De Taylorveelterm voor de sinus in India

Culturele uitleiding Taylorveeltermen

speciaal voor mensen die infi moeilijk vinden . . .

Universiteit Utrecht

Kerala, zuid-India, ca. 1400

Kerala, zuid-India

Taylorformule voor moderne sinus

Taylorformule voor de moderne sinus (boog van x radialen):

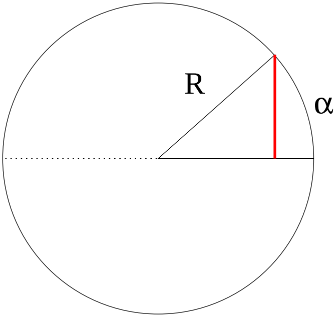
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

Sinus is uitgevonden in India

Indiase Sinus (rood) is lengte van lijnsegment in een cirkel met omtrek 360×60 minuten en straal $R = \frac{360 \times 60}{2\pi}$ minuten.

(voor de moderne sinus $R = 1$).

Dus Indiase Sinus van α boogminuten is modern $R \sin \frac{\alpha}{R}$ (hoek in radialen).



Moderne Taylorformule

$$R \sin \frac{\alpha}{R} =$$

$$= R(\frac{\alpha}{R} - \frac{1}{3!}(\frac{\alpha}{R})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\alpha}{R})^5 - \frac{1}{7!}(\frac{\alpha}{R})^7 + \frac{1}{9!}(\frac{\alpha}{R})^9 - \frac{1}{11!}(\frac{\alpha}{R})^{11} \ldots)$$

$$= \alpha - (\frac{\alpha^3}{2{\cdot}3R^2} - (\frac{\alpha^5}{2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5R^4} - (\frac{\alpha^7}{2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}7R^6} - (\ldots))))$$

Madhava (Kerala, ca. 1400). Bereken de sinus van een boog van een gegeven aantal boogminuten

Leerling moet Sanskriet gedicht leren reciteren (zingen):

nihatya cāpavargeṇa cāpam tattatphalāni ca
haret samūlayugvargais trijyāvargahataiḥ kramāt
cāpam phalāni cādho 'dho nyasyopary upari tyayet
jīvante saṉgraho 'syaiva vidvān ityādinā kṛtaḥ

Madhava (Kerala, ca. 1400). Bereken de sinus van een boog van een gegeven aantal boogminuten

Leerling moet Sanskriet gedicht leren reciteren (zingen):

nihatya cāpavargeṇa cāpam tattatphalāni ca
haret samūlayugvargais trijyāvargahataiḥ kramāt
cāpam phalāni cādho 'dho nyasyopary upari tyayet
jīvante saṉgraho 'syaiva vidvān ityādinā kṛtaḥ

Nadat de boog en alle (eerdere) resultaten met het kwadraat van de boog vermenigvuldigd zijn, moet men delen door de kwadraten van de even getallen plus de wortels daarvan, maal het kwadraat van de straal, op volgorde. Nadat de boog en de resultaten onder elkaar opgeschreven zijn, moet men van beneden naar boven aftrekken. Een samenvatting hiervan staat in het vers vidvān.

Madhava (Kerala, ca. 1400). Bereken de sinus van een boog van een gegeven aantal boogminuten

Nadat de boog en alle (eerdere) resultaten met het kwadraat van de boog vermenigvuldigd zijn, moet men delen door de kwadraten van de even getallen plus de wortels daarvan, maal het kwadraat van de straal, op volgorde. Nadat de boog en de resultaten onder elkaar opgeschreven zijn, moet men van beneden naar boven aftrekken.

betekent: $\alpha - (\alpha \cdot \frac{\alpha^2}{(2^2+2)R^2} - (\alpha \cdot \frac{\alpha^2}{(2^2+2)R^2} \cdot \frac{\alpha^2}{(4^2+4)R^2} - (\alpha \cdot \frac{\alpha^2}{(2^2+2)R^2} \cdot \frac{\alpha^2}{(4^2+4)R^2} \cdot \frac{\alpha^2}{(6^2+6)R^2} - (\ldots))))$
$= \alpha - \frac{\alpha^3}{2{\cdot}3R^2} + \frac{\alpha^5}{2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5R^4} - \frac{\alpha^7}{2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}7R^6} \ldots$

Madhava (Kerala, ca. 1400). Bereken de sinus van een boog van een gegeven aantal boogminuten

vidvāṃs tunnabalaḥ kavīśanicayaḥ sarvārthaśīlasthiro
nirviddhāṇganarendraruṅ nigaditeṣv eṣu kramāt pañcasu
ādhastyād guṇitād abhīṣṭadhanuṣaḥ kṛtyā vihṛtyantimasy-
āptam śoddhyam upary upary atha ghanenaivam dhanuṣy antataḥ

Madhava (Kerala, ca. 1400). Bereken de sinus van een boog van een gegeven aantal boogminuten

vidvāṃs tunnabalaḥ kavīśanicayaḥ sarvārthaśīlasthiro
nirviddhāṇganarendraruṅ nigaditeṣv eṣu kramāt pañcasu
ādhastyād guṇitād abhīṣṭadhanuṣaḥ kṛtyā vihṛtyantimasy-
āptam śoddhyam upary upary atha ghanenaivam dhanuṣy antataḥ

De wijze koning wiens leger verslagen is verzamelt de beste raadgevers om zich heen en blijft in alles standvastig; dan verslaat hij de koning wiens leger nog niet vernietigd is.

Madhava (Kerala, ca. 1400). Bereken de sinus van een boog van een gegeven aantal boogminuten

vidvāṃs tunnabalaḥ kavīśanicayaḥ sarvārthaśīlasthiro
nirviddhāṇganarendraruṅ nigaditeṣv eṣu kramāt pañcasu
ādhastyād guṇitād abhīṣṭadhanuṣaḥ kṛtyā vihṛtyantimasy-
āptam śoddhyam upary upary atha ghanenaivam dhanuṣy antataḥ

De wijze koning wiens leger verslagen is verzamelt de beste raadgevers om zich heen en blijft in alles standvastig; dan verslaat hij de koning wiens leger nog niet vernietigd is.
Wanneer deze vijf getallen gereciteerd zijn:
degene onderaan vermenigvuldigd met het kwadraat van de gegeven boog gedeeld door [5400], moet het quotiënt steeds worden afgetrokken van wat daarboven staat, maar het laatste moet met de kubus, (en dan afgetrokken) van de boog.

Wat werd hiermee bedoeld?

vidvāṃs tunnabalaḥ kavīśanicayaḥ sarvārthaśīlasthiro nirviddhāṇganarendraruṅ
De wijze koning wiens leger verslagen is verzamelt de beste raadgevers om zich heen en blijft in alles standvastig; dan verslaat hij de koning wiens leger nog niet vernietigd is.

Dit zijn vijf (gecodeerde) getallen
vv=44 tnbl=6033 kvśncy=145061 sv(th)śl(th)r= 7475372 nv(dh)gnrrr=04930222.
Ze betekenen $p = \frac{44}{60^2}$, $q = \frac{33}{60} + \frac{06}{60^2}$, $r = 16 + \frac{05}{60} + \frac{41}{60^2}$,

$s = 273 + \frac{57}{60} + \frac{47}{60^2}$, $t = 2220 + \frac{39}{60} + \frac{40}{60^2}$.

De vijf getallen

$$p = \frac{44}{60^2},\ \ q = \frac{33}{60} + \frac{06}{60^2},\ \ r = 16 + \frac{05}{60} + \frac{41}{60^2},$$

$$s = 273 + \frac{57}{60} + \frac{47}{60^2},\ \ t = 2220 + \frac{39}{60} + \frac{40}{60^2}.$$

zijn afgeronde waarden:van:

$$p = \frac{5400}{11!}(\frac{\pi}{2})^{10},\ \ q = \frac{5400}{9!}(\frac{\pi}{2})^{8},\ \ r = \frac{5400}{7!}(\frac{\pi}{2})^{6},$$
$s = \frac{5400}{5!}(\frac{\pi}{2})^{4},\ \ t = \frac{5400}{3!}(\frac{\pi}{2})^{2}.$

Wat moet de leerling nu doen, nadat de vijf getallen gereciteerd zijn?

Wanneer deze vijf getallen gereciteerd zijn:
degene onderaan vermenigvuldigd met het kwadraat van de gegeven boog gedeeld door [5400], moet het quotiënt steeds worden afgetrokken van wat daarboven staat, maar het laatste moet met de kubus, (en dan afgetrokken) van de boog.

dit betekent dat hij moest uitrekenen:

$$\alpha - \left(\frac{\alpha}{5400}\right)^3 \{t - \left(\frac{\alpha}{5400}\right)^2 \{s - \left(\frac{\alpha}{5400}\right)^2 \{r - \left(\frac{\alpha}{5400}\right)^2 \{q - \left(\frac{\alpha}{5400}\right)^2 p\}\}\}\}.$$

Madhava's methode klopt:

$$R\sin\frac{\alpha}{R} = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!R^2} + \frac{\alpha^5}{5!R^4} - \frac{\alpha^7}{7!R^6} + \frac{\alpha^9}{9!R^8} - \frac{\alpha^{11}}{11!R^{10}} =$$

$\alpha - (\frac{\alpha}{5400})^3\{t - (\frac{\alpha}{5400})^2\{s - (\frac{\alpha}{5400})^2\{r - (\frac{\alpha}{5400})^2\{q - (\frac{\alpha}{5400})^2 p\}\}\}\}$
waarbij

$R = \frac{360\times 60}{2\pi} = \frac{5400}{\pi/2}$, $t = \frac{5400}{3!}(\frac{\pi}{2})^2$, $s = \frac{5400}{5!}(\frac{\pi}{2})^4$, $r = \frac{5400}{7!}(\frac{\pi}{2})^6$, $q = \frac{5400}{9!}(\frac{\pi}{2})^8$, $p = \frac{5400}{11!}(\frac{\pi}{2})^{10}$.

(Madhava's getallen)

Hoe wist Madhava dit - kon hij het beredeneren?

Ja, zie handout op de webpagina op het net.