16), пока *BD* не стала равной *BC*, и достиг того, чего[109] мы достигли раньше. Вследствие равенства *BC* и *BG* будут также равными углы *BCG* и *BGC*, а внешний угол *ABC* будет равен им обоим [вместе]; следовательно, он[110] вдвое больше каждого из них. Угол *ADC* равен углу *ABC*, который больше угла *BGC*. Поэтому круг, проведенный из центра *D* на расстоянии *DA*, пройдет через точки *C* и *G*. Угол *ADC* будет при центре этого [круга], а угол *AGC* — при его окружности, [причем] оба эти [угла] накладываются на один ее сегмент, [т. е. опираются на одну дугу, ограничивающую этот сегмент]. *AD* равна *DG* [через их общее равенство *DC*], и [потому] углы *DAE* и *DGE* — равные. *DE* — перпендикуляр, опущенный на *AEG*. Поэтому *AE* равна *EB*
57 вместе с *BG*, т. е. с *BC*. ||

Другие доказывали равенство *AD* и *DG* тем, что углы *DAC* и *DCA* равны, а сумма углов *DBC*[111] и *DAC* равна двум прямым. Также и сумма углов *DBG* и *DBA* равна двум прямым. [Углы *DBA* и *DAC* равны, как опирающиеся на равные дуги *DA* и *DC*]. Поэтому угол *DBG* равен углу *DBC*. Стороны *GB* и *BD* [в треугольнике *GBD*] соответственно равны сторонам *BC* и *BD* [в треугольнике *CBD*]. Поэтому основания *DG* и *DC* равны, но *DC* равна *AD*; следовательно, *DG* равна *AD*[112].

АБУ СА'ИД АЛ-ДЖУРДЖАНИ

Абу Са'ид ад-Дарир шел путем продолжения *AD* в ее направлении до тех пор, пока *DH* не станет равной *AD* (см. рис. 16. В *П* данное доказательство ошибочно связано с нижеследующим рис. 17) и описывал из центра *D* на расстоянии *DH* половину окружности, которая необходимо пройдет через точки *A* и *H*. Затем он продолжал *AB* в ее направлении до окружности этого [полукруга] и соединял *G* с *C* и *D* с *C*. Подобно тому, как было раньше, он доказывал, что *BG* равна *BC*;[113] — а справедливо для всякой прямой, проведенной из *A* и пересекающей круг *ADB*, что если соединить точку пересечения и *C*, то эта соединяющая линия будет равна расстоянию, оказавшемуся между двумя кругами [и измеряемому по продолжению линии *AB*]. Затем он принимал [отрезок] *EB* за общий, и получалось, что *CB* вместе с *BE* равны *GE*. Но *DE* — перпендикуляр, опущенный из центра круга *AGH*
58 на хорду в нем *AG*; поэтому он рассекает ее пополам. || Следовательно, *AE* равна *EB* вместе с *BG*, т. е. с *BC*. ||

АБУ СА'ИД АС-СИДЖИЗИ 59

Он тоже поступал так же, как [это делали] раньше, а [затем] описывал на *AD* половину окружности *AED* (рис. 17) и соединял *G* с *C*. Он говорил, что круги *ACH* и *ADE* касаются в *A*, и *AD* относится к *DH*, как *AE* к *EG*, по той причине, что в треугольниках *AED* и *AGH* углы *AED* и *AGH* — прямые, и эти треугольники подобны. Следовательно, *AE* равна *EG*, а угол *ADC* равен углу *ABC*. [Угол *ADC*] при центре,

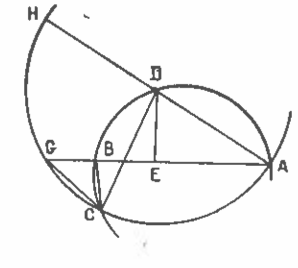

Рис. 16.

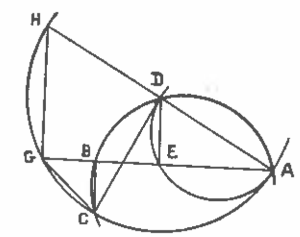

Рис. 17.

а угол *AGC* — при окружности. Поэтому угол *ABC* равен удвоенному углу *AGC*. Однако он, [т. е. угол *ABC*], равен сумме углов *BGC* и *BCG*. Поскольку два [последних угла] равны, *BC* равна *BG*[114]. Остальное — так же, как раньше. ||

ВТОРОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ О ЛОМАНОЙ ЛИНИИ 60

Когда мы разъяснили относительно ломаной линии то, что имеет место с ней в круге, то если мы скажем, что при делении дуги пополам и на две неравные части произведение хорд различных частей друг на друга вместе с квадратом хорды разности между половиной [дуги] и одной из неравных частей [дуги] равно квадрату хорды половины дуги, это будет [еще одно] хорошее и полезное свойство. Все, что предшествовало в первом утверждении, является предпосылкой для данного, второго [утверждения], хотя каждое из них может предшествовать другому, [т. е. и второе утверждение может быть предпосылкой для первого].

Это свойство, [т. е. второе утверждение], может быть выражено через хорды[115], и тогда мы скажем: произведение хорды *AB* на хорду *BC* вместе с квадратом хорды *DB* равно квадрату хорды *AD* (рис. 18). Но оно может быть выражено также и через синусы, являющиеся половинами хорд удвоенных дуг, и тогда мы скажем: произведение синуса дуги *AB* на синус дуги *BC* вместе с квадратом синуса дуги *DB* равно квадрату синуса дуги *AD*.

Что касается предпосылки, известной у всех, [которую обычно формулируют] после предшествующего изложения первого [утверждения], то она следующая[116]: если *ABC* — ломаная линия, [рассматриваемая] как одна прямая, разделена в *E* пополам и в *B* на две неравные части, то произведение *AB* на *BC* вместе с квадратом *BE* равно квадрату *AE*. ||

Примем квадрат *DE* за общий [член]. Тогда произведение *AB* на *BC* вместе с квадратом *DB*, т. е. с [суммой] квадратов *BE* и *ED*, равно квадрату *AD*, т. е. [сумме] квадратов *AE* и *ED*. 61

Справедливость этого утверждения выявлялась у них, [т. е. у ученых, формулировавших это утверждение], благодаря пятому предложению второй книги «Начал»[117], но это можно доказать и с помощью [другого] предложения из этой же [книги].

Ясно, что AG равна BC, если отделить[118] GE, равную EB (рис. 19). Это объясняется тем, что линия BG делится пополам в точке E, а к ней, [т. е. к BG], добавляется AG[119]. Следовательно, произведение BA на AG вместе с квадратом GE равно квадрату AE. Примем квадрат DE за общий [член]. Тогда произведение BA на AG вместе с квадратом GD, т. е. [суммой] квадратов GE и ED, равно квадрату AD, т. е.

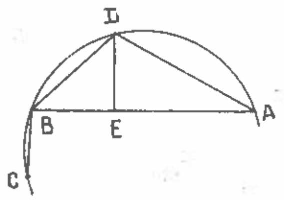

Рис. 18.

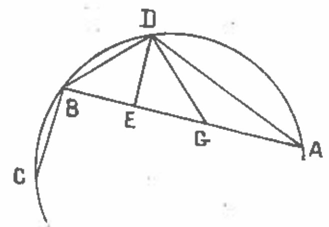

Рис. 19.

[сумме] квадратов AE и ED. Но DB равна DG. Поэтому произведение BA на AG, т. е. на BC, вместе с квадратом DB, равно квадрату AD Это и есть то, что мы хотели доказать[120]. ||

63

ОДИН ИЗ ГРЕКОВ, [А ТАКЖЕ] АБУ СА‘ИД АС-СИДЖИЗИ И АБУ ‘АЛИ АЛ-БАСРИ

Среди достойнейших [ученых] есть такие, кто облегчил вес этой леммы, [т. е. упростил ее], а есть и такие, кто удлинил ее краткость, [т. е. усложнил ее], благодаря чему она обрела различные виды[121]. Я нашел ее[122] в задачах, которые перевел с греческого на арабский Йуханна ибн Йусуф. С ней в точности совпала такая же, имеющаяся у Абу ‘Али ал-Басри и Абу Са‘ида ас-Сиджизи. Доказывалась она

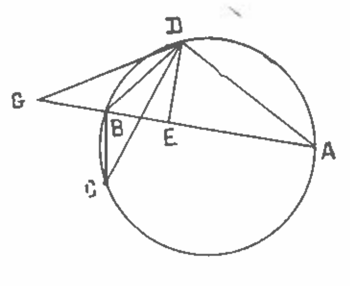

Рис. 20.

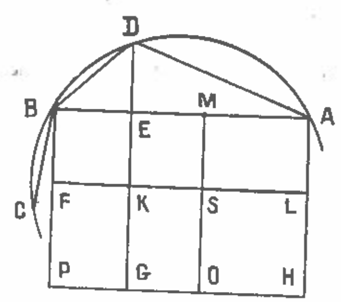

Рис. 21.

одним и тем же путем, а именно: в произвольном равнобедренном треугольнике проводится линия из угла к основанию, которая делит его на две неравные части; тогда произведение одной из неравных частей на другую вместе с квадратом этой линии равно квадрату одной из боковых сторон.

Пусть треугольник ADG (рис. 20) будет с равными боковыми сторонами DA и DG. Проведем в нем к основанию линию DB на лю-

бом расстоянии, лишь бы только она не была перпендикуляром к нему. Я утверждаю, что произведение AB на BG вместе с квадратом DB равно квадрату AD. Для доказательства опишем около треугольника ADB окружность и опустим перпендикуляр ED. Поскольку линия AG делится пополам в точке E и на неравные части в точке B, квадрат AE будет равен произведению AB на BG вместе с квадратом EB. ||

Примем квадрат DE за общий [член и будем поступать], как мы 64 поступали раньше, пока [наши действия] не приведут к равенству квадрата AD квадрату BD вместе с произведением AB на BG[123]. Если провести BC равной BG, дело возвратится к тому, что у нас было, и произведение AB на BC вместе с квадратом DB станет равным произведению AD на DC.

[МОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО]

Мы можем доказать это путем плоских фигур, наглядных для [восприятия через] ощущение[124]. Продолжим перпендикуляр DE (рис. 21) в его направлении до тех пор, пока EG не станет равной EA, и дополним [построение] плоской фигуры AG с параллельными сторонами. Это будет квадрат линии[125] AE. На линии EB построим квадрат EF. Продолжим FK в ее направлении до L, сделаем EM равной EB, проведем MSO параллельно EG и дополним [построение] плоской фигуры $ABPH$[126] с параллельными сторонами. В силу первой предпосылки MA будет равна BC, являющейся разностью между EB и EA — двумя частями основания[127], [разделенного] перпендикуляром. ES и SH — квадраты, || поэтому AM равна KG, и плоские фигуры AS, SG 65 и GF — равные. Поэтому плоская фигура FH равна квадрату AG без квадрата EF, т. е. ES. Однако [площадь] плоской фигуры FH — это произведение LF, равной AB, на FP, равную MA, которая равна BC. Поэтому, если мы прибавим к ней квадрат BE[128], будет то же самое, что если мы прибавим к ней квадрат MK, т. е. [квадрат] KB. Таким образом, квадрат AG дополнится благодаря восполнению в нем недостатка[129]. Затем прибавим к сумме квадрат ED. Однако сумма квадрата линии ED и квадрата AG, который был восполнен[130], равна квадрату AD. Следовательно, квадрат BD вместе с произведением AB на BC равен квадрату AD[131]. ||

АБУ НАСР АЛ-ДЖА‘ДИ 66

Его доказательство таково: он продолжал CB в ее направлении и опускал на нее перпендикуляр DG (рис. 22). Поскольку угол ADC — по величине дополнения дуги ADC до полного круга, [т. е. равен величине половины дополнения дуги ADC], то угол ABG — по величине дуги ADC, [т. е. равен величине половины дуги ADC][132]. В силу этого углы EBD и BDG равные. Поскольку [угол] EBD [опирается] на половину дуги ADC, углы E и G — прямые, а сторона DB — общая, треугольники [BDE и BDG] — равные, и BG равна EB. DC в квадрате равна сумме квадратов CG и GD, а BD в квадрате равна сумме квадратов BG и GD. Следовательно, CD в квадрате равна квадрату BD и избытку квадрата CG над квадратом BG. Этот избыток — квадрат CB вместе с [произведением] удвоенной BG на BC. Однако AE равна сумме EB и BC, а было доказано, что EB равна BG. Поэтому AB равна BC вместе с удвоенной BG. Следовательно, квадрат BC равен квадрату BD вместе с произведением AB на BC[133]. ||

67 АБУ СА'ИД АС-СИДЖИЗИ

Он сказал: продолжим AB в ее направлении до тех пор, пока не получится треугольник ADG с равными боковыми сторонами AD и DG (рис. 23). Опишем вокруг этого треугольника окружность, которая

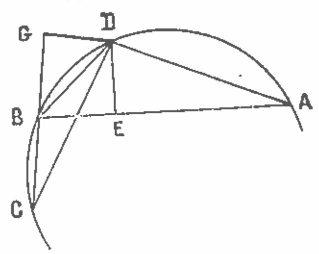

Рис. 22.

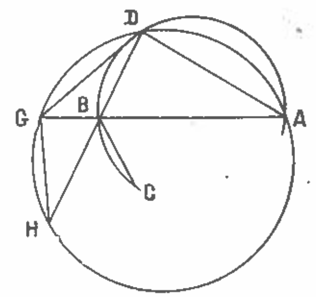

Рис. 23.

68 заключит его в себя. Продолжим DB в ее направлении ‖ до окружности этого [круга]. Соединим H с G. Тогда произведение AB на BG будет равно произведению DB на BH. Но произведение DB на BH вместе с квадратом DB равно произведению DB на DH. Углы DGA и DHG в треугольниках DBG и DHG равны, так как они опираются на равные дуги AD и DG. Поскольку один угол этих двух [треугольников DBG и DHG] общий, они подобны. Поэтому DH относится к DG так, как DG к DB; отсюда произведение DH на DB равно квадрату DG. Но [произведение] DH на DB равно [произведению] AB на BG вместе с квадратом DB. Поэтому [произведение] AB на BG, которая, как это было доказано раньше, равна BC, вместе с квадратом DB равно квадрату AD, равной DG[134].

Таковы методы, которые они [ученые] основывали при доказательстве этого утверждения на первой предпосылке. Но у них есть здесь и другие методы, не нуждающиеся в ней. Эти [последние методы] подобны посылкам, а те — следствиям[135]. К ним относится метод, принадлежащий Абу Насру ал-Джа'ди. ‖

69 МЕТОД АБУ НАСРА АЛ-ДЖА'ДИ

Он продолжал здесь CB в ее направлении (см. рис. 24. Так в T (рис. 25); в Π этот чертеж неверен), опускал на нее перпендикуляр DH, строил HG, равную BH, и соединял D с G. Поскольку DC в квадрате равна сумме квадратов DH и CH, а DB в квадрате равна сумме квадратов DH и HB, квадрат DC равен [сумме] квадратов DB и BC вместе с удвоенным произведением HB на BC. Но HG равна HB. Следовательно, квадрат DC равен квадрату DB вместе с произведением[136] GC на CB.

Угол C равен углу A, линия BD делит угол ABG пополам, а угол G равен углу DBH. Поэтому угол ABD равен углу HGD. Но уже было [раньше объяснено, что] угол C равен углу A, а сторона DC равна стороне AD. Поэтому CG равна AB. Квадрат DC равен квадрату DB вместе с произведением[137] GC на CB. Следовательно, квадрат AD равен квадрату DB вместе с произведением AB на BC[138]. ‖

АБУ 'АБДАЛЛАХ АШ-ШАННИ 70

Он откладывал дугу AF, равную дуге BC (см. рис. 25. В Π этот чертеж пропущен и данное доказательство ошибочно связано с нижеследующим рис. 26), соединял C с F, продолжал CB в ее направлении до тех пор, пока CG не становилась равной линии CF, опускал на нее перпендикуляр DH, и соединял D с G. Каждая из линий FC и AD

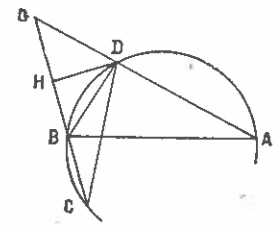

Рис. 24.

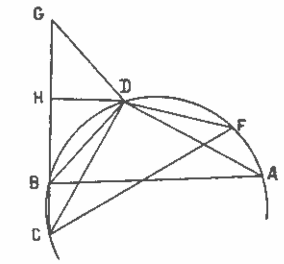

Рис. 25.

соответственно равна одной из линий GC и CD. Углы FCD и GCD [опираются] на равные дуги. Следовательно, основания DG и DF равны друг другу. Но DG равна DB, поэтому DF равна DB. Линия GB разделена перпендикуляром DH пополам, а BC — прибавление к ней. Поэтому произведение GC на CB вместе с квадратом BD[139] равно квадрату DC[140]. ‖ Но AB равна CG, т. е. CF. Таким образом, произведение AB на BC вместе с квадратом DB равно квадрату CD, т. е. AD[141]. ‖ 71

[МОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО] 72

Когда я нуждался в [доказательстве] этого в некоторых из моих книг, я говорил: проведем DG параллельно AB и соединим A с G, A с D, G с B и B с D (см. рис. 26. В Π это доказательство ошибочно связано с нижеследующим рис. 27). Поскольку дуга AD равна дуге DC, а дуги AG и DB — равные, оставшаяся дуга DG равна дуге BC,

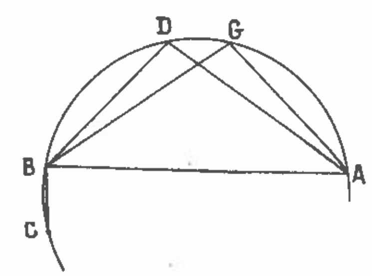

Рис. 26.

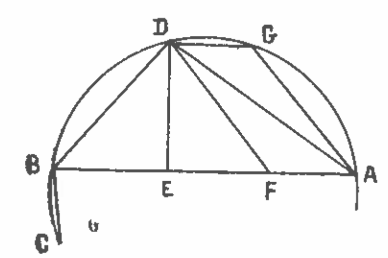

Рис. 27.

и их хорды будут равными. Так как четырехугольник $AGDB$ вписан в круг, то произведение AD на GB равно сумме произведения GD на AB и произведения AG на DB[142]. Но GD[143] равна BC, а AD — GB. Поэтому квадрат AD равен произведению AB на BC, т. е. GD вместе с квадратом DB[144]. ‖

Я говорил в другом месте, не прибегая к книге «Альмагест»[145]: опустим перпендикуляр DE на AB (рис. 27), соединим A с D, прове- 73 дем DG параллельно AB, а DF параллельно GA. Тогда [DF] будет равной GA и DB. Угол DFA — тупой. Квадрат AD превосходит [сумму] квадратов AF и FB на произведение AF на FB, т. е. [на произведение AF] на удвоенную FE. Но произведение AF на FB вместе с квадратом AF равно произведению BA на AF. Следовательно, квадрат AD равен сумме квадрата DB, а [DB] равна DF, [и квадрат DB] равен произведению DB на GA, с произведением BA на AF, ибо [это произведение BA на AF] равно квадрату AF вместе с удвоенным произведением FE на FA. AF равна DG, а GD равна BC. Поэтому квадрат AD равен квадрату DB вместе с произведением AB на BC[146]. ||

74 СУЛАЙМАН ИБН 'ИСМА АС-САМАРКАНДИ[147]

У него есть трактат об [определении] площадей фигур. В нем он проводил (рис. 28), [строя] трапецию с двумя параллельными и двумя другими равными сторонами, [линию] DG параллельно AB, откладывал BF равную GD и соединял G с F[148]. [GF] оказалась равной DB,

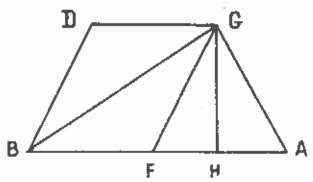

Рис. 28.

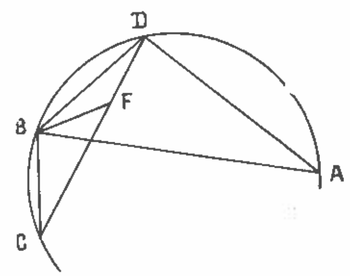

Рис. 29.

которая [в свою очередь] равна GA[149]. Он проводил [далее] высоту треугольника AGF, которая делит AF в [точке] H пополам. FB — превышение AF. Поэтому произведение AB на BF вместе с квадратом HF равно квадрату HB. Далее; примем квадрат GH за общий [член]; тогда получится, что произведение AB на BF, т. е. на GD, вместе с квадратом GF, т. е. [с квадратом] DB, равно квадрату GB[150]. ||

75 АБУ-Л-ХАСАН 'АЛИ ИБН 'АБДАЛЛАХ ИБН БАМШАЗ[151]

Он шел путем подобным тому, которым Птолемей доказывал свойство четырехугольника, вписанного в круг. Он говорил: углы BDC и BCD опираются [вместе] на дугу DBC, и поэтому эти два угла вместе равны углу DBA (рис. 29). Затем он выделял из угла DBA угол, равный углу DCB, а это — угол DBF. В треугольнике DBF он[152] равен углу DCB треугольника DCB. Угол CDB — общий у обоих треугольников, следовательно, они подобны. Тогда CD относится к DB, как DB к DF, а поэтому произведение CD на DF равно квадрату BD.

Так как угол DBA равен [сумме] углов BDC и BCD, а [от него] был отделен угол DBF, равный углу BCD, то оставшийся угол FBA равен углу BDC. Углы ABC и ADC равны друг другу. Поэтому весь угол ADB равен всему углу FBC, а треугольник ADB подобен тре-
76 угольнику FBC. Следовательно, AB относится к FC, как AD к BC, || а произведение AB на BC равно произведению DC на CF. Уже было [доказано, что] произведение CD на DF равно квадрату BD, а произ-

ведение DC на каждую из частей [DC:] DF и FC, [взятых вместе], это — квадрат DC, равный квадрату AD[153]. Следовательно, квадрат AD равен квадрату DB вместе с произведением AB на BC[154].

АБУ-Л-ХАСАН АЛ-МИСРИ АС-САМАРКАНДИ[155]

То, что передают, возводя это к нему, является частным случаем, и похоже, что его потребность ограничивалась им. Краткая же суть того, что передают, такова[156]: он предполагал угол ADB прямым и говорил, что || квадрат DC равен квадрату AB и произведению AB на 77
BC (рис. 30). Затем [для доказательства] он дополнял круг, проводил в нем диаметр DF и опускал на него перпендикуляр BH, а из D на BC — перпендикуляр DE. Тогда DH и EB равны друг другу. Он продолжал BC в ее

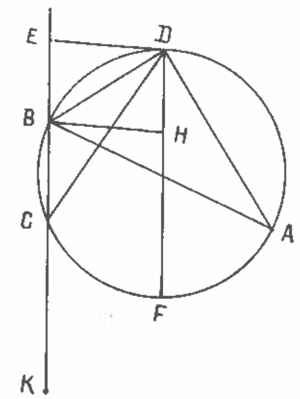

Рис. 30.

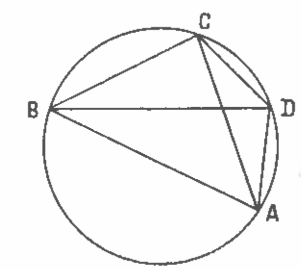

Рис. 31.

направлении, пока CK не становилась вдвое больше EB.

Известно, что BK равна диаметру DF. Поскольку угол DBC тупой, квадрат DC равен сумме квадратов DB и BC вместе с удвоенным произведением BC на EB, т. е. вместе с произведением BC на CK. Однако квадрат BC вместе с произведением BC на CK[157] равен произведению BC на BK, т. е. на диаметр AB. Поэтому произведение диаметра AB на BC равно квадрату BC вместе с произведением BC на CK. Следовательно, квадрат DC равен квадрату DB вместе с произведением AB на BC.

В силу частного характера этого [доказательства] BK, [которая строится] путем прибавления удвоенной EB к BC, может быть равна диаметру в том случае, если дуги DB и CF будут равными. Уклонение всей этой версии от истины, [если таковое имеет место], должно быть поставлено в вину передатчику, || а не [самому] Абу-л-Хасану[158]. Может 78
быть забывчивость привела к тому, что что-то выпало из этого [доказательства], благодаря чему и отошло сие дело от истины[159].

ДОПОЛНЕНИЕ ЭТОГО ВТОРОГО УТВЕРЖДЕНИЯ ВТОРЫМ ДЕЛЕНИЕМ [ДУГИ], ИЗ-ЗА ЧЕГО ВОЗНИКАЕТ ТРЕТЬЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

Аналогично тому, как деление дуги пополам и на две неравные части обуславливает для хорд свойства, подобные свойствам, обретаемым прямой линией, разделенной так же, то и данная нам дуга, если она разделена пополам, и к ней прибавлена какая-то дуга ее круга, [обуславливает то], что хорды этих частей [окружности] также обретают свойства, подобные тем, что присущи прямой линии, [с которой поступили] так же, а именно: *произведение хорды* данной дуги совместно с прибавленной [дугой] *на хорду* прибавленной дуги [*в сумме*] *с квадратом* [*хорды*] половины данной дуги *равно квадрату хорды* суммы этой половины [данной дуги] с прибавленной [дугой].

Пример: если данная дуга — ADC (рис. 31), середина которой — D, а к ней прибавлена дуга CB, то я утверждаю, что произведение [хорд] AB и BC вместе с квадратом [хорды] DC равно квадрату [хорды] DB[160].

АБУ-Л-ХАСАН ИБН БАМШАЗ

Он соединял [линией] A с C, пересекая DB в F, и дополнял круг (см. рис. 32. В $П$ чертеж неверен: D не делит дугу ADC пополам и пропущена хорда BC). Углы ABD и DBC — равные вследствие равенства дуг AD и DC, а углы CDB и CAB — равные, как опирающиеся

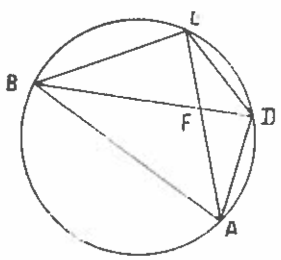

Рис. 32.

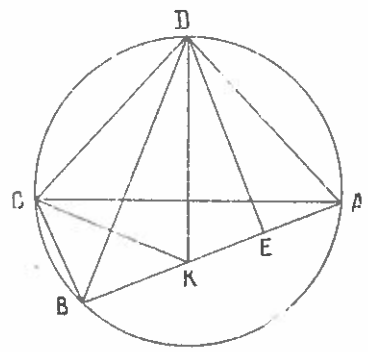

Рис. 33.

80 на одну дугу. || Следовательно, треугольники CDB и BFA — подобные. Поэтому AB относится к BF, как DB к BC, благодаря чему произведение AB на BC равно произведению BF на DB. А также: углы DBC и ACD — равные, а угол CDB — общий у треугольников DBC и FCD; следовательно, они подобные. Поэтому BD относится к DC, как DC к DF, вследствие чего произведение BD на DF равно квадрату DC. Но раньше было доказано, что произведение AB на BC равно произведению BF на DB. Произведение DB на каждый из двух членов, т. е. на DF и FB, есть квадрат DB. Следовательно, произведение AB на BC вместе с квадра-
81 том CD равно квадрату DB, а это и есть то, что мы утверждали[161]. ||

АБУ ДЖА'ФАР АЛ-ХАЗИН[162]

У Абу Джа'фара ал-Хазина подобное же [доказательство], но только он получал равенство произведения BD на DF произведению AB на BC из подобия треугольников BCF[163] и ABD (рис. 32) в силу равенства углов CBF и DBA и равенства углов FCB и ADB. Равенство же произведения BD на DF квадрату DC, равной AD, он получал из подобия треугольников AFD и ABD в силу равенства углов DAF и DBA и того, что угол ADF в них обоих общий[164].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОЕГО [УЧЕНОГО], ИМЯ КОТОРОГО НЕ УПОМЯНУТО

Он откладывал BK равной BC (рис.33), соединял K с D и опускал перпендикуляр DE. Вследствие равенства углов CBD и DBA при равен-

стве сторон KB и BC основания KD и DC, т. е. AD[165] будут равными.

Поскольку боковые стороны DK и DA — равные, E будет серединой AK, а KB — добавлением к ней. Поэтому произведение AB на BK вместе с квадратом EK равно квадрату EB. Пусть будет квадрат DE общим [членом][166]. Тогда произведение AB на KB, т. е. на BC, вместе с квадратом DK, т. е. DC, равно квадрату BD, равного [сумме] квадратов BE и ED. ||

Эти два [рассмотренных нами] свойства взаимосвязаны и одно из 82
них может доказывать другое, как и доказываться само в отдельности.

Для [доказательства] предшествующего [свойства], а это второе утверждение, продолжим DB (рис. 34) в ее направлении до тех пор, пока она не встретится с AC в точке F. Поскольку произведение FA на FC равно произведению DF на FB, то AF относится к FB, как DF к FC. Треугольники ABF и DCF подобны, и поэтому углы ABF и DCF — равные.

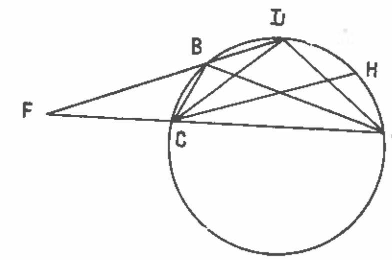

Рис. 34.

Вследствие равенства углов DAC и DBC двум прямым и равенства углов DBC и CBF им же, [т. е. двум прямым], угол CBF равен углу DAF, равному углу DBA. Следовательно, угол DBA равен углу CBF, а поскольку общим для них является угол ABC, угол DBC будет равным углу ABF, т. е. углу DCF. Треугольники DCF и DBC — подобные[167], || и CD относится к FD так, как BD к DC. Следовательно, квад- 83
рат DC равен произведению DB на DF, а произведение DB на DF рав-

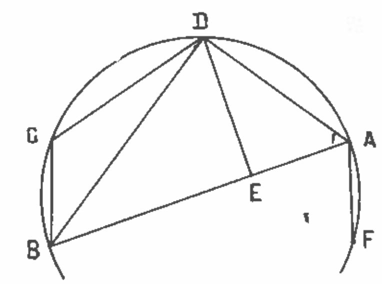

Рис. 35.

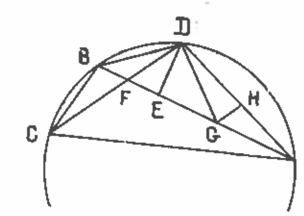

Рис. 36.

но произведению DB на BF вместе с квадратом DB.

Поскольку каждый из углов ADB и BCF вместе с углом BCA [равен] двум прямым, то эти два угла — равные. Поэтому треугольники ADB и BCF — подобные, и AB относится к BD, как FB к BC. Поэтому произведение AB на BC равно произведению FB на BD. Если мы примем квадрат DB за общий [член], произведение AB на BC вместе с квадратом DB будет равно произведению FB на BD вместе с квадратом DB. Но уже было доказано, что это, [т. е. произведение FB на BD вместе с квадратом DB], равно квадрату DC. Следовательно, произведение AB на BC вместе с квадратом BD равно квадрату DC, т. е. квадрату AD. ||

Второе утверждение уже было доказано, и если желательно дока- 84
зать с его помощью третье [утверждение], то отделяется дуга AH[168], равная дуге CB (см. предыдущий рис. 34), и соединяется C с H[169]. Известно, что D — середина дуги HB[170], а добавлением к ней, [т. е.

к дуге HB], является дуга BC. Следовательно, произведение[171] HC[172], равной AB, на CB вместе с квадратом BD равно квадрату CD, т. е. [квадрату] AD, а это и есть то, что мы хотели [доказать].

Если второе утверждение [рассматривается] отдельно, и его свойства являются предпосылкой, то методом, подобным предыдущим методам, легко из него доказать третье[173] [утверждение]. Связь существа [третьего утверждения] с существом [второго утверждения], при кото-
85 рой [можно обойтись] без того, что упоминает ‖ Абу-л-Хасан ибн Бамшаз и другие, такова[174]: прибавим[175] к дуге ADC (рис. 35) дугу AF, равную дуге BC, и соединим A с F. Тогда вся [получившаяся] дуга FDB будет разделена пополам в точке D и на две неравные части — в A. Поэтому произведение[176] BA на AF, т. е. на BC вместе с квадратом AD, т. е. с [квадратом] DC, равно квадрату DB. Перпендикуляр DE делит ломаную линию BAF в точке E пополам. Поэтому BE[177] равна AE [в сумме] с AF. Линия BAF равна линии ABC. Следовательно, линия[178] EB равна сумме AE и BC[179].

ЧЕТВЕРТОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ О ЛОМАНОЙ ЛИНИИ

Есть у этого вида еще одно полезное свойство, а именно: разность между равнобедренным треугольником ACD (рис. 36) и разносторонним треугольником ACB равна произведению DE на EB.

Доказывая это утверждение, отбросим общий треугольник AFC. Затем отделим[180] EG, равную EB, и соединим D с G. Ранее из равенства треугольников DGA и DBC было доказано, что углы DGA и DBC равны друг другу. Выделим из угла DGA угол AGH, равный углу CBF.
86 ‖ Тогда треугольники AGH и BFC будут равными. Отбросим их обоих, вырезав [их][181]. Тогда останется треугольник DGH, равный треугольнику DFB. Примем треугольник DEF за общий[182]. Тогда треугольники DGH и DEF будут [вместе] равны треугольнику DEB. Следовательно, косой [четырехугольник] $DFGH$, являющийся избытком треугольника ADC [над треугольником ABC], равен треугольнику DGB, а это, [т. е. площадь DGB], — произведение высоты DE на половину основания EB.

Кроме того, поскольку треугольники AGD[183] и DBC[184] равны, избыток треугольника AGD над треугольником BFC — треугольник DBF. Следовательно, избыток треугольника ADF над [треугольником] BFC — это треугольник DGB, равный [по своей площади] произведению DE на EB. Но избыток треугольника ADF над треугольником BFC — это избыток треугольника ADC над треугольником ABC, поскольку треугольник AFC — общий[185].

АБУ НАСР АЛ-ДЖА‘ДИ

Он откладывал AH, равную FC (см. предыдущий рис. 36), и соединял H с G. Треугольники AHG и CFB равны друг другу, и оставшиеся треугольники DGH и DFB[186] — равные. Следовательно, треугольники BFC, BFD и DFG [в сумме их площадей] равны треугольнику ADF. Треугольник AFC он принял за общий [член]. Тогда треугольники ADF и AFC будут равны [в сумме] треугольникам AFC, BFC, BFD и DFG[187]. Таким образом, разность между треугольниками ADC и ABC — это треугольники BFD и DFG, а их сумма равна произведению DE на EB[188]. ‖

АБУ ‘АБДАЛЛАХ АШ-ШАННИ 87

Он соединил A с C и опускал на нее, [т. е. на линию AC], перпендикуляр DH, а на DH — перпендикуляр BF (см. рис. 37. Чертеж дан по $И$; в T он менее точен. Отрезок EG_1 дан по $Л$, в $И$ и T он отсутствует). Треугольники AKH, KBF и DKE — подобные[189], поэтому AH относится к ED, как BE к FD. Следовательно, произведение AH на DF равно произведению ED на BE, ‖а произведение AH на 89
DF есть избыток произведения DH на HC над произведением FH на FC, т. е. избыток треугольника ADC над треугольником ABC.

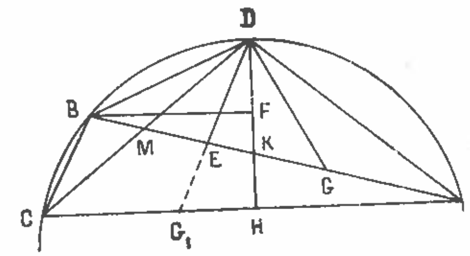

Рис. 37.

Эти свойства тесно связаны друг с другом, и одно из них доказывается при помощи доказательства другого. Если установлено, что разность между треугольниками ADC и ABC равна произведению DE на EB, отложим EG, равную EB. Затем отбросим общий треугольник AMC, и тогда избыток треугольника ADM над треугольником BMC — это произведение DE на EB, т. е. треугольник DGB. ‖ Вслед- 90
ствие этого избыток треугольника ADM над треугольником DBC — это треугольник DGM. Таким образом, треугольник ADG равен треугольнику DBC, и стороны AD и DG [треугольника ADG[190]] равны сторонам CD и DB [треугольника DBC]. В силу этого третья сторона AG равна стороне BC. Мы отложили EG, равную EB[191], поэтому сумма AG и GE равна сумме EB и BC.

Отсюда становится ясным, что если хорда дуги является основанием двух треугольников, один из которых равнобедренный, а другой — разносторонний, то периметр первого больше периметра второго, так как AD больше AE, и DC также больше суммы EB и BC. Примем AC за общий [член]. Тогда сумма AD, DC и AC больше суммы AE, EB, BC и AC. Следовательно, стороны треугольника ADC, взятые в сумме, больше сторон треугольника ABC, взятых в сумме. А это то, что мы хотели доказать.

Все эти свойства, которые мы изложили выше, причисляются к основам геометрии. Поэтому мы обращаемся к ним при частых потребностях, разрешаемых с их помощью. Некоторые из них я упомяну [ниже]. Те же [вопросы], которые удалось [решить] кому-нибудь другому, кроме меня, я отнесу на имя того, [кто их решил], и назову его [имя] с соизволения Аллаха всевышнего и с помощью Его[192].

ПРОВЕДЕНИЕ ДВУХ ЛИНИЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ, ЗАКЛЮЧЕННЫЕ В ЗАДАННЫЙ УГОЛ, ПРИ ТОМ, ЧТО СУММА [ВЕЛИЧИН] ЭТИХ ДВУХ ЛИНИЙ РАВНА ЗАДАННОЙ ЛИНИИ

Менелай[193] хотел показать во втором предложении третьей книги его сочинения «Начала геометрии», как вписать в заданный полукруг ломаную линию, равную заданной линии. Он шел к этому очень долгим путем. Затем это сделал Сабит ибн Курра[194], когда комментировал эту книгу, столь же длинным действием, что и Менелай. Однако после предпосланния вышеизложенных [нами] свойств ломаной линии, вписанной в произвольную дугу, то, что хотел [доказать] Менелай, облегчается и становится [к тому же] общим для любых дуг данной окружности, а не только для полуокружности[195]. ||

91 Абу-л-Джуд Мухаммад ибн ал-Лайс[196] посвятил этому вопросу специальную статью, однако он решил его путем, превосходящим все [предыдущие] долготой и трудностью. Когда же стал заниматься им Абу Са'ид ас-Сиджизи[197], он решил его крайне легким путем. И мы не пренебрегаем им, приводя [нижеследующее доказательство] с помощью одного из рассмотренных выше свойств.

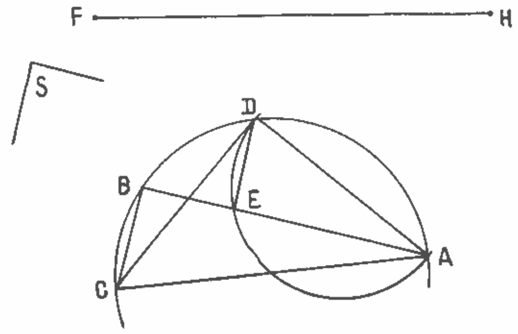

Рис. 38.

Итак мы скажем: мы хотим провести из двух известных точек A и C (рис. 38) две прямые линии, соединяющиеся в какой-то точке и заключающие угол, равный данному углу S, так, чтобы их сумма была равна данной линии HF.

Соединим A с C и построим на этой [линии, т. е. на AC], сегмент дуги, вмещающий[198] угол, равный углу S, а это — сегмент ADC, и пусть будет точка D серединой его [дуги]. Соединим A с D. Для того, чтобы можно было получить искомый результат, необходимо, чтобы данная линия HF была больше AC, но не больше удвоенной AD. Затем опишем на AD полуокружность $AKED$ и найдем в ней хорду AE, равную половине линии HF. Далее продолжим ее в ее направлении до B и соединим B с C. Я утверждаю, что мы построили то, что хотели[199].

Доказательство. Если мы соединим D с E, то [линия DE] будет перпендикуляром к AE, опущенным из середины [дуги] данного сег-
92 мента. Поэтому AE равна сумме EB и BC. || Однако AE задана равной половине HF; поэтому сумма EB и BC равна другой ее половине. Следовательно, сумма линий AB и BC равна всей линии HF, а угол ABC равен углу S, поскольку он в сегменте, вмещающем угол, равный ему. Это и есть то, что мы хотели[200].

ПРОВЕДЕНИЕ ДВУХ ЛИНИЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ, ЗАКЛЮЧЕННЫЕ В ЗАДАННЫЙ УГОЛ, ПРИ ТОМ, ЧТО РАЗНОСТЬ ИХ РАВНА ЗАДАННОЙ ЛИНИИ

Если мы хотим провести их таким образом, будем поступать, как упоминалось, пока не будет построен сегмент на линии AC[201]. Дополним его в G (см. рис. 39. В *И*, *П* и *Т* ошибочно K на месте L и наоборот. Нами чертеж дан по *Л*) до полукруга[202]. Соединим A с D, D с G и A с G. Возьмем GK, равную половине линии HF, и опустим перпендикуляр KL[203] на AG. Затем найдем хорду DB, равную GL, и соеди-
93 ним A с B и B с C. || Я утверждаю, что разность [между] AB и BC равна линии HF.

Доказательство. Опустим перпендикуляр DE на AB. Тогда вследствие равенства углов DBE и DGA, опирающихся на дугу AD, и углов DEB и KLG, являющихся прямыми, треугольники DEB и KLG будут подобными. Но мы приняли DB равной GL, и поэтому эти два тре-

угольника, при том, что они подобны, равны друг другу. Поэтому KG равна BE, а мы приняли KG равной половине HF. Из предшествующего известно, что EB равна половине разности AB и BC. Следова-

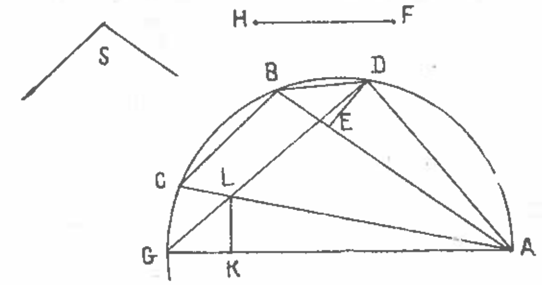

Рис. 39.

тельно, удвоенная [EB] равна всей этой разности. Если половина разности равна половине HF, то вся она равна всей HF.

Здесь необходимо условие, чтобы LG была бы не больше AD. В противном случае искомое не будет найдено[204]. ||

ДРУГОЙ МЕТОД, ПРИНАДЛЕЖАЩИЙ МНЕ[205] 94

Если нам угодно, опустим из [точки] D, являющейся серединой [дуги] ADC (см. рис. 40. В *П* в этом чертеже пропущена линия BC; в *Т* (рис. 41) DB не равна DM, хотя это — условие доказательства), перпендикуляр DK на AC[206]. Отложим KL, равную половине HF. Проведем LM параллельно DK и MO параллельно KC. Построим хорду DB, равную DM, и соединим A с B и B с C. Тогда мы получим то, что хотели.

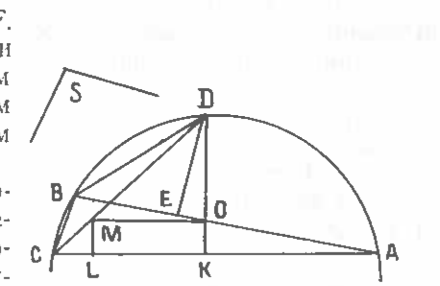

Рис. 40.

Доказательство. Опустим перпендикуляр DE на AB. Тогда треугольники DBE и DCK будут подобными, и подобным им обоим будет треугольник DMO вследствие параллельности OM и KC. Однако DM равна DB, поэтому MO равна BE, но MO равна и KL, следовательно, BE равна KL, которая равна половине HF. EB равна половине разности AB и BC, и, следовательно, удвоенная EB есть вся эта разность, которая равна HF. ||

[МЕТОД] ПРОВЕДЕНИЯ ДВУХ ЛИНИЙ ИЗ ДВУХ ЗАДАННЫХ ТОЧЕК, ЗАКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАННЫЙ УГОЛ, ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОДНОЙ ИЗ КОТОРЫХ НА ДРУГУЮ РАВНО ЗАДАННОЙ ПЛОСКОЙ ФИГУРЕ, ПРИНАДЛЕЖАЩИЙ МНЕ[207] 95

Если мы хотим провести их так, чтобы они заключали [угол], подобный углу S (рис. 41), и чтобы произведение одной из них на другую было бы равно плоской фигуре F, пусть будет линия K в квадрате равна плоской фигуре F. Построим на AC сегмент, вмещающий угол S. Соединим A с [точкой] D, серединой [дуги AC]. Опишем на AD половину окружности AHD. Отыщем в этом [полукруге] хорду AH, равную линии K, и соединим D с H. Затем построим хорду DB, равную хорде DH, соединим A с B и B с C, и получится то, что мы хотели.

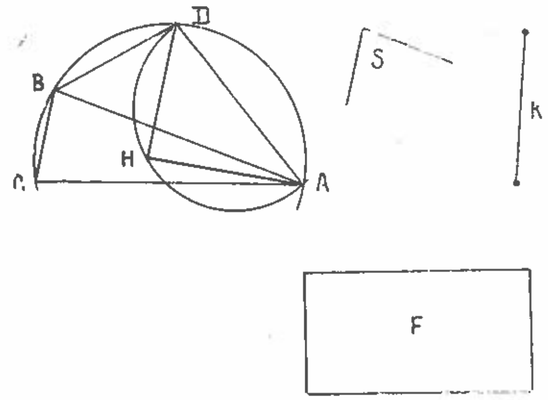

Рис. 41.

Доказательство. Квадрат AD, как [доказывалось] выше, равен квадрату DB вместе с произведением AB на BC. Следовательно, квадрат AD, из которого вычтен квадрат DB, равен произведению AB на BC. Но квадрат AD, из которого вычтен квадрат DB, равен квадрату AH, так как мы приняли, что DB равна DH. Следовательно, квадрат AH равен произведению AB на BC. Однако квадрат AH, т. е. квадрат линии K, был принят ранее равным плоскости F. Отсюда произведение AB на BC равно плоскости F[208]. ||

97 ## ДРУГОЙ МЕТОД, ПОДОБНЫЙ ЭТОМУ, ПРИНАДЛЕЖАЩИЙ АБУ 'АБДАЛЛАХУ АШ-ШАННИ[209]

Соединим A с C (рис. 42) и построим на этой [линии] сегмент, вмещающий угол, равный углу S. Построим линию K, равную в квадрате заданной плоской фигуре F, и проведем хорду AD к середине дуги ADC[210]. Рассмотрим эту [хорду]. Если K окажется меньшей, чем AD, искомое можно [определить], и пусть будет так. Затем проведем хорду DB так, чтобы она в квадрате равнялась разности квадратов AD и K. Соединим A с B и B с C. Я утверждаю, что произведение AB на BC равно заданной плоскости F[211].||

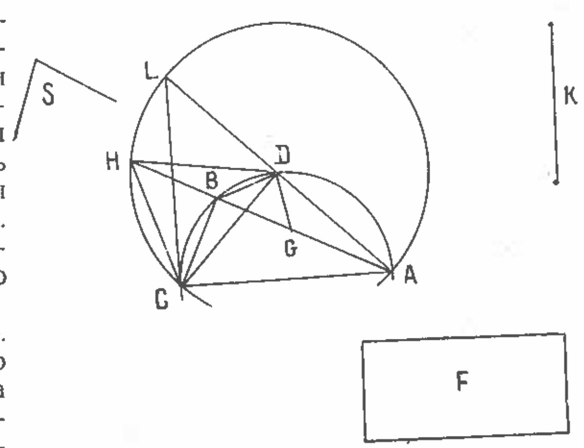

Рис. 42.

98 Доказательство этого. Примем точку D за центр и опишем [вокруг нее] на расстоянии DA сегмент круга $ALHC$. Продолжим линии AD и AB в их направлении до окружности этого сегмента. Соединим D с C. Ясно, что [DC] будет равна DA.

Проведем DG, равную DB, и ясно, что AG равна BC. Угол AGD— тупой. Следовательно, квадрат AD равен квадрату AG вместе с квадратом GD и однократным произведением AG на GB. Однако DG рав-

на DB, и квадрат AG вместе с произведением AG на GB равен произведению BA на AG[212], т. е. произведению AB на BH. Следовательно, квадрат AD равен квадрату DB вместе с произведением AB на BH. Ранее мы приняли разность квадрата AD и квадрата K равной квадрату DB. Таким образом, произведение AB на BH равно квадрату K, т. е. заданной [площади] плоской фигуры F[213]. Затем проведем[214] линии CH, CL и HD. Угол ADC равен углу ABC, *поскольку оба они в одном сегменте, [т. е. по величине хорды AC, ограничивающей данный сегмент][215]. Следовательно, углы LDC и HBC — равные. Поскольку углы ALC и AHC опираются на одну дугу, они также равные[216]. Поэтому треугольники LDC и HBC[217] подобные. Треугольник LDC равнобедренный, и треугольник HBC также равнобедренный. HB равна BC, и, следовательно, произведение AB на BC равно [площади] заданной плоской фигуры F, а это — то, что мы хотели разъяснить[218]. ||

ПРОВЕДЕНИЕ ДВУХ ЛИНИЙ ИЗ ДВУХ ЗАДАННЫХ ТОЧЕК, ЗАКЛЮЧАЮЩИХ ЗАДАННЫЙ УГОЛ, ОТНОШЕНИЕ ОДНОЙ ИЗ КОТОРЫХ К ДРУГОЙ — КАК ЗАДАННОЕ ОТНОШЕНИЕ 99

Если мы хотим, чтобы отношение одной [линии] к другой было бы как заданное отношение, пусть, [например], как отношение L к K (рис. 43), построим линии FG и GH, заключающие угол, равный углу S, и возьмем GF равной K, а GH — равной L. Соединим H с F и построим на AC сегмент, вмещающий угол S. Построим угол CAB, равный углу GHF, и соединим B с C. Тогда мы получим то, что хотели.

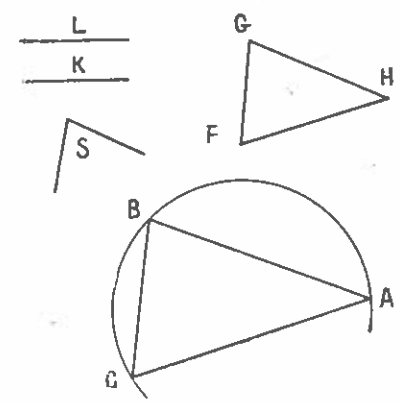

Рис. 43.

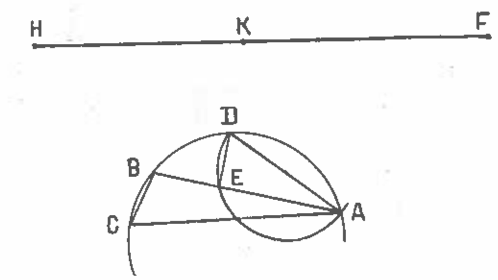

Рис. 44.

Доказательство этого. Угол FGH равен углу ABC. Угол FHG равен углу CAB. Следовательно, треугольники ABC и GFH — подобные, и AB относится к BC, как HG к GF. Но отношение HG к GF мы приняли соответствующим отношению L к K. Поэтому AB относится к BC, как L к K. ||

Данное последнее [доказательство] не связано с предыдущими 100
свойствами [ломаной линии], которыми мы [занимаемся]. Однако оно, будучи связано с этим искусством, следует [стезе] его, дабы последнее поднялось благодаря ему выше, к тому, что завершает его. К тому же, нашей целью при упоминании предыдущего не являлось полное изложение всего, к чему приводят [частные] подразделения и варианты основного вида [проблем]. Я излагаю [здесь] лишь те [вопросы], результат [решения] которых может быть получен и из упомянутых свойств [ломаной линии, вписанной в круг][219].

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА В ЗАДАННОМ КРУГЕ, СУММА СТОРОН КОТОРОГО РАВНА ЗАДАННОЙ ЛИНИИ

Пусть будет заданной линией *HF* (см. рис. 44. В *T* (рис. 45) ошибочно вместо «*A*» вторично «*D*»). Необходимо, чтобы она не была бóльшей, чем сумма сторон равнобедренного треугольника, вписанного в этот круг. Отметим на линии *HF* произвольную точку [*K*]. Отыщем в круге хорду *AC*, равную *HK*. Разделим дугу *AC* пополам в [точке] *D*. Соединим *A* с *D*. Построим на *AD* полукруг *AED*. Отыщем в нем хор-
101 ду *AE*, равную половине *KF*. Продолжим *AE* в || ее направлении до *B*. Соединим *B* с *C*. Тогда сумма сторон треугольника *ABC* будет равна линии *HF*, поскольку *AC* равна *HK*, а *AE*, являющаяся половиной ломаной линии *ABC*, равна половине линии *KF*. Значит вся [*ABC*] равна всей [*KF*], и треугольник *ABC* — искомый[220].

МОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДЕЙСТВИЙ АРХИМЕДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОТ ТРЕУГОЛЬНИКОВ С ИЗВЕСТНЫМИ СТОРОНАМИ И «МЕСТАМИ ПАДЕНИЯ КАМНЯ»[221]

Архимед сказал: отнимем квадрат одной из двух сторон [треугольника] от квадрата другой, разделим остаток на основание, и тогда, если мы прибавим частное к основанию и возьмем половину суммы, то бóльшая из двух частей основания и будет [отделяться] высотой, т. е. [будет отделяться] «местом падения камня» [высоты]. Если же мы вычтем [частное] из него, [т. е. из основания], и возьмем половину остатка, получится меньшая из этих двух частей [основания].

Пусть будет [дан] треугольник *ADB* и высота [его] *DE* (рис. 45). Опишем вокруг него круг. Отделим от него [дугу] *DC*, равную *DA*.
102 Соединим *B* и *C* и построим на *AE* квадрат *AG* и на || *BE*[222] — квадрат *EF*. Отложим *EM*, равную *EB*, проведем *MO* параллельно *EG* и *FLK* параллельно *AB* и дополним плоскую фигуру *AP*. Поскольку квадрат *DB* равен сумме квадратов *DE* и *EB*, а квадрат *DA* — сумме квадратов *DE* и *EA*, квадрат *DE* является общим [членом] двух этих [равенств сумм] квадратов. Поэтому, если мы вычтем квадрат *BD* из квадрата *DA*, получится то же, что и при вычитании квадрата *BE* из квадрата *EA*. Видно, что этот остаток будет гномоном[223], вокруг которого — [дуга] *QZN*.

Вследствие равенства линий *FK*, *KS*[224] и *SM* и равенства [линий] *FP*, *KG* и *MA*, являются равными плоские фигуры *FG*, *KO* и *ML*. Поэтому плоская фигура *FH* равна гномону [в дуге] *QZN*[225]. Однако *FP*, т. е. *AM*, равна *BC*, поскольку линии *AM* и *ME* равны линиям *EB* и *BC*. Следовательно, плоская фигура *FH* есть произведение *AB* на *BC*. Если мы разделим ее на основание [*AB*], в частном получится *BC*. При прибавлении [*BC* к основанию *AB*] получится ломаная линия *ABC*, половина которой *AE*[226] — бóльшая часть основания [*AB*]. При вычитании же [*BC* из *AB*] останется *MB*, половина которой *BE* будет меньшей частью основания до «места падения камня»[227].

Если угодно, сократим это долгое [доказательство], отделив EG, равную *EB* (рис. 46). Поскольку квадрат *AD* равен квадрату *BD*[228] вместе с произведением *AB* на *BC* и если мы вычтем квадрат *BD* из квадрата *AD*, останется произведение *AB* на *BC*. Если мы разделим
103 его на || основание [*AB*], в частном получится *BC*. При прибавлении [*BC*] к *AB* получится ломаная линия *ABC*, половина[229] которой — *AE*[230]. Если же мы вычтем [*BC*] из *AB*, останется *GB*, середина которой *EB*[231].

Продолжим *AD* в ее направлении до *H*, так, чтобы *DH* была равной *DB*. Отложим *DF* подобной же [величины]. *AF* и *AG* являются прибавлениями [соответственно] к линиям *FH* и *GB*, делящимся[232] [точками] *D* [и] *E* пополам. Поэтому произведение *HA* на *AF* вместе

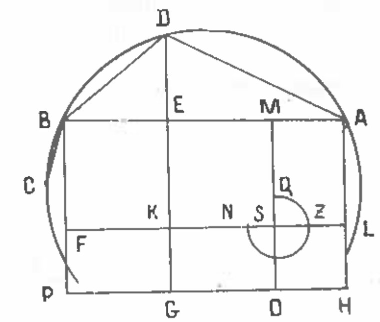

Рис. 45.

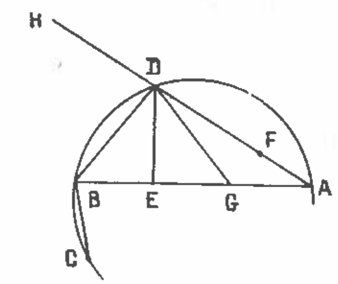

Рис. 46.

с квадратом *FD* равно квадрату *AD*. [Также] и произведение *BA* на *AG* вместе с квадратами *GE* и *ED* равно квадрату *AD*. Квадраты *DG* и *DF* равны. Вычтем их обоих [из уравнений][233], чтобы осталось произведение *HA* на *AF* равным произведению *AB* на *AG*, т. е. на *BC*. Тогда произведение *HA* на *AF*[234] будет произведением суммы сторон *AD* и DB на их разность; следовательно, оно равно разности квадратов сторон *AD* и *DB*. ||

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДЕЙСТВИЯ АРХИМЕДА ДЛЯ [ОПРЕДЕЛЕНИЯ] ПЛОЩАДЕЙ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПО ПРЕВЫШЕНИЯМ [ВЕЛИЧИН ИХ СТОРОН][235] 104

Архимед сказал: половина суммы трех сторон треугольника умножается на ее избыток над одной из сторон; произведение умножается на избыток этой [половины суммы] над второй [из сторон], и [последнее] произведение умножается на избыток этой [половины суммы] над третьей [из сторон]. Из [последнего] произведения извлекается корень, и получится площадь данного треугольника.

Сказал Абу ʻАбдаллах [аш-Шани]: доказательство этого — [возьмем] треугольник *ABC* (рис. 47) и опишем около него круг [*ADBC*]. Опустим из середины дуги *ABC*, а это — [точка] *D*, перпендикуляр *DE* на *AB* и перпендикуляр *DG* — на *AC*. Соединим *D* с *A*, *D* с *B* и *D* с *C*. Опишем из центра *A* на расстоянии *AG* дугу *GHF*, *принадлежащую к окружности, которая пересекает линию AB в точке H, а линию AD в точке F. Линии AF и AG равны друг другу.* Поскольку *AD* в квадрате равна сумме квадратов *DG* и *GA*, квадрат *DF* вместе с [удвоенным] произведением *DF* на *FA* и квадратом *FA* равен [сумме] квадратов[236] *DG*[237] и *GA*, [при том, что *GA*] равна *FA*. Если мы вычтем равные квадраты *AF* и *AG*, останется: квадрат *DF* вместе с удвоенным произведением *DF* на *FA* равен квадрату *DG*.

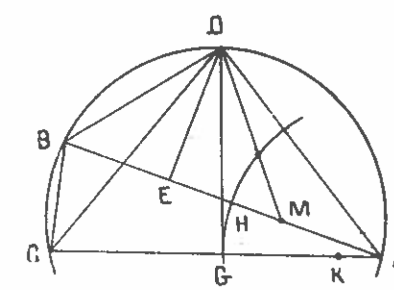

Рис. 47.

Точно так же, AD в квадрате равна сумме квадратов DE и EA. Следовательно, [сумма] квадратов DF и FA вместе с удвоенным произведением DF на FA равна квадрату DE вместе с [суммой] квадратов EH и HA и удвоенным произведением EH на HA. Однако HA равна AF, и если мы отбросим их равные квадраты, останется: квадрат DF вместе с удвоенным произведением DF на FA равен [сумме] квадратов DE и EH вместе с удвоенным произведением EH на HA, а это, [т. е. квадрат DF вместе с удвоенным произведением DF на FA], равно также квадрату DG.

105 Треугольник DGA подобен треугольнику DEB, || поскольку угол DCG, равный углу DAG, равен и углу DBE, опирающемуся на одну и ту же дугу [AD]. Поэтому DE относится к EB, как DG к GA. Но DG относится к GA, как квадрат DG к произведению DG на GA и как произведение DG на GA — к квадрату GA. А так же: квадрат DE относится к произведению DE на EB, как произведение DE на EB к квадрату EB.

Если отнять от пропорциональных величин пропорциональные величины, находящиеся в том же отношении, отношение остатков будет тем же. Поэтому если отнять квадрат DE от квадрата DG, остаток будет равен квадрату EH вместе с удвоенным произведением EH на HA, т. е. — произведению EH на сумму EH и удвоенной[238] HA. Отнимем произведение DE на EB от произведения DG на GA. Остатком будет площадь треугольника ABC, что вытекает из равенства треугольника ADC сумме треугольников ABC и BDM, [если линия EM равна линии BE][239].

Пусть будет GK равной EB. Если мы вычтем квадрат GK, т. е. [квадрат] EB из квадрата GA, то остаток будет равен произведению CK на KA. Эти остатки [в предыдущем и предшествующем ему действиях] — пропорциональные величины, т. е. произведение EH на сумму EA и AG относится к площади треугольника ABC, [как последняя] — к произведению CK на KA. AE — половина [суммы] сторон AB и BC. AG — половина стороны AC, поэтому сумма EA и AG есть половина суммы сторон треугольника [ABC].

EH — избыток суммы EA и AG, т. е. половины суммы сторон треугольника [ABC], над суммой HA и AG, т. е. над AC. Это — один из избытков.

Вследствие равенства GK и EB сумма AE и GK равна стороне AB. AK — избыток суммы EA и AG над [суммой] EA и KG, т. е. над AB. Это — второй избыток.

Так как EB вместе с BC равны AE, то [сумма] EB, BC и AG равна половине суммы сторон [треугольника ABC]. Поэтому избыток последней над BC — это EB [в сумме] с AG. Но KG равна EB, а GC
106 равна AG. || Отсюда KC[240] — избыток полусуммы сторон [треугольника ABC] над BC. Это — третий избыток.

Если мы умножим плоскую фигуру, [равную произведению] EH на [сумму] EA и AG[241], т. е. [умножим] один из двух крайних членов [пропорции] на плоскую фигуру, [равную произведению] CK на KA, т. е. на другой крайний член, получится квадрат среднего члена [пропорции], т. е. площади треугольника [ABC]. И какое бы из двух действий мы не сделали: — [а)] умножим EH, первый избыток, на сумму EA и AG[242], т. е. на половину суммы сторон треугольника; [затем] умножим AK, второй избыток, на CK — третий избыток, и затем умножим одно из этих произведений на второе; или же: [б)] умножим EA [в сумме] с AG, т. е. полусумму сторон треугольника, на KA, [полученное] произведение умножим на EH и [последнее] произведение умножим на CK, — оба

результата будут одинаковыми, а именно — [получится] квадрат площади треугольника [ABC]. Если мы извлечем из него корень, получится искомое, [т. е. площадь треугольника ABC]. ||

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АБУ 'АБДАЛЛАХА АШ-ШАННИ ДЕЙСТВИЙ 114
ИНДИЙЦЕВ ДЛЯ [ОПРЕДЕЛЕНИЯ] ПЛОЩАДИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, [ВПИСАННОГО] В КРУГ

На этом же основывается Абу 'Абдаллах аш-Шанни при доказательстве метода индийцев [определения] площади четырехугольника, [вписанного] в круг[243]. А этот [метод] заключается в том, что они умножают друг на друга избытки полусуммы его сторон над каждой его стороной, извлекают [из произведения] корень, и он и будет площадью данного четырехугольника.

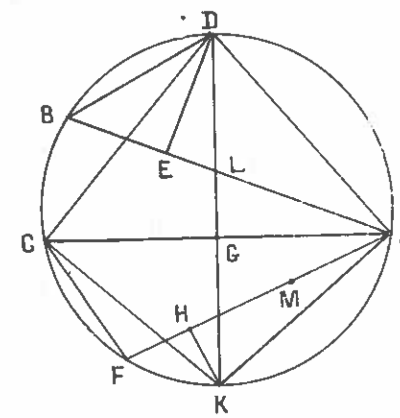

Рис. 48.

Пусть $ABCF$ — [четырехугольник, вписанный в круг]. (См. рис. 48. В *П* (рис. 47) пропущены линии DA и CK). Соединим A с C. Проведем из середины дуги ABC, а это — [точка] D, диаметр DGK и на [линии] AB и AF — перпендикуляры DE и KH. Тогда треугольники DEB и DGC будут подобными. Недостатком DB до DC будет CG, т.е. AG, [которая] больше EB[244]. AG, половина стороны AC, — меньше, чем AH, половина суммы сторон AF[245] и FC. AH намного больше EB. Таким же образом доказывается, что и AE больше, чем HF[246]. ||

Отложим [линию] EL, равную HF, и HM, равную EB. Известно, 115
что избыток плоской фигуры $ADCK$[247] над плоской фигурой $ABCF$ равен произведению DE на EB [в сумме] с произведением KH на HF. Треугольник DAK подобен каждому из треугольников DEB и KHF. Поэтому DA относится к AK[248], как DE к EB и как FH к HK. [Кроме того], DA относится к AK, как квадрат DA к произведению DA на AK. Произведение DA на AK равно удвоенному треугольнику DAK, а это [и есть] плоская фигура $ADCK$. Следовательно, это, [то есть плоская фигура $ADCK$], — средний член в пропорции, находящийся между произведением AD на DC и произведением AK на KC.

Сумма величин, находящихся в определенном пропорциональном отношении, с другими величинами, находящимися в своем пропорциональном отношении, или же их разность, — каждого [члена, взятого] с соответствующим ему членом, — также будут пропорциональными. Поэтому сумма квадратов DE и FH относится к сумме произведения DE на EB и произведения FH на KH, как сумма этих двух плоских фигур[249] к сумме квадратов EB и KH. Поэтому, если отнять сумму квадратов DE и FH, т. е. [квадратов DE и] EL от квадрата AD, сум-
му || произведения DE на EB и произведения FH на KH — от плоской 116
фигуры $ADCK$ и сумму квадратов EB и KH — от квадрата AK, остатки будут пропорциональны.

Что касается первого остатка, то им будет произведение AL на сумму LB и BC. Это — потому, что если вычесть из квадрата AD квадрат DE, останется квадрат AE, и если отнять от него квадрат[250] [линии] HF, равной EL, останется квадрат AL вместе с удвоенным произведением AL на LE, а это равно произведению AL на сумму AE и EL, т. е.

произведению *AL* на сумму *CB* и *BL*[251], равную [сумме] *AE* и *EL*.

Что касается второго остатка, то им будет четырехугольник *ABCF*, а третий остаток, [что можно доказать] тем же [путем], как это было выше для первого остатка[252], есть произведение *AM* на сумму *MF* и *FC*. Следовательно, четырехугольник *ABCF* — средний член в пропорции между [крайними членами, являющимися] плоскими фигурами, [равными произведению] *AL* [на сумму] *LB* и *BC* и [произведению] *AM* на [сумму] *MF* и *FC*. ‖

117 Известно, что *AE* — половина суммы [*AB* и *BC*, а *AH* — половина суммы] *AF* и *FC*. Поэтому сумма *EA* и *AH* есть полусумма сторон четырехугольника *ABCF*. Вследствие равенства *EB* и *HM*, избыток суммы *EA* и *AH* над стороной *AB*, т. е. над [суммой] *AE* и *HM*, есть *AM*, а это — первый избыток. Таким же образом [определяется, что] *AL*[253], второй избыток, есть избыток [полусуммы сторон четырехугольника] над стороной *AF*[254].

Кроме того, сумма линий *EB*, *BC*, *CF* и *FH* — это тоже полусумма сторон четырехугольника. Ее избыток над стороной *BC* есть сумма *CF*, *FH* и *HM* при равенстве [*HM*] и *EB*. Это — третий избыток. Подобным же образом [определяется], что избыток [полусуммы сторон четырехугольника] над стороной *CF* есть сумма *LB* и *BC*, а это — четвертый избыток.

Однако, как говорилось выше, четырехугольник[255] *ABCF* есть средний член в пропорции между произведением второго [избытка] *AL* на сумму *LB* и *BC*, [т. е. на] четвертый [избыток], и произведением *AM*,

118 первого избытка, на ‖ сумму *MF* и *FC*, [т. е. на] третий [избыток]. Поэтому умножим ли мы одно из этих двух произведений на другое, или же умножим первый избыток на второй, их произведение — на третий, а их произведение — на четвертый, в обоих случаях мы получим квадрат среднего члена [пропорции, т. е. площади] четырехугольника. Если мы извлечем из него корень, будет искомое[256]. ‖

119 УСТАНОВЛЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ДЕЙСТВИЙ МУХАММАДА ИБН АС-САББАХА[257] ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ[258] НАИБОЛЬШЕГО СКЛОНЕНИЯ[259]

У этого Мухаммада есть трактат, посвященный данной проблеме, с вычислением без теоретического доказательства[260], и я укажу [здесь] на основную суть сего. Дело в том, что он определял наблюдением азимут восхода [Солнца] трижды в течение одного из сезонов года на границах двух равных отрезков времени[261]. Необходимым условием его расчетов было то, что он брал окружность, проведенную на расстоянии синуса полного азимута восхода[262], как например, [окружность] *ABC* (см. рис. 49. В *T* (рис. 51) пропущена линия *HA*), в которой находятся параллельные известные хорды *LD*, *KF* и *AB*, являющиеся удвоенными синусами трех азимутов восхода. Требуется [определить] диаметр этого круга.

В соответствии с требованием его вычислений соединим *A* с *D*. Тогда [*AD*] будет равна хорде *KF*, так как дуга *LD* вместе с равными дугами *LK* и *DF*, которые приняты [за равные] вследствие равенства двух отрезков времени,— хотя это не установлено точно, а лишь приближенное допущение со стороны [Ибн ас-Саббаха],— равна дуге *LD* вместе с равными дугами *LK* и *KA*. Отложим дугу *DC*, равную дуге *AD* и соединим *B* с *C*. [*BC*] будет равна *LD*.

Поскольку квадрат *AD*, который мы назовем вторым запоминаемым, равен квадрату хорды *DB* вместе с произведением третьего за-

120 поминаемого *AB* на первое запоминаемое *BC*, ‖ хорда *DB* известна.

Проведем перпендикуляр *DE* [к *AB*]. Он будет известным, так как хорда *DB* известна, а *EB* — половина [разности] *AB* и *LD*, [поскольку *LD* равна *BC*].

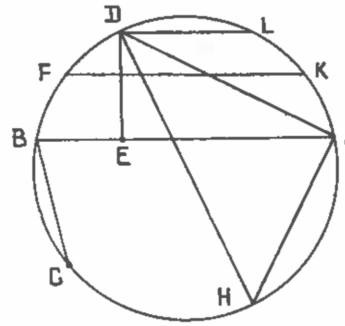

Рис. 49.

Проведем диаметр *DH*. Соединим *A* с *H*. Тогда треугольники *DEB* и *DAH* подобны, и хорда *DB* относится к перпендикуляру *DE*, как диаметр *DH* ко второму запоминаемому *AD*. Соответственно [подобному решению Ибн ас-Саббаха] данного вопроса диаметр *DH* становится известным, а он — [удвоенный] синус полного азимута восхода. Из него узнается наибольшее склонение, ибо синус азимута восхода относится к синусу склонения в одной суточной параллели[263], как полный синус к синусу дополнения широты данного города. Это отношение — едино и неизменно для любого города в одном виде[264]. [Однако], если вместо наблюдаемых азимутов восхода были бы полуденные высоты [Солнца], сия задача была бы более легкой, и дело — ближе к установлению истины[265].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ АПОГЕЯ[266] СОЛНЦА И РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ЦЕНТРАМИ [ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ И ПАРЭКЛИПТИКИ] ПО НАБЛЮДЕНИЮ ТРЕХ ТОЧЕК, [РАССТОЯНИЕ] МЕЖДУ КОТОРЫМИ В [МОМЕНТЫ] НАБЛЮДЕНИЯ — ЧЕТВЕРТИ ОКРУЖНОСТИ, [ВЗЯТОЕ] ИЗ МОЕЙ КНИГИ «УКАЗАНИЕ ПУТИ К УТОЧНЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ СОЛНЦА»[267]

Пусть *ABC* — эксцентрическая орбита с центром *E* (рис. 50), а центр эклиптики, потенциально[268] являющийся местом наблюдения,— *H*. Наблюдаемые точки эклиптики — те, в которых оканчиваются линии *AH*, *HB* и *HC*. ‖ Ясно, что *AH* и *HC* соединены в [одну] прямую [линию], 121

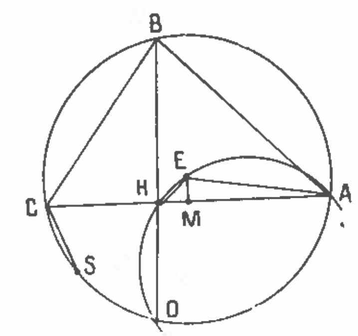

Рис. 50.

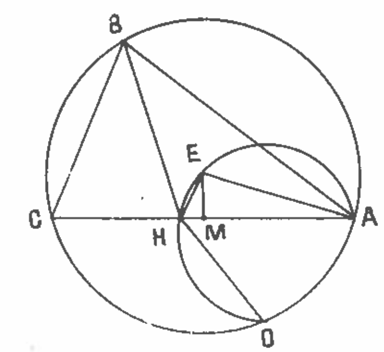

Рис. 51.

а *HB* — перпендикулярна к ней, будучи под прямым углом. Поскольку среднее деферентное[269] движение Солнца до [времени определения] сего искомого было дугой *AB*, а *BC* — средняя [часть] его пути между временами, длительность которых [ограничена] точками, отмеченными при наблюдении, то обе эти [дуги, то есть *AB* и *BC*],— известны[270]. Отделим дугу *BCS*, равную дуге *BA*. Соединим *C* с *S* и опустим на *AC* перпендикуляр *EM*. Соединим *A* с *E* и *E* с *H* и опишем окружность вокруг треугольника AEH. Отделим[271] от нее дугу EHO, равную дуге AE, и соединим H с O. Известно[272], что если мы разделим разность между квадратами AB и BC на AC[273], получим в частном CS. Половина суммы [CS] с AC[274] — AH, которая [теперь] известна. Половина разности между CS и AC — это CH, равная HO.

Если мы вычтем произведение AH на HO из квадрата полного синуса, то есть AE, останется квадрат [линии] EH, являющейся [искомым] расстоянием между двумя центрами [E и H], которое, следовательно, известно. [EH] относится к EM, как синус прямого угла M в треугольнике EMH к синусу угла EHM в нем же. Отсюда этот [угол] известен, а он[275] — по величине расстояния точки апогея на эклиптике от точки, в которой оканчивается определенная наблюдением линия HA. Следовательно, положение апогея известно[276]. ||

122 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОГО ЖЕ ПО ДВУМ ТОЧКАМ НА ЭКЛИПТИКЕ, МЕЖДУ КОТОРЫМИ — ПОЛОВИНА ОКРУЖНОСТИ И ПО РАССТОЯНИЮ ОТ НИХ ТРЕТЬЕЙ ТОЧКИ, КАКИМ БЫ ОНО НИ БЫЛО

Пусть расстоянием между точками A и C (см. рис. 51. В T (рис. 53) пропущена линия BC, а в П — линия OH) будет половина окружности, так, что они будут диаметрально противоположными. HB — не перпендикулярна к линии AHC. В треугольнике AHB угол BAH, соответствующий величине половины среднего движения [Солнца между точками B и C, равной] углу BHC, известен; дело в том, что угол BAH — при окружности, [то есть вписанный], и путем деления пополам он будет приведен к центру, [то есть станет центральным][277]. Угол BHA — дополнение [угла BHC] до двух прямых. Отсюда оставшийся угол ABH известен и, следовательно, треугольник ABH — с известными углами. Хорда AB, [дуги] среднего движения [Солнца] между точками A и B, относится к AH, как синус угла AHB к синусу угла ABH. Поэтому AH известна. Если мы вычтем ее из AC, хорды среднего движения Солнца между точками A и C, остаток CH будет известным, а он равен HO. Если же мы вычтем произведение AH на HO из квадрата полного синуса AE[278], останется квадрат [линии] EH — расстояния между центрами [эксцентрической орбиты и парэклиптики]. Остальное действие по определению апогея — в том же виде, [как было выше][250]. ||

123 РЕШЕНИЕ [ЗАДАЧИ] ОПРЕДЕЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ [СОЛНЦА][280] ДЛЯ ПОЛОВИНЫ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ, [ВЗЯТОЕ] ИЗ МОЕЙ КНИГИ, СПЕЦИАЛЬНО ПОСВЯЩЕННОЙ ЭТОМУ ВОПРОСУ

Пусть будет круг FAG эксцентрической орбитой с центром D. (См. рис. 52. В T (рис. 54) пропущена линия AD). Пусть будет B центром круга, воспроизводящего эклиптику, а FDBG — [диаметром], проходящим через оба [центра]. Тогда F будет апогеем, а G — перигеем. Предположим, что Солнце находится в точке A. Тогда FA будет аргументом [Солнца]. Опустим перпендикуляр AH на диаметр; [AH] будет синусом аргумента, а HD его косинусом. Соединим A с D и A с B.

Известно, что угол FDA — по величине [среднего] аргумента, а угол FBA — по величине его наблюдения, а это — исправленный аргумент. Угол FDA, внешний угол треугольника ADB, равен [сумме] углов DBA и DAB.

Угол DAB — разность между углами FDA и FBA. Однако разность между средним и исправленным аргументами есть уравнение. Поэтому

угол DAB — по величине уравнения [Солнца при] аргументе FA, || и 124
мы хотим определить его.

Опустим перпендикуляр DE на AB, опишем вокруг треугольника ADB круг, который окружит его [и пересечет круг AFG в C], и соединим B с C. Поскольку угол ADB — тупой, квадрат AB превышает[281] [сумму] квадратов AD и DB на [величину] удвоенного произведения DB на DH[282]. И если мы умножим косинус аргумента, т. е. DH, на удвоенную DB, т. е. на [удвоенный] синус наибольшего уравнения [Солнца], и прибавим произведение к сумме квадратов AD — полного синуса и DB — синуса наибольшего уравнения [Солнца], получится квадрат AB. Если мы извлечем из него корень, получится AB.

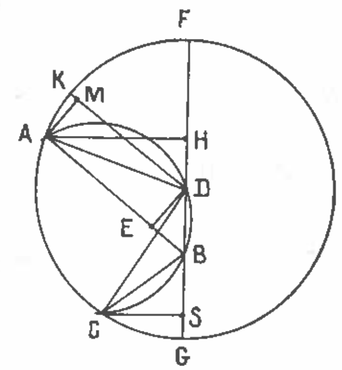

Рис. 52.

Так как линия ABC — ломаная, [вписанная] в дугу ABC, и ее разделил пополам перпендикуляр DE, то если мы вычтем квадрат DB, синуса наибольшего уравнения [Солнца], из квадрата AD, полного синуса, останется произведение AB на BC. Если мы разделим это [произведение] на AB, в частном получится BC. Если мы прибавим [BC] к AB и возьмем половину суммы, будет AE. Разностью между квадратом [AE] и квадратом AD, полного синуса, будет квадрат DE[283]. [Или же], если мы вычтем BC из AB, остатком будет квадрат BE. Разностью между квадратом BE и квадратом DB, синуса наибольшего уравнения, также будет квадрат DE. Следовательно, DE известна, а она — синус угла уравнения [Солнца] в круге, диаметр которого AD. Однако, если мы проведем DK параллельно AB и AM перпендикулярно к ней, плоская фигура AEDM будет с параллельными [противолежащими] сторонами. AM, являющаяся синусом угла ADK, равна DE, а накрестлежащие углы ADK и DAB — равные.

DE — синус уравнения [Солнца] в эксцентрической орбите при аргументе FA; AE — его косинус[284]. Если аргументом будет GC, синусом его будет GS. Угол CBD — тупой. Поэтому, если мы вычтем квадрат DB из квадрата DC, останется удвоенное произведение DB на BS [и квадрат CB]. BS — разность между косинусом аргумента и синусом наибольшего уравнения [Солнца]. Если мы вычтем удвоенное[285] произведение DB на BS из [последнего] остатка, останется квадрат CB. Если мы разделим на него разность между квадратами AD и DB, в частном получится AB вместе с половинной суммы AB и BC, то есть [вместе с] AE, а половиной разности [между AB и BC] будет BE[286].

Следовательно, [из треугольников ADE или DEB] DE известна. Она является синусом угла DAE, но этот угол равен углу BCE. || Но 125
DE также — синус уравнения при аргументе GC, то есть FAC.

Подобный же [метод применяется] и в эпициклах. Это действие также производится и там, если перенести туда эти величины обдуманно и осмотрительно[287].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАТМЕВАЕМОГО СЕГМЕНТА ОДНОГО ИЗ ДВУХ СВЕТИЛ, [СОЛНЦА ИЛИ ЛУНЫ], ИЗ МОЕЙ КНИГИ «ПОЛЕЗНЫЕ ВОПРОСЫ И ВЕРНЫЕ ОТВЕТЫ», [НАПИСАННОЙ] В ОБОСНОВАНИЕ ЗИДЖА АЛ-ХОРЕЗМИ[288]

Пусть будет круг DFGL — затмевающим [телом] с центром A (см. рис. 53. В T (рис. 55) пропущена линия BG), а круг DKGH — затмеваемым с центром B. Были получены из зиджа диаметры обоих кругов в мерах больших кругов, т. е. при которых большой круг на сфере — триста шестьдесят градусов. Мы хотим узнать площадь сегмента $DKGL$, который затмевается кругом $DFGL$ в круге $DKGH$ в мерах, в которых площадь всего круга $DKGH$ — двенадцать [неких мер]. ||

126 Соединим B с G[289], B с D, A с D и A с G. Проведем линию, проходящую через оба цетра; на ней будут [точки] F, A, B, H. Все эти [линии, будучи на сферах, фактически] — дуги, но мы принимаем их за прямые вследствие малости их величины при затмении по сравнению с окружностью круга, на котором [предполагается дуга] $FABH$.

Опишем вокруг треугольника ADB круг, который окружит его, отложим от него дугу DBC, равную дуге AD, и соединим B с C. Тогда линия ABC — ломаная, [вписанная] в дугу $ADBC$, а перпендикуляр к ней DE делит ее пополам. Если мы вычтем квадрат BD, половины величины [диаметра] круга [затмеваемого] светила, из квадрата AD, половины величины [диаметра] круга затмевающего [тела], останется произведение AB на BC. Если мы разделим это [произведение] на AB, т. е. на «свободную» [или «абсолютную»] широту Луны при ее затмении, — а видимая широта ее при солнечных затмениях называется «закрепленной»[290], — в частном получится BC. Половина суммы BC с AB есть AE.

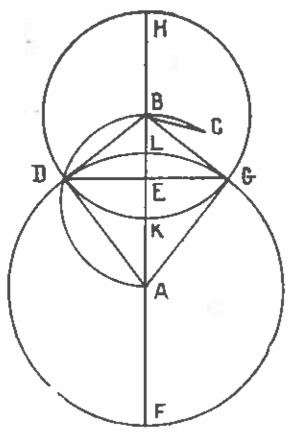

Рис. 53.

Таким образом, как AE, так и EB известны. Произведение LE[291] на EF[292] равно квадрату ED. Но ED, если она определится у нас [отсюда], получится в мерах, в которых получены диаметры затмевающего и затмеваемого [тел], а у нас нет синусов с частными значениями в этих мерах, с помощью которых мы могли бы определить дугу DL. Для этого нам необходимо перевести это, т. е. [величину] ED, в такие меры, в которых BD — полный синус. [Это достигается] тем, что мы умножаем [ED] на AL и делим произведение на полный синус. Тогда получится ED в искомых мерах. Определим далее для этого [синуса] дугу по таблицам синусов, и у нас получится дуга DL в мерах, в которых окружность затмевающего [тела] — триста шестьдесят градусов [с известной величиной].

Когда мы узнаем отношение дуги DL к окружности круга затмевающего [тела] в этих мерах, нам будет необходимо узнать величину этой [окружности] в первых мерах, в которых мы раньше узнали величину диаметра затмевающего [тела], [а это] — путем умножения FL на три с одной седьмой, поскольку отношение диаметра к окружности есть отношение единицы к трем с одной седьмой. В произведении получится окружность затмевающего [тела] DL в этих мерах, являющаяся искомой, которая относится к окружности затмевающего тела в этих же мерах, как она же, [т. е. DL], относится ко всей окружности затмевающего тела в мерах, в которых эта окружность — триста шестьдесят градусов [с известной величиной].

Если [из известной теперь DL в искомых мерах] известна искомая DG, умножим ее на AL, и в произведении получится площадь сектора $ADLG$. Если же мы умножим AE на ED, в произведении получится площадь треугольника ADG. Разность между нею и между площадью того сектора будет площадью сегмента $DLGE$. Затем, подобным же

образом, произведем предыдущее действие с дугой KD, сектором $DKGB$ и треугольником DBG, дабы получилась у нас площадь сегментов затмевающего || и затмеваемого [кругов тел]. Таким образом опре- 127
делится площадь затмеваемого сегмента, но только в мерах, в которых HK, диаметр затмеваемого [тела], — первое число, полученное нами из зиджа. Нам необходимо перевести его в меры, в которых вся площадь затмевающего тела — двенадцать [неких мер]. Поскольку часть одного круга относится к подобной ему части другого круга, как весь первый круг ко всему второму кругу, а круги относятся друг к другу как квадраты их диаметров, то площадь затмеваемого сегмента в мерах, в которых она была получена у нас, относится к его же площади в мерах, в которых площадь [всего] затмевающего тела — двенадцать [неких мер], как квадрат диаметра затмеваемого [тела в величинах], полученных нами из зиджа, к ста сорока четырем. Отсюда площадь затмеваемого тела известна в соответствии с тем, что нам требовалось[293].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДУГИ ПОПЯТНОГО ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТЫ ИЗ МОЕЙ КНИГИ «ОПРОВЕРЖЕНИЕ ЛЖИ ПУТЕМ ПРИВЕДЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ К ДЕЙСТВИЯМ АЛ-ХОРЕЗМИ В ЕГО ЗИДЖЕ»[294]

Пусть будет SOD (рис. 54) эпициклом светила с центром B, || 128
а A — центром мира. Половина OD, то есть FD, относится к AD, как долготный путь движения [светила] к аномальному пути [его движения], то есть как путь движения центра эпицикла по окружности деферента к пути движения тела светила по окружности эпицикла. D — место остановки светила, а KD — половина дуги попятного движения.

Птолемей, после того, как определил AD и DF[295] в шестидесятых долях AB, следовал при определении угла DBK своему методу, который [он применял] во всех действиях в книге «Альмагест».

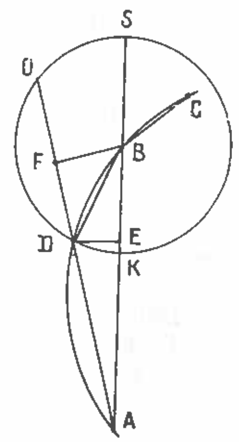

Рис. 54.

Мы же опишем вокруг треугольника ADB круг и отделим в нем [дугу] DC, равную AD. Соединим B с C и опустим перпендикуляр DE. Поскольку ABC — ломаная [линия] в дуге ADC, квадрат AD, который известен[296], равен квадрату BD, то есть половины диаметра эпицикла, и произведению AB, то есть шестидесяти, на неизвестную [линию] BC. И если мы вычтем квадрат BD из квадрата AD, в остатке останется произведение AB на BC. Разделим его на AB, и в частном будет BC. Половина ее суммы с AB — это AE. EB — известна, DE — [также] известна, но в частях AB. DE в этих мерах относится к DB в этих же мерах, как DE в мерах, в которых DB — полный синус, к DB — полному синусу. Если мы переведем DE [в последние меры] и определим дугу [синуса DE], получится искомая [дуга] DK. А это — то, что мы хотели[297].

ЗАДАЧА, В КОТОРОЙ НУЖДАЮТСЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЙ [СОДЕРЖАЩАЯСЯ] В МОЕЙ СТАТЬЕ «ОБ УКАЗАНИИ НЕБЕСНЫХ ЯВЛЕНИЙ НА ЗЕМНЫЕ СОБЫТИЯ»[298]

Треугольники GAB (см. рис. 55. В T (рис. 57) пропущена линия DA) и BDG — с прямыми углами A и D; оба они — на [одном] основании GB. Из точки пересечения GD и AB был опущен перпендикуляр

FH на *GB*. Как узнать *FH* по известным сторонам этих двух треугольников?

Соединим *A* с *D*; [*AD*] будет известна, поскольку четырехугольник *ADBG* — из тех, которые вписываются в круг, так как [линия] *BG* стягивает оба прямых угла этих двух треугольников, и, следовательно,
129 она — диаметр круга, описанного вокруг каждого из них. ‖ Произве-

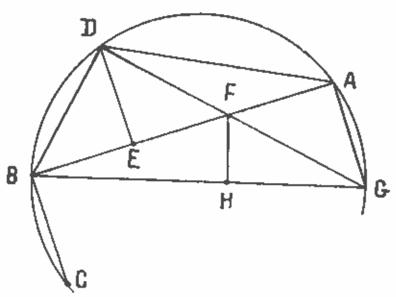

Рис. 55.

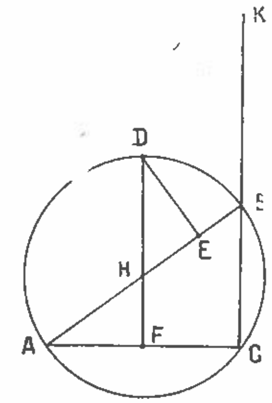

Рис. 56.

дение известной *AB* на известную *DG* равно сумме произведения известной *AG* на известную *DB* и произведения известной *BG* на неизвестную *AD*, [которая отсюда становится известной].

Затем опишем вокруг треугольника *ADB* круг, который окружит его. Отложим дугу *DBC*, равную дуге *AD*. Опустим перпендикуляр *DE* на *AB*; тогда линия *ABC* будет ломаной в дуге *ABC*, на середину которой опущен перпендикуляр *DE*. *AD* в квадрате равна квадрату *BD* вместе с произведением *AB* на неизвестную *BC*[299]. Следовательно, [*BC*]
130 известна, а потому *AE* и *EB*[300] [также] известны. ‖

Поскольку угол *BDF* прямой, а *DE* — перпендикуляр к *BF*, то произведение *BE* на *EF* равно квадрату *DE*. Поэтому, если мы разделим квадрат *DE* на *EB*, в частном получится *EF*. Отсюда вся [линия] *BF* становится известной. Известная *FB* относится к искомой *FH*, как известная *GB* к известной *GA*. Поэтому *FH* известна, а это и есть то, что мы хотели[301].

ЗАДАЧА О ПАЛЬМЕ[302], УПОМИНАЮЩАЯСЯ В «КНИГЕ[303] АЛГЕБРЫ И АЛ-МУКАБАЛЫ»[304]

Если имеется деревянная палка известной длины, установленная на земле перпендикулярно к ее поверхности, которая сломалась и перегнулась так, что [верхний конец ее] достиг земли, а расстояние от места [этого] конца ее на земле до ее основания известно, и мы хотим узнать место ее перелома[305], умножим половину расстояния от места вершины ее на земле до ее основания на себя же и разделим произведение на половину длины палки. Если вычесть полученное частное из половины[306] длины палки, останется оставшаяся ее часть, стоящая перпендикулярно на поверхности земли, а если прибавить его к половине длины палки, получится величина сломанной и наклоненной к земле [ее части].

Пусть будет *KC* палкой, стоящей перпендикулярно к *AC* — поверхности земли (рис. 56). Когда она сломалась в [точке] *B* и наклонилась, причем одна из ее двух частей не отделилась от другой, вершина ее достигла земли в [точке] *A*. *AC* — известна, и мы хотим узнать величину *BC*.

Опишем вокруг треугольника *ABC* с прямым углом *C* окружность. Опустим перпендикуляр *DE* на *AB* из середины дуги *ABC* и перпендикуляр *DF* на *AC*. Поскольку [последний] опущен из середины дуги [*ABC*], он необходимо разделит пополам хорду *AC* и будет отрезком диаметра данного круга, [другим] диаметром которого является *AB*. Тогда центром обязательно будет точка *H*.

Треугольники *DEH* и *AFH* — противолежащие [с равными вертикальными углами и] с прямыми углами *E* и *F*. Поэтому они подобны. *DH* равна *HA* и, следовательно, *DE* равна *AF*. *AE*, половина длины палки, относится к *ED*, равной *AF*[307], как *DE* к искомой *EB*. Следовательно, она, [т. е. *EB*], известна. Если мы прибавим ее к *AE*, получится в сумме *AB*, сломанная часть палки. ‖ Если же мы вычтем [*BE*] из *AE*, 131
то есть из суммы *BC* и *BE*, останется *BC*, оставшаяся [часть палки], стоящая перпендикулярно к земле[308].

ЗАДАЧА[309] О ДВУХ ПТИЦАХ И РЫБЕ, ВСТРЕЧАЮЩАЯСЯ В «КНИГЕ АЛГЕБРЫ И АЛ-МУКАБАЛЫ»[310]

Две пальмы *BG* и *AH*[311] с известными высотами [растут] на двух берегах реки, ширина которой *AB* (рис. 57). ‖ На поверхности воды 132
в ней появилась рыба; на нее бросились с вершин двух пальм две птицы и схватили ее вместе в одно время. Мы хотим узнать расстояние от места появления рыбы до обоих берегов реки, и сколько пролетели обе птицы.

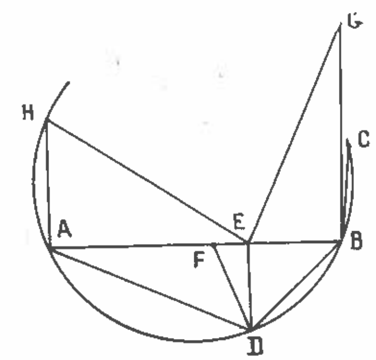

Рис. 57.

Умножим каждую из высот двух пальм на себя. Разделим разность между обоими произведениями на ширину реки. Частное прибавим к делителю. Возьмем половину полученной суммы, и это будет расстоянием от места появления рыбы до корня более короткой пальмы. Если же мы [частное] вычтем из ширины реки и возьмем половину[312] [разности], получится расстояние этого [места] от корня, высокой пальмы[313]. Если мы умножим длину пальмы на себя, умножим расстояние между корнем этой [пальмы] и местом рыбы на себя и извлечем корень из суммы двух произведений, это будет [расстоянием], которое пролетела каждая из двух птиц.

Пусть будет более высокая из двух пальм *GB*, более короткая из них *AH*, а место появления рыбы на [поверхности] воды *E*. Соединим *G* с *E* и *H* с *E*. *GE* и *HE* будут равными, ибо они — расстояния, которые покрыли обе птицы за одно и то же время. Поэтому сумма квадратов *GB* и *BE* равна сумме квадратов *HA* и *AE*, а превышение квадрата *BG* над квадратом *AH* равно превышению квадрата *AE* над квадратом *BE*. Затем построим треугольник *ABD*, в котором возьмем *AD* равной *BG*, а *BD* — равной *AH*. Соединим *D* с *E*. ‖ Я утверждаю, что *DE* перпен- 133
дикулярна к *AB* и невозможен иной перпендикуляр [к *AB* из *D*] кроме

этой [линии]. Если же возможен [другой перпендикуляр], то тогда [DE] никак не будет перпендикуляром к AB.

Опустим [другой преполагаемый] перпендикуляр. Пусть он будет DF. Тогда разность квадратов BD и DA была бы равна разности квадратов BF и FA. Но разность квадратов BD и DA, то есть [квадратов] AH и BG, равна разности квадратов AE и BE. [Получается, что] каждая из [линий] DFи DE — перпендикуляр к AB, а в треугольнике DFE два кроме третьего угла — прямые. Это — абсурд. Следовательно, DE, а не DF — перпендикуляр к AB.

Затем опишем вокруг треугольника ABD окружность, которая окружит его, и отложим дугу DBC, равную дуге AD. Тогда квадрат AD будет превосходить квадрат BD на произведение AB на BC. И если мы разделим разность квадратов AD и BD, то есть квадратов BG и AH, на AB, в частном получится BC. AE, расстояние места рыбы от пальмы AH,— половина суммы [AB и BC], а EB, расстояние этого [места] до пальмы BG — половина их разности.

В предшествовавших задачах можно найти более легкие пути к достижению искомого, чем те, которые оказались в данное время. Однако цель [наша] — направить их на одну проблему, а именно —
134 выявить ‖ свойства данного предложения, относящегося к сему искусству, и [дать] руководство, как пользоваться ими[115].

УПОМИНАНИЕ О ХОРДАХ КРУГА

Совершенно очевидно, что познание хорд дуг окружности является для астрономии тем же, что для вещества такая стадия состояния, когда оно переходит от потенции к действию. Свойства же данного [Архимедова] предложения [таковы, что]в большинстве своем они могут быть приравнены к движению духа в теле.

Отметив это, скажем, что обязательно одна из хорд круга должна быть известной для того, чтобы получить остальные [хорды] через нее и определить их величины по соотношению с ней.

Ясно, что хорды — различны, благодаря различию их дуг[316]. Одна из них — меньше других, наподобие дробей, которые существуют таким же образом: они двигаются в сторону уменьшения, не останавливаясь у какого-нибудь ограниченного предела. Ведь то, что неограничено, никогда не может быть остановлено на каком-то своем [пределе], если не будет причины, обуславливающей эту остановку.

Однако, если мы рассмотрим другую сторону [изменения величин хорд], а именно — увеличение, мы найдем ее ограниченной диаметром, который является наибольшей из хорд. Он относительно них — то же, что единица относительно дробей. Следовательно, он и должен быть известен — либо по соизмерению с окружностью, а тогда он будет семью двадцать вторыми окружности, либо [сам по себе], по условному определению. [Последнее предпочтительнее]; ведь мы нуждаемся в соотнесении хорд с диаметрами, а не с окружностями.

Уже было доказано, что хорда одной шестой [окружности] равна половине диаметра. Это — первая хорда, которую мы узнали в круге, и она [пока для нас единственная] «говорящая»[317] среди других [хорд][318].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ[319] ОДНОЙ ДЕСЯТОЙ [ОКРУЖНОСТИ] В КРУГЕ

Пусть будет DB хордой одной десятой [окружности] в круге DBG (рис. 58). Я утверждаю, что она известна.

Доказательство этого: проведем диаметр DAG. Пусть центр — A.
Соединим A с B. Опишем вокруг ‖ треугольника ADB круг. Отложим 135
на нем дугу DBC, равную дуге AD. Соединим B с C. Так как угол DAB при центре A опирается на одну десятую окружности круга BDG, то в круге ADB он опирается на вдвое большую [дугу], то есть на одну пятую этого [малого] круга. Линия AD равна линии AB. Каждая из дуг AD и AB [равна] двум пятым окружности [ADB]. Ясно, что DB [в круге ADB] — одна пятая окружности, и, следовательно, дуги DB и BC — равные. Линия ABC — ломаная в этом круге. Поэтому квадрат AD равен квадрату DB вместе с произведением AD на DB, то есть с произведением AB на BC.

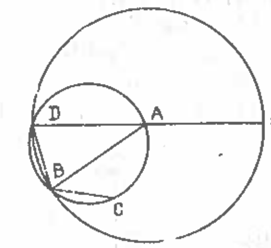

Рис. 58.

Линия ADB — как одна прямая [линия], разделенная в точке D в среднем и крайнем отношениях. Бо́льшая ее часть, полудиаметр AD,— известна. Значит и меньшая часть — известна, а это — DB, хорда одной десятой [окружности DBG][320].

Вычисление этого: к произведению полудиаметра на себя прибавляется четверть этого [произведения]; из корня суммы вычитается четверть диаметра, и в остатке остается хорда одной десятой [окружности]. Это — соответственно[321] одиннадцатому предложению второй книги «Начал»[322].

[Таким образом], получена вторая хорда[323]. Что касается других хорд, то из этой определяется хорда дополнения ее дуги до полукруга. ‖

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ ДОПОЛНЕНИЯ ВСЯКОЙ ДУГИ С ИЗВЕСТНОЙ ХОРДОЙ ДО ПОЛУКРУГА 137

Пусть будет известной хорда BC, а диаметром круга — AB (рис. 59). Разделим дугу ABC пополам в [точке] D. Опустим перпендикуляр DE на AB и перпендикуляр DF на AC. Как говорилось раньше в задаче о пальме[324], мы разделили пополам хорду AC перпендикуляром DHF, а H будет центром круга. Подобные треугольники EDH и FAH равны друг другу. Следовательно, ED и AF — равные. AE, полусумма хорды и диаметра, относится к ED, равной FA, как ED к EB, являющейся избытком полусуммы хорды и диаметра над диаметром. И AF, половина искомой [хорды],— известна. ‖

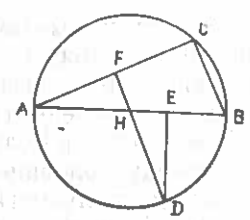

Рис. 59.

Вычисление этого: полусумма хорды и диамет- 138
ра умножается на избыток диаметра над этой полусуммой. Корень из произведения удваивается, и это будет хордой дополнения дуги с известной хордой до половины окружности. Это вычисление — легче, чем извлечь корень из разности квадратов AB и BC, поскольку здесь отпадает [необходимость] одного из двух возведений в квадрат[325].

Таким образом, по первым двум хордам[326] [могут быть] получены другие две хорды. ‖

139 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ ЛЮБОЙ УДВОЕННОЙ ДУГИ С ИЗВЕСТНОЙ ХОРДОЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ ПОЛОВИНЫ ДУГИ С ИЗВЕСТНОЙ ХОРДОЙ, ХОТЯ ЗДЕСЬ ПРАКТИЧЕСКИ НЕ ПРОЯВЛЯЕТСЯ ВЛИЯНИЕ ДАННЫХ СВОЙСТВ [ЛОМАНОЙ ЛИНИИ В КРУГЕ]

Пусть AB будет известной хордой в круге с известным диаметром. (см. рис. 60. В T (рис. 63) пропущено обозначение точки G). Дуга BC равна дуге AB. Соединим A с C, и это, [то есть AC], и есть искомое. Опустим из центра перпендикуляр EH на AB. Тогда углы BAG и BEH будут равны при том, что углы H и G — прямые. Поэтому треугольники ABG и BEH — подобные. AB относится к AG, как BE к EH. Отсюда AG известна, а удвоенная ее [величина] — это хорда AC.

Вычисление этого: умножим известную хорду на корень из четверти разности ее

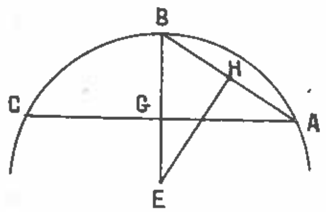

Рис. 60.

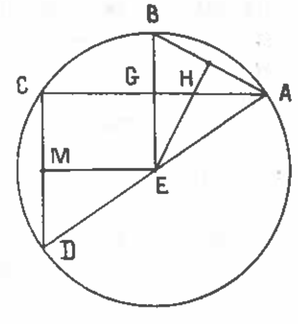

Рис. 60а.

квадрата и квадрата диаметра. Разделим произведение на полудиаметр и удвоим частное, полученное от этого деления. Получится хорда удвоенной [дуги][327].

Л125б ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОВИНЫ ВСЯКОЙ ДУГИ С ИЗВЕСТНОЙ ХОРДОЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩЕЕ МНЕ[328]||

[Если дана] любая дуга с известной хордой в круге с известным диаметром, то хорда половины ее известна.

Пример этому: хорда AC известна (рис. 60a)[329]. Дуга AB равна дуге BC. Я утверждаю, что хорда [дуги] AB известна. Это [доказывается так:] проведем полудиаметр BGE и соединим A с E. Поскольку квадрат искомой [линии] A меньше, чем [сумма] квадратов известных AE и EB на [величину] удвоенного произведения известной BE на EG, [равную] половине хорды [CD] дополнения [дуги] AC до полуокружности, то AB будет известной.

Вычисление этого: умножим известную хорду на себя и вычтем произведение из произведения диаметра, [умноженного] на себя. Извлечем корень из четверти остатка, умножим его на диаметр[330], вычтем произведение из половины квадрата диаметра, извлечем корень из
140 остатка, и он будет хордой половины дуги с известной хордой. || Если известная хорда — AC, а мы хотим [определить] AB — хорду половины ее дуги, то GE — половина хорды дополнения дуги ABC до полукруга (рис. 60), а BG будет остатком полудиаметра[331]. Квадрат [гипотенузы] AB равен сумме квадратов AG и BG[332]. Отсюда AB известна.

Вычисление этого: известная хорда умножается на себя; полученное произведение вычитается из произведения диаметра, [умноженного] на себя; корень из остатка вычитается из диаметра; половина того, что останется [при последнем вычитании], умножается на равное этому; [последнее] произведение прибавляется к произведению половины известной хорды на себя; из этой суммы извлекается корень, который и будет хордой искомой половины [дуги][333].

[Итак,] стали известными хорда одной шестой и одной трети [окружности], а пути деления пополам [стали известными] из [хорды] одной шестой окружности хорды половины и четверти одной шестой [окружности, то есть хорды 1/12 и 1/24 окружности]. Стали [также] известными хорды одной десятой и хорды четырех десятых окружностей, а [также] хорда одной пятой — либо путем удвоения [дуги хорды одной десятой], либо путем деления пополам [дуги хорды четырех десятых окружности]. Из хорды одной десятой [окружности стали известными] хорда половины и четверти одной десятой[334] [окружности, то есть хорды 1/20 и 1/40 окружности].

Из [хорды] половины круга [определяется] хорда четверти [круга], поскольку она в квадрате равна половине квадрата диаметра. Хорда одной восьмой [окружности] определяется либо путем деления пополам [дуги одной четвертой окружности], либо путем, подобным предшествующему при [определении] хорды одной десятой [окружности][335].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ ОДНОЙ ВОСЬМОЙ [ОКРУЖНОСТИ]

Пусть будет BD одной восьмой окружности круга DBG с известным диаметром (рис. 61). Соединим B с D, и тогда [BD] будет хордой одной восьмой [окружности]. Я утверждаю, что она известна.

Доказательство этого. Проведем диаметр DAG, и пусть будет центром A. Соединим A с B. Опустим перпендикуляр DE на AB. Опишем вокруг треугольника ADB круг и отложим на нем дугу DBC, равную дуге AD[336]. Соединим B с C. Поскольку DE является половиной хорды удвоенной одной восьмой [окружности],
то она, следовательно,— половина || хорды четверти [окружности]. Угол DAB 141
[равен] одной восьмой четырех прямых углов. Значит он — половина прямого. Угол AED — прямой, и потому оставшийся угол ADE — половина прямого. Следовательно, линии AE и ED — равные, и каждая из них — половина хорды четверти [окружности].

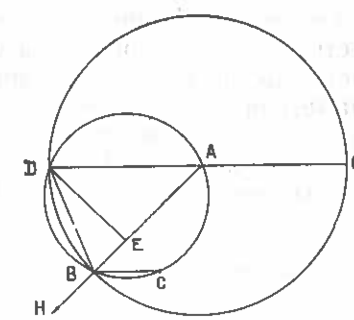

Рис. 61.

Продолжим AB в ее направлении, пока EH не станет равной AE. Известно, что BH и BC равны, так как перпендикуляр DE делит пополам и ломаную ABC, и прямую ABH. Квадрат AD равен квадрату искомой DB вместе с произведением известной AB на BC, т. е. на BH. Следовательно, DB известна.

Вычисление этого: вычитаем половину диаметра из хорды[337] четверти круга. Остаток умножаем на половину диаметра. Данное произведение вычитаем из произведения половины диаметра на себя. Извлекаем корень из остатка, и получится хорда одной восьмой [круга][338].

Что касается половины хорды одной восьмой [круга] и, если потребуется, [последующих] дробей, [получаемых делением на два], то это [находится] путем деления на два. ||

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ СУММЫ ДВУХ ДУГ С ИЗВЕСТНЫМИ ХОРДАМИ[339] 142

Если каждая из двух дуг — с известной хордой, то хорда их суммы будет известна. Пусть [этими дугами] будут AB и BC (см. рис. 62. В T чертеж (рис. 65) неточен).

Опустим перпендикуляр DE из середины дуги ABC на AB. Проведем DG параллельно AB[340]. Проведем из центра круга H перпендикуляр HFK к GD. Понятно, что разность дуг AB и BC, т. е. [разность дуг AB и] DG, есть сумма дуг BD и GA. Поскольку HK, половина хорды дополнения GD или BC [до полукруга], известна, а HF есть половина хорды дополнения [известной дуги AB], их разность, а это — KF, — [тоже] известна. DE равна KF. AD в квадрате равна квадрату [DE], т. е. разности между [HK и KF] вместе с квадратом AE, являю-

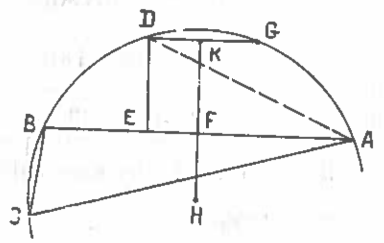

Рис. 62.

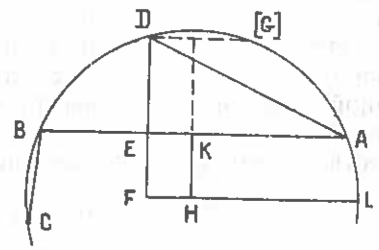

Рис. 63.

щейся полусуммой двух данных хорд [AB и BC]. И если AD станет известной, то и AC, хорда удвоенной ее дуги, станет известной. ‖

143 Вычисление этого: произведение каждой из двух хорд на себя вычтем [по отдельности] из произведения диаметра на себя. Извлечем корень из четверти каждого из двух остатков. Умножим разность этих двух корней на себя. К этому [произведению] прибавим произведение полусуммы хорд[341] на себя. Разделим [полученное] на
144 диаметр и вычтем частное из половины диаметра. Остаток удвоим ‖ и умножим это удвоенное на себя. [Полученное] вычтем из произведения диаметра на себя. Извлечем корень из остатка; он и будет хордой суммы двух дуг[342].

МОЕ[343] ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ ПОЛОВИНЫ СУММЫ ДВУХ ДУГ С ИЗВЕСТНЫМИ ХОРДАМИ

Если известна хорда их суммы, можно предшествующим [методом] деления пополам определить хорду половины их суммы. Мы можем пояснить это. Пусть AB и BC будут двумя [известными хордами]. (см. рис. 63. В $П$ он не верен; в T (рис. 66) правилен). Проведем из центра H перпендикуляры HK и HF к AB и DEF. Поскольку HK — половина хорды дополнения [дуги] AB до полуокружности[344], а FE равна [HK], то AE — половина суммы хорд. KE равна половине BC, так как она равна половине хорды, проведенной из точки D параллельно AB. Продолжим HFL в ее направлении. Ясно, что произведение LF на остаток, [полученный при вычитании LF] из диаметра, равен квадрату FD. Если вычесть FE из FD, оставшаяся ED будет известной. AE известна, поэтому и AD известна.

Вычисление этого: прибавим[345] половину меньшей из двух хорд к половине диаметра, а также вычтем ее[346] из нее. Результат прибавления умножим на результат вычитания[347]. Запомним[348] корень из этого произведения. Вычтем произведение большей из двух хорд на себя из произведения диаметра на себя. Извлечем корень из четверти остатка и вычтем его из запомненного. Затем остаток умножим на себя

и прибавим это к произведению[349] половины суммы двух хорд на себя. Извлечем корень из суммы. Это и будет хорда половины суммы двух дуг с известными хордами[350]. ‖

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ РАЗНОСТИ ДВУХ ДУГ С ИЗВЕСТНЫМИ ХОРДАМИ 145

Пусть эти [хорды] будут AB и BC. (См. рис. 64. В $П$ он опущен). Проведем[351] DG из середины дуги ABC параллельно AB и из центра H — перпендикуляр [к DG] HFK. Сумма [дуг] DB и GA будет разностью дуг BC, т. е. DG и AB. Раньше уже было, что KF становится известной. EB — избыток большей хорды[352] над половиной ее суммы с меньшей [хордой]. DB, которая в квадрате равна сумме квадратов

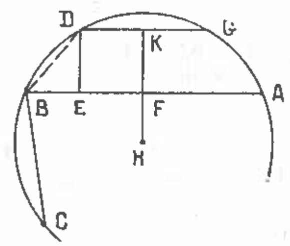

Рис. 64.

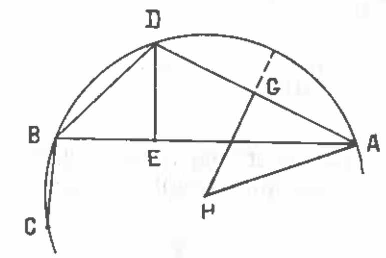

Рис. 65.

[EB и KF, т. е. EB и DE] — известна. Следовательно, хорда удвоенной [дуги DB, т. е. хорда суммы дуг DB и GA, являющаяся искомой хордой разности дуг AB и BC], — известна. ‖

Вычисление этого: сделаем точно то же, что раньше при [определении] хорды суммы [дуг], пока не получится разность двух корней. Умножим ее на себя. Произведение прибавим к произведению избытка большей из хорд над полусуммой хорд, [умноженного] на себя. Разделим сумму на диаметр, а частное вычтем из [половины][353] диаметра. Затем умножим остаток на себя[354] и вычтем это из произведения диаметра на себя. Извлечем корень из остатка, и это будет хорда разности [двух дуг][355]. 146

У хорды суммы двух дуг и у хорды их разности есть [соучаствующая в их определении] общая по названию [хорда], а именно — DB, которая является хордой разности дуг AD и AB[356], и она же, т. е. DB, является хордой разности дуг AD и CB. Поэтому обе эти [хорды, т. е. хорды суммы или разности] помогают друг другу в получении [искомого]. ‖

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ СУММЫ ДВУХ ДУГ С ИЗВЕСТНЫМИ ХОРДАМИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ ИХ РАЗНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕХОДА[357] МОИМ СПОСОБОМ[358] 147

Пусть будут двумя [хордами] AD и DB. (см. рис. 65. В $П$ (рис. 63) пропущена линия BD). Предположим, что дуга AD равна [дуге] DC. Понятно, что хорда суммы [дуг] — AB, а хорда разности — BC.

Проведем из центра H перпендикуляр HG на AD и соединим A с H. Поскольку угол AHG опирается на половину дуги, на которую опирается угол DBA, эти два [угла] равны друг другу. Треугольники AGH и DEB — подобные. Поэтому AH, половина диаметра, относится к HG, половине хорды дополнения дуги AD до полукруга, как DB к

BE. Отсюда BE известна. BD в квадрате равна сумме квадратов BE и ED. Поэтому ED также известна. AD в квадрате равна сумме квадратов AE и ED. Отсюда AE известна. И если мы сложим AE и EB, получится хорда суммы [дуг], а если вычтем EB из AE, получится в остатке хорда разности [дуг]. ||

148 Вычисление этого: умножим меньшую хорду на половину хорды дополнения дуги большей хорды до полукруга. Разделим произведение на половину диаметра, получится запоминаемое, а именно — BE. Умножим это запоминаемое на себя и меньшую хорду — на себя. Разность двух [полученных] произведений вычтем из произведения большей хорды, [умноженной] на себя. Извлечем из остатка корень. И если мы прибавим запоминаемое к этому корню, получится хорда суммы [двух дуг]. Если же мы вычтем его, останется в остатке хорда разности [двух дуг][359]. ||

Л127б
МОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ СУММЫ И ХОРДЫ РАЗНОСТИ [ДВУХ ДУГ С ИЗВЕСТНЫМИ ХОРДАМИ] В «ОБОСНОВАНИЯХ К ЗИДЖУ ХАБАША»

[Если даны] любые две дуги с известными хордами в круге с из-
Л128а вестным диаметром, то как хорда суммы этих [дуг], так и хорда || их разностн известны.

Пример этому: дуги AD и BD — с известными хордами в круге с известным диаметром (рис. 65). Соединим A с B; [AB] будет хордой суммы этих двух [дуг]. Отложим дугу DC, равную дуге AD, и соединим B с C. [BC] будет хордой разности дуг AD и DB. Я утверждаю, что и AB, и BC известны.

Доказательство этого: проведем из центра H перпендикуляр GH к AD и из D — перпендикуляр DE к AB. Соединим A с H. Поскольку [центральный] угол AHG [опирается] на половину дуги [AD], на которую [опирается] угол DBE, оба они равны. Поэтому прямоугольные треугольники AGH и DBE — подобные. AG относится к AH, как DE к DB. Отсюда DE известна. DB равна в квадрате квадратам DE и EB. Следовательно, EB известна. AD равна в квадрате квадратам DE и EA. Следовательно, EA известна. [Значит], AB, равная сумме AE и EB, известна.

DE делит пополам ломаную линию ABC. Следовательно, разность между AE и BE, а это — BC, известна.

Вычисление этого: умножим меньшую хорду на половину большей хорды и разделим произведение на половину диаметра. Получится перпендикуляр [DE]. Вычтем произведение этого перпендикуляра на себя, по отдельности, из произведения каждой из двух [известных] хорд на себя. Извлечем корни из обоих остатков. Если же сложить, получится хорда суммы двух дуг, а если взять их разность, она будет равна хорде их разности[361].

149
ИНОЙ СПОСОБ, ПРИНАДЛЕЖАЩИЙ НЕ МНЕ[362]

Близок к этому [метод], на основании которого действовал Абу Наср Мансур ибн ‘Али ибн ‘Ирак в его книге, озаглавленной «Шахский Альмагест»[363]. Он заключается в том, что [Ибн ‘Ирак] продолжал CB в ее направлении и опускал на нее перпендикуляр DG. (См. рис. 66. Чертеж в *П* не полный; нет линий DS и SA). DB известна[364]. DB относится к BG, как диаметр к хорде дополнения AD до полукру-
150 га, так как угол DBG — по величине дуги AD, || а угол DGB — прямой.

Поэтому, если провести диаметр круга из D и соединить A с его концом, выявится подобие этого треугольника [DAS] треугольнику DGB. Отсюда отношение диаметра к BG становится известным. Отношение квадрата CD к квадрату BD известно. Следовательно, отношение [квадрата CD] к [его] превышению [над квадратом BD тоже] известно. Но превышение квадрата CD над квадратом BD есть превышение квадрата CG над квадратом BG[365]. Таким образом, отношение квадрата CD[366] и к квадрату CG[367], и к квадрату BG известно. Отношение диаметра к BD известно. Следовательно, оставшаяся BC[368] известна. ||

Затем он соединил A с B и опустил на AB перпендикуляр DE.
Так как AD относится к AE, как диаметр к хорде дополнения BD [до 151
полукруга][369], отношение AD к AE известно. BD относится к EB, как диаметр к хорде дополнения AD [т. е. к AS]; [поэтому] отношение BD к EB известно. Таким образом, отношение диаметра и к AE, и к BE известно, а следовательно, известно и отношение его к их

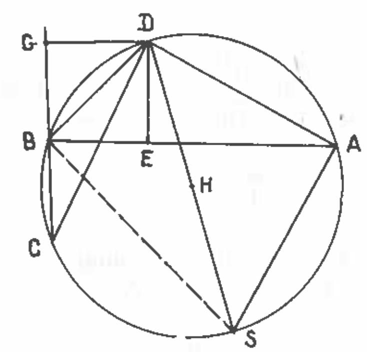

Рис. 66.

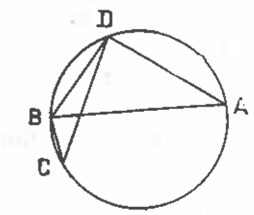

Рис. 67.

сумме. Раньше же разъяснялось, что разность AE и BA равна BC, [которая определена выше].

Вычисление хорды разности [дуг] из этого [действия]: умножим меньшую хорду на хорду дополнения до полукруга дуги большей [хорды]. Разделим произведение на диаметр и получим в частном первое запоминаемое. Умножим его на подобное себе и прибавим произведение к разности произведений каждой из хорд, [умноженной] на себя. Извлечем из суммы корень, вычтем из него первое запоминаемое, и останется хорда разности [дуг].

Вычисление хорды суммы [дуг] из этого [действия]: умножим бо́льшую хорду на хорду дополнения до полукруга [дуги] меньшей хорды. Разделим произведение на диаметр и получим в частном второе запоминаемое. Если мы сложим первое и второе запоминаемое, сумма будет хордой суммы двух дуг. Если же мы вычтем меньшее из них из большего, останется хорда разности этих двух [дуг][370]. ||

ЕМУ ЖЕ ПРИНАДЛЕЖИТ ДРУГОЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОЙ ИЗ ЭТИХ ДВУХ [ЗАДАЧ] ИЗ ДРУГОЙ, КОТОРЫЙ ОН ПРИВЕЛ [В ТОЙ ЖЕ] УПОМЯНУТОЙ КНИГЕ[371] 152

Если известна BC (рис. 67) — хорда разности [дуг], а желательно [определить] AB — хорду [их] суммы, то квадрат известной AD равен произведению искомой AB на известную BC вместе с квадратом известной DB. Поэтому если мы вычтем квадрат DB из квадрата AD, останется произведение AB на BC. Но BC — известна; следовательно, и AB известна.

Вычисление этого: умножим каждую из двух хорд на себя. Разность этих двух произведений разделим на хорду разности двух дуг. Получится хорда [их] суммы.

Если же известна AB — хорда суммы [дуг], а желательно [определить] BC, хорду [их] разности, то квадрат AD равен квадрату DB вместе с произведением AB на неизвестную BC.

Вычисление этого: разделим разность квадратов двух хорд на хорду суммы [дуг], и получится в частном хорда [их] разности[372]. ||

153 ДРУГОЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭТОГО, ПРИНАДЛЕЖАЩИЙ МНЕ

Я говорил в некоторых трактатах, в которых я нуждался при решении этих проблем: опустим перпендикуляр DE (рис. 68) на AB, если AB, хорда суммы [дуг], известна, а мы хотим [определить] BC, хорду [их] разности. Поскольку квадрат AD меньше [суммы] квадратов DB и BA[373] на удвоенное произведение AB на BE, то, если половину разности между [суммой] квадратов AB и BD и между квадратом AD разделить на AB, в частном получится BE[374] — половина разности между хордой суммы и хордой разности [двух дуг]. ||

154 Вычисление этого: умножим каждую из двух хорд на себя, вычтем меньшее из произведений из большего и разделим половину остатка на хорду суммы [двух дуг]. Удвоенное частное вычтем из хорды суммы [двух дуг], и останется хорда [их] разности.

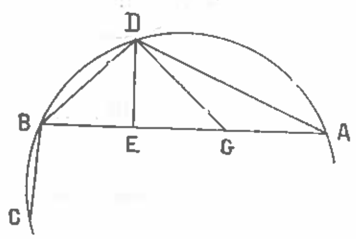

Рис. 68.

Если же известна BC — хорда разности двух дуг, а желательно определить AB — хорду суммы двух дуг, то мы отложим EG, равную EB, и соединим D с G. Тогда DG и DB будут равными друг другу. Квадрат AD превосходит [сумму] квадратов DG и GA[375] на [величину] произведения AG на GB, то есть на удвоенное произведение AG на GE. Но AG равна BC, и поэтому GB известна.

Вычисление этого: умножим [по отдельности] меньшую хорду и хорду разности [двух дуг] на себя. Сложим оба [произведения]. Вычтем сумму из произведения большей хорды на равное себе. Остаток разделим на хорду разности [двух дуг], прибавим полученное частное к хорде разности [двух дуг], и получится хорда [их] суммы[376]. ||

155 МОЕ[377] ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ ДОПОЛНЕНИЯ ДУГИ С ИЗВЕСТНОЙ ХОРДОЙ ДО ПОЛУКРУГА, КОГДА СУММА ДИАМЕТРА КРУГА И ХОРДЫ ЭТОГО ДОПОЛНЕНИЯ ИЗВЕСТНА, А КАЖДОЕ ИЗ НИХ ПО ОТДЕЛЬНОСТИ НЕИЗВЕСТНО

Это восходит к предшествующей задаче о пальме. Пусть будет AC [дугой с] известной хордой (рис. 69). Сумма CB, хорды ее дополнения до полукруга и диаметра BA — известны, а каждая из [линий] AB и BC по-отдельности не известны. Разделим дугу ABC пополам в D. Опустим перпендикуляр DE на AB и перпендикуляр DHF на AC. Из предшествовавшего ясно, что точка H — центр круга, *и что AF равна DE[378].

AE, полусумма диаметра AB и хорды BC, относится к DE, равной
156 половине AC, как DE к EB. || [Отсюда EB известна, и если прибавить

ее] к AE, получится диаметр, а если вычесть ее из нее, получится [искомая] хорда [BC].

Вычисление этого: умножим половину известной хорды на себя. Произведение разделим на половину суммы диаметра и хорды дополнения] дуги с известной хордой. Если частное мы прибавим к этой половине [суммы, т. е. к] делителю, получится диаметр. Если же мы вычтем [частное] из него, [т. е. из делителя], получится хорда дополнения дуги с известной хордой[379]. ||

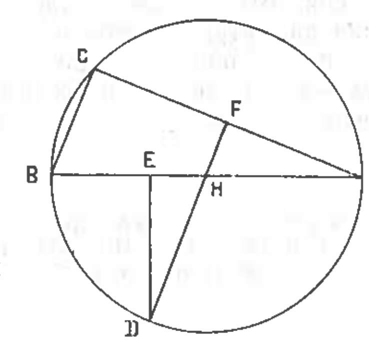

Рис. 69.

Уже было доказано, что если в круге 157
с неизвестным диаметром[380] известны две хорды и известна сумма хорд дополнений их дуг [до полукруга], и если разделить разность квадратов этих двух известных хорд на сумму хорд дополнений их дуг до полукруга, а затем прибавить частное к этой сумме и взять половину [последней суммы], то получится хорда дополнения [до полукруга] дуги меньшей из двух известных хорд. Если же частное от этого деления вычесть из этой суммы и взять половину остатка получится хорда дополнения [до полукруга] дуги большей из тех двух хорд.

Диаметр в квадрате равен сумме квадратов хорды любой дуги и хорды ее дополнения [до полукруга]. Поэтому он [будет здесь] известен. Все это аналогично задаче о двух пальмах и птице[381].

МОЕ[382] ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХОРДЫ ДУГИ И ХОРДЫ ЕЕ ДОПОЛНЕНИЯ ДО ПОЛОВИНЫ КРУГА С ИЗВЕСТНЫМ ДИАМЕТРОМ, КОГДА ЭТИ ДВЕ ХОРДЫ В СУММЕ ИЗВЕСТНЫ, А ПО-ОТДЕЛЬНОСТИ НЕИЗВЕСТНЫ

Пусть диаметр AC (рис. 70) известен, и сумма хорд AB и BC известна. Мы хотим узнать каждую из них по-отдельности.

Разделим дугу ABC в D пополам и опустим [перпендикуляр] DE на AB. Поскольку линия ABC — ломаная, разделенная пополам в E и на две различные части в B, сумма квадратов AB и BC равна удвоенному квадрату AE вместе с удвоенным квадратом EB. Но AC в квадрате равна сумме квадратов AB и BC. Если мы вычтем из квадрата AC половину его, остаток будет равен сумме квадратов AE и
EB. || Но квадрат AE известен, так как AE — половина известной 158
[ABC]. И если мы из этого остатка вычтем [AE], останется в остатке квадрат EB.

Следовательно, EB известна. Если мы прибавим ее к AE, то есть к половине суммы AB и BC, получится AB. Если же мы вычтем [EB из AE], останется в остатке BC[383].

ДРУГОЙ ПУТЬ, ПРИНАДЛЕЖАЩИЙ МНЕ[384]

Или же, если мы хотим, отложим EG (см. рис. 70), равную EB. Тогда остающаяся [от AB] AG будет равной BC. Линия BG разделена пополам в E, а к ней добавлена AG. Поэтому сумма квадратов BA и AG равна [сумме] удвоенных квадратов BE и EA. Тогда, если вычесть из квадрата AC, [равного сумме квадратов BA и AG, поскольку AG равна BC], удвоенный квадрат EA[385], EB будет известной. Она — уравнитель, посредством которого уравниваются обе [данные] хорды[386].

Использование половин этих величин облегчает действие, ибо половины так же соотносятся, как удвоенные [величины]. Поэтому вычисление этого таково: умножим половину суммы данных двух хорд на себя. Вычтем полученное в произведении[387] из половины произведения диаметра на себя и возьмем корень из остатка. Если мы хотим получить бо́льшую из двух хорд, прибавим этот корень к полусумме двух хорд. Если же мы хотим получить меньшую из них, вычтем этот корень из их полусуммы, и получится искомое. ||

159

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАЖДОЙ ИЗ ДВУХ ХОРД СМЕЖНЫХ ДВУХ ДУГ, КОГДА ИЗВЕСТНЫ ОТНОШЕНИЕ ОДНОЙ ИЗ НИХ К ДРУГОЙ И ИЗВЕСТНА ХОРДА СУММЫ ЭТИХ ДВУХ [ДУГ][388]

Пусть будет хорда AC известна и известно отношение хорды AB к хорде BC (рис. 71). Мы хотим определить каждую из двух [последних хорд] по отдельности.

Разделим пополам угол ABC линией BFG[389]. Проведем диаметр GKD. Он будет перпендикуляром к AC. Опустим на него, [т. е. на диаметр], перпендикуляр BMH. Каждая из линий AF и FC известна, поскольку они находятся в заданном отношении AB к
160 BC. || [Следовательно], KF известна. KG, остаток [продолжения] стрелы DK, [до-

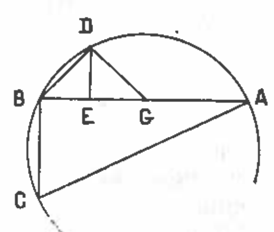

Рис. 70.

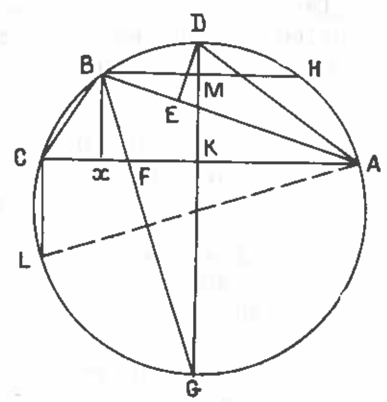

Рис. 71.

полняющей ее] до полудиаметра известен[390]. Следовательно, треугольник FGK известен. Треугольники BGD и BFX подобны ему[391]; следовательно, оба они — с известными сторонами. [Отсюда] каждая из [сторон] AB и BC становится известной, и произведение AC на BC, то есть на CL, известно. Разность между этим [произведением] и квадратом AB есть квадрат BC. Следовательно, каждая из хорд AB и BC известна, а это — то, что мы хотели. ||

161 А также: треугольники FKG и ADE — подобные. AD, хорда половины дуги ABC, известна. Следовательно, треугольник ADE — с известными сторонами. Поэтому AE известна, как известна и удвоенная ее [величина], то есть совокупность [линий] ABC. Части этой [совокупности] AB и BC, находящиеся в известном отношении, известны, а это и есть наша цель.

УПОМИНАНИЕ О ХОРДЕ ОДНОГО ИЗ ТРЕХСОТ ШЕСТИДЕСЯТИ ГРАДУСОВ ОКРУЖНОСТИ[392]

С помощью вышеизложенных основ, [пользуясь] разностью и делением пополам [дуг], можно дойти до [дуги] трех градусов окружности круга, разделенной на триста шестьдесят градусов, и определить ее хорду. Дальнейшее, что за этим — будет дробными [выражениями значений дуг][393].

До сих пор еще абсолютно не известен ни один метод определения [хорды] трети дуги с известной хордой. [Ученые] лишь бродят в [поисках] искомого вокруг истины, и в том, что им удается здесь найти, допускают погрешность || в приближенности [вычислений], [доходя] 162

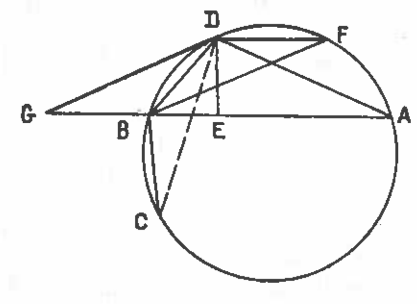

Рис. 72.

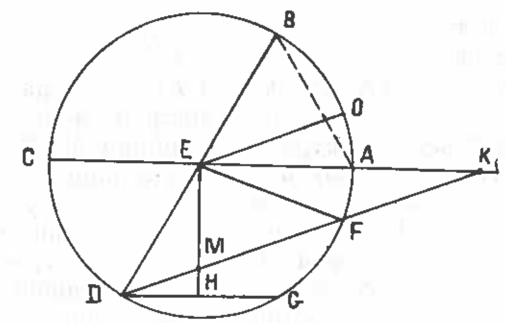

Рис. 73.

до тех долей [шестидесятеричных] долей, которые ими [далее] не используются.

По этой причине остаются с неизвестными хордами дуги, превышающие три градуса, или полтора градуса, или три четверти градуса на избыток[394], равный этому, [т. е. трети любой из этих дуг][395].

Пусть будет ADB дугой с известной хордой (рис. 72), а треть ее, [т. е. дуги], — BD. Построим DC, равную DA. Тогда BC будет равной DB. Построим BG, равную BC, и соединим G с D. Тогда произведение AG на BD, т. е. на BC, будет равным квадрату AD[396]. А также: если F — середина дуги AD, а DB — добавление к дуге AD, то произведение AB на BD вместе с квадратом BD, то есть [вместе с квадратом] FD, равно квадрату AD, то есть [квадрату] FB.

Поэтому, если было бы можно увеличить линию AB таким образом, что если провести из середины полученного целого, [т. е. увеличенной линии AB], перпендикуляр, как перпендикуляр DE, и отделенная [им] хорда, а именно — DB, была бы равной этому увеличению, то эта добавка [к AB] и была бы искомым в том, чем мы занимаемся. ||

Или же, если было бы можно провести прямую линию касательно 163
к этому кругу, встречающую AB в G[397], и опустить перпендикуляр, падающий из точки касания D на середину линии AG[398], то это было бы одним из способов [достижения] искомого. Дело в том, что линия, соединяющая G с D — касательная к кругу по той причине, что угол ABD есть удвоенный угол BAD. Однако углы A и G — равные, поэтому угол ABD, равный [сумме] углов BGD и BDG есть удвоенный угол BDG. Следовательно, угол BDG равен углу G, то есть углу A в сегменте DAB.[399] Но угол BDG [опирается] на хорду этого сегмента и [образован] линией, исходящей из D[400]. Следовательно, линия DG — касательная к кругу и параллельна BF.

Но все это, [то есть решение данной проблемы с помощью циркуля и линейки], невозможно. ||

171 УХИЩРЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРЕТИ ХОРДЫ ДУГИ С ИЗВЕСТНОЙ ХОРДОЙ[401]

Наиболее подобающим для нас [здесь] — идти по следам [наших] предшественников в [поисках] ухищрения для определения хорды трети дуги с известной хордой, дабы восполнить благодаря этому возможность подразделить хорды в таблицах.

Пусть будет AB дугой с известной хордой (рис. 73). Проведем из двух ее концов два диаметра — AG и BD, которые пересекутся в [точке] E, и поэтому она будет центром. Дуги AB и CD будут равными. Продолжим неограниченно [линию] CA в ее направлении в сторону A. Проведем DG параллельно CA и EH перпендикулярно к ней. Затем проведем $DMFK$ так, чтобы FK была равной полудиаметру круга. [Однако] это до сего нашего времени никому не удалось [осуществить] с помощью геометрических принципов[402]. И никто не в состоянии решить это, кроме как посредством приближенных ухищрений, отклоняющихся от геометрического метода. Так, осуществили это ал-Кинди[403] и древние [ученые] с помощью [измерительного] инструмента и передвижения [линейки] и решили эту [проблему] ученые нового времени с помощью свойств гиперболы, принадлежащей к коническим сечениям. И пока путь к этому остается таким, никогда не удастся в вычислениях перейти от потенции к действию[404].

[Но] отвлечемся от того, что с этим так обстоит, [и закончим рассуждение]. Если мы проведем EO параллельно этой проведенной [ранее] линии, [т. е. DK], то дуга AO будет половиной дуги OB.

Доказательство этого. Соединим E с F. Тогда углы FEK и FKE будут равными, как будут равными и углы EFD и EDF. Угол EFD равен [сумме] равных углов FEK и FKE[405]. Следовательно, угол EDF [равен] удвоенному углу FKE. Но угол FKE — накрестлежащий для угла GDK. Поэтому угол EDF [равен] удвоенному углу FDG. Угол BDG опирается на дугу GB, а угол AEB равен ему в силу параллель-
172 ности AE[406] и DG. Следовательно, дуги AB и AG — равные. || Если мы проведем EO параллельно DK, то получится внешний угол BEO, равный внутреннему углу BDK [в треугольнике EDK]. Тогда оставшийся [искомый] угол OEA будет равен известному углу [DFG][407].

И224 [ПРОДОЛЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЭТОГО][408]

[Мы доказали, что] AO — половина дуги OB (рис. 74). Вследствие равенства дуг FA и OA, [перпендикуляр AC] рассекает [пополам] хорду FO. Начертим [снова] это. Следовательно, она перпендикулярна к нему, как перпендикулярна к нему же [линия] EH. Значит они, [FO и EH], — параллельны[409]. EO параллельна MF. Следовательно, [$EOFM$] — параллелограмм, и MF равна полудиаметру EO.

В целях попытки определить хорду трети дуги (рис. 74) опишем из центра D на расстоянии DM дугу LMS. Тогда EM относится к MH, как треугольник $EM[H]$[410] к треугольнику MDH. Отношение EM к MH — бо́льшее, чем отношение сектора DLM к сектору DMS, которое является отношением удвоения. Следовательно, линия EM больше, чем удвоенная MH.

EH — половина хорды BG[411], [являющейся хордой] удвоенной данной

[нам] дуги [AB]. Примем, что EM больше двух третей EH на какую-то величину. Умножим [EM] на равное себе и умножим HD, т. е. половину хорды дополнения [дуги] GB до полукруга, на равное себе[412]. Сложим оба призведения и извлечем корень из суммы. Это будет DM. Прибавим [к DM] MFK, равную диаметру круга[413]; в сумме получится DK.

Вследствие подобия треугольников DHM и KEM EM относится к MH, как KM к DM. При присоединении отношения EH относится к HM, как DK к DM[414]. Умножим EH на DM и сопоставим это [произведение] с произведением KD на HM, которую мы взяли меньшей, чем треть EH. Если оба [произведения] будут равными, то так оно и будет, а если нет — увеличим или убавим [взятую априорно величину EH], в зависимости от того, что требуют обстоятельства, пока между ними не получится равенство.

Величина, взятая [и уточненная] для EM, и будет искомой.

Однако EM относится к FP как AK к KF, MK — удвоенная KF[415]. Поэтому EM — также удвоенная FP[416], а [FP] равна PO, а PO — половина хорды удвоенной [дуги] AO, [тогда как] AO — [искомая] треть данной [нам] хорды[417]. EP — известна, AP — известна. CA относится к AO, как AO[418] к OP. Следовательно, AO, хорда трети дуги AB, известна, а это — то, к чему мы стремились.

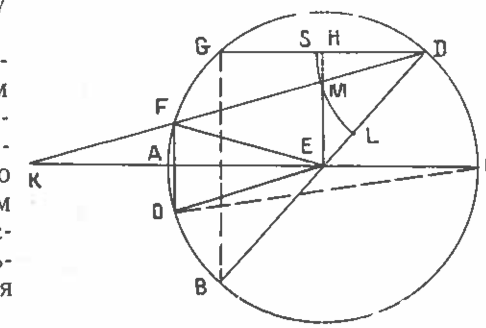

Рис. 74.

При определении хорды одного градуса я следовал в моем комментарии к обоснованию зиджа Хабаша[419] другим путем. За- 286
тем прибавил это к тому, что принадлежит древним и новым [ученым] в книге, которую я составил для учета употребительных методов для определения хорд круга[420].

И поразмысли ты, — да поддержит тебя Аллах! — над тем, 287
что || я собрал [здесь] для тебя, и исследуй это, дабы открылись для тебя источники разумения, и сошла благодаря этому с твоего разума ржавчина, [покрывшая] проницательность, и дабы достиг ты посредством этого того, что тоньше понимания простого люда, и дабы исчезли между мной и между тобой основания для упреков. Хвала Аллаху за его великие благодеяния и благословение пророку, лучшему из людей, и роду его чистому!

Кончилась эта книга, хвала Аллаху! Абу-р-Райхан, да будет милосердным к нему Аллах, завершил это сочинение в раджабе четыреста восемнадцатого года хиджры[421].

КОММЕНТАРИИ

К ТРАКТАТУ «ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХОРД В КРУГЕ ПОСРЕДСТВОМ СВОЙСТВ ЛОМАНОЙ ЛИНИИ В НЕМ»

[1] К кому здесь обращается Беруни, неясно.

[2] التنفير عن خواصه. Местоименный суффикс здесь относится к слову الخط. В *П* неточно: «свойств этого».

[3] Так (نسبتنى) в *И* и *Л*. В *Т:* نستبين.

[4] Абу Бакр Мухаммад ибн Закарийа ар-Рази (865—925 гг.) — крупнейший средневековый прогрессивный философ и естествовед-энциклопедист. Один из основоположников химии на Ближнем Востоке. Выдающийся врач, первый в истории медицины клиницист. Автор свыше 230 трудов, в том числе нескольких работ по алгебре, геометрии и астрономии. Жил и работал преимущественно в Рее (Иран), где родился и умер, а также в Багдаде. За свое критическое отношение к религиозным «пророкам» и «пророчествам» считался еретиком и вероотступником. Беруни составил список трудов ал-Рази («Фихрист»), чем способствовал популяризации его наследия, и разделял многие его философские и естественнонаучные взгляды, часто ссылаясь на его труды в своих работах. Однако внешне он вынужден был «открещиваться» от «ереси» ар-Рази в целях собственной безопасности, примеры чему мы видим в данном трактате и в «Фихристе» (Chronologie, Einleitung, S., XXXVIII—XXXIX; Беруни. Фихрист (Ruska, Isis); Каримов. Тайна тайн, с. 27—31 и сл.; Григорян. Средневековая философия, с. 158; Булгаков. Жизнь и труды Беруни, с. 280—288; Кадри, с. 216—222; МР, II, с. 121—124; Sezgin, III, S. 274—294, IV — 275—282, V — 282, VI — 187—188, VII — 160, 271—272).

[5] В *П* неверно: «Ты ссылаешься на то, что Мухаммад ибн Закария ар-Рази считал одним из достоинств геометрии, превосходящим достаточное во всем».

[6] В *П* неверно: «Если бы он знал это, он нашел бы, что запутался вследствие множества сомнений, портящих сердца, лишенные веры и жадные к достоинствам этого мира — благам и господству».

[7] В *П* неверно: «То, что ар-Рази думал о геометрии и говорил о ней в своей философии, недостаточно, так как он был враждебен ко всему остальному».

[8] Коран. Пески, 12.

[9] Так в *И* и *Л*. В *Т* личная форма «в чем мы нуждаемся».

[10] Так в *И* и *Л* (مذروع); в *Т:* مزروع («засеяно»).

[11] مكيل.

[12] В *П* неверно: «Ты понял бы с ее помощью формы, отвлеченные от материи, и глубоко представил бы истину доказательства, не отклоняясь от существенного, тогда как большинство изучающих логику отклоняется от того, для чего необходим метод искусства».

[13] Так в *И* и *Л*. В *Т:* «мы поднялись бы».

[14] لما عدلتنى عن ذلك. В *П* неверно: «как уклонился от них ты».

[15] Под наукой о сфере в средние века понималась на Востоке как сферика, так и астрономия.

[16] В *П* неверно: «Они были моими друзьями на чужбине, и мое сердце опечалено разлукой с этими друзьями».

[17] Беруни просит извинить его за слишком строгое его отношение к работам своих предшественников. В *П* неверно: «Я изложил это тебе так многословно из-за твоих упреков по этому поводу».

[18] و انزل . Здесь — форма страд. залога IV породы, а не 1 лицо I породы, как это воспринято в *П*.

[19] Так в *Т*. В *Л*, *И* и *П*: «ABC».

[20] Отсюда и до конца раздела текст в *Л* отсутствует.

[21] Так в *Д* и *И* (فضلت); в *Т*: فصلته .

[22] Так в *Д* и *И*; В *Т*: «AF»; в *П*: «BA».

[23] Так в *И* и *П*; В *Т*: «$FDBC$». Имеется в виду дуга, превышающая полную окружность на величину дуги AF.

[24] دون . В *П* неверно: «перед».

[25] В *П* неверно: «Что касается [случая], когда дуга равна полному кругу, то здесь делению на неравные части подвергается весь круг и чертеж становится неправильным, так как ломаная линия состоит только из линии AB».

[26] Памятуя, что M — середина дуги ADB, а D — середина дуги ADC.

[27] В *Л* в связи с другим доказательством Азархура, следующим у нас ниже, в заголовке дается *кунья* этого ученого: Абу-л-Хасан (*Л*, л. 109*б*, 21). Абу-л-Хасан Азархур ибн Уштаз Джашнас, как указывает Беруни (Беруни. Памятники, с. 110 и 230), — современный ему геометр. Судя по его указаниям, он лично общался с Азархуром, вероятнее всего в Гургане, и заимствовал с его слов исторические предания и сведения о праздниках древних персов. Другими сведениями о нем мы не располагаем. Sezgin, V, S. 342; МР, II, с. 263.

[28] Есть в *Д* и *П*, опущено в *Т*.

[29] Т. е. ее квадрат равен сумме квадратов ниженазванных катетов.

[30] В *П* неверно: «CB».

[31] В *Л* (л. 112*а*) это выражение упрощено: «Ясно, что квадраты DG и GB равны [в сумме] квадратам DE и EB».

[32] «Книга кругов» Архимеда в оригинале до нас не дошла и сохранилась лишь в арабском переводе Сабита ибн Курры (о нем см. ниже, прим. 194).

[33] В *Л* (л. 109*а*) упоминание «Начал геометрии» Серена Фивского в этом заголовке опущено. Серен Фивский — александрийский математик и астроном IV в. Его «Начала геометрии» до сих пор не обнаружены. (Sezgin, V, S. 186).

[34] В *Л* лишнее добавление: «и два угла — прямые». Далее, до конца этого раздела, в *Л* — упрощенный пересказ (л. 109*а*).

[35] В *П* неверно: «DA».

[36] В *П* неверно: «DGB».

[37] Так в *Л* и *П*. В *Д* и *Т*: «в Джурджане». Абу Са'ид ад-Дарир ал-Джурджани — малоизвестный математик и астроном IX в. Автор сборника геометрических задач и книги об определении меридиана. По некоторым данным был также и филологом, учеником знаменитого Ибн ал-А'раби. (Suter. Die Mathematiker, S. 27; Sezgin, V, S. 263—264, VI, S. 242; МР, II, с. 263).

[38] В *Л* (л. 109*б*) это доказательство в иной форме*: «Абу Са'иду ад-Дариру удалось доказать это [методом], подобным тому, что принадлежит Архимеду. Он сказал, построим хорду AH, равной хорде BC, и отделим AG, равной AH. Соединим A с D, D с G, D с B и D с H. Поскольку дуга AD равна дуге DC, а дуга AH взята равной дуге BC, дуги DH и DB — равные. Углы HAD и DAG — равные, а AH равна [по условию] AG. AD — общая [сторона]. Поэтому основания HD и DG — равные. Однако HD равна DB, и DG равна DB, а DE — перпендикуляр к основанию [BG]. Поэтому GE равна EB, а AG вместе с GE равны BC вместе с EB. А это — то, что мы хотели разъяснить».

[39] В *П* неверно: «отправляясь без объяснений».

[40] Так в *Д* и *И*. В *Т* ошибочно: نصل («соединим»).

[41] Пропущено в *П*.

[42] Такое название (تصحيف المنقول من العرض و الطول) в «Фихристе» Беруни (Chronologie, Einleitung, S. XXXXI). В *И* (и оттуда в *Т*) другой вариант: تصيحيح المقول بين العرض و الطول («Уточнение передаваемого относительно широты и долготы»). Этот трактат не дошел до нас. В авторской рукописи он занимал 30 листов. (Boilot, p. 184, № 21).

[43] В *Л*: «ибн ал-Хусайн», но Г. Зутер (*З*, с. 22, прим. 3) склонен видеть в этом лице знаменитого Ибн ал-Хайсама. Тогда правильно чтение *И* и *Т*, принятое нами

* См. рис. 4 в переводе.

(«ибн ал-Хасан») Абу 'Али ал-Хасан ибн ал-Хасан ибн ал-Хайсам ал-Басри — выдающийся арабский математик и физик, известный в средневековой европейской науке под именем Alhazen. Родился около 965 г. в Басре, умер в 1039 г. в Египте. Автор многочисленных трудов во всех областях средневековой математики, а также оптики. (Br. I, S. 470; Br. SBI, S. 851—854; Suter. Die Mathematiker, S. 91—95; Кадри, с. 294—309; Sezgin, V, S. 358—374, VI, S. 251—261, VII, S. 288;—МР, II, с. 240—255).

[44] В *П* неверно: «без объяснения этого другим способом».

[45] Буквально: «четырехсторонник».

[46] В *П* неверно: «AH».

[47] В *Л* (л. 113*а*—113*б*) это доказательство имеет отдельный чертеж и иные буквенные обозначения (G на месте H и наоборот), незначительно отличается стилистически при полном совпадении сущности.

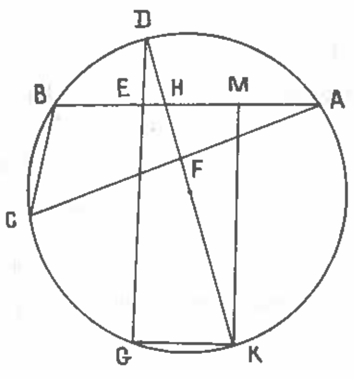

Рис. III.

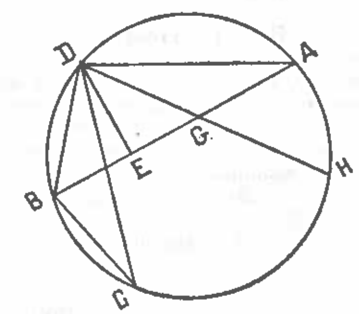

Рис. IV.

[48] Абу Са'ид Ахмад ибн Мухаммад ибн 'Абдалджалил ас-Сиджизи — крупный математик и астроном X—XI вв. (951—1024). Работал преимущественно в Ширазе. Сконструировал астролябию на принципе допущения вращения Земли вокруг своей оси. Занимался вопросами конических сечений и трисекций угла. (Наллино, с. 251; Кадри, с. 274; Suter. Die Mathematiker, S. 80—81; Sezgin, V, S. 329—334).

[49] В *П* неверно: «[Абу Са'ид] шел иначе...»

[50] В *П* неверно: «AF и FB равны».

[51] В *Л* (л. 111*а*) это доказательство незначительно отличается редакционно и на чертеже иные буквенные обозначения: G вместо H и H вместо F.

[52] В *П* неверно: «Эту предпосылку часто применял и я в рассуждениях о том, как пойти по этому пути в некоторых случаях».

[53] Ср. с переводом в *П*.

[54] В *Л* (л. 113*б*—114*а*) это доказательство только отличается редакционно и иными буквенными обозначениями на чертеже.

[55] Абу 'Абдаллах Мухаммад ибн Ахмад аш-Шанни — арабский математик X в. Занимался вопросами геометрии круга, построения семиугольника и др. Подробности его жизни не известны. Suter. Die Mathematiker, S. 97—98; Sezgin, V, S. 352; МР, II, с. 262—263.

[56] В *Л* это доказательство в иной редакции (*Л*, л. 111*б*): «Он сказал: дополним круг (рис. III) и продолжим перпендикуляр DE в его направлении до точки G на окружности. Соединим A с C. Проведем диаметр $DHFK$; он будет перпендикуляром к AC. Проведем KM параллельно DEG и соединим K с G. Углы FAH и HDE будут равными вследствие подобия треугольников FAH и DHE. Хорда KG будет равна хорде BC. Поскольку угол DGK — прямой, ибо он опирается на половину окружности, и углы M и E — прямые, плоская фигура MG — прямоугольник. Поэтому KG равна ME, а ME равна BC. Так как перпендикуляр KM равен перпендикуляру GE, AM будет равна EB, а мы уже выяснили, что ME равна BC. Следовательно, сумма AM и ME равна сумме EB и BC, а это — то, что мы хотели разъяснить».

[57] В *Л* (л. 111*а*) вместо «ал-Хасан» — «ал-Хусайн», а *нисба* — без диакритических пунктуаций, Г. Зутер (*З*, с .17) предположительно читает «ал-Джануби». Мы переводим как в *И* и *Т*. Ранее Г. Зутер читал: «ал-Хабуби» и считал, что это ученый XIII в. О нем лишь известно, что он был судьей и оставил после себя алгебра-

ический трактат о разделе наследств. Suter. Die Mathematiker. S. 197; Sezgin; V. S. 336; MP, II, с. 193.

[58] В *П* неверно: «ADC».

[59] Буквально: «получается».

[60] В *Л* (*л.* 111*а*) это доказательство отличается лишь редакционно и иными буквенными обозначениями (G вместо H, а H вместо F).

[61] Абу Наср Мансур ибн ʻАли ибн ʻИрак ал-Джаʻди — крупнейший хорезмийский астроном и математик (ум. около 1034 г.), учитель и воспитатель Беруни, двоюродный брат Хорезмшаха Абу ʻАбдаллаха Мухаммада ибн Ахмада ибн ʻИрака. Ибн ʻИраку принадлежит одно из первых доказательств теоремы синусов для сферических треугольников. Он автор фундаментальной обработки «Сферики» Менелая, не дошедшего до нас астрономического свода «Шахский Альмагест» и ряда трактатов по астрономии и математике, посвященных своему ученику Беруни (Булгаков. Жизнь и труды Беруни, с. 29—30 со ссылками на источники; Sezgin, V, S. 338—341; VI, S. 242—246; —MP, II, с. 209—212.

[62] Опущено в *П*.

[63] В *Т* вместо обозначения «AD» союз أو («или»).

[64] В *Л* (*л.* 113*а*) после этого добавлено: «и проводил хорды AD и DC. Они — равные, так как они [стягивают] равные дуги одной окружности. Углы A и C — равные, поскольку они — при окружности [и опираются] на одну и ту же дугу, а именно — DB». Дальнейший текст этого раздела в *Л* близок к тексту в *И* и *Т* и имеет лишь небольшие редакционные отличия. В приведенной выше вставке оговариваются столь простые и очевидные факты, что, скорее всего, она принадлежит автору редакции, отраженной в *Л*.

*—[65] Эта часть текста есть в *Д* и *Т*, но выпала в *И*, из-за чего неверен перевод в *П*.

[66] В *П* неверно: «Подобно этому доказывается невозможность того, что AH меньше».

[67] В *П* неверно: «BH».

[68] В *П* неверно: «в [этом] месте другим путем».

[69] Это доказательство в более развернутом виде дано в *Л* (л. 113*б* — 114*а*) с отдельным чертежом:

«Я говорил: дополним круг, соединим D с B, D с C и D с A и отложим EG, равную EB (рис. IV). Соединим D с G и продолжим [DG] в ее направлении, пока она не встретится с кругом в точке H. AD и DC равны, будучи хордами равных дуг, и DB и DG равны вследствие равенства треугольников BDE и DGE. Углы BCD и BAD равны, так как они — при окружности и опираются на одну дугу.

Углы BDC и GDA равны в силу [нижеследующего]. Поскольку угол DGB равен [сумме] углов GDA и GAD, а углы DBG и DGB — равные, то и угол DBG равен [сумме] углов GDA* и GAD. Угол DBG опирается на половину заданной дуги, а угол DAG — на дугу DB, являющуюся частью оставшейся половины [заданной дуги]. Поэтому оставшийся угол GDA — по величине дополнения дуги DB до половины заданной [дуги], а именно — BC. Однако угол GDA [опирается] на дугу AH, а дуги AH и BC — равные. [Следовательно], углы BDC и GDA — равные. Тогда эти треугольники [BDC и GDA] — подобные и равные, и GA равна BC. GE равна EB, и потому сумма AG и GE равна сумме EB и BC. Это — то, что мы хотели разъяснить».

[70] В *Т* опечатка: الواحة вместо الراحة.

[71] تحصيل الراحة بتصحيح المساحة. Этот труд Беруни до нас не дошел (Chronologie, Einleitung, S. XXXXV; Boilot, p. 205, № 88).

[72] В *П* пустой глагол احتجت принят за удвоенный, из-за чего перевод неверен: «Я привожу как довод». Вся дальнейшая часть фразы в *П* переведена также неверно.

[73] اخمص القوس. Речь идет о сегменте круга, ограниченном данной дугой.

[74] Т. е. когда ломаная линия ABC (см. рис. 10) находится в сегменте ADC, а не AA_1C

[75] Речь здесь идет о равенстве всех соответственных углов этих треугольников, что доказывается формой множественного, а не двойственного числа. По неверному переводу в *П* речь идет о равенстве только тупых углов G и B.

---

* Конъект, как в *З*. В *Л* неверно: «DGA».

[76] По неверному переводу в *П* («Я откладывал угол ADC, ... чтобы были равны стороны AD и DC».) Беруни достигал равенства сторон AD и DC, тогда как на самом деле они заданы как равные.

[77] Все это доказательство в *Л* отсутствует.

[78] В *П* опущено это существенное притяжательное местоимение.

[79] Эта работа Беруни, как он сам указывает в своем «Фихристе» — перечне трудов врача, химика и философа Абу Бакра ар-Рази, в который Беруни включил и перечень собственных трудов, занимала в автографе 250 листов. До нас она не дошла; полное ее название «Восполнение зиджа»* Хабаша [теоретическими] обоснованиями и очищение его действий от ошибок» . (Boilot, p. 177, № 4; Chronologie, Einleitung, S. XXXX).

Хабаш ал-Хасиб («Хабаш Вычислитель») — прозвище выдающегося астронома и математика Ахмада ибн ʻАбдаллаха ал-Мервази, мервского ученого, работавшего в Багдаде (ум. между 864—874 гг. в возрасте более ста лет). Хабаш ал-Хасиб автор ряда зиджей, из которых наиболее известным и авторитетным в средние века был «Испытанный [зидж]». Теоретическим его обоснованиям Беруни посвятил, кроме вышеупомянутой работы, еще один труд: «Положение *Испытанного* [*зиджа*] и «разъяснения», Ибн Кайсума**, неумеренного в критике, ибо переступил он пределы сего и показал в этой области собственное невежество» (Boilot, p. 179, № 9; Chronologie, Einleitung, S. XXXX). Хабашу ал-Хасибу принадлежат также несколько трактатов (об астролябии, о гномонике и др.). Он одним из первых ввел в тригонометрию понятия тангенса и котангенса. (Suter. Die Mathematiker, S. 12—13; Кадри, с. 185; Юшкевич. История математики в средние века, с. 48; Sezgin, V, S. 275—276, VI, S. 173—175; MP, II, с. 47—49.

[80] В *П*: «ее», т. е. дополнение дуги (!) до двух прямых углов. В целом вся эта фраза в *П* неверна: слов «мы дополним» и «получится [угол]» в арабском тексте нет.

[81] В *Л* (л. 114*а* —114*б*) это доказательство — с отдельным чертежом с иными буквенными обозначениями (G вместо H, и наоборот) и незначительными пояснениями совершенно очевидных вещей, принадлежащими, по-видимому, редактору версии *Л*.

[82] Буквально: «противолежащий».

[83] В *Л* текста этого абзаца нет.

[84] В *П* неверно: «Он шел по линии упрощения».

[85] В *П* неверно: «ADG».

[86] В *П* пропущено.

[87] В *Л* это доказательство (л. 112*б* —113*а*) отличается незначительными редакционными дополнениями разъяснений совершенно очевидных фактов.

[88] В *П* неверно: «шел в этом до тех пор, пока [не дошел] до полного круга».

[89] В *Л* (л. 111*а* —111*б*) это доказательство отличается незначительными редакционными пояснениями очевидных вещей.

[90] В *П* вместо перевода этой фразы дан сокращенный вольный ее пересказ: «С другой стороны, достоверно, что Архимед в «Книге кругов» и Серен в «Началах геометрии» доказывали это не так, как мы рассказывали». В *Л* эта фраза отсутствует.

[91] Буквально: «ногами».

[92] Ср. с переводом в *П* эту и следующие две фразы, переведенные неточно.

[93] Idem.

[94] В *Л* (л. 109*б*) это доказательство отличается добавлением незначительных редакционных пояснений очевидных вещей.

[95] В *И* текст этой фразы неверен, что обусловило неверность перевода в *П*. В *Л* (л. 109*б* —110*а*) это доказательство отличается незначительными редакционными пояснениями очевидных вещей.

[96] В *Л* (л. 110*а*) уже в третий раз (см. выше прим. 33 и 90) опущено упоминание Серена Фивского.

[97] Аполлоний Пергский — крупнейший математик Александрийской школы, жил около 200 г. до н. э. Автор знаменитого труда «О конических сечениях», из 8 книг которого до нас дошло 7 (первые 4 в греческом оригинале и следующие 3 в арабском переводе). О разработке наследия Аполлония арабоязычными средневековыми математиками см.: Sezgin, V. S. 136—143.

[98] Йуханна ибн Йусуф ибн ал-Харис ибн ал-Битрик ал-Касс («священник») — арабский геометр конца X в., переводчик и комментатор греческого математического наследия. Подробности его жизни неизвестны. (Br. SBI, S. 389; Suter. Die Mathematiker. S. 60; Sezgin. V. S. 298; MP. II. с. 154—155).

[99] В *Л* (л. 110*а*) здесь добавлено: «продолжим AG (de facto AB) в ее направлении и отложим EG, равную EA, соединим D с C, D с B и D с G». В *И* все это есть в предыдущем доказательстве Архимеда.

[100] Ср. с переводом в *П*.

---

* Зидж — астрономические таблицы. В составы зиджей иногда включались математические обоснования вычислений и тригонометрические таблицы.

** Это лицо нам неизвестно.

[101] Выпало из текста в *Т*.
[102] В *П* полное расхождение с текстом: «Поэтому угол DBC, вписанный в сегмент,— тупой».
[103] В *П* неверно: «AC».
[104] В силу равенства этих треугольников BG равна BC. Поэтому BC в сумме с BE равна EA, что и требовалось доказать.
[105] المسائل المفيدة و الجوابات السديدة . Перевод в *П* неверен, так как Бируниева аннотация включена в состав названия. К тому же علل здесь не «недостатки», а «теоретические обоснования». Этот не дошедший до нас труд Беруни был написан им, по-видимому, в Гурганджe в период между 1004—1017 гг. Он содержал теоретическую аргументацию к зиджу ал-Хорезми (См. ниже прим. 106) и занимал в автографе 250 листов. (Chronologie, Einleitung, S. XXXX; B o i l o t, p. 176, № 1).
[106] Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми — величайший среднеазиатский средневековый математик, астроном и географ (ум. после 847 г.). Работал в Багдаде при знаменитом научно-переводческом центре «Дом мудрости», расцвет деятельности которого совпадает с правлением халифа ал-Ма'муна (813—833 гг.). Важнейшие труды Хорезми — алгебраический трактат («Краткая книга исчисления алгебры и ал-мукабалы»), явившийся фундаментом современной алгебры; арифметический трактат («Об индийском счете»), положивший начало распространению в странах халифата и Европе позиционной десятеричной системы счисления; первая на средневековом мусульманском Востоке география («Книга картины Земли»). Хорезми — автор также астрономических таблиц, «Книги истории» и нескольких трактатов, посвященных астрономическим инструментам. (К р а ч к о в с к и й. Арабская географическая литература, с. 91—97; Ю ш к е в и ч. История математики, с. 447; EI. I, p. 290—291; К а д р и, с. 154—162; М а т в и е в с к а я. Учение о числе, с. 128—131, 163—170; S e z g i n, V, S. 228—241, VI, S. 140—143, VII, S. 128—129; МР, II, с. 40—45; Б у л г а к о в, Р о з е н ф е л ь д, А х м е д о в. Мухаммад ал-Хорезми).
[107] Беруни с помощью равенства сторон CB и GB доказывает, что CG делится перпендикуляром пополам. В *П* из-за неверного понимания грамматических конструкций утверждение Беруни о делимости CG пополам оказалось беспочвенным.
[108] Следуем тексту *И*. В *Т* текст упрощен издателем. В *Л* (л. 114*a*) в буквенных обозначениях на чертеже K вместо G. Там же ошибочно прямым назван угол PKF (л. 114*a*, 11), соответствующий в наших обозначениях углу BGF вместо угла BFK (у нас BFG).

Г. Зутер в комментарии к переводу (*З*, с. 68, прим. *W*) отмечает ошибку в данном доказательстве Беруни. В наших буквенных обозначениях она сводится к следующему: говоря, что внешний угол DBC треугольника BFC равен двум внутренним углам BCF и CFB, Беруни исходит из того, что DBF — одна прямая линия, а это требуется доказать. В нижеследующем же доказательстве, что эта линия — одна прямая, Беруни опирается на результаты, восходящие к вышеприведенному априорному равенству $\angle DBC = \angle BCF + \angle CFB$.

Г. Зутер предлагает здесь следующее доказательство: $\angle DBG = \angle DBC$, так как оба они в сумме с углом DBA равны двум прямым, а именно: $\angle DBC$ опирается на дугу DAC, а $\angle DBA$ — на дугу AD, равную дополнению дуги DAC до полного круга, т. е. дуге CD. $\triangle DBG = \triangle DBC$, поэтому $DC = DG$ и т. д.
[109] وصل الى ما . В *П* игнорирован предлог الى , из-за чего перевод неверно «математизируется»: «и соединял то, что мы соединяли раньше».
[110] В *Т* ошибочно в двойственном числе.
[111] Так в *Т*. В *И* и *П* ошибочно «ABC». Речь идет о сумме противолежащих углов четырехугольника, вписанного в круг.
[112] В *Л* (л. 110*б*) это доказательство без существенных различий.
[113] В *Л* (л. 110*а*—110*б*) это доказательство повторяется: «Углы ADC и ABC равны, так как они — при одном сегменте, [т. е. опираются на одну дугу, ограничивающую этот сегмент]. Угол ADC вдвое больше угла AGC, поскольку оба они — на одном основании, [т. е. опираются на общую хорду AC], а один из них — при центре, а другой — при окружности. Следовательно, и угол ABC равен удвоенному углу AGC. Угол ABC равен сумме углов AGC и GCB. Следовательно, углы GCB и BGC равны, и GB равна BC».

Эта вставка — от редактора версии *Л* и необходимость ее вызвана тем, что он оторвал это доказательство от предшествующего доказательства ас-Сиджизи, где все это есть.
[114] В *Л* (л. 110*б*—111*а*) это доказательство без существенных различий.
[115] Перевод этой части текста в *П* абсолютно неверен: «может быть, все это предшествовало и у тех авторов, которые порицают наше выражение этого при помощи хорд (sic!)».

[116] В *П* перевод неверен: «Что касается известного, то после того, что предшествовало раньше, достаточна предпосылка: ...».
[117] «Начала» — фундаментальный труд по геометрии и арифметике знаменитого греческого математика Александрийской школы Евклида (ок. 330—275 гг. до н. э.), содержащий творческую обработку математического наследия Гиппократа, Архита, Евдокса и Теэтета. «Начала» Евклида (в арабском переводе) были настольной книгой всех средневековых математиков Ближнего и Среднего Востока и Средней Азии и породили целую литературу в виде многочисленных комментариев и обработок, о чем см.: S e z g i n, V, S. 83—120.
[118] В *П* неверно: «предположить».
[119] Ср. с переводом в *П*.
[120] В *Л* формулировка второго утверждения — в иной, своеобразной формс (л. 114*б*) при том же содержании: «Если в дуге окружности сломана линия и она разделила [точкой излома] эту дугу пополам, и если в этой же дуге сломана другая линия, и она разделила [точкой излома] эту дугу на две неравные части, то произведение одной из частей линии, делящей дугу пополам, на другую [ее часть], равно произведению одной из частей линии, делящей [точкой излома] дугу на неравные части, на другую [ее часть в сумме] с квадратом хорды между двумя точками деления этой дуги.

Пример этому: в дуге ABC сломана линия ADC* (рис. V) и она разделила в точке D эту [дугу] пополам. В этой же [дуге] сломана также линия ABC, которая разделила в точке B эту [дугу] на две неравные части. Я утверждаю, что произведение AD на DC, [т. е. AD^2] равно произведению AB на BC [в сумме] с квадратом DB».

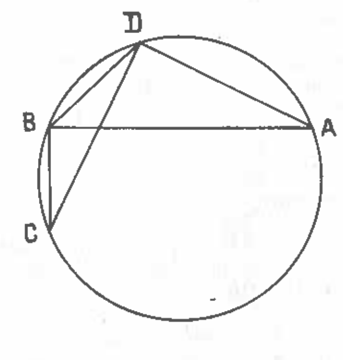

Рис. V.

[121] Ср. с переводом в *П*.
[122] В *П* переведено безлично «это имелось», вследствие чего исчезает указание на личное участие Беруни в исследовании наследия античных математиков.
[123] В *П* неверно: «Прибавим общий квадрат DE, как мы поступали раньше, и перейдем к равенству квадрата AD квадрату DB вместе с произведением AB на BG». В *Л* (л. 114*б*—114*а*) редактор здесь повторяет опущенные Беруни действия, содержащиеся в предыдущем доказательстве. На чертеже в *Л* иные буквенные обозначения.
[124] الواقعة تحت الحس . Буквально: «подпадающих под ощущение». В *П*: «расположенных под дугами» (sic!).
[125] Это слово в *П* опущено.
[126] Так в *Т*. В *И* неверно: ا ه ج («AEC»), что некритически воспринято и в *П*. В *Л*: «AEH» (*Л*, л. 116*а*).
[127] В *Л* (л. 116*б*) добавлено: «треугольника ABD».
[128] Так в *Т*. В *И* и *П* неверно: «BD».
[129] В *П* неверно с иным математическим содержанием: «т. е. дополним квадрат AG, а затем восполним недостаток».
[130] Все это доказательство в *Л* (л. 116*а*—116*б*) незначительно отличается редакционно.
[130а] Опущено в *П*.
[131] Все это доказательство в *Л* (л. 116*а*—116*б*) незначительно отличается редакционно.
[132] Ср. с переводом в *П*.
[133] В *Л* (л. 115*а*) это доказательство отличается лишь редакционно. В заголовке имя Ибн 'Ирака дано полностью.
[134] В *Л* (л. 115*б*) это доказательство без существенных различий.
[135] Ср. с переводом в *П*.
[136] В *Л* سطح («плоская фигура») вместо ضرب («произведение»). См. ниже, прим. 25 к XXIII главе «Гномоники».
[137] Idem.
[138] В *Л* (л. 115*б*) это доказательство без существенных различий.
[139] Конъект. В *Т* и *П*: «BH».
[140] Так в *Т*. В *П* неверно: «CH».

---

* Конъект. В *Л*: «ABC».

[141] В *Л* (л. 116*а*) это доказательство несколько отличается редакционно при той же его сущности и имеет иные буквенные обозначения на чертеже.

[142] Это — 2-е предложение X главы 1 книги «Альмагеста» Птолемея. Об «Альмагесте» см. ниже прим. 145.

[143] В *П* неверно: «*CD*».

[144] В *Л* (л. 116*а*) это доказательство несколько отличается редакционно. Редакторский характер вмешательства в текст доказывается сокращением начальных авторских слов Беруни в этом разделе: «Когда я нуждался в [доказательстве] этого в некоторых из моих книг...». Кроме того, в *Л* на чертеже «*H*» вместо «*G*».

[145] «Альмагест» — принятая в Европе и на средневековом Востоке форма названия главного астрономического труда Клавдия Птолемея (II в. н. э.). В «Альмагесте» подведены итоги развития астрономии ко времени Птолемея, который разрабатывал свою астрономическую систему, изложенную в этом труде, опираясь, прежде всего, на наследие Гиппарха.

[146] В *Л* (л. 116*б*) это доказательство незначительно отличается редакционно и имеет иные обозначения на чертеже.

[147] Сулайман ибн 'Исма ас-Самарканди — среднеазиатский астроном второй половины IX в., уроженец Самарканда, о чем свидетельствует его нисба. Проводил астрономические наблюдения в Балхе в 80-х годах IX в. Иных сведений о нем обнаружить не удалось. (Беруни. Геодезия, с. 128—130, 268; Sezgin, V, S. 337—338).

[148] В *И* текст искажен, и перевод этой фразы в *П* — неполный и неверный.

[149] Idem.

[150] Конъект. Текст в *Т* и *И* испорчен. А. С. ад-Дамердаш приводит следующий комментарий (*Т*, с. 74):

$$AB \cdot BF + HF^2 = HB^2;$$
$$AB \cdot BF + HF^2 + GH^2 = HB^2 + GH^2.$$

Согласно теореме Пифагора, $HF^2 + GH^2 = GF^2 = DB^2$, а $HB^2 + GH^2 = BG^2$. Отсюда $AB \cdot BF + DB^2 = GB^2$. В *Л* этого доказательства нет.

[151] Абу-л-Хасан 'Али ибн 'Абдаллах ибн Бамшаз ал-Ка'ини — астроном и математик X в., работавший в городе Каин (Иран). До нас дошли только два его трактата: «Об определении времени между началом зари и (восходом) Солнца в каждый день в городе Каине» и «Определение эры евреев». (Sezgin, V, S. 337, VI, S. 242; МР, II, с. 263).

[152] Так в *И* и *П*. В *Т* ошибочно в форме двойственного числа: هما.

[153] Т. е. $DC \cdot (DF + FC) = DC^2 = AD^2$.

[154] В *Л* этого доказательства нет.

[155] Сведений об этом ученом в иных источниках обнаружить не удалось. Как свидетельствуют его нисбы, он был выходцем из Египта, обосновавшимся в Самарканде, или его предки были родом из Египта, а сам он родился в Самарканде.

[156] В *П* неверно: «...изложил частный случай этого; его изложение я сократил».

*—[157] Выпало из текста в *Т*.

[158] Перевод данной части этого абзаца в *П* абсолютно неверен: «В случае, когда диаметр не равен *BK*, [т. е.] *BC*, увеличенному на удвоенную *EB*, дуги *DB* и *CF* уже не равны и изложение Абу-л-Хасана становится неправильным».

[159] В *Л* этого доказательства нет.

[160] В *Л* этого утверждения нет.

[161] В *Л* этого доказательства нет.

[162] Абу Джа'фар Мухаммад ибн ал-Хасан ал-Хазин, крупный математик и астроном X в. (умер между 961—971 гг.), уроженец Хорасана, выходец из сабиев, автор «Зиджа тимпанов» (или «Зиджа дисков»); тимпан или диск — одна из основных деталей астролябии, арифметических трактатов о прямоугольных треугольниках с рациональными сторонами, комментариев на «Альмагест» Птолемея и первую часть 10-й книги «Начал» Евклида (Ибн ан-Надим. Фихрист, с. 393; Br. SBI, S. 387; Suter, Die Mathematiker, S. 58; Кадри, с. 239—240; Sezgin, V, S. 298—299, 305—307, VI, S. 189—190; МР, II, с. 149—151, 201—202, III, с. 363—364).

[163] В *П* неверно: «*DAF*».

[164] В *Л* этого доказательства нет.

[165] Так по конъектуре в *Т*. В *И* и *П*: «*AB*» .

[166] В *П* неверно: «Если прибавить общий квадрат *DE*...».

[167] Перевод данной части этого абзаца в *П* — неполный и абсолютно неверный по причине искажения текста в *И*: «В силу равенства углов *DAC* и *DBC* двум прямым и равенства тому же углов *DBC* и *CBF* угол *CBF* равен углу *DAC*, т. е. *DCA*, и треугольники *DCF* и *DBC* подобны».

[168] В *П* неверно: «*AF*».

[169] Так в *И* и *Т*. В *П* неверно: «*AF*».

[170] Так в *И* и *Т*. В *П* неверно: «*FB*».

[171] В *Т* опечатка: نضرب вместо فضرب.

[172] В *П* неверно: «*FC*».

[173] Так в *И* и *Т*. В *П* неверно: «первое».

[174] Ср. с переводом в *П*.

[175] Конъект. В *Т* и *И*: لنرد ; мы читаем: فلنزد.

[176] Это слово пропущено в *Т*.

[177] В *П* опечатка: «*B*».

[178] Слово فخط в *Т* ошибочно принято за буквенные обозначения ب ج ط («*BCF*»).

[179] В *Л* всего этого раздела нет.

[180] نفرز. В *П* неверно: «предположим, что...».

[181] قصاصًا. В *П* это слово опущено.

[182] В *П* вся эта фраза опущена.

[183] В *П* неверно: «*AGB*».

[184] В *П* неверно: «*DBH*».

[185] В *Л* этого доказательства нет.

[186] В *П* неверно: «*AFB*».

[187] В *П* неверно: «*DFC*».

[188] В *Л* этого доказательства нет.

[189] В *Л* это доказательство перемещено в первое утверждение о свойствах ломаной линии (л. 112*а*—112*б*). На чертеже иные буквенные обозначения. После этой фразы в *Л* вставка, которую мы переводим в соответствии с буквенными обозначениями в *И*:

«Обозначим на пересечении линий *DH* и *AB* точку *K**. Поскольку треугольники EAG_1 и *KAH*** подобные, их углы G_1 и *K* равны, а угол *DAC* равен углу *DBK*, поскольку оба они опираются на половину дуги *ADC*, то и треугольники DAG_1 и *DBK* — подобные. Поэтому AG_1 относится к G_1D, как *BK* к *KD*. Но AG_1 относится к G_1D, как *AK* к *DK* и как *AH* к *DE* в силу подобия [прямоугольных] треугольников [AEG_1, DHG_1, *DEK* и *AHK*]. По такой же [причине] *BK* относится к *KD*, как *BE* к *DF*».

[190] В *П* неверно: «*DBC*».

[191] В *П* неверно: «поэтому оставшаяся *EG* равна *EB*».— Линии *EG* и *EB* равны по условию.

[192] Весь этот абзац, несмотря на сохранность его текста в *И*, опущен в *П* без оговорок.

[193] Менелай — крупнейший математик I в. н. э., работавший в Александрии. Автор фундаментальной «Сферики», дошедшей до нас только в арабских переводах и обработках, из которых одна из лучших принадлежит учителю Беруни Ибн 'Ираку. Менелаю принадлежит знаменитая теорема об отношениях синусов для фигуры секущих, о которой подробнее см.: Беруни. Канон Мас'уда, I, с. 351—352, прим. 128. «Начала геометрии» Менелая до нас не дошли.

[194] Абу-л-Хасан Сабит ибн Курра ал-Харрани ас-Саби (836—901 гг.) — крупнейший средневековый математик и астроном, выходец из сабиев Харрана, работал в Багдаде, автор многочисленных оригинальных трудов по астрономии, геометрии, тригонометрии, механике и теории чисел, переводчик трудов Архимеда и Аполлония, комментатор Евклида и Птолемея. (Suter. Die Mathematiker, S. 34—38; Br. I, S. 217—218; Br. SBI, I, S. 384—386; EI. IV, p. 793—794; Кадри, с. 195—206; Sezgin, III, S. 260—263, 377, V, S. 264—273, VI, S. 163—170, VII, S. 151—152. 269—270, 329; МР, II, 85—103; Сабит, Трактаты).

[195] В *П* неверно, с иным математическим смыслом: «Если же предпослать этому свойства ломаной линии, вписанной в дугу, то, что хотел доказать Менелай, упрощается, [однако] только для всех дуг данного круга, не превосходящих полукруга».

[196] Слова «Мухаммад ибн ал-Лайс» отсутствуют в *И* и *Т* и добавлены по *Л* (л. 117*а*, II). Абу-л-Джуд Мухаммад ибн ал-Лайс — выдающийся математик второй половины X в. Младший современник Абу Джа'фара ал-Хазина (ум. между 961—971 гг.) и старший современник Беруни (род. в 973 г.), поскольку ему принадлежат ответы на вопросы по геометрии этих двух ученых. На этом же основании можно полагать, что Абу-л-Джуд был тесно связан с хорасанско-среднеазиатскими математиками или сам принадлежал к ним. Автор трактата «О построении семиугольника с равными сторонами в круге». Занимался также исследованиями кубических уравнений (на его работу в этой области ссылается в своем алгебраическом трактате 'Омар Хаййам), определением хорд в круге, в частности хорды дуги 1°

* Конъектура Г. Зутера. В. *Л*: «*F*».

** Idem. В *Л*: «*FAH*».

(Беруни. Канон Мас'уда, I, с. 267). См. также: Suter. Die Mathematiker, S. 97; Sezgin, V, S. 353—355, МР, II, с. 260—262.

[197] В *Л* (л. 117*а*) имя дается полностью: «Абу Са'ид Ахмад ибн Мухаммад ибн 'Абдалджалил ас-Сиджизи».

[198] Буквально: «встречающий».

[199] В *Л* (л. 117*а*) эта фраза расшифрована: «Я утверждаю, что сумма линий AB и BC равна линии HF, и угол ABC равен углу S».

[200] В *Л* текст этого доказательства (л. 117*а*—117*б*) почти дословно совпадает с *Т*.

[201] В *Л* (л. 117*б*) редактор заново повторяет все сокращенные здесь действия.

[202] В *П* перевод неверен: «Мы хотим провести их так: будем поступать, как мы указали до построения сегмента на линии AC в D (sic!) до полукруга».

[203] В *Л* ошибочно: «CL».

[204] В *Л* чертеж точнее, чем в *И* и *Т* при совпадении текста доказательства (л. 117*б*).

[205] Слова «принадлежащий мне», ценные для установления авторства этого метода, отсутствуют в *И* и *Т* и добавлены по *Л*.

[206] В *Л* (л. 117*б*) вместо этой фразы: «Соединим A с C и опишем около [AC] сегмент (sic!), встречающий (sic!) угол [B], равный углу S. Разделим его пополам в точке D, соединим D с C и опустим перпендикуляр DK на AC». В остальном текст этого раздела в *Л* совпадает с *И* и *Т*.

[207] См. выше, прим. 205.

[208] В *Л* (л. 118*а*) текст этого раздела имеет незначительные редакционные отличия.

[209] Издатель текста *Т* А. С. ад-Дамердаш указывает (*Т*, с. 97), что в переводе данного раздела он опирался на текст Стамбульской рукописи (Мурад Мулла) и отказался от текста Банкипурской рукописи ввиду испорченности последнего. Мы следуем здесь тексту *Т*, но учитываем лучшие варианты отдельных фраз в *И*.

[210] В *Л* ошибочно: «ADB».

[211] Из-за искажения текста в *И* и смешения слов نصل («соединим») и فضل («разность») перевод в *П* абсолютно неверен и искажает математический смысл текста Беруни: «Точно также проведем хорду BD, равную в квадрате разности квадратов [AD и квадрата] K. Тогда разность AB и BC есть искомое» (sic!).

[212] Так в *Л*, *И* и *Т*. В *П* неверно: «AD».

[213] Это обозначение пропущено в *И* и *П*.

[214] Буквально: «соединим».

*—[215] Этих слов в *И* и *П* нет.

[216] Ср. с текстом в *И* и с переводом в *П*.

[217] Выпало из текста в *Л*.

[218] Ср. с текстом в *И* и с переводом в *П*. Текст этого раздела в *Л* (л. 118*а*—118*б*) почти буквально совпадает с текстом Стамбульской рукописи (Мурад Мулла).

[219] В *Л* (л. 118*б*—119*а*) текст этого раздела имеет весьма незначительные редакционные отличия.

[220] Idem. (*Л*, л. 119*а*).

[221] В *И* и *Т* в заголовке опущено важное слово «мое», а также слова «местами падения камня».

«Место падения камня» в арабской средневековой математике — основание перпендикуляра, место, куда падает груз отвеса. (Беруни. Книга вразумления, с. 25 и 262, прим. 21).

[222] В *Л* ошибочно «ME».

[223] Гномон — измерительный шест с определенным числом делений, служивший для определения величины и азимута солнечной тени. Гномон чаще всего укрепляется либо на горизонтальной, либо на вертикальной (относительно поверхности Земли) плоскости.

[224] В *П* неверно: «KM».

[225] Т. е. произведение линий, образующих эту фигуру, равно величине гномона.

[226] В *Л* ошибочно: «AD».

[227] Если мы обозначим основание треугольника через a, остальные его стороны **через b и c, а** прямоугольные проекции сторон b и c на основание или его продол**жение — через** b^1 и c^1, и если $b>c$, эту теорему можно представить в виде формул:

$$b^1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b^2 - c^2}{a}\right) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a};$$

$$c^1 = \frac{1}{2}\left|a\varphi - \frac{b^2 - c^2}{a}\right| = \left|\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right|.$$

Эта теорема равносильна обобщенной теореме Пифагора, которую можно записать формулами:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac^1\left(B < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac^1\left(B > \frac{\pi}{2}\right),$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab^1,$$

доказанными Евклидом в 12 и 13 предложениях II книги.

В *Л* (л. 119*а*—119*б*) текст этого раздела почти полностью идентичный.

[228] В *П* неверно: «BC».

[229] В *П*: «середина» (sic!).

[230] В *П* неверно: «AF».

[231] В *Л* этот абзац выделен в особый раздел с заголовком: «Второе доказательство, принадлежащее мне, более легкое, чем первое». Текст его (л. 119*б*) имеет незначительные редакционные отличия. Дальнейшая часть нашего раздела в *Л* отсутствует.

[232] В *Т* неверно: المستقيمين («прямыми») вместо المنقسمين («делящимися).

[233] Перевод в *П* — неверный, искажающий математический смысл: «вычтем одно из них из другого».

[234] Так в *И* и *Т*. В *П* неверно: «HF».

[235] Текст данного раздела дошел в двух различающихся в деталях редакциях. Одна из них отражена Банкипурской рукописью (*И*), другая — Стамбульской, с которой полностью совпадает текст в *Л* (л. 119*б*—120*б*). В *Т* последовательно даны обе редакции. Мы следуем тексту *И*, но отдельные дополнения заимствуем из второй редакции, выделяя их курсивом.

В рис. 47 мы принимаем конъектуру, предложенную в *П*: точка M должна быть на расстоянии, равном BE. В *И* эта точка и линия DM отсутствуют. Беруни о положении точки M ничего не говорит. В *Т* ею обозначено пересечение линий AB и CD, что не отвечает оговоренному Беруни равенству площади $\triangle ADC$ сумме площадей $\triangle ABC$ и $\triangle BDM$.

[236] В *П* грубая ошибка: «квадрату [суммы]».

[237] В *П* неверно: «DF».

[238] Конъект. В *Т* и *И*: مرّة («взятую один раз»). Такое указание не имеет смысла. Вероятно, в оригинале было مرّتين («взятую два раза»), что вытекает из равенства: $EH^2+2EH \cdot HA=EH\,(EH+2HA)$. Ср. с переводом в *П*.

[239] Нами принимается здесь конъюктура, предложенная в *П*.

[240] Пропущено в *П*.

[241] В *П* перевод неверен: «Если умножим плоскую фигуру EH на EA, а AG, т. е. один из двух крайних членов [пропорции], на плоскую фигуру CK на KA, т. е. на другой крайний член, получится квадрат среднего члена, т. е. площади треугольника [ABC]».

[242] В *П* неверно: «AC».

[243] Ср. с переводом в *П*.

[244] В *П* неверно: «BD короче DC, поэтому CG больше EB».

[245] В *П* неверно: «AC».

[246] Последние две фразы в *Т* ошибочно повторены дважды.

[247] В *П* неверно: «$ADCH$».

[248] В *П* неверно: «AH».

[249] Т. е. сумма двух вышеназванных произведений.

[250] Опущено в переводе в *П*.

[251] В *Т* ошибочно: «BE».

[252] Ср. с переводом в *П*.

[253] В *Т* ошибочно вместо этого обозначения — предлог «к» (الى).

[254] В *Т* ошибочно: «AL».

[255] Так в *И* и *П*. В *Т* ошибочно: ضرب («произведение»).

[256] В *Л* (л. 120*б*—121*а*) это доказательство — с иными буквенными обозначениями и начало его в несколько ином виде:

«Доказательство действия, приписываемого индийцам, по определению площади четырехугольника, вокруг которого описана окружность, принадлежащее Абу 'Абдаллаху аш-Шанни.

Если мы хотим [определить] площадь четырехугольника, вокруг которого описана окружность, в которой он очутился, то мы возьмем избытки полусуммы его сторон над каждой из его сторон, затем умножим один из этих избытков на второй избыток, произведение — на третий избыток, [новое] произведение — на четвертый избыток. Затем извлечем корень из полученного произведения, и он будет площадью этого четырехугольника.

Для доказательства начертим четырехугольник $ABCD$ в круге $ABCD$ (рис. VI). Разделим дуги BAD и BCD пополам в точках E и G. Соединим линиями B с E, E с D, D с G, G с B, E с A и E с G. Проведем перпендикуляр EH к AB и перпендикуляр GF к BC. Обозначим пересечение линий BD и EG точкой K. Треугольники EHA и EKD будут подобными. ED — длиннее, чем EA, а KD — длиннее, чем HA. BF — полусумма BC и DC согласно предпосланному [утверждению]. BF — длиннее, чем KD* и, следовательно, намного длиннее, чем AH. Подобным же доказательством, точно так же, выясняется, что BH — длиннее, чем FC».

Продолжение доказательства в *Л* — в редакции, близкой к *Т*.

257 Мухаммад ибн ас-Саббах — астроном IX в. Даты его жизни и место деятельности неизвестны. Занимался преимущественно вопросами движения Солнца, конструирования солнечных часов и теорией определения момента кульминации Солнца. Его труды критически учитывались Ибн ʽИраком и Беруни. (Suter. Die Mathematiker, S. 19; Беруни. Геодезия, с. 163—167; Булгаков. Жизнь и труды Беруни, с. 84; MP, II, с. 58—59; Sezgin, V, S. 252—253, VI, S. 148—149).

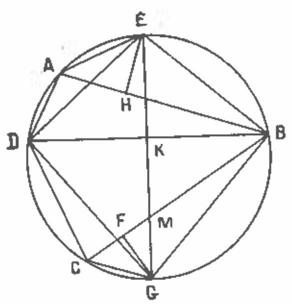

Рис. VI.

258 رصد. Основное значение этого термина — «наблюдение».

259 Наибольшее склонение — угол наклона плоскости эклиптики к плоскости небесного экватора.

260 Перевод в *П* неверен: «Мухаммаду принадлежит трактат о простом вычислении этого, [основанном] на доказательстве».

261 Ср. с переводом в *П*. Подробнее об этих вычислениях Мухаммада ибн ас-Саббаха см.: Беруни. Геодезия, с. 163—167.

262 Азимут восхода — величина дуги горизонта или соответствующего ей угла от точки восхода Солнца в данный день до точки его восхода в день равноденствия. Полный азимут восхода — максимальная его величина. В *П* здесь и далее неверно: вместо «азимут восхода» — «величина восхождения».

263 مدار. В *П* неверно: «сфере».

264 Буквально: «в одной величине».

265 В *П* перевод этой фразы неверен: «Исследования высоты в полуденной сфере еще легче и ближе к осуществлению».

В *Л* (л. 123б) этот раздел — с незначительными редакционными отличиями.

266 أوج. В *П*: «высшая точка Солнца».

267 Этот труд Беруни до нас не дошел. Беруни ссылается на него в своей «Геодезии» (Беруни. Геодезия, с. 145). См. также: Boilot, p. 209, № 101.

268 بالقوّة. В *П* это слово опущено в переводе.

269 حاملة. Речь идет о движении Солнца по эксцентрической орбите (или орбите апогея Солнца), эквивалентной кругу деферента в Птолемеевской схеме движения планет. В *П* неверно: «несущее движение», где термин حامل понят буквально, тогда как он имеет специальное значение «деферент».

270 Ср. с переводом в *П*.

271 نفصل. В *Т* опечатка: نصل («соединим»).

272 В *П* это слово ошибочно отнесено к предыдущей фразе, из-за чего в переводе: «[линия] HO... известна».

273 В *П* неверно: «на квадрат AC».

274 Пропущено в *Т*.

275 В *П* вместо этого местоимения буквенное обозначение «OH».

276 В *Л* этот раздел отсутствует.

277 В *П* перевод неверен: «Тогда в треугольнике ABC угол BAH — по величине половины среднего движения на (sic!) известный угол BHC, потому что угол BAH вписанный. Он получен делением пополам центрального угла».

278 В *П* опечатка «A».

* Принимаем конъектуру Г. Зутера (*З*, с. 41). В *Л*: «BK».

279 В *П* перевод абсолютно неверен: «Остаток применяется для определения апогея».

В *Л* этот раздел отсутствует.

280 Об уравнении Солнца и других понятиях и величинах, связанных с его определением, см. выше в предисловии к переводу (с. 15).

281 Так в *Л* (يفضل). В *Т* и *И*: نفصل («отделим»).

282 Т. е. $AB^2=AD^2+DB^2+2DB\cdot DH$. В *П* это переведено неверно из-за неправильного чтения глагола يفضل (см. выше прим. 281).

283 Ср. с переводом в *П*.

284 В *П* неверно: «FA и FE — косинусы аномалии».

В *Л* на этом текст данного раздела (л. 122а—122б), в целом весьма близкий к *И* и *Т*, обрывается.

285 Пропущено в *П*.

286 В *П* опечатка: «B»

287 Т. е. в Птолемеевской системе движения Луны и планет. В этом случае эксцентрическая орбита Солнца (орбита апогея) займет место круга деферента, а центры эпициклов будут соответствовать положению Солнца. Подробнее см.: Беруни. Книга вразумления, с. 80—84.

*—288 В *И* и *Т* опущено. В таком виде этот заголовок в *Л*.

289 В *Л*: «D с C».

290 محكم. В *П* перевод этой фразы неверен.

291 Так в *И* и *Т*; в *Л* неверно: «AE».

292 LE и EF известны, так как из зиджа (по условию) известна величина AF, равная AL, а выше была определена AE.

293 В *Л* (л. 122б—123а) текст этого раздела почти дословно совпадает с текстом в *И* и *Т*.

294 Работа Беруни «Опровержение лжи путем приведения доказательств к действиям ал-Хорезми в его зидже» до нас не дошла. Книга занимала в автографе 360 листов и была написана в критику неудачных теоретических разъяснений к зиджу Хорезми некоего врача Абу Талхи. (Chronologie, Einleitung, S. XXXX; Boilot, p. 177, № 2).

295 В *П* ошибочно: «DE».

296 В *П* неверно: «как известно».

297 В *Л* (л. 124а) текст этого раздела идентичен тексту в *И* и *Т*.

298 Этот относительно небольшой труд Беруни, занимавший в авторской рукописи 30 листов, до нас не дошел. Сам Беруни отнес его к числу сочинений, посвященных кометам и метеорам, но, как показывает данная ссылка, в нем затрагивались и вопросы геометрии. (Chronologie, Einleitung, S. XXXIII; Boilot, p. 194—195, № 56).

299 По переводу в *П* $AD^2=BD+AB\cdot BC$, тогда как $AD^2=BD^2+AB\cdot BC$.

300 В *Л* ошибочно: «DE».

301 Текст этого раздела в *Л* (л. 123б) идентичен тексту в *И* и *Т*.

Как отмечает Г. Зутер (*З*, с. 72), эта задача может быть решена и из подобия треугольников FHB и ABG, а также FHG и BDG:

$$\frac{BH}{FH}=\frac{AB}{AG} \quad \text{и} \quad \frac{HG}{FH}=\frac{DG}{BD}.$$

Отсюда

$$\frac{BG}{FH}=\frac{AB}{AG}+\frac{DG}{BD}=\frac{AB\cdot BD+AG\cdot GD}{AG\cdot BD}.$$

Следовательно,

$$FH=\frac{BG\cdot AG\cdot BD}{AB\cdot BD+AG\cdot DG}.$$

Тригонометрически, если обозначить угол ABG через α и угол DGB через β, это можно выразить так:

$$FH=\frac{BG}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}.$$

302 В *Л*: «Моя задача». Редакционное добавление «моя» здесь опровергается контекстом заголовка. Вместо «пальма» в *Л*: «деревянная палка».

303 В *Л*: «в книгах».

304 «Книга алгебры и ал-мукабалы» («Китаб ал-джабр ва-л-мукабала», т. е. «Книга восполнения и противопоставления») — распространенное название руководств

по алгебре. Первую книгу с таким названием написал величайший хорезмийский математик, астроном и географ Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми (IX в.), но в его книге этой и других задач, приводимых Беруни, нет. Чей труд имеет здесь ввиду Беруни, неясно. О происхождении задач о пальме и следующей, о двух птицах и рыбе, см.: Розенфельд и Краснова. Примечания, с. 146, прим. 50 и 51.

305 Здесь вставка в *Л*: «Я утверждаю».

306 Это слово есть в *Л*, но выпало из текста в *Т*, *И* и *П*.

307 В *П* опечатка: «*OF*».

308 В целом текст этого раздела в *Л* (л. 121б—122а) идентичен тексту в *Т* и *И*.

309 См. выше прим. 302.

310 В *Л*: «о двух пальмах, реке и двух рыбах».

311 В *П* неверно: «*AC*».

312 В *Л* и *П* это слово опущено.

313 Ср. с переводом в *П*.

314 Текст этого раздела в *Л* (л. 121а—121б) имеет незначительные редакционные отличия и в целом весьма близок к тексту в *И*.

315 Текста этого абзаца в *Л* нет.

316 Так в *И* (قسمة), в *Т* неверно: قسمية («из двух частей»).

317 Т. е. «известная», «сообщающая о себе».

318 В *Л* текста этого введения нет. В *П* его перевод неполон и почти сплошь неверен.

319 Это слово опущено в *П*.

320 Это предложение по существу совпадает с 9 предложением XIII книги «Начал» Евклида (Розенфельд и Краснова. Примечания, с. 146, прим. 52).

321 بحسب . В *П* неверно: «по вычислению».

322 II предложение II книги «Начал» Евклида — о делении отрезка в крайнем и среднем отношении. Текст этого раздела в *Л* (л. 128б) имеет незначительные редакционные отличия.

Здесь мы имеем квадратное уравнение

$$AD^2 = BD^2 + AD \cdot BD$$

с неизвестным BD, которое решается по формуле:

$$BD = \sqrt{\frac{AD^2}{4} + AD^2 - \frac{AD}{2}}.$$

См. *3*, с. 78, прим. 29.

323 Первая, ранее полученная Беруни хорда, — 1/6 окружности.

324 В *П* перевод неверен: «Тогда, как в предыдущих задачах...».

325 В *Л* (л. 124а—124б) текст этого раздела — с небольшими редакционными отличиями (перестановка вариантов в доказательстве при тех же формулировках и т. п.).

Беруни прав, утверждая, это решение этой задачи по формуле

$$2\sqrt{\left(\frac{AB+BG}{2}\right) \cdot \left(\frac{AB-BG}{2}\right)}$$

легче, чем по формуле $\sqrt{AB^2 - BG^2}$. (3, с. 72, прим. 16).

326 Т. е. по хордам $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{10}$ окружности.

327 Определение хорды удвоенной дуги с известной хордой дается в *Л* в ином виде и двумя путями, принадлежащими Беруни (л. 124б—125а):

«Мое определение хорды любой удвоенной дуги с известной хордой.

[Если дана] любая дуга с известной хордой в окружности с известным диаметром, то хорда удвоенной [величины] известна.

Пример этому: хорда AB известна (рис. VII). Дуга BC равна дуге AB. Требуется [определить] AC. Проведем полудиаметр BGE и соединим A с E. Поскольку квадрат AE меньше [суммы] квадратов AB и BE на удвоенное произведение EB на BG, а AE и EB равны, то квадрат AB равен удвоенному произведению EB на BG. Следовательно, BG известна, а оставшаяся GE — половина хорды [дуги CD], дополнения [дуги] AC до полукруга*.

Вычисление этого: умножим известную хорду на себя и разделим половину произведения на половину диаметра. Вычтем частное из полудиаметра. Удвоим остаток

---

* В *Л* ошибочно: «до полудиаметра». Прямоугольные треугольники EE_1D и AGE — равные, поэтому $GE = E_1D = CE_1$. Следовательно, CD известна, как и диаметр AD (по условию). Отсюда по теореме Пифагора известна и искомая AC.

и умножим его на себя. Произведение вычтем из диаметра, умноженного на себя, извлечем корень из частного. Он и будет хордой удвоенной дуги с заданной хордой.

Другой путь к этому, принадлежащий мне.

Он состоит [в следующем]: проведем перпендикуляр EH к AB. Углы BAG и BEH — равные, а углы H и G — прямые. Поэтому треугольники ABG и BEH — подобные. Следовательно, AB относится к AG, как BE и EH. Отсюда AG известна, и удвоенная ее [величина], AC, известна.

Вычисление этого: умножим известную хорду на себя, вычтем произведение из произведения диаметра, [умноженного] на себя. Из четверти остатка извлечем корень и умножим его на известную хорду. Разделим произведение на полудиаметр. Удвоим частное от деления, и получится хорда удвоенной дуги с заданной хордой.

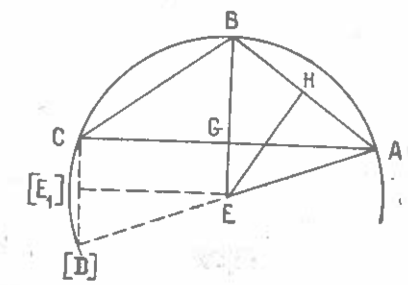

Рис. VII.

Как указывает Г. Зутер (*3*, с. 72—73, прим. 17), первое действие Беруни выражается формулой:

$$AC = \sqrt{AD^2 - 4\left(BE - \frac{AB^2}{2BE}\right)^2}.$$

Если мы обозначим угол AEB через α, то в тригонометрическом выражении это:

$$2r\sin\alpha = \sqrt{4r^2 - 4\left(r - \frac{4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2r}\right)^2}$$

или:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Второй путь выражается формулой:

$$AC = \frac{2AB\sqrt{\frac{AD^2 - AB^2}{4}}}{BE},$$

что в тригонометрическом выражении:

$$2r\sin\alpha = \frac{4r\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{r^2 - r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{r} = \frac{4r^2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{r}$$

или:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Второй путь Беруни совпадает с единственным путем в *И* и *Т*, но имеет иную формулировку вычисления.

328 Эта задача в *И* и *Т* отсутствует и добавлена по *Л* (л. 125 *а*).

329 В *И* и *Т* чертеж отсутствует. Мы повторяем здесь чертеж в *Л* с нашими дополнениями, совпадающими с чертежом в наших примечаниях (см. выше прим. 327).

330 Конъектура Г. Зутера. В *Л*: «на половину диаметра».

331 В *П* перевод математически неверен: «BG — остаток от полудиаметра и AB равны в квадрате AG и GB».

332 Конъектура Г. Зутера. В *Л* текст испорчен: «прибавим к произведению произведение... диаметра...».

333 В *Л* (л. 125а) этот метод имеет свой заголовок: «Другой путь к этому, принадлежащий мне». Текст здесь имеет незначительные редакционные отличия от текста в *И* и *Т*.

Первый путь Беруни выражается формулой:

$$AB=\sqrt{\frac{AD^2}{2}-AD\sqrt{\frac{AD^2-AC^2}{4}}},$$

что в тригонометрическом выражении, если $AEB=\alpha$,:

$$2r\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-r^2\sin^2\alpha}}=\sqrt{2r^2-2r^2\cos\alpha}$$

или:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Второй путь выражается формулой:

$$AB=\sqrt{\left(\frac{AD-\sqrt{AD^2-AC^2}}{2}\right)^2+\frac{AG^2}{4}},$$

которая приводит к той же тригонометрической формуле (*З.*, с. 73, прим. 18).

334 Конъект. В *Т* и *И:* «половины и четверти одной девятой». Беруни ниже специально останавливается на определении хорды $\frac{1}{9}$ окружности и получает ее значение путем приближенного решения кубического уравнения вида $3x+1=x^3$. В *Л* текста этого абзаца нет.

335 Ср. с переводом в *П*.

336 В *П* ошибочно: «*BC*».

337 Конъектура Г. Зутера. В *Т*, *И* и *Л*: «из удвоенной хорды».

338 Текст этого раздела в *Л* (л. 128а—128б) почти дословно совпадает с текстом в *И* и *Т*.

Если обозначить хорды $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{4}$ окружности через X_8 и X_4, то данный метод имеет формулу:

$$X_8=\sqrt{r^2-r(X_4-r)}=\sqrt{2r^2-rX_4}=r\sqrt{2\sqrt{2}}.$$

См. *З*, с. 77, прим. 28.

339 Эта задача в *Л* (л. 117б—118а) редакционно объединена со следующей через одну задачей определения хорды разности двух дуг. При этом сначала разъясняется общий чертеж, затем дается определение хорды разности двух дуг, а затем — хорды суммы двух дуг.

340 В *И* и *П* эта фраза — перед предыдущей.

341 Это слово опущено в *П*.

342 Обозначим искомую хорду суммы двух дуг с известными хордами через X_x, бóльшую хорду — через X_1, меньшую — через X_2. Данное действие Беруни выражается формулой:

$$X_x=\sqrt{4r^2-\left[2\left[r-\frac{\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4r^2-X_2^2}{4}}-\sqrt{\frac{4r^2-X_1^2}{4}}\right)^2}{2r}\right]\right]^2}.$$

343 Это определение отсутствует в *И* и *Т* и добавлено по *Л*.

344 В *П* неверно: «половина хорды *AB* дополнения до полукруга». Это имеет совершенно иной математический смысл.

345 В *Т* опечатка: ندير («проведем окружность») вместо نزيد.

346 В *Т* опечатка: ننصفه («разделим ее пополам») вместо ننقصه.

347 Буквально: «умножим возросшее на уменьшенное».

348 В *П* неверно: «извлечем».

349 Это слово опущено в *П*.

350 В *Л* (л. 125а—125б) текст этого раздела весьма близок к тексту *И* и *Т*. Обозначим известные хорды *AB* через X_1 и *BC* — через X_2. Беруни сначала определяет линию *DE* по формуле:

$$DE=\sqrt{\left(r+\frac{X_2}{2}\right)\left(r-\frac{X_2}{2}\right)}-\sqrt{\frac{4r^2-X_1^2}{4}}.$$

Затем по теореме Пифагора он определяет искомую *AD:*

$$AD=\sqrt{DE^2+\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)^2}.$$

351 В *Т* опечатка: وترج («хорда *H*») вместо ونخرج («проведем»).

352 В *П* неверно: «дуги».

353 Конъект Г. Зутера. См. выше формулу в прим. 342.

354 Опущено в *Т*.

355 Обозначим бóльшую из известных хорд через X_1 и меньшую — через X_2. Данное действие Беруни выражается формулой:

$$X_x=\sqrt{4r^2-\left[r-\frac{\left(X_1-\frac{X_1+X_2}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4r^2-X_2^2}{4}}-\sqrt{\frac{4r^2-X_1^2}{4}}\right)^2}{2r}\right]^2}.$$

Формула Г. Зутера (*З*, с. 75, прим. 24) неверна: делитель в квадратных скобках у него *r* вместо 2*r*, уменьшаемое — 2*r* вместо *r*; в круглых скобках выражение $\left(X_1-\frac{X_1+X_2}{2}\right)^2$, соответствующее квадрату величины линии *EB* («избыток бóльшей хорды над половиной ее суммы с меньшей хордой»), у него произвольно заменено на выражение $\left(\frac{X_1-X_2}{2}\right)^2$.

356 В *П* ошибочно: «*DB*».

357 بالتجاوز. Имеется в виду общая величина, которая при одном действии определяет хорду суммы дуг, а при другом — хорду их разности.

358 Эти два слова взяты из *Л*. Там заголовок несколько иной: «Определение хорды разности и хорды суммы [двух дуг], одно из другого, моим способом, похожим на предложенный Абу Насром Мансуром ибн ‘Али ибн ‘Ираком».

359 Текст этого раздела в *Л* (л. 127б) весьма близок к тексту в *И* и *Т*. Обозначим искомую хорду суммы дуг через X_a, искомую хорду разности дуг — через X_b, известную бóльшую хорду — через X_1, известную меньшую хорду — через X_2 и известную хорду дополнения дуги большей хорды до полукруга — через X_3. Тогда данное действие Беруни можно записать так:

$$BE=\frac{X_2\cdot\frac{X_3}{2}}{r};$$

$$X_a=\sqrt{X_1^2-\left(BE^2-X_2^2\right)}+BE;$$

$$X_b=\sqrt{X_1^2-\left(BE^2+X_2^2\right)}-BE.$$

360 Эта задача переводится нами по тексту *Л*, поскольку в *И* и *Т* она крайне сокращена и выглядит так:

«Другой путь.

Если мы возьмем отношение *AG* к *AH*, как *DE* к *DB*, то из него *DE* станет известной. Объясним вычисление этого, которое таково: умножим меньшую хорду на половину большей. Разделим произведение на половину диаметра. Частное умножим на равное себе и вычтем это, [по отдельности], из произведений каждой из двух хорд, умноженной по отдельности на себя. Извлечем корни из двух остатков. И если мы их сложим, получится в сумме хорда суммы [двух дуг], а если возьмем их разность, она будет равна их разности».

Об упомянутом в заголовке труде Беруни см. выше, прим. 79.

361 Далее в *Л* следует текст абзаца, заключающего в редакции *И* и *Т* раздел «Определение хорды разности двух дуг с известными хордами».

В тех же обозначениях, которые были приняты нами выше (прим. 359), это действие имеет следующее выражение:

$$DE = \frac{X_1 \cdot X_2}{2r};$$

$$X_a = \sqrt{X_1^2 - DE^2} + \sqrt{X_2^2 - DE^2};$$

$$X_b = \sqrt{X_1^2 - DE^2} - \sqrt{X_2^2 - DE^2}.$$

362 В *П*: «другому». При таком переводе теряется косвенное указание Беруни на то, что предыдущий способ принадлежал ему.

363 «Шахский Альмагест» — главный астрономический труд учителя Беруни Абу Насра Мансура ибн ʻАли ибн ʻИрака, посвященный хорезмшаху ʻАли ибн Маʼмуну. До нас эта книга не дошла (Кадри, с. 272).

364 Здесь заданные хорды — AD и BD. Хорда CD в соответствии с предыдущим доказательством равна AD.

365 Как следствие теоремы Пифагора для прямоугольных треугольников CGD и BGD.

366 В *П* неверно: «HD».

367 В *П* неверно: «CD».

368 Так в *Л* и *Т*. В *И* и *П* неверно: «BD».

369 Т. е. как $\frac{DS}{BS}$ в силу подобия прямоугольных треугольников DBS и DEA с равными углами A и S.

370 В *Л* (л. 127*а*—127*б*) этот метод изложен несколько подробнее. Однако все дополнения в *Л* являются повторами промежуточных действий, изложенных в предшествующем доказательстве и потому являются лишними.

Обозначим бóльшую из двух известных хорд через X_1, меньшую — через X_2, хорду дополнения до полукруга дуги большей хорды — через X_3, хорду дополнения до полукруга дуги меньшей хорды — через X_4, искомую хорду суммы двух дуг — через X_x, искомую хорду разности двух дуг — через X_y и промежуточные величины — через a и b.

Тогда первое действие выражается так:

$$a = \frac{X_2 \cdot X_3}{2r};$$

$$X_y = \sqrt{a^2 + \left(X_1^2 - X_2^2\right)} - a.$$

Формулами второго действия будут:

$$b = \frac{X_1 \cdot X_4}{2r};$$

$$X_x = a + b;$$

$$X_y = a - b, \quad \text{или} \quad b - a.$$

371 Ср. с переводом этого заголовка в *П*.

372 В *Л* (л. 126*а*) здесь вначале повторены известные ранее общие условия: даны хорды AD и BD, и $AD = BC$. В остальном текст этого раздела существенно не отличается от текста в *И* и *Т*.

Обозначим бóльшую из известных хорд через X_1, меньшую — через X_2, хорду суммы двух дуг — через X_a и хорду разности двух дуг — через X_b.

Тогда формулами действий будут:

$$X_a = \frac{X_1^2 - X_2^2}{X_b};$$

$$X_b = \frac{X_1^2 - X_2^2}{X_a}.$$

373 В *П* неверно: «BC».

374 Т. е.

$$\frac{(AB^2 + DB^2) - AD^2}{2AB} = BE.$$

В *П* перевод неверен; согласно ему получается, что

$$\frac{AD^2 - DB^2}{2AB} = BE.$$

Такая же ошибка в *Л*.

375 В *П* перевод здесь неверен: слово «квадрат» в *П* — в единственном числе и потому относится только к DG, тогда как в тексте это слово в двойственном числе и относится к DG и GA.

376 В *Л* (л. 126*а*—126*б*) текст этого раздела существенно не отличается от текста в *И* и *Т*.

Если мы примем те же обозначения, что и выше (см. прим. 372), то данные действия выражаются формулами:

$$X_b = X_a - \frac{2\left(X_1^2 - X_2^2\right)}{2X_a};$$

$$X_a = X_b + \frac{X_1^2 - \left(X_2^2 + X_b^2\right)}{X_b}.$$

377 Это слово добавлено по *Л*.

378 Опущено в *П*.

379 Текст этой задачи в *Л* (л. 125*б*) существенно не отличается от текста в *И* и *Т*. Продолжение этого раздела (до следующего заголовка) в *Л* опущено.

380 В *П* ошибочно: «с известным диаметром».

381 Точнее: «и двух птицах».

382 Это слово добавлено по *Л*.

383 В *Л* (л. 125*б*—126*а*) добавлено:

«Вычисление этого. Умножим полусумму этих двух хорд на себя и вычтем произведение из половины произведения диаметра, [умноженного] на себя. Извлечем из остатка корень. Если мы хотим [определить] бóльшую хорду, прибавим этот корень к полусумме двух хорд, и получится бóльшая хорда. А если мы хотим определить меньшую хорду, вычтем этот корень из полусуммы двух [хорд], и получится меньшая хорда».

Обозначим бóльшую хорду через X_1, меньшую — через X_2 и известную сумму этих двух хорд через a.

Тогда данные действия выражаются так:

$$X_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2};$$

$$X_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

384 Этот заголовок отсутствует в *И* и *Т* и добавлен по *Л*.

385 Так в *Л*; в *И*, *П* и *Т*: «EB».

386 В *Л* (л. 126*а*) вместо этой фразы: «Прибавим [EB] к AE — получим AB, а вычтем [EB] из AE, в остатке будет AG, равная BC».

387 В *П* неверно: «сумму», что путает перевод.

388 В *Л* этого раздела нет.

389 В *П* неверно: «угол ABC делится линией BFG пополам». Линия BFG — не заданная, а строится так, чтобы разделить данный угол пополам.

390 AD известна как хорда половины дуги с заданной хордой AC. KA — половина заданной хорды. Отсюда (из треугольника DKA) определяется катет DK. Диаметр предполагается известным, поэтому и KG известна.

391 Указание о подобии всех этих трех треугольников опущено в *П*.

392 Этого раздела нет. в *Л*.

[393] Т. е. далее можно определить хорды дуг $\frac{3^\circ}{2}, \frac{3^\circ}{4}, \frac{3^\circ}{8} \ldots$ и т. п.

[394] В *И* и *Т*: يتفاضل. Мы читаем: بتفاضل.

[395] Ср. с переводом всего этого абзаца в *П*.

[396] В *П* ошибочно: «*AB*». Из-за этого неверен перевод всей фразы: «Тогда произведение *AB* на *BD*, т. е. *BC*, [вместе с квадратом *BC*] равно квадрату *AD*».

[397] Отсюда в *П* последовательно все обозначения «*G*» заменены на «*C*» и наоборот.

[398] В *П* ошибочно это условие представлено как следствие.

[399] В *П* здесь полное расхождение с текстом.

[400] Idem.

[401] В *Л* этого раздела нет.

Перед этим разделом издатель *Т* произвольно включает в данный труд Беруни две главы из его «Канона Мас'уда», посвященные определению хорды $\frac{1}{9}$ окружности и 1°. Текстологически это недопустимо, и следовало бы данный материал привести как параллель в приложении.

[402] Перевод этой фразы в *П* неверен. В частности, слова «основы» или «принципы геометрии» здесь спутаны с названием труда Евклида «Начала».

[403] Абу Йусуф Йа'куб ибн Исхак ал-Кинди — крупнейший арабский философ и ученый-энциклопедист IX в. (ум. в 70-х годах IX в.). Работал в основном в Багдаде. Автор многочисленных трудов по философии, логике, астрономии, арифметике, геометрии, теории музыки и другим наукам. (Кадри, с. 166—176 с подробным перечнем работ ал-Кинди, относящихся к области математики и астрономии; Sezgin, III, S. 244—247, IV, 375—376, V, S. 255—259, VI, S. 151—155, VII, S. 130—134, 241—261, 320—327; МР, II, 66—74).

[404] Перевод этой фразы в *П* неверен.

[405] Это — так в силу равенства внешнего угла двум противолежащим внешним углам треугольника.

[406] В *П* неверно: «*EB*».

[407] Т. е. углу, удвоенная величина которого, как доказывалось выше, равна углу *EDK*. Следовательно, $2\angle OEA = \angle BEO$, т. е. $\angle OEA = \frac{1}{3}\angle BEA$.

[408] Это доказательство вместе с чертежом из-за путаницы в порядке листов в рукописи, использованной в *И* и *Т*, оказалось в конце издания *И* (с. 224, 225) и опущено в *Т*. В переводе его мы опираемся только на текст в *И*. В *Л* этого раздела нет.

[409] Перевод этого места в *П* неверен.

[410] Конъект. В *И*: «*ED*...»; в *П*: «*ED* [*M*]». Мы исходим из того, что *EM* и *MH* — меньшие катеты подобных прямоугольных треугольников *KEM* и *DHM*.

[411] В *И* ошибочно: «*TG*».

[412] Опущено в *П*.

[413] Это — так, поскольку *KF* была взята при построении равной радиусу круга (см. предыдущий раздел), а *FM* также равна радиусу *OE* в силу равенства параллельных сторон параллелограмма *EOFM*.

[414] Присоединением отношения называется переход от отношения $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ к отношению $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. Пусть $a = EM$, $b = MH$, $c = KM$ и $d = DM$. Тогда $a + b = EH$, а $c + d = KD$. Поэтому $\frac{EH}{HM} = \frac{KD}{DM}$.

[415] См. выше прим. 413.

[416] В *И* ошибочно: «*BF*».

[417] Перевод этой фразы в *П* неверен.

[418] В *П* неверно: «*PF*».

[419] Речь идет о труде Беруни «Восполнение зиджа Хабаша [теоретическими] обоснованиями и очищение его действий от ошибок» (Boilot, p. 177, № 4). См. выше прим. 79.

[420] Речь идет о недошедшем труде Беруни «Свод употребительных методов для определения хорд круга» (Boilot, p. 214, № 108). Данная ссылка доказывает, что этот труд был завершен Беруни до 1027 г.

[421] Август 1027 г. Данное заключение, судя по его тексту, относится к книге Беруни «Об определении хорд в круге посредством свойств ломаной линии в нем», но в *И* и *Т* оно помещено в конце всей сборной редакции после фрагментов из сборника геометрических задач (в *И* на с. 226, в *Т* на с. 286—287).

КОММЕНТАРИИ К ТРАКТАТУ

«ОБ АНАЛИЗЕ И ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ [СОЛНЦА]»

[1] Этот отрывок, конец которого отмечен ниже (прим. 17), относится, по-видимому, к введению Беруни к его трактату «Об уравнении Солнца», о котором см. выше в предисловии к переводу. Кого здесь упоминает Беруни в качестве лица, обратившегося к нему за разъяснениями, неясно. В *Т* данный отрывок отсутствует, и он переведен нами по тексту в *И*, где он, благодаря путанице листов, оказался вставленным в текст сборника геометрических задач Ибрахима ибн Синана (*И*, с. 219—224). В начале отрывка текст в *И* испорчен и представляет хаотическую цепь мелких обрывков отдельных фраз, перемежающихся лакунами. Связующие звенья между этими обрывками даны нами в качестве догадок в квадратных скобках.

[2] О Хабаше ал-Хасибе и его зидже см. выше прим. 79 к переводу трактата «Об определении хорд».

[3] Конъект. В *И*: بالدودب; мы читаем: بالدؤوب.

[4] Буквально: «вещей».

[5] خاصة.

[6] خصة.

[7] Лакуна. Восполнена по конъектуре.

[8] Конъект. В *И*: «*DG*».

[9] Конъект. В *И*: «*DB*».

[10] Конъект. В *И*: «*B*»; — пропущен *алиф* и перепутаны графически близкие в скорописи буквы ف и ب.

[11] Конъект. В *И* типичная графическая ошибка: «*LH*» (لح) вместо «*LC*» (لج).

[12] Конъект. В *И* невозможное «*LF*».

[13] Т. е. дуга *AB* не в градусах, а по абсолютной величине меньше, чем квадрант круга *AMS*.

[14] نطاق.

[15] Лакуна. Восполнена по конъектуре.

[16] Конъект. В *И* невозможное «*LW*».

[17] Здесь конец первого отрывка из данного трактата в *И*, являющийся, по-видимому, концом введения к трактату.

[18] Это — второй отрывок из данного трактата, оказавшийся в *И* среди текста сборника геометрических задач (*И*, с. 206—209) и не вошедший в *Т*. Конец его отмечен ниже (прим. 25). Мы полагаем, что вместе со следующим третьим отрывком он составляет часть первой главы трактата, ибо вторая и третья его главы дошли до нас полностью, а введение имеет концовку.

[19] На чертеже эти окружности отсутствуют, но они легко могут быть представлены.

(a—20. Эта часть фразы в *И* ошибочно повторена дважды.

[21] Конъект. В *И*: «*B*».

[22] Конъект. В *И* типичная графическая ошибка: «*HF*» (حط) вместо «*CF*» (جط).

[23] В *И* опечатка: «*NDE*».

[24] В *И* опечатка: «*LED*».

[25] Здесь данный отрывок в *И* заканчивается.