De ontdekking van complexe getallen

college inf A

2016

Formule van Cardano (ontdekt en gestolen 1535, gepubliceerd 1545)

De vergelijking $x^3 + px = q$ heeft oplossing

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q}{2}^2 + \frac{p}{3}^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q}{2}^2 + \frac{p}{3}^3} - \frac{q}{2}}.$$

Voorbeeld $x^3 + 3x = 4$ heeft oplossing
$x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

Je ziet de oplossing $x = 1$ want $1 + 3 = 4$.

Hoe zit dat?

$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$ want

je kunt door proberen vinden dat
$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^3 = (\sqrt{5}+2)$ en
$(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^3 = (\sqrt{5}-2)$

dus
$x = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) - (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) = \frac{1}{2} - -\frac{1}{2} = 1.$

Nu $x^3 = px + q$.

$x^3 = px + q$ heeft oplossing

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q}{2}^2 - \frac{p}{3}^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q}{2}^2 - \frac{p}{3}^3} - \frac{q}{2}}.$$

We gaan kijken naar de voorbeelden
$x^3 = 6x + 40$ en $x^3 = 15x + 4$.

$x^3 = 6x + 40$

De formule levert $\sqrt[3]{\sqrt{392}+20} - \sqrt[3]{\sqrt{392}-20}$.

Je ziet $x = 4$ want $64 = 24 + 40$.

Dit klopt want $20 + \sqrt{392} = 20 + 14\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^3$
en $-20 + \sqrt{392} = -20 + 14\sqrt{2} = (-2 + \sqrt{2})^3$

dus de formule-x is $x = 2 + \sqrt{2} - (-2 + \sqrt{2}) = 4$.

$x^3 = 15x + 4$ (Bombelli, 1572)

Je ziet een oplossing $x = 4$ want $64 = 60 + 4$.

De formule levert $x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2}$.

Hoe kan dit nu?????????????????

Oplossing: complexe getallen op magisch niveau

Reken met $\sqrt{-1}$ alsof het een gewoon getal is.

$(2+\sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3. \cdot 2^2\sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (-1) - \sqrt{-1} =$
$2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$ enz., en net zo
$(-2+\sqrt{-1})^3 = -2 + \sqrt{-121}$ dus

$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121}-2} = 2 + \sqrt{-1} - (-2 + \sqrt{-1}) =$
$2 - -2 = 4.$

(Bombelli, 1572).