Algebraisches über das Schach bei Bîrûnî.

Mitgetheilt

von

Ed. Sachau.

Wenn der verdiente Verfasser des neuesten Werkes über die „Geschichte und Litteratur des Schachspiels", Herr A. van der Linde in dem Vorwort des zweiten Bandes auf Grund einer Mittheilung von Herrn Prof. A. Weber erwähnt, dass auch Bîrûnî in seinen Werken auf das Schachspiel Bezug nimmt, so kann ich das bestätigen; sowohl in dem Werk über Indien wie in der Chronologie handelt er gelegentlich vom Schach. Und da ich gegenwärtig grade mit der Bearbeitung dieses Theiles der Chronologie (*Alâthâr Albâkiya*) beschäftigt bin, so erlaube ich mir die betreffende Notiz in Text und Uebersetzung hier mitzutheilen; sie lehrt uns die Methode kennen, nach welcher die Araber jene bekannte Zahl berechneten, welche entsteht, wenn man auf das erste Feld des Schachbretts 1 Korn, auf das zweite 2, auf das dritte 4, auf das fünfte 8, auf das sechste 16 Körner u. s. w. legt. Die letzte Zahl dieser geometrischen Progression ist auch von Mas'ûdî in den „Goldenen Wiesen" mitgetheilt (richtig bei Gildemeister, Scriptorum Arabum de rebus Indicis loci p. 142, falsch bei Barbier de Meynard I, 160).

Zu Anfang des Kapitels über die Vergleichung der verschiedenen Aeren unter einander giebt Bîrûnî eine Tabelle, welche die Entfernungen der einzelnen Epochen von einander — in Tagen ausgerechnet — übersichtlich darstellt. Diese Tages-Summen sind nun auf folgende dreifache Weise bezeichnet:

1. mit Indischen Ziffern (مكتوبة بارقام الهند)
2. umgerechnet in das Sexagesimal-System (مرفوعة ستّين ستّين)
3. übertragen auf die *Ḥurûf-aljummal* (d. h. auf die Zahlenwerthe der Buchstaben nach der Reihenfolge des Hebräischen Alphabetes).

Der Zweck dieser dreifachen Bezeichnung ist die Verhütung von Corruptelen in der Ueberlieferung grosser Zahlen. Hierauf nun das folgende:

مِثالُ ذلك بشىءٍ غيرِ مجهولٍ وهو أنّا متى ضَرَبْنا مالَ مالِ مالِ السِتّةَ عَشَرَ فى نفسِه وأَسْقَطْنا من المبلغِ واحدًا كان ذلك هو ما يَجْتَمِعُ فى جميعِ بيوتِ رُقْعةِ الشطرنجِ من التضاعيفِ اذا ٱبْتُدِئَ فى الاوّلِ منها بواحدٍ ويكونُ ذلك بأَرْقامِ الهندِ ۱۸ ۴۴۶ ۷۴۴ ۰۷۳ ۷۰۹ ۵۵۱ ۶۱۵ ويكونُ مرفوعًا بسِتّينَ الى ما ٱرْتَفَعَ ل ل كز ط ه ج ن م لا . يه ويكون منقولا الى حُروفِ الجُمّلِ ه ا و ا ه ه ط ع ج ز م د ز و د د ح ا فاذا نَقَلْتَ هذه الحروفَ على وِلائها الى ارقامِ الهندِ حَصَلَ العَدَدُ المذكورُ ۞

„Ein Beispiel dieser dreifachen Zahlbezeichnung liefert ein wohlbekanntes Rechenexempel. Wenn wir nämlich das Quadrat von dem Quadrat von dem Quadrat von 16 mit sich selbst multipliciren (d. i. $[((16^2)^2)^2]^2 = 16^{16}$) und von der Summe 1 subtrahiren, so erhalten wir eine Zahl, welche die Summe der Verdoppelungen aller Felder des Schachbrettes darstellt, wenn man mit 1 auf dem ersten Feld anfängt.

Es ist die folgende Zahl, und zwar mit Indischen Ziffern bezeichnet:

18, 446, 744, 073, 709, 551, 615

umgerechnet in das Sexagesimal-System:

30. 30. 27. 9. 5. 3. 50. 40. 31. 0. 15.

und übertragen auf die *Ḥurûf-aljummal*:

ه ا و ا ه ه ط ع ج ز م د ز و د د ح ا

Wenn man diese Buchstaben der Reihe nach in Indische Ziffern umwandelt, erhält man die eben erwähnte Zahl."

Einige Zeilen weiter unterbricht der Verfasser den Faden seiner chronologischen Bemerkungen durch die folgende Notiz über die Regeln geometrischer Progression, nach denen die obige Zahl berechnet ist:

إنّ لتضعيفِ الشَّطْرَنْجِ وحِسابِه أَصْلَيْنِ احدُهما أنّه متى ضُرِبَ ما فى بيتٍ مّا من البيوتِ الاربعةِ والستّينِ فى نفسِه وَقَعَ المرتفِعُ فى البيتِ الذى بُعْدُه منه كبُعْدِ البيتِ المضروبِ من الواحدِ، مثالُه أنّا متى ضَرَبْنا ما فى البيتِ الخامسِ فى نفسِه وهو يو كان المرتفِعُ منه

رنو وهى تَقَعُ فى البيتِ التاسعِ وبُعْدُ البيتِ التاسعِ من الخامسِ كبُعْدِ
البيتِ الاوّلِ منه ۞ وأمّا الاصلُ الثانى فهو أنّا متى أَخَذْنا ما فى بيتٍ
من البيوتِ وأسْقَطْنا منه واحدًا كان الباقى مُساوِيًا لجميعِ ما فى البيوتِ
التى قَبْلَه، مِثالُه أنّا متى اخذْنا ما فى البيتِ السادسِ وهو لب
ونَقَصْنا منه واحدًا فبَقِىَ احدٌ وثلثون وهو مُساوٍ لِما فى البيوتِ التى
قَبْلَه اذا اجْتَمَعَتْ وهى ا ب د ح يو ۞ ومعنَى [ضَرْبِ مالِ مالِ مال
الستّةَ عَشَرَ][1] فى نفسِه هو ضَرْبُ ما فى البيتِ الثالثِ والثلثين فى نفسِه
لِيَحْصُلَ ما فى البيتِ الخامسِ والستّين واذا أُسْقِطَ منه واحدٌ يَحْصُلُ[2]
جميعُ ما فى الرُّقْعةِ ومالُ[3] لج الذى يَرْتَفِعُ من ضَرْبِ ما فى بيتِ يز[4] ومال
يز ما يرتفعُ من ضَرْبِ ما فى بيتِ ط ومالُ ط ما يرتفعُ من ضربِ ما فى
بيتِ ه وهو الستّةَ عَشَرَ المذكورةُ ۞

Zu dem Text dieser Stelle habe ich folgendes zu bemerken:

1. An Stelle der eingeklammerten Wörter ضرب مال مال مال الستة عشر haben alle drei Handschriften ضرب مال مال المال ohne الستة عشر und ohne الستة عشر, aber meine Aenderung resp. Ergänzung erweist sich durch den Zusammenhang als nothwendig.

2. An Stelle von يحصل würde man erwarten حَصَلَ; aber ich behalte يحصل bei, weil es möglich ist, wenn auch schlecht.

3. Das Wort مال hat hier eine besondere Bedeutung. In der Regel bezeichnet es entweder die zweite Potenz einer Zahl oder eine positive Zahl im Gegensatz zu einer negativen. Hier aber bedeutet es — in den Stellen مال لج — مال يز — und مال ط — den Besitz von 33, 17, 9 d. h. diejenigen Zahlen, welche auf den Feldern nr. 33, nr. 17 und nr. 9 stehen, welche ich im folgenden als die Zahl des Feldes 33, die Zahl des Feldes 17 u. s. w. bezeichne.

4. Bîrûnî nimmt sich eine grosse Freiheit, indem er in den letzten drei Zeilen — nach den Worten فى بيت ط — فى بيت يز und فى بيت ه die Worte فى نفسه auslässt.

Demnach übersetze ich diese Stelle in folgender Weise:

„Für die Verdoppelung der Felder des Schachbrettes und die Berechnung derselben giebt es folgende zwei Regeln:

I. Das Quadrat der Zahl eines Feldes (x) von den 64 Feldern ist gleich der Zahl desjenigen Feldes, welches von dem Felde x um so viele Felder entfernt ist als das Feld x von dem ersten Feld.

Z. B. wenn wir die Zahl des 5. Feldes d. i. 16 zum Quadrat erheben, erhalten wir die Zahl 256, welches die Zahl des 9. Feldes ist. Nun ist das 9. Feld von dem 5. Felde eben so weit entfernt als das 5. Feld von dem 1.

II. Die Zahl eines Feldes minus 1 ist gleich der Summe der Zahlen aller vorhergehenden Felder.

Z. B. die Zahl des 6. Feldes ist 32. Indem wir hiervon 1 subtrahiren, erhalten wir den Rest 31, der gleich ist der Summe der Zahlen aller vorhergehenden Felder, nämlich $1+2+4+8+16$ $(=31)$.

Das Quadrat von dem Quadrat von dem Quadrat von 16 — mit sich selbst multiplicirt (d. i. $[((16^2)^2)^2]^2$ oder 16^{16}) ist gleichbedeutend mit der zweiten Potenz der Zahl des Feldes nr. 33, durch welche Operation die Zahl des 65. Feldes gefunden werden soll. Wenn man dann von dieser Zahl 1 subtrahirt, so erhält man die Summe der Zahlen aller Felder des Schachbrettes. Die Zahl des Feldes nr. 33 ist gleich dem Quadrat der Zahl des Feldes nr. 17. Die Zahl des Feldes nr. 17 ist gleich dem Quadrat der Zahl des Feldes nr. 9. Die Zahl des Feldes nr. 9 ist gleich dem Quadrat der Zahl des Feldes nr. 5; und diese (d. h. die in dem fünften Felde stehende Zahl) ist die Anfangs erwähnte Zahl 16."

Hieran schliesst sich ein Citat aus einem anderen Werke Bîrûnî's, in dem dieselben eben angeführten Regeln noch einmal — und zwar in etwas veränderter Form — mitgetheilt werden. Text:

قال ابو ريْحانٍ فى كتابِ الأرْقامِ أُرِيدُ أُبَيِّنُ الطريقَ الى حِسابِ
الشطرنجِ ليُتَدَرَّبَ فى مُزاوَلَتِه ومِمّا يَجِبُ أنْ نُقَدِّمَ له هو أنْ تَعْرِفَ
أنّ تَضاعِيفَ زَوْجِ الزوجِ مَهْمَا أُخِذَ متباعدةً متواليةً (sic) فانْ كانت
فَرْدًا كان لها واسطةٌ واحدةٌ وضَرْبُنا احدى الحاشيتَيْن فى الأُخْرَى مُساوٍ
لضَرْبِ احدى الواسطتَيْن فى الاخرى، فهذا أَحَدُ ما يجب أنْ يُعْرَفَ
قبله والآخَرُ أنّا اذا أَرَدْنا جَمْعَ تلك العِدّةِ المفروضةِ من تَضاعيفِ
زَوْجِ الزوجِ أَضْعَفْنا أَعْظَمَها وهو الاخيرُ وأَلْقَيْنا منها اصغرَها وهو الاوّلُ

فيَبْقى مجموعُ تلك التضاعيفِ، واذا تقرَّر ذلك زِدْنا فى بيوتِ رُقْعَةِ
الشطرنجِ بيتًا يكون خامسًا وستّين ومعلومٌ أنّ عَدَدَه الذى فيه من
تضاعيفِ زَوْجِ الزوجِ المبتدئةِ من الواحدِ مُساوٍ لمجموعِ ما فى جميع
بيوتِ العَرْصَةِ وزيادةِ اوّلِها الذى هو الواحدُ الاوّل فاذا نُقِصَ منه واحدٌ
بَقِىَ ما فى جميعِ البيوتِ، فاذا جعلنا هذا البيتَ والاوّلَ حاشيتَيْن
كان البيتُ الذى فيه لج واسطةً لهما وهى الواسطةُ الأُولَى واذا جعلنا
بيتَ لج والبيتَ الاوّلَ حاشيتَيْن كان بيتُ يز واسطةً لهما وهى الثانيةُ
واذا جعلنا بيتَ يز والبيتَ الاوّلَ حاشيتَيْن كان بيتُ ط واسطةً لهما
وهى الثالثةُ واذا جعلنا بيتَ ط والبيتَ الاوّلَ حاشيتَيْن كان بيتُ ه
واسطةً وهى الرابعةُ واذا جعلنا بيتَ ه والبيتَ الاوّلَ حاشيتَيْن كان
بيتُ ج واسطةً وهى الخامسةُ واذا جعلنا بيتَ ج والبيتَ الاوّلَ حاشيتَيْن
كان بيتُ ب واسطةً وهى السادسةُ وفيه اثنان، واذا ضَرَبْنا الاثنين
فى نفسِهما آجْتَمَعَ مَضْروبُ البيتِ الاوّلِ فى بيتِ ج لكن فى الاوّلِ واحدٌ
فما آجْتَمَعَ إذَنْ هو الواسطةُ الخامسةُ فى بيتِ ج وهى اربعةٌ نَضْرِبُها
فى مِثْلِها فيكونُ ستّةَ عَشَرَ وهى الواسطةُ الرابعةُ فى بيتِ ه فنضربُها
فى مِثْلِها فيكونُ ٢٥٦ وهى الواسطةُ فى بيتِ ط واذا ضربنا فى مثلِها
آجْتَمَعَ ٦٥٥٣٦ وهى الواسطةُ الثانيةُ فى بيتِ يز واذا ضربنا فى مثلها
اجتمع ٤٢٩٤٩٦٧٢٩٦ وهى الواسطةُ الأُولَى فى بيتِ لج فاذا ضربناها
فى مثلِها اجتمع ١٨٤٤٦٧٤٤٠٧٣٧٠٩٥٥١٦١٦ فاذا أَسْقَطْنا منه
واحدًا وهو الذى فى البيتِ الاوّلِ بَقِىَ جميعُ ما فى بيوتِ العَرْصَةِ اعنى
العَدَدَ الذى مَثَّلْنا به اوّلًا ۞

Zur Erklärung dieses Abschnittes muss ich vorausschicken, dass der Ausdruck زوج الزوج eine Potenz von 2 (d. h. eine solche Zahl, welche — durch 2 dividirt — als letzten Quotienten 1 ergiebt) bedeutet; ferner dass mit dem Worte حاشيتان die beiden Enden einer Progression bezeichnet werden. Z. B. in der Reihe: 1. 2. 4. 8. 16 sind die Zahlen 1 und 16 die حاشيتان.

Zum Text dieser Stelle ist zu bemerken, dass in der dritten Zeile nach den Wörtern متباعدة متوالية etwas ausgefallen sein muss (in allen drei Handschriften) und zwar ziemlich viel, weshalb es nicht zu verwundern ist, dass die beiden Worte متباعدة متوالية keinen ganz klaren Sinn ergeben. Die Lücke wird indicirt 1. durch das ف in فان كانت فردا الخ, das bei der überlieferten Textgestalt ganz sinnlos ist, 2. durch den Dual des folgenden Wortes الواسطتين, weil in dem vorhergehenden nur von einem **einzigen medium** واسطة die Rede ist, nicht aber von zweien. Dieser Dual bietet zugleich die Handhabe für die Vermuthung, dass ungefähr das folgende in dieser Lücke gestanden haben muss: Bîrûnî unterscheidet bei den **Verdoppelungen** (تضاعيف) d. h. bei einer geometrischen Progression von Potenzen von 2 eine grade Anzahl von **Verdoppelungen** von einer **ungraden**; die Zahl der Verdoppelungen ist entweder ein زوج d. h. eine **grade** Zahl, oder ein فرد d. h. eine **ungrade** Zahl. Ist nun die Anzahl der **Verdoppelungen** eine **grade**, so hat sie **zwei media** (Mittelzahlen); ist es aber eine **ungrade**, so hat sie nur **ein medium** (واسطة). Folgendes Beispiel diene zur Erläuterung:

$$\begin{array}{cccccc} 2. & 4. & 8. & 16. & 32. & 64. \\ 1. & 2. & \underline{3.} & \underline{4.} & 5. & 6. \end{array}$$

Die Zahl dieser **Verdoppelungen** ist 6, also eine **grade** Zahl; sie hat als solche zwei media (واسطتان), nämlich 3. 4. Ihre beiden Enden (حاشيتان) sind 1 und 6. Für diese Progression gilt die Regel, dass die Multiplication der beiden **media** gleich ist der Multiplication der beiden Enden, nämlich

$$2 \times 64 = 8 \times 16.$$

Dagegen in der folgenden Progression:

$$\begin{array}{ccccc} 2. & 4. & 8. & 16. & 32. \\ 1. & 2. & 3. & 4. & 5. \end{array}$$

ist die Zahl der **Verdoppelungen** 5, also eine **ungrade**, und als solche hat sie nur **ein** medium (واسطة واحدة), nämlich 3. Für diese Progression gilt die Regel, dass die Multiplication der beiden Enden gleich ist dem Quadrat der Mittelzahl, d. i.

$$2 \times 32 = 8^2.$$

Der Text dieses Abschnittes würde noch zu einigen anderen, freilich weniger wesentlichen Bemerkungen Veranlassung bieten, die ich jedoch für meine Ausgabe des ganzen Werkes vorbehalte. Hier folge nun die Uebersetzung dieses Abschnittes:

„'Abû-Raiḥân (Albîrûnî) sagt in seinem *Kitâb-al'arḳâm* (Buch der Ziffern): Ich will die Methode für die Berechnung des Schachs erklären, damit man sich daran gewöhne, ihre Schwierigkeit zu überwinden. Vorher aber muss man wissen, dass die Verdoppelungen einer beliebigen Potenz von 2 von einander abstehen nach einer gleichen Proportion (NB! conjectural übersetzt; hier ist die oben besprochene Lücke). — Wenn sie aber (nämlich die Verdoppelungen) eine ungrade Zahl ausmachen, so haben sie nur ein einziges medium (Mittelzahl).

Dies ist das eine, was man vorher wissen muss; das andere ist folgendes: Wenn wir die Summe jener angenommenen Anzahl von Verdoppelungen von Potenzen von 2 finden wollen, verdoppeln wir die grösste derselben d. i. die letzte und subtrahiren davon die kleinste d. i. die erste; der Rest ist die Summe jener gesammten Verdoppelungen. (Z. B. die Summe der Zahlen der Progression 2. 4. 8. 16. 32 ist gleich $2 \times 32 = 64 - 2 = 62 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32$.)

Wenn nun dies feststeht, vermehren wir die Zahl der Felder des Schachbrettes um ein Feld, welches ein 65. wäre. Demnach ist klar, dass die Zahl dieses 65. Feldes, welche auf demselben zu stehen kommt in Folge der von 1 bis 65 fortschreitenden Anzahl von Verdoppelungen von Potenzen von 2, gleich ist der Summe der Zahlen aller Felder des Schachbrettes plus dem ersten Feld, welches die Zahl 1, die erste Verdoppelung ist. Subtrahirt man von dieser Summe 1, so bleibt als Rest die Summe der auf allen Feldern des Brettes stehenden Zahlen. (NB! Dies beruht auf der oben sub II. angeführten Regel: Die Zahl eines Feldes minus 1 ist gleich der Summe der Zahlen aller vorhergehenden Felder).

Wenn wir nun dies 65. Feld und das 1. Feld als zwei Enden einer Progression ansehen, so ist das Feld nr. 33 ihr medium, und zwar medium I.

Zwischen den Feldern nr. 33 und 1, nr. 17 und 1, nr. 9 und 1, nr. 5 und 1, nr. 3 und 1 als den zwei Enden einer Progression sind respective die Felder nr. 17, nr. 9, nr. 5, nr. 3, nr. 2 die media als medium II, medium III, med. IV, med. V und med. VI.

Die Zahl des medium VI (des 2. Feldes) ist nun 2. Das Quadrat von 2 ist gleich einer Summe, die entsteht durch Multiplication des 1. Feldes mit dem 3. Felde. Das 1. Feld hat die Zahl 1. Die so entstehende Summe ist das medium V in dem Felde nr. 3, nämlich die Zahl 4.

Das Quadrat von 4 ist 16 oder das medium IV im Felde nr. 5.

Das Quadrat von 16 ist 256 oder das medium III im Felde nr. 9.

Das Quadrat von 256 ist 65536 oder das medium II im Felde nr. 17.

Das Quadrat von 65536 ist 4,294,967,296 oder das medium I im Felde nr. 33.

Das Quadrat von 4,294,967,296 ist 18,446,744,073,709,551,616.

Subtrahiren wir hiervon die 1, welche auf dem ersten Felde steht, so bleibt übrig die Gesammtsumme aller auf den einzelnen Feldern des Schachbrettes stehenden Zahlen, d. h. dieselbe Zahl, welche wir oben (am Anfange dieser Auseinandersetzung) als Beispiel gebraucht haben."

Um nun seinen Lesern eine Vorstellung von der Grösse dieser Zahl zu geben, fügt Bîrûnî die folgende eigenthümliche Vorschrift hinzu, nach der man dieselbe in kleinere, der gewöhnlichen Vorstellung bekanntere Zahlenwerthe zerlegen soll:

ولا يُضْبَطُ كَثْرَتُه إلّا بأنْ يُقْسَمَ على عشرةِ آلافٍ حتى يَصيرَ بِدَرًا
وُيقْسَمُ البدرُ على ثمانيةٍ لتَصيرَ أَوْقارًا وُيقْسَمُ عَدَدُ الاوقارِ على عشرةِ
آلافٍ لتصيرَ بِغالُها قُطْعانًا كلُّ قطيعٍ عشرةُ آلافٍ ثمّ يقسمُ القطعانُ
على الفٍ لتَرْعَى على شُطوطِ أَوْدِيَةٍ على شَطِّ كلِّ واحدٍ منها الفُ
بَغْلٍ ثمّ يقسم الاوديةُ على عشرةِ آلافٍ ليَخْرُجَ من كلِّ وادٍ عشرةُ آلافِ
جَبَلٍ منها فعلي عِظَمِ المُساحَةِ فى القِسْمةِ يكونُ عَدَدُ تلك الجبالِ
القَيْن وثلثمائة وخمسةَ أَجْبُلٍ وهى صِفاتٌ يَضيقُ عنها المعمورةُ والله
اعلم واحكم ۞

„Die Grösse dieser Zahl kann man nicht anders fassen, als wenn man sie durch 10,000 theilt, so dass sie zu *Bidar* (aus Lammsfell bereitete Milchgefässe) wird. Die *Bidar* theile durch 8, damit sie zu *'Auḳâr* (onera) werden. Die Zahl der *'Auḳâr* theile durch 10,000, damit die Maulthiere, welche diese Lasten (onera) tragen, zu *Ḳuṭ'ân* (agmina) werden, von denen jedes *ḳaṭî'* (agmen) 10,000 Stück enthält. Die *Ḳuṭ'ân* theile durch 1000, damit an den Rändern von Flussthälern, am Rande jedes Flussthals 1000 Böcke weiden. Die Flussthäler (*'Audiya*) theile durch 1000, damit aus ihnen, aus jedem Flussthal 10,000 Berge herauskommen. Schliesslich findet man — auf Grund reichlichen Dividirens — als die Anzahl solcher

Berge 2305. Und das sind Zahlenvorstellungen, welche die Erde nicht fasst. Gott ist allweise und allmächtig!"

Der langen Rede kurzer Sinn ist der, dass die oben genannte zwanzigstellige Zahl, dividirt durch die folgenden Zahlen der Reihe nach:

10000. 8. 10000. 1000. 1000. 10000.

als letzten Quotienten die Zahl 2305 ergiebt.

Die weit ausführlicheren und von ganz anderen Gesichtspunkten geleiteten Bemerkungen über das Schach, welche sich in Bîrûnî's Werk über Indien finden, werde ich, wenn ich in meiner Arbeit so weit vorgeschritten sein werde, seiner Zeit ebenfalls hier mittheilen.

Den Freunden Bîrûnî's in der Europäischen Orientalisten-Welt erlaube ich mir bekannt zu geben, dass von meiner Ausgabe der Chronologie (الآثار الباقية) der erste, allgemeine Theil im Druck nahezu fertig ist und dass die englische Uebersetzung derselben, welche von dem Oriental Translation Fund publicirt wird, vermuthlich gleichzeitig mit meiner Ausgabe des *Ta'rîkh-Hind* im Herbst dieses Jahres dem Druck übergeben werden wird.