Johannes Andreas Dèr Mouw (1863-1919)

Classicus, wiskundige, specialist in Sanskriet

Universiteit Utrecht

Het wiskundig sonnet (1919, uit de bundel “Brahman”)

Je zag met de x *de spokig toov’rende* i
Meefladd’ren, als de zwevende exponent
Neerstreek tot reeks, die naar ’t oneind’ge rent
In stormloop naar de kringperipherie:

Omsmolt dan algebraische alchemie
Tot tweelingen twee legers, en ’t quotient
Vervloeid tot optocht van kentauren, ment
De magiër Logarithme voort naar Π.

Wat zou Dèr Mouw bedoeld kunnen hebben? volgens wiskundeleraar Visser (1963)

Je zag met de x *de spokig toov'rende* i
Meefladd'ren, als de zwevende exponent
Neerstreek tot reeks, die naar 't oneind'ge rent
In stormloop naar de kringperipherie:

$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} \dots$
ligt op de complexe eenheidscirkel ("kringperiferie") als x reëel is.
want $|e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$.

Universiteit Utrecht

Oplossing van de puzzle volgens wiskundeleraar Visser (1963)

Omsmolt dan algebraische alchemie
Tot tweelingen twee legers, en 't quotient

De "tweelingen" zijn de complex geconjugeerden
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ en $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$
Het "quotient" $e^{2ix} = (\cos x + i \sin x)/(\cos x - i \sin x)$

Wat zou Dèr Mouw bedoeld kunnen hebben? volgens wiskundeleraar Visser (1963)

en 't quotient
Vervloeid tot optocht van kentauren, ment
De magiër Logarithme voort naar Π.

$e^{2ix} = (\cos x + i \sin x)/(\cos x - i \sin x) = (1 + i \tan x)/(1 - i \tan x) = 1 + 2(i \tan x) + 2(i \tan x)^2 + \ldots$

$2ix = \log \frac{1 + i \tan x}{1 - i \tan x}$. Maar wat heeft dit met π te maken?

Wat zou Dèr Mouw bedoeld kunnen hebben? volgens wiskundeleraar Visser (1963)

en 't quotient
Vervloeid tot optocht van kentauren, ment
De magiër Logarithme voort naar Π.

$2ix = \log \frac{1+z}{1-z}$ met $z = i \tan x$.
Taylor: $2ix = \log(1+z) - \log(1-z) = 2z + 2z^3 + 2z^5 + 2z^7 \ldots$.
Invullen van $z = i \tan x$ en delen door $2i$ levert
$x = \tan x - (\tan x)^3/3 + (\tan x)^5/5 - (\tan x)^7/7 \ldots,$
Vul nu in $x = \frac{\pi}{4}$ dan krijgen we $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$

Bedoelde Dèr Mouw dit echt?

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \dots + \frac{i^n z^n}{n!}$$

$$\frac{e^{iz}}{e^{-iz}} = e^{2iz} = \frac{\cos z + i \sin z}{\cos z - i \sin z} = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,z}{1 - i\,\mathrm{tg}\,z} \; ; \; 2iz = l\,\frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,z}{1 - i\,\mathrm{tg}\,z}$$

$$2iz = 2i\left[\mathrm{tg}\,z - \frac{\mathrm{tg}^3 z}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 z}{5} - \frac{\mathrm{tg}^7 z}{7} + \dots\right] ; \; \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\pi = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right].$$

Nº Nº 14.

Je zag met de π de spokig-toovrende i
Heenfladdren, als de zwevende exponent
Neerstreek tot reeks, die naar 't oneindje rent
In stormloop naar de kringperipherie:

Omsmolt dan algebraïsche alchemie
Tot tweelingen twee tegens; en 't quotient,
Verbloeid tot optocht van kentauren, ment
De magier logarithme voort naar π.

Ontzaglijke triomfpoort, zag je hem; hoog
Lichtende staan boven de heirweg-boog,
Gewelfde band van cyklopisch geweld;