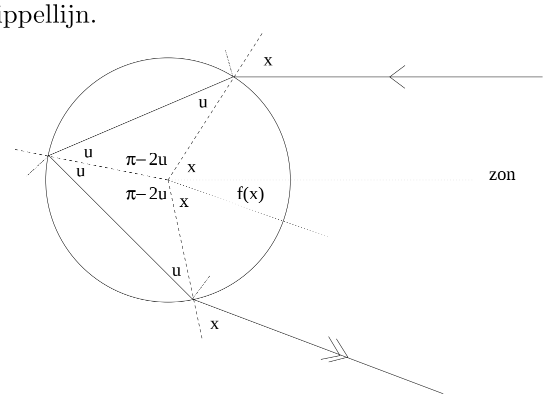
Marsopgave: De regenboog

Een regenboog ontstaat doordat de zonnestralen een wolk van regendruppeltjes treffen. Een waarnemer ziet dan cirkelvormige banden in rood, oranje, geel, groen, blauw. De stralen van deze cirkels zijn altijd hetzelfde, en het gemeenschappelijk middelpunt ligt altijd in de richting diametraal tegenover de zon (in de winter zie je dus meer regenbogen dan in de zomer)

Om dit verschijnsel te verklaren bekijken we eerst een regendruppel die we als een bolletje voorstellen. We snijden dit bolletje met een vlak door de as die het middelpunt van het bolletje met de zon verbindt. In de figuur is de as een stippellijn.



Stel een lichtstraal valt in het vlak van tekening onder een hoek x met de normaal (normalen zijn met streepjeslijnen getekend in de figuur; deze gaan door het middelpunt van de bol), met $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Een deel van het licht wordt teruggekaatst, de rest wordt gebroken, stel de hoek van uitval is u. Wanneer de rest van de straal weer bij het boloppervlak aankomt, is de hoek van inval weer u (waarom?), een deel van het licht treedt nu uit, de rest wordt teruggekaatst onder een hoek die weer u is; deze rest ontmoet nu weer het boloppervlak, een deel wordt teruggekaatst[1] en de rest treedt uit de regendruppel en veroorzaakt de primaire regenboog; de hoek van inval is weer u en dus is de hoek van uitval x. Stel deze uitvallende straal maakt een hoek $f(x)$ met de as die de richting van de zon aangeeft.

Volgens de wet van Snellius is $\sin x : \sin u = R$ met R de brekingsindex, dus $u = \arcsin(\frac{\sin x}{R})$, en ook geldt (zie figuur) $x + \pi - 2u + \pi - 2u + x + f(x) = 2\pi$, dus $f(x) = 4u - 2x$, zodat

$$f(x) = 4\arcsin(\frac{\sin x}{R}) - 2x.$$

We zullen zometeen zien dat de grafiek van $y = f(x)$ een maximum M heeft voor x ongeveer 60^o en in de buurt daarvan redelijk vlak is. Een brede band invallend licht op het bolletje wordt daarom teruggekaatst onder een hoek die ongeveer gelijk is aan M. Als we dit voor alle vlakken door de gestippelde

[1] Een gedeelte van deze stralen treedt de volgende keer uit en veroorzaakt de secondaire regenboog die wat groter is en wat vager. Zie de Marsopgave.

as opmerken, dan zien we dat een regendruppel veel van de invallende zonnestralen terugkaast langs een **kegeloppervlak** K met top het middelpunt van de regendruppel, as de gestippelde as, en hoek (tussen vlak en as) M.

Verklaring van de regenboog: als je als waarnemer een regenwolk bekijkt die door de zon wordt beschenen, dan lichten sommige regendruppels op: namelijk die druppels waarvoor je oog precies in het bijbehorende kegeloppervlak K zit. Dat zijn de regendruppels die (schijnbaar) op een cirkel op de hemelbol liggen met middelpunt het punt diametraal tegenover de zon en "straal" (aan de hemel) de hoek M.

Berekening van M: hiervoor moeten we f differentiëren; met de kettingregel vinden we

$$f'(x) = \frac{4}{\sqrt{1 - (\frac{\sin x}{R})^2}} \cdot \frac{\cos x}{R} - 2.$$

Enig rekenwerk levert dat $f'(x) = 0$ voor $\cos x = \sqrt{\frac{R^2-1}{3}}$. Voor rood licht hebben we $R = 1.331$, dit levert (in radialen) $x = 1.039$, (in graden) $x = 59.5^o$, $M = f(x) = 42.4^o$. Voor blauw licht $R = 1.343$, en in graden $x = 58.8^o$, $M = f(x) = 40.6^o$. Daardoor zien we de regenboog als aaneensluitende ronde banden, en de rode band ligt buiten de blauwe. M is het maximale waarde, er worden geen stralen onder een grotere hoek teruggekaatst. Daardoor is het gebied buiten de regenboog donker.

De verklaring van de regenboog met als model de figuur van een druppeltje met gebroken stralen werd voor het eerst gegeven omstreeks 1305 door de Iraanse wiskundige Kamāl al-Dīn Fārisī en enige jaren later ook door de Duitse monnik Dietrich van Freiburg, waarschijnlijk onafhankelijk van elkaar. René Descartes berekende een heleboel waarden van f en vond zo het maximum (1637); Newton vond dit door differentiëren en ontdekte ook dat bij verschillende kleuren licht een verschillende R hoorde (ontdekt in 1672, gepubliceerd in 1704).

MARSOPGAVE: werk op dezelfde manier de secondaire regenboog (die buiten de primaire regenboog ligt) en bereken de breedte van de band tussen de primaire en de secondaire regenboog. Waarom is de volgorde van de kleuren in de secondaire regenboog omgekeerd? Kun je zo ook een tertiaire (nog vagere) regenboog vinden? Zou je die ook kunnen waarnemen?

Literatuur:

Carl B. Boyer, *The Rainbow, From Myth to Mathematics*, Princeton: Princeton University Press, 1987.

Rüdiger Seydel, Roland Bulirsch, *Vom Regenbogen zum Farbfernsehen: Höhere Mathematik in Fallstudien aus Natur und Technik*, New York: Springer-Verlag, 1986.