Marsopgave en culturele uitleiding

Infi A, college 19 sept 2011

Universiteit Utrecht

Marsopgave 2. Inleveren 26 sept. 2011 op college. Twee onderdelen.

1. Vind (eventueel door proberen voor een paar n) een vermoedelijk ware formule voor de som

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

(De bedoeling is een uitdrukking te vinden die gelijk is aan deze som, en waarmee je door n in te vullen meteen de som kan vinden zonder al deze getallen op te tellen; zoals in
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$, enz.)

(zie vervolg)

Marsopgave 2 (vervolg)

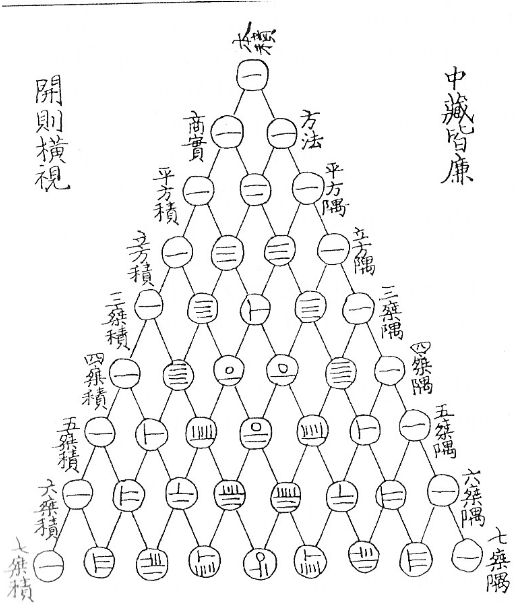
2. Beredeneer dat je formule correct is voor alle n.

De uitdaging is, een redenering te vinden waardoor je meteen kunt "zien" dat de formule correct moet zijn!

(voorbeeld: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ doordat de som het halve aantal punten is in een rechthoek met zijden n en $(n+1)$ punten)

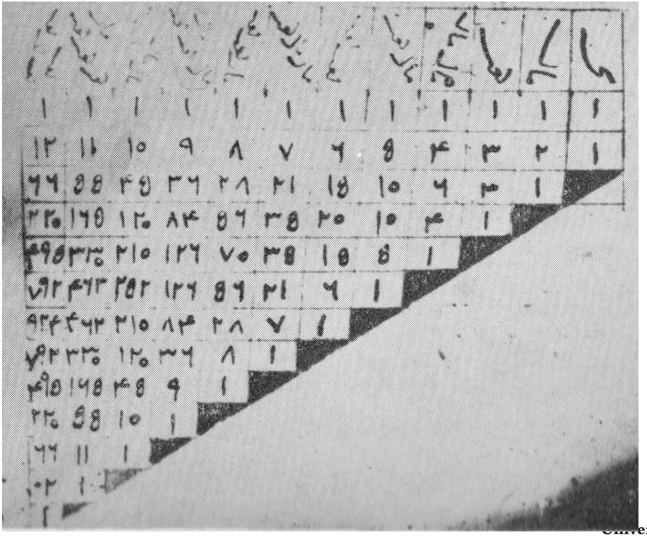
Echter, ook een correcte redenering met formules (mits zelf gevonden) levert een Mars op.

“De driehoek van Pascal” (Blaise Pascal 1623-1662) in China, 13e eeuw



“De driehoek van Pascal” (Blaise Pascal 1623-1662)

Oudst bekende bron is de Iraanse wiskundige al-Karajī (ca. 1000)



“Binomium van Newton” (Isaac Newton, 1642-1727)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ voor natuurlijke getallen } n$$

was al bekend aan al-Karajī en in China.

(in andere notatie)

Het echte “binomium van Newton” (Isaac Newton, 1642-1727)

Newton gebruikte dit ook voor n niet geheel (met binomiaalcoëfficienten uitgeschreven) Voorbeeld:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3 + \dots$$

De rechterkant moet dan oneindig lang doorlopen. Bijvoorbeeld:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

Zou dit kunnen kloppen? Wat denk je?