Über die Konstruktion der Ellipse.

Von Eilhard Wiedemann in Erlangen.

Mit 3 Figuren im Text.

Obwohl den Griechen die Eigenschaft der Ellipse bekannt war, daß die Summe der von den beiden Brennpunkten zu einem Punkt der Ellipse gezogenen Leitstrahlen konstant ist (Apollonius' Conica III, 52; vgl. auch H. S. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, S. 365 ff.), so ist, wie mir Prof. J. L. Heiberg, der hervorragendste Kenner der griechischen Mathematik, mitteilt, ihm keine Stelle erinnerlich, nach der diese Eigenschaft für die praktische Konstruktion verwendet worden wäre. Die Antike hat also nicht die sog. Methode der Gärtner benutzt, bei der ein an den Enden zusammengebundener Faden um zwei feste Stifte gelegt und durch einen beweglichen Stift gespannt wird, welch letzterer bei seiner Bewegung dann die Ellipse beschreibt. Einen Zirkel (διαβήτης) für die Zeichnung der Parabel hatte Isidorus von Milet erfunden und in seinem Kommentar zu Herons Werk über die Konstruktion der Gewölbe beschrieben[1]) ([Eutokios] in Archimedem ed. J. L. Heiberg, 2. Aufl. III S. 84 ff.). Sonst scheint es mit solchen mechanischen Vorrichtungen nicht besonders bestellt gewesen zu sein, da Eutokios in seinem Kommentar zu einer Stelle in den Kegelschnitten von Apollonius I, 20—21 (Ausgabe von J. L. Heiberg S. 230 ff., 233 ff.) sagt, daß die Mechaniker

1) Daß bei den Arabern die Konstruktion von Kegelschnitten bei Bauten eine große Rolle spielte, lehrt folgender Titel eines Werkes von *Ibn al Huitam*, den er in seiner Selbstbiographie aufführt: „Über die gute Ausführung des Grabens und des Bauens; ich habe in diesem Werk alle Arten des Grabens und Bauens mit allen Problemen der Geometrie zusammengefügt, bis ich dabei zu den drei Kegelschnitten gekommen bin, der Parabel, der Hyperbel und der Ellipse." — Dies Werk wird auch von *al Akfānī* erwähnt. Leider ist von ihm nichts und von demjenigen von Heron nur wenig erhalten. Vgl. E. Wiedemann, Festschrift für J. Rosenthal, Leipzig 1906, S. 162. Beiträge V S. 398.

wegen Mangels an Instrumenten die Kegelschnitte mittels Punkten konstruierten, an die dann ein Lineal angelegt wird.

Dagegen finden wir die Methode der Gärtner für die Konstruktion der Ellipse bei zwei arabischen Gelehrten erwähnt, die zu den zahlreichen hochbedeutenden Männern gehörten, die am Ende des zehnten und am Anfang des elften Jahrhunderts auf allen Gebieten der Wissenschaft im Orient sich auszeichneten.

1. Die eine Angabe rührt von *Abû Sa'îd Aḥmed Muḥammed Ibn 'Abd al Galîl al Sigzî* (gekürzt aus *Sigistânî*) her. Sie findet sich in einer Schrift über die Eigenschaft (*Waṣf*)[1]) der Kegelschnitte (Leiden, Katalog Bd. 3 S. 54 Nr. 995)[2])

Herr Professor Dr. Juynboll in Utrecht war so sehr gütig, mir eine Abschrift der betreffenden Stelle nebst der zugehörigen Zeichnung zu schicken, wofür ich ihm zu besonderem Dank verpflichtet bin. Die Übersetzung lautet:

Und ein anderer Weg.

Ein bemerkenswertes Ergebnis aus ihren Eigenschaften. Auf diese Eigenschaft verwandten die *Benû Mûsà Ibn Schâkir*[3]) Mühe und bauten darauf ein Werk über die Eigenschaften der Ellipse auf, die sie den verlängerten Kreis nannten. Es besteht in folgendem: Wir geben eine Linie *ab* auf einer Ebene und geben auf ersterer zwei Punkte *g*, *d*, die wir ausbohren. Von ihnen führen wir einen sehr feinen Seidenfaden von gegebener Länge und führen ihn durch ein Nadelöhr, dann

1) F. Wöpcke a. a. O. (siehe die folgende Anmerkung) gibt an „*Rasm* Zeichnung".

2) Zu dem Leben von *al Sigzî* vgl. H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber Nr. 185 S. 80. (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften X. Heft. 1900.

F. Wöpcke, Journ. asiat. [5] Bd. 5, (1855), S. 222, hat auf die Stelle zuerst aufmerksam gemacht und einiges aus ihr mitgeteilt. In seiner Arbeit, die Untersuchungen von *Abu'l Wefâ* (940—998) enthält, sind auch zwei Konstruktionen dieses Gelehrten mitgeteilt, um einen Brennspiegel herzustellen, der mittels der Sonnenstrahlen in einer gegebenen Entfernung [ein Objekt] verbrennt (a. a. O S. 325). Dabei wird die Parabel konstruiert, die als Form für die Herstellung des Spiegels dienen soll. Eine dieser Konstruktionen gibt auch *al Sigzî* an. — *Ibn al Haiṯam* (J. L. Heiberg und E. Wiedemann, Bibl. mathematica [3] Bd. 10, 1910, S. 201) schildert genau, wie man mit einer gegebenen Parabel solche Hohlspiegel gewinnt.

3) Die *Benû Mûsà Ibn Schâkir*, d. h. die Söhne des *Mûsà*, des Sohnes der *Schâkir*, waren drei Brüder *Muḥammed*, *Aḥmed* und *al Ḥasan*, die um 850 lebten. Sie gehören zu den bedeutendsten früheren arabischen Gelehrten. Eines ihrer bekanntesten Werke ist dasjenige über die sinnreichen Anordnungen (*Ḥijal*); es ist dies aber nicht, wie man oft angibt, eine Mechanik in unserem Sinne, sondern schließt sich wesentlich an die Pneumatik des Heron und Philon an. Die von *al Sigzî* erwähnte Abhandlung nennt auch *Ja'qûb al Nadîm* im *Fihrist* (S. 271) und *Ibn al Qifṭî* (S. 316) in seiner Geschichte der Gelehrten, und zwar als *Kitâb al Schakl al mudauwar al mustaṭîl*, d. h. die Lehre von der verlängerten runden Figur. Sie wird dem jüngsten der drei Brüder, *al Ḥasan*, zugeschrieben, der sich hauptsächlich mit Geometrie befaßte, während die beiden anderen, *Muḥammed* und *Aḥmed*, sich auch mit Astronomie, Musik (mathematisch) und den *Ḥijal* beschäftigten (vgl. Suter a. a. O. Nr. 43 S. 20).

bewegen wir die Nadel im Kreis herum, wobei wir gleichzeitig den Faden spannen. Mit dem Ende, in dem sich das Nadelöhr befindet, zeichnen wir auf der Ebene eine konvexe Linie, die die wahre Ellipse darstellt. Dies ist der Fall, da es eine Eigenschaft der Ellipse ist, daß sich auf deren längerem Durchmesser zwei Punkte befinden, die von dem Mittelpunkt die gleiche Entfernung haben, wobei je zwei gerade Linien, die von diesen Punkten ausgehen und sich auf dem Umfang der Ellipse treffen, stets die gleiche Summe ergeben. Dies ist die Figur (Fig. 1).

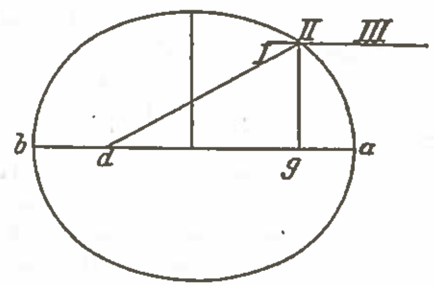

Fig. 1. Es steht bei I: Loch der Nadel; be II: Spitze der Nadel, sie zeichnet [die Ellipse]; III: das der Nadel ähnliche Instrument.

Aus der obigen Übersetzung ergibt sich, daß die Angabe M. Cantors (Geschichte der Mathematik Bd. 1 S. 733) nicht den Sachverhalt wiedergibt; da nach ihr nicht von den *Benû Mûsà*, sondern von *al Sigzî* die Konstruktion herrührt.

2. Die zweite, weit ausführlichere Stelle findet sich in einem wichtigen Werk von *Abû Raiḥân al Bîrûnî*[1]): „Über die ins einzelne gehende Behandlung (*Istî'âb*) aller möglichen Methoden für die Konstruktion des Astrolabs", in dem die Konstruktion der verschiedenartigsten Astrolabien und die Projektion der auf der Kugel befindlichen Kreise behandelt wird, freilich ohne Beweise. Dies Werk hat *al Marrâkuschî*[2]) vielfach benutzt, und dadurch sind manche der in ihm enthaltenen Angaben durch Sedillot und Schoy allgemeiner bekannt geworden. Unter seinen Vorgängern führt *al Bîrûnî* selbst für gewisse Astrolabformen den obenerwähnten *al Sigzî* an.

Zur Konstruktion von Kegelschnitten wurde man geführt, sobald man den Projektionspol nicht auf den Pol der Kugel, sondern auf irgendeine andere Stelle der Achse legt; darauf weist *al Bîrûnî* in der Einleitung zu seinem Werke besonders hin.

Mit Astrolabien, bei denen der Projektionspol nicht auf der Kugel gelegen ist, beschäftigt sich *al Bîrûnî* eingehend in einer Reihe von Abschnitten; dabei legt er das Werk von *Abû Ḥâmid Ibn Muḥammed Ibn al Ḥusain al Ṣâǧânî* (d. h. aus *Ṣâǧân*, einem Flecken bei Merw; vgl. Suter Nr. 143 S. 65; † 990) zugrunde: „Über die vollständige Projektion" (*fi'l Tasṭîḥ al tâmm*). Der Anfang des betreffenden Abschnittes lautet:

Kurz gefaßter Auszug der wesentlichsten Punkte des Werkes von *Abû Ḥâmid al Ṣâǧânî* über die vollständige Projektion. Ich sage, daß *Abû Ḥâmid*, der sich mit der Projektion der Kugel durch Kegelflächen beschäftigte, dabei den Projektionspol, d. h. den Vereinigungspunkt der

1) *Al Bîrûnî* (973—1048) war einer der hervorragendsten Naturforscher aller Zeiten (vgl. zu ihm Suter a. a. O. Nr. 218 S. 98).

2) In *al Ḥasan b. 'Alî 'Omar al Marrakûschî* († etwa 1262); vgl. Suter a. a. O. Nr. 363 S. 144.

Spitzen der Kegel von den Polen der Kugel entfernte und ihn auf der Achse verschob. Die Bewegung erfolgte entweder innerhalb oder außerhalb der Kugel in gerader Richtung. Dabei werden die Schnittlinien dieser Kegel mit der Projektionsebene die gerade Linie, der Kreis, die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel. — Als Projektionsebene nimmt er den Äquator. Die Aufgabe, diese Kurven zu zeichnen, wird dabei behandelt. In einem vorhergehenden Abschnitt teilt *al Bîrûnî* die Konstruktion der Ellipse mit, in späteren beschreibt er Methoden, um im Anschluß an Apollonius die aufeinanderfolgenden einzelnen Kurvenpunkte zu finden, und daran anschließend einen Kegelschnittzirkel (s. w. u.).

Ich gebe hier nur die Konstruktion der Ellipse nach *al Bîrûnî*; sie unterscheidet sich natürlich nicht im Wesen von der üblichen, indes ist die genaue Angabe über die Art der Ausführung von historischem Interesse. Die etwas gekürzte Übersetzung der betreffenden Stelle lautet:

Zeichnung der Ellipsen auf ebenen Flächen, und zwar Konstruktion der Ellipsen in allerleichtester Weise, und zwar seien gegeben ihr Durchmesser, ihre Lagen und ihre Mittelpunkte.[1]) Es sei *ab* der längste Durchmesser und *gd* der kürzeste. Die Durchmesser schneiden sich unter rechten Winkeln in ihren Mitten. Der Schnittpunkt *e* ist auch der Mittelpunkt. Wir bilden $\sqrt{\frac{1}{4}ab^2 - \frac{1}{4}gd^2}$. Es sei *ez* gleich der Wurzel. Wir machen $eh = ez$ und nennen *hz* das Festhaltende des Fadens (Fadenhalter, *Mâsik al' Chaiṭ*)[2]). Wir denken uns *hz* als einen harten Körper, etwa Eisen usw. An den beiden Punkten *h* und *z* befinden sich zwei Löcher ähnlich Nadelöhren[3]) (*Samm al Chijâṭ*). Dann nehmen wir einen festen (*mâtin*) Faden, der beim Ziehen sich nur wenig streckt und beim Loslassen nur wenig zusammenschrumpft und sich lockert, sondern keine dieser beiden Eigenschaften in merklichem Maße besitzt. Wir bringen an ihm eine Ritz-(Gravier-)Nadel (*Ibra chidâscha*) an oder ein zum Ritzen geeignetes Instrument, das in einer harten Substanz Ritze machen kann. Dies Instrument ist am Ende durchbohrt. Ein Ende des Fadens befestigen wir im Loch *h* und das andere im Loch *z*. Die Länge des Fadens muß nach dem Anbinden genau gleich *ab* sein. Dann halten wir *hz* an seiner Stelle ganz fest, fassen die Nadel und entfernen sie so weit wie möglich von dem Fadenhalter. Dann führen wir die Nadel über die Fläche der Platte [das Astrolab], indem wir den Faden spannen, ihn entfernen und den Fadenhalter festhalten, bis sie wieder in die Anfangslage zurückgekehrt ist. Dabei ist ihre Spur der Schnitt, von dem uns die beiden Durchmesser gegeben sind.

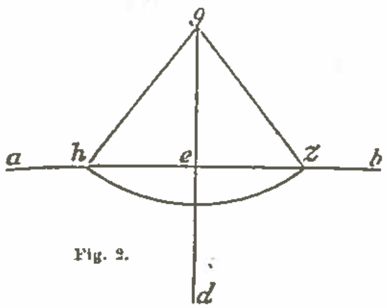

Fig. 2.

Es gibt aber einen bequemeren Weg[3]), um die Länge des Fadenhalters zu finden, als derjenige ist, nach dem wir sie berechnet haben. Man nimmt als Öffnung des Zirkels die Strecke *za* und setzt einen seiner Füße auf den Punkt *d* oder *g* und zieht mit dieser Öffnung einen Kreis. Er schneidet *ab* in *h* und *z*. Den Fadenhalter setzt man aus zwei miteinander festverbundenen [aber doch gegeneinander verschiebbaren *muhandam*, vgl. Beiträge VI, S. 87] Stücken zusammen, so daß man ihn verlängern und verkürzen kann und seine Enden, d. h. die Enden des Fadens, voneinander entfernen kann, bis er eine bestimmte Länge hat. Dann wird der Faden zusammengebunden. Das genügt für die meisten Arbeiten der Praxis. Manchmal ergibt sich dem Künstler, wenn er das, was ich ihm mitgeteilt habe, erwägt und kennt, die Herstellung einer Vorrichtung, durch die die Ausführung der Arbeit wesentlich erleichtert wird.

1) Die Figur in der Handschrift ist nicht ganz richtig in der Abmessung; sie ist in Fig. 2 richtig gezeichnet.

2) Der Ausdruck ist ein ganz anderer als bei *al Sigzî*.

3) Man konstruiert *hz*, statt es zu berechnen.

Die Art der Darstellung ist, wie sich aus dem obigen ergibt, eine wesentlich andere als bei *al Sigzî*; so daß *al Bîrûnî* sich hier nicht an letzteren angeschlossen hat, sondern beide haben unabhängig voneinander ein bekanntes Verfahren geschildert. Zu beachten ist, wie *al Bîrûnî* hier wie in vielen anderen Fällen auf die praktische Ausführung seiner Angaben ein besonderes Gewicht legt.

3. Die Araber haben auch Zirkel konstruiert um einen der Kegelschnitte, Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel, zu zeichnen. Das Prinzip ist folgendes (Fig. 3): *ab* ist die Basis des Zirkels und die Ebene, auf der die Kurve gezeichnet werden soll, *gd* ist ein Stab, der sich in einer Hülse bei *g* dreht, die sich in einem bei *g* befindlichen Gelenk gegen die Horizontale neigen läßt; *ce* ist ein Rohr, in dem eine Feder sich so verschiebt, daß ihr schreibendes Ende stets die Fläche *ab* berührt; *ce* läßt sich mittels eines Gelenkes bei *d* gegen *gd* neigen. Je nach der Neigung von *gd* gegen die Horizontale und von *ce* gegen *gd* beschreibt das Ende der Feder eine der drei erwähnten Kurven.

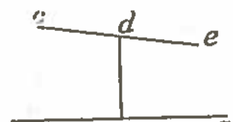

Fig. 3.

Eine solche Vorrichtung ist von *al Sigzî* hergestellt worden, eine andere von *Abû Sahl Wiğan Ibn Rustem al Kûhî* (um 988), eine dritte von *Muḥammed Ibn al Ḥusain* († etwa 1230).

Zu diesen Zirkeln vgl. E. Wiedemann, Über geometrische Instrumente bei den muslimischen Völkern (Zeitschrift für Vermessungswesen 1910, S. 1) und F. Wöpcke, Trois traités arabes sur le compas parfait (Notices et extraits des Manuscrits de la Bibliothèque nationale Bd. 22, 1874, S. 1).