BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN
VON

GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

3. FOLGE. ZEHNTER BAND.

MIT BILDNIS VON G. SCHIAPARELLI ALS TITELBILD
UND 54 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909—1910.

Zur Trigonometrie der Araber.

Von Heinrich Suter in Zürich.

Der Leidener Kodex 168 Gol. enthält auf den Blättern 134v. bis 136r. vier Beweise trigonometrischer Sätze, die für die Geschichte dieser Disziplin bei den Arabern von Bedeutung sind, und von denen ich deshalb hier eine wörtliche Übersetzung veröffentliche.[1]) Der genannte Kodex enthält eine Reihe wichtiger mathematischer Abhandlungen von el-Sidjzī, Abū'l-Djūd, Abū Nasr b. 'Irāk[2]) und von anonymen Autoren, und ist schon früher von F. Woepcke teilweise benützt worden; unsere Abhandlung ist die fünfzehnte des Kodex, alle sind von derselben Hand geschrieben, undatiert, aber nach dem Herausgeber des Kataloges aus früher Zeit.[1])

Unsere Abhandlung handelt über den sphärischen und ebenen Sinussatz und gibt zu beiden die Beweise für den Fall des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecks. Es sind dies die Beweise des nach dem Urteil el-Bīrūnīs u. a. jedenfalls bedeutenden arabischen Mathematikers Abū Nasr Mansūr b. 'Alī b. 'Irāk, des Lehrers von el-Bīrūnī. Dieser letztere teilte sie, wie der Schluß unserer Abhandlung angibt, in einem Briefe oder einer Widmungsschrift dem Abū Sa'id el-Sidjzī mit Die beiden Beweise für den sphärischen Sinussatz sind uns auch von Nasīr ed-dīn in seinem *Shakl el-katta'*[3]) aufbewahrt worden; da sie aber dort von sehr schlechten Figuren begleitet sind und in den Vorlesungen über Geschichte

1) Der Kodex 168 Gol. wurde von der Königl. Universitätsbibliothek in Leiden Herrn Prof. Dr. E. Wiedemann in Erlangen für längere Zeit zur Benutzung überlassen; dieser Gelehrte hat mir dann von der vorliegenden Abhandlung Photographien in Weiß-Schwarz besorgen lassen; sowohl der Verwaltung der genannten Bibliothek als auch Herrn Prof. Wiedemann spreche ich hier für ihr freundliches Entgegenkommen meinen verbindlichsten Dank aus.

2) Vgl. H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber* usw. in Abhandlungen zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **10**, 1900, p. 80, 81 und 97. — Das arabische Dschim (= deutsch dsch) gebe ich nach den neueren Transkriptionsregeln im folgenden immer durch „dj" wieder.

3) Vgl. Caratheodory, *Traité du quadrilatère*, Konstantinopel 1891, p. 145, 146, 155, 156 (der Übersetzung).

der Trigonometrie von v. Braunmühl weggelassen worden sind, so ist es wohl angezeigt, dieselben hier nochmals zu veröffentlichen; die Figur für den Fall des rechtwinkligen Dreiecks ist allerdings auch in unserem Manuskript nicht besonders gut gezeichnet, sie entbehrt einer richtigen Perspektive, ich habe daher der Figur des Manuskripts eine Verbesserung beigegeben. Wir sehen auch, daß die Beweise unabhängig von der Regel der sechs Größen geführt sind, und daß der Beweis für das schiefwinklige sphärische Dreieck einfacher ist als derjenige Abū'l-Wefās in seinem Almagest[1]), Abū Nasr b. ʿIrāk zerlegt einfach das schiefwinklige Dreieck durch eine Höhe in zwei rechtwinklige, wie wir es heute noch tun. Wem von den drei bei Nasīr ed-dīn genannten Mathematikern Abū'l-Wefā[2]), el-Khodjendī[3]) oder Abū Nasr b. ʿIrāk die Priorität in der Erfindung des sphärischen Sinussatzes gehöre, können wir auch heute noch ebensowenig entscheiden, als es Nasīr ed-dīn im 13. Jahrhundert imstande war.

Was den ebenen Sinussatz anbetrifft, so wird durch diese Abhandlung die Kenntnis desselben bei den Arabern schon wieder etwas weiter zurückdatiert; v. Braunmühl mußte in seinen *Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie* I (Leipzig 1900), gestützt auf die damaligen historischen Kenntnisse, die erste Formulierung desselben Nasīr ed-dīn (gest. 1274) zuschreiben; Nallino teilte dann in seiner Ausgabe Albattānīs (I, p. LXXIII, Mailand 1903) mit, daß sich derselbe schon in der Chronologie von el-Bīrūnī befinde; nun wissen wir aus unserer Abhandlung, daß schon Abū Nasr (gest. c 1000—1020), der Lehrer Bīrūnīs, einen Beweis dieses Satzes gegeben hat, und höchst wahrscheinlich ist er schon ziemlich lange vorher den arabischen Mathematikern bekannt gewesen. Der Beweis, den Abū Nasr gibt, ist etwas einfacher als derjenige Nasīr ed-dīns[4]) und von dem heutigen wenig verschieden.

Im Namen Gottes des Barmherzigen und Gnädigen, usw. Ableitung (oder Untersuchung)[5]) des vortrefflichen Scheiches Abū Nasr Mansūr b. ʿAlī, des Freigelassenen des Emirs der Gläubigen, Gott stehe ihm bei!

Das Dreieck ABG [Fig. 1, 2] liege auf der Kugel (und sei gebildet)[6]) von größten Kreisen, und der Winkel bei A sei ein rechter; ich sage,

1) Vgl. Carra de Vaux, *L'Almageste d'Abū'l-Wéfa Albūzdjani* im Journal asiatique **19**$_8$, 1892, p. 423—424.

2) Vgl. H. Suter, l. c. p. 71.   3) Vgl. H. Suter, l. c. p. 74.

4) Caratheodory, *Traité du quadrilatère*, Konstantinopel 1891, p. 70 und 71 (der Übersetzung).

5) So übersetzen wir das arabische „istikhradj".

6) Was in runden Klammern beigefügt wird, steht nicht im arabischen Text, sondern ist von mir zur näheren Erklärung beigefügt.

daß das Verhältnis des Sinus von AB zum Sinus von BG gleich sei dem Verhältnis des Sinus des Winkels G zum Sinus des Winkels A. Beweis: Wir vervollständigen AG und BG[1]) zu zwei Quadranten, sie sind GBH und GAT, und ziehen den Bogen HT, der also an Größe

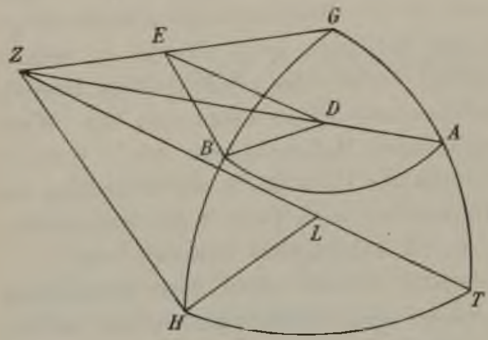

Fig. 1 (Figur des Textes).

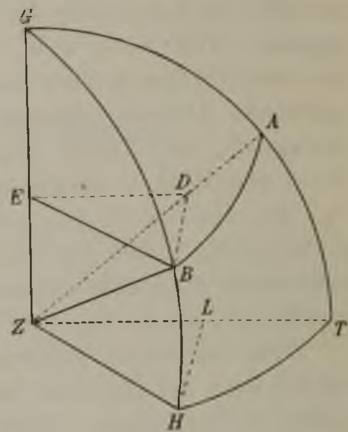

Fig. 2 (verbesserte Figur).

gleich dem Winkel G ist; wir verbinden die Punkte H, T, A, G mit dem Mittelpunkt Z der Kugel durch die geraden Linien HZ, TZ, AZ, GZ und ziehen die Sinus HL, BD, BE, und ziehen noch ED. Dann ist, weil AZ die gemeinsame Linie (der Durchschnitt) der beiden Kreisflächen GAT und AB ist, und BD senkrecht auf AZ steht, auch BD senkrecht auf der Ebene des Kreises GAT, und aus dem gleichen Grunde steht auch HL senkrecht auf dieser Ebene, d. h. auf der Ebene des Kreises GAT, also ist HL parallel BD. Und weil GH ein Quadrant ist, so ist der Winkel GZH ein rechter, ebenso ist der Winkel BEZ ein rechter[2]), und HZ und BE liegen in derselben Ebene, d. h. in der Ebene des Kreises GH, also sind sie parallel, also ist die Ebene des Dreiecks DBE parallel der Ebene des Dreiecks LHZ; beide schneiden die Ebene des Kreises GAT, denn die Punkte D, E, L, Z liegen in dieser Kreisfläche, also sind die beiden Dreiecke HLZ[3]) und BED ähnlich, mithin besteht die Proportion: $DB\,[=\sin AB] : BE\,[=\sin BG] = HL\,[=\sin G] : HZ\,[=\sin A]$[4]) w. z. b. w.

Es sei nun aber Winkel A kein rechter, so sagen wir, daß doch die Proportion besteht: $\sin AB : \sin BG = \sin G : \sin A$. Beweis: Wir ziehen

1) Diese beiden Seiten sind jedenfalls irrtümlich weggelassen.

2) Weil BE der Sinus des Bogens GB ist.

3) Das Manuskript hat HKZ.

4) Das in eckigen Klammern Stehende ist im Text in Worten hinzugefügt; HZ ist der Radius der Kugel, also der sinus totus, also auch sinus des Winkels A, der ein rechter vorausgesetzt ist.

[Fig. 3, 4] BD als Stück eines größten Kreises senkrecht auf AG. Dann hat man, weil $\sin AB : \sin BD = \sin D : \sin A$, und $\sin BD : \sin BG = \sin G$[1]$: \sin D$[1]), nach Ausgleichung in den miteinander multiplizierten Verhältnissen[2]) die Proportion: $\sin AB : \sin BG = \sin G : \sin A$, w. z. b. w.

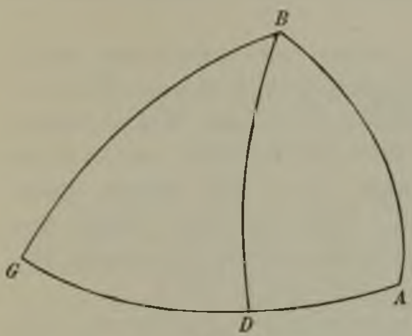

Fig. 3.

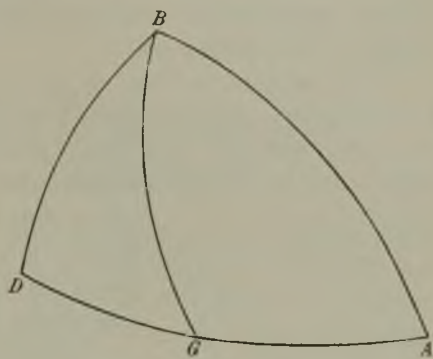

Fig. 4.

Es sei [Fig. 5, 6] das (ebene) Dreieck ABG gegeben, so sage ich, daß die Proportion bestehe: $AB : AG = \sin G : \sin B$. Beweis: Es ist in erster Linie notwendig, daß man wisse, daß unsere Worte „Sinus eines beliebigen Winkels in einem geradlinigen Dreieck" bedeuten: den Sinus

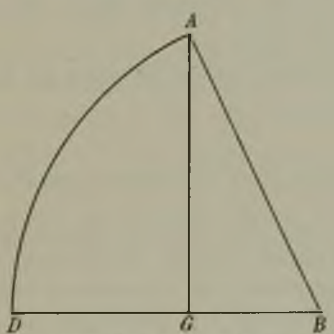

Fig. 5 (diese Figur fehlt im Manuskript).

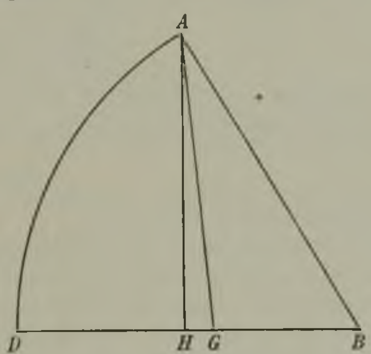

Fig. 6.

des Bogens, der über diesen Winkel beschrieben wird, wenn derselbe im Mittelpunkt des beschriebenen Bogens (gedacht) wird. Nach diesem nehmen wir B als Mittelpunkt eines Kreises an und beschreiben um denselben mit dem Radius BA den Bogen AD und verlängern BG über G

---

1) Hier steht im Manuskript bei beiden „Winkel" statt „Sinus".

2) So habe ich das arabische „el-musāwāt fī'l-nisba el-mudtaraba" übersetzt, während Caratheodory (l. c. p. 156) „el-musāwāt el-mudtaraba" übersetzt durch „l'égalité troublée"; allerdings kann „mudtaraba" auch „troublée" (= aufgeregt, beunruhigt) heißen, aber dies gibt hier gewiß keinen Sinn.

hinaus bis D. Wenn nun der Winkel G ein rechter ist, so ist AG der Sinus des Bogens AD, aber AD mißt den Winkel B am Mittelpunkt, und weil AB der Radius dieses Kreises ist, so ist er der Sinus des Winkels G, der, wenn er am Mittelpunkt wäre, vom Kreise einen Quadranten ausschneiden würde; die Behauptung ist also richtig, wenn der Winkel G ein rechter ist.[1])

Wir nehmen nun an, er sei kein rechter; wir ziehen dann von A die Senkrechte AH auf BD, dann hat man: $AG : AH = \sin H : \sin G$, und dies, weil AH der Sinus des Winkels G in dem Kreise, dessen Radius AG ist; ebenso hat man $AH : AB = \sin B : \sin H$, weil AH der Sinus des Winkels B in dem Kreise, dessen Radius AB ist. Also hat man durch Ausgleichung in den miteinander multiplizierten Verhältnissen: $AG : AB = \sin B : \sin G$.

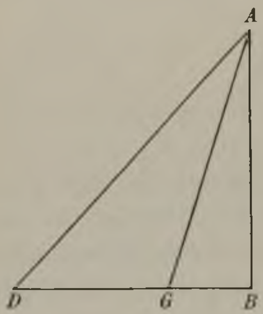

Fig. 7.

Andere Darstellung[2]): Das Dreieck AGD [Fig. 7] sei gegeben, so sage ich, daß die Proportion bestehe: $AG : AD = \sin D : \sin G$. Beweis: Wir ziehen AB senkrecht auf die Verlängerung von DG, so ist klar, daß die Proportion besteht: $AG : AB = \sin B : \sin G$, ebenso: $AB : AD = \sin D : \sin B$, hieraus folgt: $AG : AD = \sin D : \sin G$, w. z. b. w.

(Dies ist) eine Abschrift aus einer Schrift Abū'l-Raihāns an Abū[3]) Saʿid; Gott der Erhabene erbarme sich ihrer.

1) D. h. es besteht in der Tat die Proportion: $AB : AG = \sin G : \sin B$, denn $\sin G = AB$ und $\sin B = AG$.

2) Es scheint uns dies eine Einschiebung zu sein, die nicht zum Vorhergehenden gehört, schon die andere Bezeichnung des gegebenen Dreiecks (AGD statt ABG) deutet darauf hin; auch ist der Schluß im Manuskript durch Auslassung von Verhältnissen etwas verdorben; der Beweis ist übrigens von dem andern gar nicht verschieden, nur etwas kürzer gefaßt (vielleicht von el-Bīrūnī).

3) Das „Abū" fehlt im Text.