De machtreeksen voor de sinus in Kerala (zuid-India, ca. 1400-1550).

Tekst 1:

निहत्य चापवर्गेण चापं तत्तत्फलानि च ।
हरेत् समूलयुग्वर्गैस्त्रिज्यावर्गहतैः क्रमात् ।। ४४० ।।
चापं फलानि चाधोऽधो न्यस्योपर्युपरि त्यजेत् ।
जीवाप्त्यै, संग्रहोऽस्यैव 'विद्वान्' इत्यादिना कृतः ।।४४१।।

Tekst 2:

'विद्वांस्' 'तुन्नबलः' 'कवीशनिचयः' 'सर्वार्थशीलस्थिरो'
'निर्विद्धाङ्गनरेन्द्ररुङ्' निगदितेष्वेषु क्रमात् पञ्चसु ।
आधस्त्याद् गुणितादभीष्टधनुषः कृत्वा विहृत्यान्तिम-
स्याप्तं शोध्यमुपर्युपर्यथ घनेनैवं धनुष्यन्ततः ।।४३७।।

nihatya cāpavargeṇa cāpam tattatphalāni ca
haret samūlayugvargais trijyāvargahataiḥ kramāt
cāpam phalāni cādho 'dho nyasyopary upari tyayet
jīvante saṅgraho 'syaiva vidvān ityādinā kṛtaḥ

Vertaling: Nadat de boog en alle (eerdere) resultaten met het kwadraat van de boog vermenigvuldigd zijn, moet men delen door de kwadraten van de even getallen plus de wortels daarvan, maal het kwadraat van de straal, op volgorde. Nadat de boog en de resultaten onder elkaar opgeschreven zijn, moet men van beneden naar boven aftrekken. Een samenvatting hiervan staat in het vers *vidvān.*

Tekst 2:

vidvāṃs tunnabalaḥ kavīśanicayaḥ sarvārthaśīlasthiro
nirviddhāṅganarendraruṅ nigaditeṣv eṣu kramāt pañcasu
ādhastyād guṇitād abhīṣṭadhanuṣaḥ kṛtyā vihṛtyantimasy-
āptam śoddhyam upary upary atha ghanenaivam dhanuṣy antataḥ

Vertaling: De wijze koning wiens leger verslagen is verzamelt de beste raadgevers om zich heen en blijft in alles standvastig; dan verslaat hij de koning wiens leger nog niet vernietigd is. Wanneer deze vijf getallen[1] in volgorde uitgesproken zijn, degene onderaan vermenigvuldigd met het kwadraat van de gegeven boog gedeeld door (het kwadraat van 5400 minuten) moet het quotiënt steeds worden afgetrokken van wat daarboven staat, maar het laatste moet met de kubus, (en dan afgetrokken) van de boog.

Bronvermelding: het vers komt o.a. voor in twee werken van Shankara, geschreven tussen 1529 en 1556.

[1]De getallen zijn $2220'39''40'''; 273'57''47'''; 16'05''41'''; 33''06'''$ en $44'''$, genoteerd volgens het *kaṭapayādi* systeem: 44 = vv, 3306 = lbnt, 160541=ycnśvk, 2735747=r(th)lś(th)vs, 22203940=rrrng(dh)vn. Twee medeklinkers tussen haakjes, zoals (th), (dh), staan voor één letter in het Sanskrit. Klinkers en sommige medeklinkers betekenen niets in dit verband. De notatie is sexagesimaal: $1'$ is 1 minuut is $\frac{1}{60}$, $1''$ is 1 seconde is $\frac{1}{60 \cdot 60}$, enz.

Wat betekent dit?

Tekst 1 betekent: Sin $\alpha = R\sin\frac{\alpha}{R} = \alpha - \alpha\cdot\frac{\alpha^2}{R^2\cdot(2^2+2)} + \alpha\cdot\frac{\alpha^2}{R^2\cdot(2^2+2)}\frac{\alpha^2}{R^2\cdot(4^2+4)} - \ldots$ met $R = \frac{10800}{\pi} \approx 3438$, α gemeten in boogminuten, en Sin α de Indiase sinus, deze is gelijk aan $R\sin\frac{\alpha}{R}$ met sin onze sinus, $\frac{\alpha}{R}$ in radialen. N.B. in India was de boogminuut ook een lengtemaat, vandaar $2\pi R = 60\cdot 360$.

Tekst 2 betekent: Sin $\alpha = \alpha - (\frac{\alpha}{5400})^3(2220'39''40''' - (\frac{\alpha}{5400})^2(273'57''47''' - (\frac{\alpha}{5400})^2(16'05''41''' - (\frac{\alpha}{5400})^2(33''06''' - (\frac{\alpha}{5400})^2 44'''))))$. De getallen $2220'39''40''$ tot en met $44'''$ zijn afgeronde waarden van $\frac{5400}{3!}(\frac{\pi}{2})^2, \ldots \frac{5400}{11!}(\frac{\pi}{2})^{10}$.

Hoe zijn de machtreeksen voor de sinus en cosinus door Mādhava (ca. 1410) gevonden?

Om schrijfwerk te besparen zullen we de Indiase Sinus en Cosinus (Cos(x)=Sin($5400' - x$) $= R\cos(x/R)$) vervangen door de moderne.

1. Meetkundig zie je in dat voor een boog p met $0 \le p \le 90^o$ en voor een klein boogje h geldt: $\sin(p+h) - \sin(p) \approx h\cdot\cos(p)$, en $\cos(p) - \cos(p+h) \approx h\cdot\sin(p)$.

2. Nu wordt een boog a met $0 \le a \le 90^o$ verdeeld in een groot aantal N gelijke stukjes ter lengte h, dus $a = Nh$. Dan zie je:

$$\sin(a) = \sin(a) - \sin(0) = \sum_{i=1}^{N}(\sin(ih) - \sin((i-1)h) \approx \sum_{i=1}^{N} h\cdot\cos(ih) \qquad (1)$$

$$1 - \cos(a) = \cos(0) - \cos(a) = \sum_{i=1}^{N}(\cos((i-1)h) - \cos(ih) \approx \sum_{i=1}^{N} h\cdot\sin(ih) \qquad (2)$$

3. We beginnen met de benadering $\sin(x) \approx x$.
Dit in (2) invullen levert $1-\cos(a) = \sum_{i=1}^N h\cdot\sin(ih) = h^2\sum_{i=1}^N i \approx \frac{h^2N^2}{2} = \frac{a^2}{2}$, dus $\cos(a) \approx 1 - \frac{a^2}{2}$. Dit in (1) invullen levert $\sin(a) \approx \sum_{i=1}^N h\cdot\cos(ih) \approx \sum_{i=1}^N(h - \frac{h^3i^2}{2}) = Nh - \frac{h^3}{2}\sum_{i=1}^N i^2 \approx Nh - \frac{h^3}{2}\cdot\frac{N^3}{3} = a - \frac{a^3}{2\cdot 3}$. Dit vullen we weer in (2) in, we krijgen dan $1 - \cos(a) \approx \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{2\cdot3\cdot4}$, enz.

Bronvermelding: Anoniem (16e-eeuws?) commentaar op de twee verzen, zie Gold & Pingree.

Literatuur:

B. Datta, A.N. Singh, *History of Hindu Mathematics: A Source Book*, Part 1, Lahore: Motilal Banarsi Das, 1933.

D. Gold, D. Pingree. A Hitherto Unknown Sanskrit Work concerning Mādhava's Derivation of the Power Series for Sine and Cosine, *Historia Scientiarum* **42** (1991), 49-65.

C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari, On an Untapped Source of Medieval Keralese Mathematics, *Archive for History of Exact Sciences* **18** (1978), 89-102.

T. A. Saraswati Amma. *Geometry in Ancient and Medieval India*. Delhi: Motilal Banarsidas, 1979.

B.V. Subbarayappa. K. V. Sharma, *Indian Astronomy: A Source Book*, Bombay: Nehru Centre, 1985 (zie p. 64).