CONCRETE MEETKUNDE
Inleidende colleges

Hoodstukken geschreven door Jan Hogendijk

Voorwoord

Dit is het dictaat “Concrete Meetkunde I”. Elk hoofdstuk uit dit dictaat hoort bij één college. Dit betekent dat je voor elk college precies de te behandelen stof kunt voorbereiden. Een aantal adviezen voor deze voorbereidingen:

- Lees de gehele tekst minstens een keer door. Bij het doorlezen zul je merken dat je heel wat begrippen allang kent.
- Zorg dat je helderheid hebt over terminologie en definities.
- Het teken $\diamondsuit$ in de kantlijn staat voor **onderzoek**. Probeer voor jezelf alle vragen waar dit teken voor staat te beantwoorden.
- Voor elke opgave staat het teken $*$. Zorg dat je weet waar de opgaven precies over gaan, je hoeft ze nog niet te maken.
- Lees de bewijzen in de bijbehorende Bijlage door. Noteer problematische overgangen.

Veel plezier met Concrete Meetkunde!

Inhoudsopgave

Concrete Meetkunde: Wat en Hoe?

Algemene karakteristiek

In de cursus Concrete Meetkunde I verkennen we concretiseringen van de elementaire meetkunde. Soms zijn het toepassingen die geschikt zijn om op het VWO te behandelen, vaak ook niet. De 'stijl' van werken zal meer gericht zijn op concreetheid en op werken met de ogen en handen dan op systematiek. Daarmee is het vak in benadering verwant aan sommige VWO-stof. Toch zal ook hier de 'engel van de abstractie' zijn vleugels soms uitslaan. Onderwerpen van de cursus zijn zo gekozen dat er altijd wel aanleiding is een 'klassiek' stuk meetkunde in het zonlicht te zetten.

Concrete Meetkunde I is niet bedoeld om te leren lesgeven. Daar zijn andere cursussen voor. Bij dit meetkundevak gaat het om een echt wiskundevak, maar wel met speciale onderwijsgerichte aspecten. Er zal veel aandacht zijn voor presentaties van de studenten.

Werkvorm, tijdsbesteding, tentamenbriefje, materiaal

Structuur van de cursus

Globaal is de cursus in twee delen ingedeeld: een deel dat door de docenten wordt verzorgd en een deel waarin studenten zelf presenteren. Het docenten-deel is bedoeld om een pakket vaardigheden op meetkundig gebied onder handbereik te krijgen die nodig zijn bij allerlei concrete onderwerpen. In het studentendeel wordt echt aan de concretisering gewerkt, vaak in de vorm van toepassingen van de meetkunde in andere vakken.

In het eerste deel worden op de circa 5 collegebijeenkomsten wat algemene punten belicht, kun je vragen erover stellen, en kunnen we dan samen werken aan wat opgaven. Zelf werk je de opgaven daarnaa zelfstandig af; je levert ze de voldende week in. In het algemeen heb je bij het eerste deel van de cursus tussendoor dus twee taken: iets lezen en opgaven afwerken.

Ook bij het tweede (concretere) deel worden opgaven opgegeven door de deelnemers die de presentaties verzorgen. In principe hoef je voor dat deel van de cursus geen dingen vooraf zelf door te nemen, tenzij je natuurlijk zelf presenteert! Gemaakte opgaven worden ingeleverd bij de presentatoren en door hen van eventueel commentaar voorzien teruggegeven.

Tijdverdeling

Het vak Concrete meetkunde I heeft een belasting van 7,5 ECTS. Dit betekent dat een hypothetische normstudent aan dit vak $7{,}5 \times 28$ uur $= 210$ uur werkt. We hebben hierbij min of meer de volgende verdeling in gedachte:

Colleges	30 u	
Opgaven college deel 1	40 u	3 u studeren, 5 u huiswerk per keer.
Opgaven college deel 2	30 u	dus 3 u. per college
uitzoeken en orienteren op onderwerp	10u	
voorbereiden en uittesten eigen presentatie	50 u	
Maken van verslag, handouts, opgaven eigen presentatie	30 u	
Nakijken opgaven naar aanleiding van eigen presentatie	10 u	
Reserve	10 u	

De eerste periode gaat er vrij veel tijd naar studeren, huiswerk en de keuze van een onderwerp. Houd hiermee rekening in je planning.

Tentamenbriefje

Er wordt verwacht dat je

- Bij de bijeenkomsten aanwezig bent
- Alle opgaven die worden opgegeven maakt en inlevert
- Zelf presentaties verzorgt (in principe twee maal 45 minuten per groepje)
- Zorgt dat er bij de presentatie van concreet materiaal gebruik gemaakt wordt. Je presenteert dus niet alleen met krijt, bord en/of beamer. Het concrete materiaal bestaat uit een uitvoerige handout en uit een stuk 'handwerk'.
- Huiswerkopgaven voor de overige deelnemers verzorgt: Bij voorkeur laat je ook de deelnemers een of meer concrete opdrachten doen. Deze opdrachten moeten door jou en je groepsgenoot worden nagekeken

- Een verslag van de presentatie maakt en inlevert. Dit dient in foutloos en stylistisch correct Nederlands (of Engels) geschreven te zijn.

Op grond van dit geheel van activiteiten wordt je cijfer bepaald. Je mag maximaal één bijeenkomst afwezig zijn (en over die bijeenkomst hoef je dan geen opgaven in te leveren). Als je bij meer bijeenkomsten afwezig bent, heb je een probleem, dat eventueel kan leiden tot een extra taak of een onvoldoende beoordeling voor het vak. Dit zelfde geldt als je de opgaven onvoldoende maakt of onvoldoende inzet toont bij de presentatie.

Materiaal

Voor het kopieren van de handouts bestaat een aparte regeling, die inhoudt dat de deelnemers niet voor deze kopieën hoeven te betalen. Elke concreet-meetkundige heeft altijd de traditionele uitrusting van passer, lineaal, geodriehoek en potlood bij zich. In deze cursus is het handig schaar en lijm in de buurt te hebben, maar hiervoor zorgen de docenten.

Overzicht van de inleidende colleges

De inleidende onderwerpen vormen de basiskennis die nodig is in het tweede deel van de cursus. Hieronder worden de onderwerpen globaal aangeduid.

Een gedeelte van het werk is 'oefenen'. We streven naar een afwisseling tussen luisteren, practisch werken en discussiëren.

Algemene inleiding

We geven een inleiding in de verschillende manieren waarop meetkunde kan worden beoefend, ingepast in wat vroeger en nu onder meetkunde werd of wordt verstaan.

Beweging en symmetrie

We kijken naar het bewegen van figuren, het samenstellen van twee bewegingen, en de classificatie van isometrieën, dat zijn afbeeldingen die de afstand onveranderd laten. De vraag: "wat is eigenlijk symmetrie" komt uitvoerig ter sprake. Vooral bij onderwerpen als versieringen en bewegingen is dit van belang. Als voorbeeld komen een paar meetkundestellingen aan bod die zonder de hier besproken technieken alleen op omslachtige manier kunnen worden begrepen en bewezen.

Cirkels, hoeken en bogen, inversie

Een figuur die in veel toepassingen een rol speelt is de cirkel. Een paar minder triviale eigenschappen van de cirkel zijn daarbij vaak belangrijk. Net als bij het onderwerp 'Beweging en Symmetrie' gaat het hier om een mooi stuk theorie. Bij 'inversie' wordt in zekere zin gespiegeld in de cirkel. Ook dit levert een fraai stuk meetkunde en een goed gereedschap voor verder gebruik. We bespreken hierbij ook een interpretatie van een paar prenten van Escher. Opgaven gaan over toepassing en uitbreiding van de te bespreken stof.

Concrete ruimtemeetkunde, tekeningen maken

Aan de hand van enkele problemen in de traditionele kubus wordt stereometrie geoefend. Het gaat echt om opwarmen van in principe al aanwezige kennis en inzicht. We besteden aandacht aan het maken van 'duidelijke' tekeningen van ruimtelijke situaties. Dit heeft een theoretische en praktische kant. Theoretisch is de beschrijving van de orthogonale parallelprojectie. De praktische kant is van belang voor presentaties later. Een paar voorbeelden van overduidelijk slecht en goed uit de literatuur komen op tafel, waarna we samen een paar kwaliteitscriteria voor goede tekeningen vaststellen. We kunnen ook oefenen met systemen om driedimensionale objecten in elkaar te zetten met plastic bolletjes en staafjes.

Opgaven bij deze bijeenkomst zijn bedoeld als conditietraining ruimtemeetkunde.

Boldriehoeksmeetkunde

Dit onderwerp is belangrijk voor de meetkunde op grotere gedeelten van het aardoppervlak, en de beschrijving van (schijnbare) bewegingen aan de hemel. Een hulpmiddel hiervoor is de hemelbol, een denkbeeldige bol met jou (of het centrum van de aarde) als middelpunt en een heel grote straal. Een apart meetkundeonderdeel, de bolmeetkunde, is hier het traditionele middel om orde op zaken te stellen. Er komen voor: grootcirkels, kleine cirkels, pool, hoeken op een boloppervlak, boldriehoeken. Het gaat vooral om het afleiden en leren gebruiken van formules die het verband tussen elementen van een boldriehoek beschrijven, zoals een sinus- en cosinusregel. Opgaven zijn bedoeld om dit materiaal ook in de praktijk in de vingers te krijgen.

Verdere hoofdstukken

In het diktaat in huidige vorm staan drie verdere hoofdstukken. Deze worden alleen behandeld als de tijd dat toelaat, en zijn verder interessant verdiepings/leesmateriaal, waar je soms goed gebruik van kunt maken als voorbereiding op je presentatie. Hoofdstuk 6 gaat over kegelsneden. Een overzicht van de verschillende manieren waarop kegelsneden opduiken wordt gegeven; uiteindelijk kun je met een zaklantaarn een figuur maken die de vorm van een kogelbaan heeft en ook een doorsnede is van een satelietantenne. Opgaven gaan over de samenhang tusen de verschillende benaderingen van kegelsneden en de hoofdeigenschappen van deze figuren. In hoofdstuk 7, over veelhoeken, wordt, naast het practisch realiseren van regelmatige figuren aan de hand van een telrol, ook een verband gelegd tussen de meetkunde die er achter steekt en wat elementaire getaltheorie. Hoofdstuk 8 over beschrijvende meetkunde houdt verband met het eerdere hoofdstuk over ruimtemeetkunde. Voordat we ons op moeilijke driedimensionale tekeningen storten gaan we eerst nadenken over de tweedimensionale voorstelling van rechten, vlakken, pyramiden, enz., en we concentreren ons hierbij op de projecties van voor- en bovenaanzicht.

Presentaties in het tweede deel van de cursus

Algemeen

Er is een lijst onderwerpen voor zelfstandige bestudering, zie verderop. In de eerste weken wordt daar nog wat toelichting op gegeven; je moet zelf een keus maken. We overleggen met de hele groep over de verdeling van onderwerpen. Je werkt samen met één andere student (in bijzondere gevallen twee of drie andere studenten). Over jouw keuze verzorg je één bijeenkomst (of twee bijeenkomsten). Je krijgt begeleiding bij het voorbereiden van de presentatie en hulp bij het vinden van literatuur. Je bespreekt je presentatie in elk geval gedetailleerd voor met een van de docenten. Je zorgt dat er bij je presentatie een **handout** is waar de belangrijkste zaken in staan.

Bij jouw presentatie geef je je medestudenten ook enkele opgaven als huiswerk op. De opgaven staan in je handout. Je corrigeert de opgaven ook na inleveren. Zoals je uit het voorgaande kunt zien wordt overtuigend visueel presenteren in dee cursus hoog gewaardeerd. Dat kost ook voorbereiding en tijd voor vantevoren alles oefenen!

Na afloop werk je de handout uit tot een zelfstandig leesbaar **verslag** (d.w.z. een **werkstuk**) dat de presentatie samenvat.

De onderwerpen

Hieronder staat een korte omschrijving van mogelijke onderwerpen. De docenten hebben meer informatie, en de bedoeling is dat we in een gesprek tot een nadere afbakening komen, waarbij een paar einddoelen worden gesteld. Je hebt hier zelf veel aan. Per onderwerp is er een literatuurlijst: de traditie van Concrete Meetkunde I is, dat je die literatuurlijst verder moet aanvullen. Met andere woorden: Eigen initiatief en eigen plannen zijn zeer welkom.

Splitsing en combinatie van onderwerpen: nieuwe onderwerpen

In principe werk je met zijn tweeën aan een onderwerp en verzorg je samen één bijeenkomst. Bij diverse onderwerpen is het mogelijk om te splitsen in deelonderwerpen. Bijvoorbeeld kan goed los van het hemels uurwerk aan zonnewijzers worden gewerkt, of kunnen onregelmatige (niet-periodieke) vlakvullingen een apart onderwerp zijn, net als regelmatige vlakvullingen. Bij het maken van keuzes gaan we daar wel op in. Er zijn ook voor de hand liggende verbanden tussen de verschillende onderwerpen.

Je kunt zelf ook een vraagstelling ontwikkelen die met twee of meer van deze onderwerpen te maken hebben, of die helemaal nieuw is. We kijken dan samen op welke manier je eigen vraagstelling het best in de vorm kan worden gegoten van een presentatie in deze cursus. Belangrijk is dat je enthousiast bent voor je onderwerp. Denk er wel aan dat twee uur betrekkelijk weinig tijd is voor een presentatie. De docenten kunnen je helpen bij het vinden van de juiste zelfbeperking.

Lijst van onderwerpen

Het hemels uurwerk

Als je geen horloge hebt, kun je de tijd bepalen aan de hand van de (schijnbare) draaiïng van de sterren en de zon om de aarde. Hoe dit in zijn werk gaat, moet worden uitgezocht. We kunnen ons bijvoorbeeld bezig houden met de volgende vragen:

- Hoe is de dag/het etmaal precies gedefinieerd?

- Hoe laat gaat op een gegeven dag (je verjaardag bijvoorbeeld) de zon op en hoe laat gaat hij precies door het zuiden?

- Hoe maken we een geschikte zonnewijzer? Je kunt ook het middeleeuwse astrolabium bestuderen, waarmee niet alleen overdag maar ook 's nachts de tijd kan worden bepaald, en overdag ook de richting van het Noorden.

Benodigde wiskunde: cirkels, hoeken en bogen; boldriehoeksmeting. Een aspect van het astrolabium (stereografische projectie) heeft ook te maken met het volgende onderwerp.

Kaartprojecties

Wie een kaart van de aardbol of de hemel wil maken, moet een boloppervlak op een plat vlak afbeelden. Dit kan helaas niet zonder het boloppervlak te vervormen, zoals iedereen weet die wel eens geprobeerd heeft een sinaasappelschil plat te drukken. Verschillende projecties van de bol op het platte vlak kunnen worden bekeken op hun voor- en nadelen. Per toepassing (navigatie op zee, politiek, weergave bevolkingsspreiding), of per af te beelden gebied (alleen zuidpool, de hele aarde, het centrum van Utrecht) kan de keuze voor een projectiemethode verschillen.

Benodigde meetkunde: cirkels, hoeken en bogen; ruimtemeetkunde; bolmeetkunde.

Versieringen en patronen

Vaak kom je in het door mensen gemaakte deel van de werkelijkheid regelmatige patronen tegen. Denk aan stoeptegels, bedrukte stoffen, behang, randornamenten, gothische versieringen, twee- en driedimensionale patronen in middeleeuws Islamitische bouwwerken, enz. Als er herhaling in twee richtingen in een patroon zit, zijn er ook allerlei beperkingen. Dan kan bijvoorbeeld vijftallige symmetrie niet meer optreden. Bij dit onderwerp kun je onderzoeken welke typen van regelmaat in het platte vlak wel mogelijk zijn. Je kunt je ook bezighouden met patronen die een bepaalde structuur hebben maar niet periodiek zijn (bijv. Penrose-betegelingen). Ook kun je je onderzoek naar drie dimensies uitbreiden (kristallografie). Je kunt ook verbanden leggen met onderwerpen uit de moderne algebra, zoals groepentheorie. Het onderwerp versieringen en patronen is enorm rijk.

Perspectief

Tekenpapier, schilderslinnen, fotopapier en een computerscherm zijn tweedimensionaal. Dat geeft een probleem bij het afbeelden van driedimensionale objecten. In de vijftiende eeuw is een techniek ontwikkeld om toch redelijke resultaten te krijgen: het lineair perspectief. Bij dit onderwerp wordt ook de theorie bestudeerd, die in de literatuur vaak nogal slordig wordt behandeld, vanuit wiskundig standpunt gezien. Een minimumeis bij dit onderwerp is dat we praktisch perspectief leren tekenen en dat we door gebruik te maken van wat wiskunde, minstens even ver komen als een leerling uit een schildersatelier in Florence, anno 1480.

Bewegingen I: toepassingen van rollende cirkels

Hoe beweegt het ventiel van je fiets als de fiets rijdt? En hoe zit het als we rekening houden met de bolvorm van de aarde? En bij een steile wandrace, waar de (motor)fiets aan de binnenkant van een cylinder rijdt? Hoe bewegen de planeten als je niet de zon maar de aarde als oorsprong van je coördinatensysteem neemt? Al deze krommen zijn een apart onderzoek meer dan waard, en er zijn veel plaatsen waar ze voorkomen: het maken van slingerklokken, als vorm door tandwielen, als de bekende brandlijn in een kopje koffie.

Bewegingen II: stangenmechanismen

Bij veel zaken in de wereld van de techniek wordt meetkunde gebruikt. In dit onderwerp zoeken we een aantal interessante (meetkundige!) technische situaties op. Denk aan het maken van een rechtlijnige beweging uit een cirkelvormige beweging via beweeglijke stangenconstructies; het handig plaatsen van scharnieren in deuren zodat de deur niet ‘stoort’; constructies om speciale figuren zoals ellipsen te tekenen, enz. Bij dit onderwerp liggen veel vragen open. Het hangt er van af wat je uitkiest, zelf bedenkt en meetkundig oplost.

De natuur

De levende natuur is een rijke bron voor meetkundige beschouwing. De regelmaat ervan en vooral ook de onregelmatigheid kan op allerlei manieren onderzocht worden. Hoe beschrijf je een nautilusschelp? En waarom lijkt het of in een zonnebloem ook spiralen zitten? Waarom die speciale vorm van een honongraat? Het is niet verboden ook in de anorganische natuur mooie patronen te bestuderen: zoals golfpatronen in het water, kristalvormen, enz.

Architectuur

Hoe kunnen we de vorm van een gothisch raam wiskundig beschrijven? Aan welke voorwaarden moet een gemetselde koepel voldoen om niet in te storten? Waarom kiezen architecten bepaalde vormen wel en andere juist niet? Hoe doen andere ontwerpers (denk bijvoorbeeld aan het maken van lettertypen) dit? Kortom: meetkunde heeft een plaats in de strijd tussen schoonheid en functionaliteit. Mogelijkheden genoeg, vooral als je van het onderwerp houdt en zelf voorbeelden inbrengt (dit geldt trouwens voor alle onderwerpen).

Elegantie, concrete en aanschouwelijke bewijzen

Meetkundige stellingen die met moeizaam rekenwerk worden bewezen, kunnen soms ook in één oogopslag worden ingezien als van een handige presentatie gebruik gemaakt wordt. Bijvoorbeeld, een moeilijke figuur in het vlak kan soms worden bekeken als projectie van een figuur in de ruimte. Een eenvoudige uitspraak over het ruimteobject kan in 'vertaling' een subtiele bewering over de vlakke figuur worden.

Door een afleiding op slimme manier te transformeren, in het resultaat enkele feiten aan te wijzen, en dan weer terug te transformeren, wordt ook soms een fraai overzichtelijk bewijs verkregen. Bij dit onderwerp gaat het dus vooral om de esthetiek van zuivere wiskundige onderwerpen die te maken heeft met directe aanschouwing.

Projectieve meetkunde en dualiteit

Wanneer we aan het 'gewone' vlak of de 'gewone' ruimte op een speciale manier 'punten in het oneindige' toevoegen ontstaat een meetkundige theorie met heel fraaie symmetrieën tussen stellingen. Denk daarbij bij de ruimtemeetkunde bijvoorbeeld aan de gemeenschappelijke structuur tussen "drie vlakken snijden elkaar in één punt" en "drie punten bepalen één vlak". Uit stellingen kun je soms zonder moeite te doen andere stellingen afleiden. Deze dualiteit kan ook worden gebruikt in het wiskundeonderwijs op het niveau van de middelbare scholen; dit wordt bijvoorbeeld toegepast in het onderwijs in de "vrije scholen."

1 Algemene Inleiding

1.1 Euclides en Hilbert

Om duidelijk te maken wat we met concrete meetkunde bedoelen, zullen we eerst iets zeggen over de ontwikkeling van het vakgebied. We bespreken in het bijzonder twee meetkundigen die het "gezicht" van het vak bepaald hebben: Euclides en Hilbert.

In de periode 600-300 v.C.. ontstond in Griekenland een opvatting van meetkunde als een axiomatische en deductieve wetenschap. Axiomatisch betekent dat je uitgaat van onbewezen grondwaarheden en basisconstructies. Deductief wil zeggen dat alle ware beweringen of constructies door logische redeneringen uit deze grondwaarheden of grondconstructies moeten worden afgeleid. *Euclides* (ca. 300 v. C.) legde een deel van de toenmalige kennis van meetkunde vast in zijn *Elementen*. Dit werd in latere eeuwen een standaardwerk over meetkunde, en het heeft de visie op wat meetkunde is lange tijd bepaald. Euclides ging uit van definities, postulaten en "algemene inzichten", Daaruit leidde hij op logisch strenge manier proposities af (stellingen en meetkundige constructies). Deze proposities betroffen vlakke meetkunde, getallen, en ruimtemeetkunde.

Hier volgt een selectie van Euclides' uitgangspunten:[1]

Definities (letterlijk "grenzen" of "grenspalen")

1. Een punt is, wat geen deel heeft.
2. Een lijn is lengte zonder breedte.
3. De uiteinden van een lijn zijn punten.
4. Een rechte lijn is een lijn die gelijk ligt met de punten erop.
8. Een vlakke hoek is de helling van twee lijnen die in één vlak liggen, elkaar raken, en niet in één rechte lijn liggen.
10. Wanneer een rechte (lijn) op een andere rechte (lijn) staat, en de aangrenzende hoeken aan beide kanten gelijk aan elkaar maakt, is elk van de gelijke hoeken een rechte (hoek), en de opstaande lijn heet loodlijn (*kathetos*) op (de lijn) waarop hij staat.

[1] Vertaling uit het Grieks is geïnspireerd door E.J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides* deel 1, Groningen: Noordhoff, 1932. Vergelijk ook de standaard Engelse vertaling in T.L. Heath, *Euclid: The Elements*, second edition, Cambridge, Cambridge University Press, 1925

15. Een cirkel is de vlakke figuur die door één lijn omvat wordt, zodat alle lijnen die vanuit één van de punten in het inwendige van de figuur er naar toevallen, gelijk aan elkaar zijn.

23. Evenwijdige (*parallelos*, "naast elkaar") lijnen zijn alle lijnen die in hetzelfde platte vlak zijn, en, aan beide zijden in het onbegrensde verlengd, elkaar aan geen van beide zijden ontmoeten.

Postulaten (Letterlijk: "eisen")

1. Laat geëist worden: van elk punt naar elk punt een lijn te trekken;
2. en een begrensde lijn samenhangend in een rechte lijn te verlengen;
3. en dat met elk middelpunt en elke afstand[2] een cirkel beschreven wordt;
4. en dat alle rechte hoeken gelijk aan elkaar zijn;
5. en dat, als tussen twee rechten een rechte (lijn) valt, die de twee binnenhoeken aan dezelfde kant minder dan twee rechten maakt, de twee rechten, wanneer ze in het onbegrendse worden verlengd, elkaar treffen aan de kant waar de (hoeken) minder dan twee rechten zijn.

Algemene inzichten

1. (Dingen) die gelijk zijn aan hetzelfde, zijn gelijk aan elkaar.
2. En als aan gelijken gelijken worden toegevoegd, zijn de gehelen gelijk.
7. En dingen die op elkaar passen, zijn gelijk aan elkaar.
8. En het geheel is groter dan het deel.

Hoe zou je zelf een punt definiëren? Wat is de relatie tussen een lijn zoals gedefinieerd in Def. 2 en een concrete lijn zoals de dakrand van een huis? Ken je bewijzen waarin het eerste algemene inzicht wordt gebruikt? ◇

De belangrijkste motivatie achter deze opbouw was vermoedelijk de grote interesse van Griekse filosofen in de zekerheid van het menselijk redeneren. De axiomatisch-deductieve opbouw zorgde ervoor dat alle proposities even zeker waren als de gekozen uitgangspunten. Er was dus, naast de aandacht voor meetkundige objecten (cirkels, driehoeken, pyramides, regelmatige veelvlakken enz.) een sterke aandacht voor de logische samenhang van de kennis over deze objecten.

Intussen bleek in de loop van de volgende 22 eeuwen dat er nog wel wat ontbrak aan de logica van Euclides' *Elementen*. Zo bleken bijvoorbeeld vele

[2]Dit is een lijnsegment met een beginpunt in het middelpunt.

definities, die de meetkundige objecten moesten vastleggen, problematisch te zijn. In 1899 publiceerde David Hilbert (1862-1943) zijn *Grundlagen der Geometrie*. Het doel van dit boek was om de Euclidische meetkunde volledig en streng axiomatisch op te bouwen, en daarbij het probleem met de definities uit de wereld te helpen. Hilbert begint zo:

> *"Definitie. We denken ons drie verschillende systemen van dingen: de dingen van het eerste systeem noemen we* punten, *. . . ; de dingen van het tweede systeem noemen we* rechten *. . . ; de dingen van het derde systeem noemen we* vlakken *. . . . We denken de punten, rechten en vlakken in bepaalde betrekkingen tot elkaar, en we geven deze betrekkingen aan door woorden als "liggen", "tussen", "evenwijdig", "congruent", "continu"; de nauwkeurige en volledige beschrijving van deze betrekkingen gebeurt in de* axiomas van de meetkunde.*"*

Hilbert gaf dus geen definities van de objecten (punt, rechte lijn, vlak) en van de relaties (incidentie d.w.z. "liggen op", "bevatten"; tussen, evenwijdig). Hij veronderstelt alleen dat er verzamelingen van objecten zijn en dat zekere relaties gelden. Die relaties legt hij vast met axioma's, bijvoorbeeld *Op een rechte zijn altijd minstens twee punten; in een vlak zijn er altijd minstens drie punten die niet op één rechte liggen.* Hilbert heeft elders gezegd dat het er niet toe doet of je de elementen van je systemen "punten", "rechte lijnen" en "vlakken" noemt; je kunt de net zo goed "tafels", "stoelen" en "bierpullen" noemen.

Enig idee waarom Hilbert lijnen niet als puntverzamelingen definieert? ◇

Hilbert's axiomatische opbouw heeft zeer sterk het gezicht van de moderne zuivere meetkunde bepaald. De kracht ervan is dat logica gebruikt wordt om alle niet expliciet genoemde vooronderstellingen op te sporen en in axioma's vast te leggen. Dit gaat zeer ver; zo ver zelfs dat een relatie met concrete meetkundige objecten naar de achtergrond verdwijnt. De ontwikkeling waarvan we bij Euclides het begin zagen wordt hier zeer ver gevoerd. Die ontwikkeling is:

Meetkundige objecten $\longrightarrow$ Logische relaties

Vind je dat de theorie zoals Hilbert die vastlegde nog "meetkunde" mag heten? ◇

1.2 Wiskunde, meetkunde en "Concrete Meetkunde"

Bij de meetkunde in de axiomatisch-deductieve opbouw gaat de aandacht vooral uit naar abstractie en de logische opbouw van de meetkunde. Hierbij krijgen bepaalde vaardigheden minder aandacht. Bijvoorbeeld de vaardigheid om je figuren voor te stellen, plaatjes te tekenen, en verbanden te "zien", en ook vertrouwdheid met strategieën om problemen op te lossen. De wiskundigen die destijds de axiomatisch-deductieve opbouw van de meetkunde ontwikkelden hadden zelf die vaardigheid en vertrouwdheid wel. Maar de nadruk op de logische opbouw kan ertoe leiden dat deze zaken in het onderwijs niet meer voldoende aan de orde komen.

De nadruk op logische relaties in de meetkunde kan ook de aandacht afleiden van gebruik en toepassingen. De stellingen die in de abstracte opbouw centraal staan zijn hierbij niet altijd het handigst. Er zijn en heleboel voorbeelden en zelfs hele vakgebieden in de meetkunde die voor een abstracte logische aanpak niet interessant zijn en daardoor tussen de wal en het schip dreigen te vallen. Het doel van de cursus "Concrete meetkunde" is een kennismaking met juist deze vaardigheden, aspecten, en gebieden. We richten ons vooral op de meetkundige objecten zelf, op concreet meetkundig inzicht, op bruikbaarheid van stellingen, en op concrete voorbeelden en toepassingen (die overigens geen economisch nut hoeven te hebben; toepassingen in de kunst zijn ook heel interessant). We gaan daarbij geen enkel middel uit de weg: ook onderzoek van zelfgebouwde driedimensionale modellen, knippen en plakken met papier en karton, enz. zijn toegestaan. Overigens leert de ervaring dat dit soort concrete activiteiten tot een grote verdieping van inzicht leiden die niet in strijd is met de abstracte aanpak, maar deze zelfs ondersteunt.

De aanpak bij "Concrete Meetkunde" wijkt ook in een ander opzicht af van wat bij een aantal andere wiskundevakken (infinitesimaalrekening, lineaire algebra, inleiding analyse enz.) in het begin van de studie gangbaar is. In deze vakken krijgen de studenten een grote hoeveelheid diepgaande basisinzichten, die door de mensheid in vele eeuwen zijn ontwikkeld, in korte tijd aangereikt. Dit gebeurt via een systeem van hoorcolleges, werkcolleges en tentamens, dat in de praktijk zeer efficiënt is gebleken. Het gevaar hierbij is dat de studenten in de eerste jaren (noodgedwongen) gewend raken aan het consumeren van leerstof; dus aan een stroom kennis van buiten naar binnen. Het van "Concrete meetkunde" biedt, door de concrete en gemakkelijk toegankelijke aard van de leerstof, de mogelijkheid deze stroom om te keren.

Het grootste deel van de cursus zal bestaan uit presentaties door de deelnemers van de cursus. Deze krijgen de gelegenheid zelf een concreet meetkundig onderwerp uit te kiezen en voor te bereiden. De omvang van het onderwerp kan zelf worden afgebakend, en de precieze werkvorm tijdens de presentatie, de opgaven, enz. kunnen zelf worden ontwikkeld. Dit alles gebeurt uiteraard in overleg met de docenten, die bij al deze aspecten kunnen helpen. Maar bij het vak "Concrete meetkunde" is maximale ruimte voor eigen inspiratie van de studenten.

1.3 Thema's

In deze cursus bestuderen we meetkundige objecten: driehoeken, cirkels, bollen, pyramiden, kegels, kegelsnedes, enz., en ook de dingen die met deze objecten gedaan kunnen woden zoals bewegen, spiegelen, vervormen, verdelen, enz. We laten de bewijzen niet los, want de resultaten van concrete meetkunde moeten betrouwbaar zijn; maar we zoeken vooral de handigste redenering waar we zeker van zijn, en niet zozeer de meest strikte weg naar de grondbeginselen van de meetkunde.

Thema's die daarom veel aan de orde zullen komen zijn: **beweging, concretisering, strategie van redeneren** en **toepassingen**.

a. **Beweging.** Vaak worden verbanden in of tussen meetkundige figuren duidelijk als je er zelf handige bewegingen in ziet.

   Opgave 1.1 Bekijk Euclides' eigen bewijs van de stelling van Pythagoras (zie tekst en werkblad aan het eind van dit hoofdstuk. Let vooral op de oppervlakken waarvan Euclides laat zien dat ze gelijk zijn. Kijk of je de bewijsgang kunt verhelderen met hulp van beweging. $\ast$

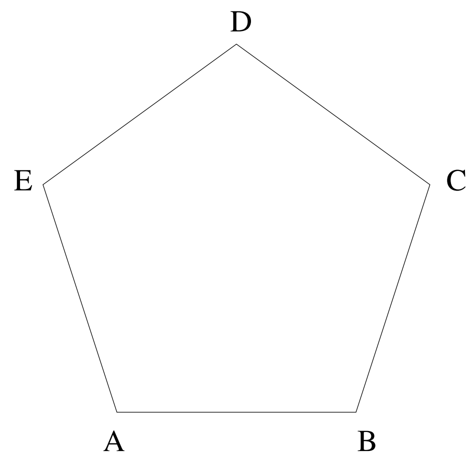
b. **Concretisering.**

   Opgave 1.2 Maak (van karton of ander stevig materiaal) een legpuzzel waarmee de stelling van Pythagoras kan worden bewezen. Er zijn vele mogelijkheden! Schrijf er een korte handleiding bij. $\ast$

c. **Strategie van redeneren,** vooral bij succesvolle, leuke of verrassende bewijzen.

   (Hoe) weten we dat de som van de hoeken van een driehoek 180 graden is? $\diamondsuit$

Opgave 1.3: de regelmatige vijfhoek en de gulden snede. Een deel van deze opgave bestaat uit het zelf (nadenken over het) tekenen van een figuur. Wellicht moet je verschillende pogingen doen totdat je een behoorlijke figuur krijgt. *



(1) Schets een regelmatige vijfhoek $ABCDE$ met de vijf diagonalen. Laat zien dat van de driehoek ACD door diagonaal DB een kleine driehoek wordt afgesneden die gelijkvormig is aan driehoek ACD zelf: ga eerst na in de figuur dat het misschien wel zo is, en beredeneer dan dat het zo moet zijn. Hint: hoe groot zijn de hoeken? Laat zien dat AC door BD wordt verdeeld volgens de gulden snede (geheel : grootste deel = grootste deel : kleinste deel); ga weer eerst na in de figuur dat dit misschien wel zo is, en beredeneer dan dat het zo moet zijn.

(2) Stel de diagonaal van de vijfhoek heeft lengte 1, en stel dat de zijde lengte x heeft. Leid een vergelijking af voor x en bereken daarna x. (Kijk even in de figuur of dit ongeveer klopt.)

(3) Bereken nu de sinus van 18 graden. Controleer het resultaat met sinustabel of rekenmachine. Welk resultaat is het meest exact? Welke sinussen kun je nu nog meer berekenen? (je hoeft die berekeningen niet uit te voeren)

(4) Teken nu een regelmatige vijfhoek zonder een gradenboog te gebruiken en zonder gebruik van een sinustabel, en zonder sinus, cosinus, tangens en cotangens op je rekenmachine te gebruiken. Je mag wel een potlood, lineaal en een passer gebruiken en rechte hoeken tekenen

(fundamentalisten doen dat ook met passer en lineaal). Hint: denk aan de stelling van Pythagoras. Controleer de hoeken van je vijfhoek met een gradenboog.

(5) Bespreek kort de strategieën die je bij deze opgave gebruikt hebt.

Opgave 1.4: Leid de sinus- en cosinusregel voor een willekeurige driehoek af (ter herinnering: $a : \sin\alpha = b : \sin\beta$ en $a^2 = b^2 + c^2 = 2bc\cos\gamma$). Alle manieren zijn toegestaan. In de ingeleverde versie van je opgave moet je uiteraard de notatie wel goed definiëren en het beter doen dan in de formulering van deze opgave. *

d. **Toepassingen.** We zullen vaak de concrete meetkunde opzoeken en behandelen in de context van toepassingen.

1.4 Vlak en Ruimte

Ook (juist?) bij concrete meetkunde moeten we van te voren stilstaan bij de vraag wat we bestuderen. We zien af van precieze definities: het volgende dient om de gedachten te bepalen.

We bestuderen het (Euclidische) vlak en de (Euclidische drie-dimensionale) ruimte. We nemen daarbij het standpunt van Euclides in, namelijk dat we voor de begrippen “punt”, “rechte lijn”, “plat vlak”, “hoek”, “loodrechte stand”, enz. voldoende op meetkundig (intuïtief) inzicht kunnen vertrouwen om te weten wat het zijn. We gebruiken stellingen die we eerder bewezen hebben of die voldoende beroemd en bekend zijn. We gebruiken “starre bewegingen”; figuren zijn hetzelfde als de een in de ander kan worden overgevoerd door starre bewegingen.

1.5 Analytisch: $\mathbb{R}^2, \mathbb{C}$ en $\mathbb{R}^3$

We weten dat het vlak identificeerbaar is met $\mathbb{R}^2$ en de ruimte met $\mathbb{R}^3$. Als we die identificatiesgebruiken bedrijven we *analytische meetkunde*. Een punt in $\mathbb{R}^2$ is per definitie een getallenpaar (a, b). Een rechte lijn is per definitie de oplossingsverzameling van een vergelijking $px + qy + r = 0$ met p en 1 niet allebei 0. De (Euclidische) afstand tussen twee punten (a, b) en (c, d) is per definitie $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$. De hoek tussen twee lijnen kun je definieren met behulp van een arctangens of arcsinus. Voor de ruimte is deze analytische aanpak ook mogelijk.

Omdat de verzameling van complexe getallen $\mathbb{C}$ als lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ isomorf is met $\mathbb{R}^2$ kunnen we het vlak ook met $\mathbb{C}$ identificeren; dit is in sommige gevallen handig.

Merk op dat de Euclidische opvatting van het vlak verschilt van de analytische. In het Euclidische vlak (ruimte) is er geen oorsprong en geen speciaal coördinatenstelsel; die worden door de analytische meetkunde als het ware willekeurig in het vlak (de ruimte) gelegd.

$\diamondsuit$ Onderzoeksvraag: In de figuur van het bewijs van de stelling van Pythagoras (zie bijlage 1 in 1.7 hieronder; vergelijk ook de figuur in het werkblad in 1.8) lijken de drie lijnen $Z\Gamma, BK$ en $A\Lambda$ elkaar in één punt te snijden. Kun je m.b.v. analytische meetkunde nagaan of dit inderdaad zo is?

1.6 Synthetisch en/of Analytisch

In tegenstelling tot de analytische aanpak heet de meetkunde die met objecten en axioma's begint wel "synthetisch". Een van de mooiste resultaten van de axiomatisch-deductieve meetkunde is dat de relatie tussen analytische en synthetische meetkunde precies aangegeven kan worden. Het resultaat is van Hilbert zelf. Het komt op het volgende neer:

Stelling 1.1 Als we "analytisch" beginnen, dus uitgaan van $\mathbb{R}^2$ (of $\mathbb{R}^3$), kunnen we controleren dat aan alle axioma's van Hilbert voldaan is.

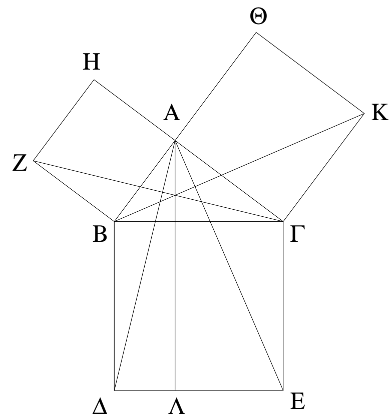
Andersom kan men ook bewijzen (m.b.v. een vrij ingewikkeld, maar goed te begrijpen en fraai stuk wiskunde) dat de volgende stelling geldt:
Stelling 1.2 Als we "synthetisch" beginnen en we Hilbert's axioma's aannemen, dan kunnen we (uitgaande van verzamelingen van punten en lijnen, en van de door de axioma's ingevoerde relaties) een verzameling K construeren en daarop een optelling en vermenigvuldiging, zodat K een lichaam is. De verzameling punten kan dan geïdentificeerd worden met K^2, en elke rechte lijn blijkt de oplossingsverzameling te zijn van een lineaire vergelijking in twee onbekenden over K. Tenslotte kan men bewijzen dat K isomorf is met $\mathbb{R}$.

1.7 Bijlage 1: Tekst bij Opgave 1.1

(**Stelling 47 uit de Elementen van Euclides**)

In rechthoekige driehoeken is het vierkant op de opspannende (*hypothenousa*) zijde van de rechte hoek gelijk aan de vierkanten van de zijden die de rechte hoek omvatten.

Laat er een rechthoekige driehoek $AB\Gamma$ zijn die rechte hoek $BA\Gamma$ heeft. Ik zeg, dat het vierkant op $B\Gamma$ gelijk is aan de vierkanten op $BA, A\Gamma$.



Laat op $B\Gamma$ het vierkant $B\Delta E\Gamma$ beschreven zijn,[3] en op de zijden BA, $A\Gamma$ de (vierkanten) HB, $\Theta\Gamma$. Door het (punt) A laat $A\Lambda$ getrokken worden evenwijdig aan elk van beide (rechten) $B\Delta$, ΓE.[4] Omdat de beide hoeken $BA\Gamma$, BAH rechte (hoeken) zijn, maken de twee rechten $A\Gamma$, AH die aan een rechte BA aan hetzelfde punt A maar niet aan dezelfde kant liggen, de (d.w.z. som van de) aangrenzende hoeken gelijk aan twee rechte hoeken.[5] Dus is ΓA met AH op een rechte. Wegens dezelfde (argumenten) is dus ook BA met $A\Theta$ op een rechte. En omdat de hoek $\Delta B\Gamma$ gelijk is aan de hoek ZBA, want ze zijn allebei recht, laat de hoek $AB\Gamma$ aan beide toegevoegd worden, dan is de hele (hoek) ΔBA gelijk aan de hele (hoek) $ZB\Gamma$.

[3] De constructie van een vierkant met gegeven zijde is behandeld in propositie 46.

[4] De constructie van een rechte lijn door een gegeven punt evenwijdig aan een gegeven rechte lijn is behandeld in propositie 31. Als twee rechte lijnen evenwijdig zijn aan een derde, zijn ze ook aan elkaar evenwijdig volgens propositie 30.

[5] Dit zijn de voorwaarden van propositie 14, waarmee Euclides nu concludeert dat ΓA en AH op één rechte liggen.

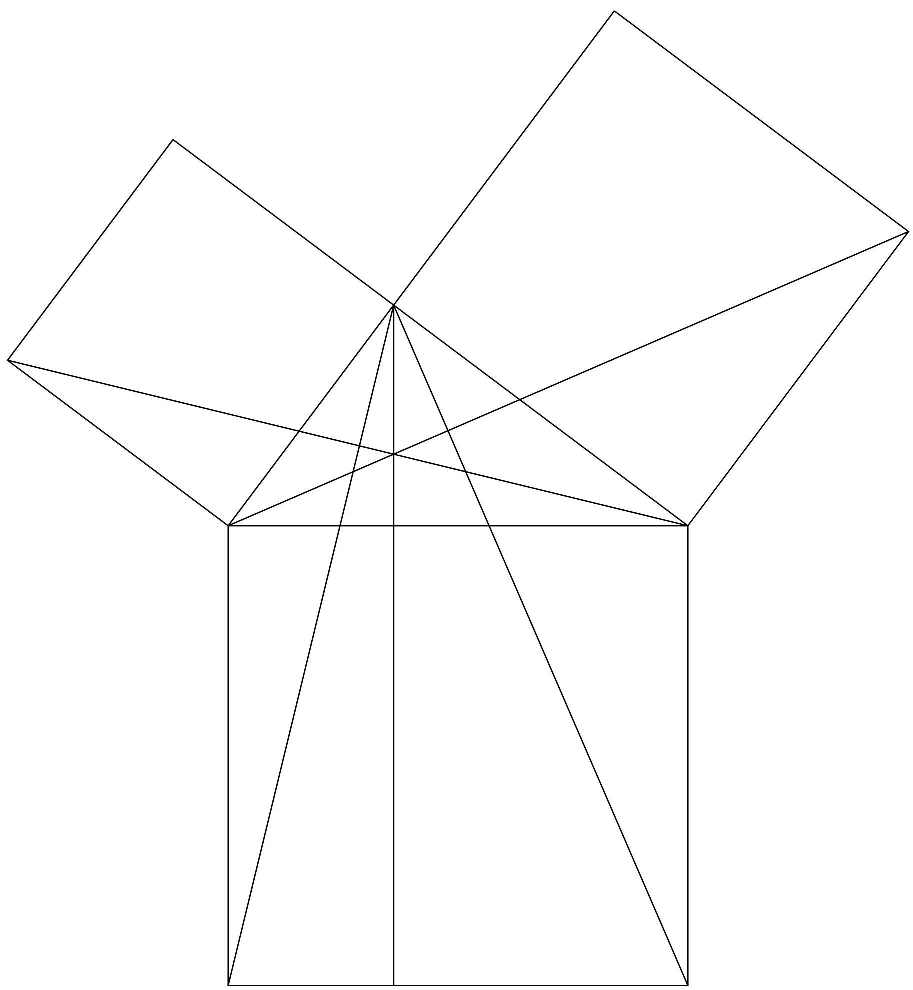
Omdat ΔB gelijk is aan $B\Gamma$, en ZB aan BA, zijn elk van de twee (rechten) ΔB, BA gelijk aan elk van de twee rechten ZB, $B\Gamma$, en de hoek ΔBA is gelijk aan de hoek $ZB\Gamma$. De basis $A\Delta$ is dus gelijk aan de basis $Z\Gamma$, en de driehoek $AB\Delta$ is gelijk aan de driehoek $ZB\Gamma$.[6] En van de driehoek $AB\Delta$ is het parallelogram $B\Lambda$ het dubbele, want ze hebben dezelfde basis $B\Delta$ en ze zijn tussen dezelfde evenwijdige lijnen $B\Delta$, $A\Lambda$.[7] En van de driehoek $ZB\Gamma$ is het vierkant HB het dubbele, want zij hebben weer dezelfde basis ZB en ze zijn tussen dezelfde evenwijdige lijnen ZB, $H\Gamma$. Echter, de dubbelen van gelijke dingen zijn gelijk. Dus is ook het parallellogram $B\Lambda$ gelijk aan het vierkant HB. Op dezelfde manier zal, nadat AE, BK verbonden zijn, aangetoond worden dat het parallellogram $\Gamma\Lambda$ gelijk aan het vierkant $\Theta\Gamma$. Het gehele vierkant $B\Delta E\Gamma$ is dus gelijk aan de twee vierkanten HB, $\Theta\Gamma$. Maar het vierkant $B\Delta E\Gamma$ is beschreven op $B\Gamma$, en de vierkanten HB, $\Theta\Gamma$ op BA, $A\Gamma$. Het vierkant op de zijde $B\Gamma$ is dus gelijk aan de vierkanten op de zijden BA, $A\Gamma$.

Dus in rechthoekige driehoeken is het vierkant op de opspannende zijde van de rechte hoek gelijk aan de vierkanten van de zijden die de rechte (hoek) omvatten. Hetgeen aangetoond moest worden.

[6]In propositie 4 bewijst Euclides dat twee zijden en een ingesloten hoek van een driehoek gelijk zijn aan twee zijden en een ingesloten hoek van een andere driehoek, alle corresponderende zijden en hoeken van de twee driehoeken gelijk zijn, en dat ook de driehoeken gelijk zijn (wij zouden zeggen: gelijke oppervlakte hebben). N.B. Dit bewijs is vanuit een tegenwoordig wiskundig standpunt erg onbevredigend.

[7]Hier gebruikt Euclides propositie 41.

1.8 Bijlage 2: Werkblad bij Opgave 1.1



3 **Cirkels, Hoeken en Bogen. Inversies.**

3.1. Inleiding

Het derde college betreft drie onderwerpen (hoeken, bogen en inversies), die in concrete meetkundige situaties vaak optreden. Dit hoofdstuk is bedoeld als aanwijzing bij het ontdekken van een aantal belangrijke eigenschappen van hoeken, bogen en inversies. In de bijlagen worden die eigenschappen nog eens bij elkaar geplaatst.

3.2 Een stelling

Opgave 3.1. Zet twee punten op papier op zo'n afstand dat je tekendrehoek er niet tussendoor kan. Plaats pinnen o.i.d. in de punten. Beweeg je tekendriehoek tussen de punten/pinnen zo dat de beide rechthoekszijden langs de pinnen schuiven. Bekijk de kromme de beschreven wordt door het hoekpunt van de rechte hoek. Kijk ook wat er gebeurt als je een rechthoekszijde en de hypotenusa langs de pinnen laat schuiven. Beweeg nu ook andere concrete hoeken (uit een stuk karton geknipt) tussen de pinnen. Kijk ook wat er gebeurt als je de kromme aan de andere kant van de twee pinnen wilt voortzetten. Formuleer een vermoeden over de beschreven krommen. $*$

Opgave 3.2. Je vermoeden uit de voorgaande stelling gaat over beweging. Probeer nu een overeenkomstige stelling te vinden waar het bewegingsaspect niet meer in zit. Probeer de stellingen zo algemeen mogelijk te maken; let dus speciaal op bijzondere ligging van de pinnen ten opzichte van de verkregen kromme. Bij het zoeken naar bewijzen kan het handig zijn een gepaste hulplijn te trekken. $*$

Opgave 3.3. Formuleer de stelling die je gevonden hebt. Bewijs de stelling. $*$

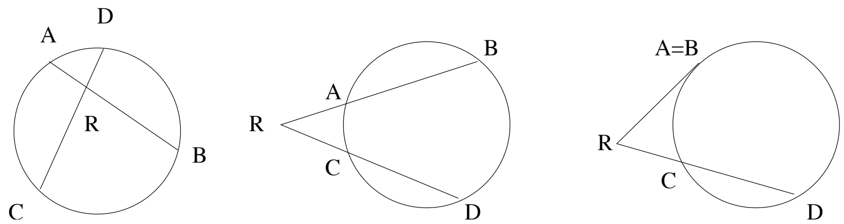
Opgave 3.4. Schrijf (thuis) een klein dictaatje over de stof die je in dit hoofdstuk tot nu toe uitgezocht hebt. $*$

3.3. Hoeken, bogen en koorden.

Opgave 3.5. Teken een cirkel, kies een punt R buiten de cirkel en trek twee lijnen RAB en RCD door R met A, B, C en D op de cirkel. Zoek gelijkvormige driehoeken in de resulterende figuur en zoek een mooi wiskundig resultaat over de lengtes $|RA|$, $|RB|$, $|RC|$ en $|RD|$. Bekijk ook het geval dat één of beide lijnen door R aan de cirkel raken. *

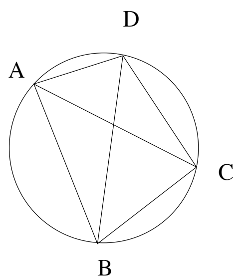
Lijnstukken met hun eindpunten op een cirkel (zoals AB en CD) heten koorden. De bijbehorende bogen heten bogen "op" de koorde.

Opgave 3.6. Zelfde opgave maar nu met R binnen de cirkel. *



Opgave 3.7. Schrijf nu weer een kort dictaatje waarin je de theorie die je gevonden hebt formuleert en bewijst. *

Opgave 3.8. (Premie-opgave) Vind een relatie tussen de diagonalen $|AC|$ en $|BD|$ van een koordenvierhoek (een vierhoek waarvan de hoekpunt op één cirkel liggen) en de vier zijden $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$ en $|DA|$. *



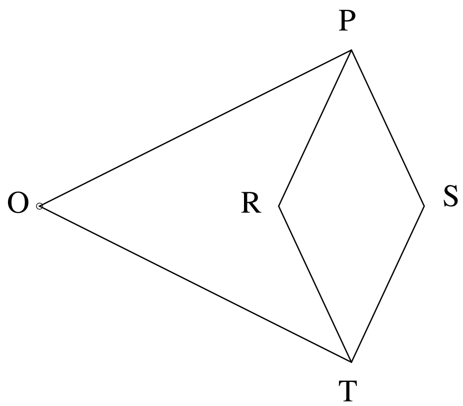
3.4. Inversies

We bestuderen nu een klasse afbeeldingen van het Euclidische vlak $\mathcal{E}$, die als "spiegelingen in een cirkel" kunnen worden beschouwd.

Laat $\mathcal{C}$ een cirkel zijn met middelpunt M en straal R. Voor elk punt $P \neq M$ is er precies één punt Q op de halve rechte MP (die in M begint) zodat $MP \cdot MQ = R^2$. Laat $\mathcal{E}'$ nu bestaan uit de verzameling $\mathcal{E}$ waaruit het punt M is weggelaten. Dan definiren we

$\phi : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'$ door $\phi(P) = Q$. De afbeelding ϕ heet de inversie in $\mathcal{C}$. Ga na dat $\phi^{-1} = \phi$.

We bestuderen inversies ook met behulp van een instrument, de zogenaamde "inversor van Peaucellier" (zie Figuur 3.1). O is een vast punt in het vlak waaromheen de armen OP en OT kunnen scharnieren. In P, R, S en T zitten scharnieren; in R en S kunnen ook tekenstiften geplaatst worden. Verder geldt $|OP| = |OT|$ en $|PR| = |PS| = |TR| = |TS|$.



Inversor van Peaucellier

Maak een inversor van Meccano onderdelen of anders. $\diamondsuit$

Bewijs dat in iedere stand van het instrument geldt $OS \cdot OR = c$ voor een zekere constante $c > 0$ en druk c uit in de lengten van de stangen. $\diamondsuit$

Het instrument voert dus eigenlijk de inversie afbeelding uit: in ieder stand van het instrument geldt $\phi(R) = S$, waarbij ϕ de inversie is ten opzichte van de cirkel $\mathcal{C}$ met middelpunt O en straal gelijk aan $\sqrt{c}$.

Teken de $\mathcal{C}$ die bij je inversor hoort. $\diamondsuit$

We onderzoeken nu wat ϕ doet met cirkels en rechten.

Teken een rechte en beweeg (met een stift o.i.d.) punt R van de inversor langs de rechte en teken de kromme die door S beschreven wordt. Doe dat ook voor $\diamondsuit$

een cirkel. Herhaal de oefening zo nodig. Je zult merken dat de gevonden krommen (meestal) cirkels zijn. In welke gevallen zijn het geen cirkels? Wat zijn het dan wel?

De eigenschappen van ϕ die je gevonden hebt of vermoedt moeten nog wel bewezen worden. Het blijkt handig daarvoor cordinaten in te voeren. Neem daarvoor de oorsprong in M, neem $R = 1$ en stel $\phi(x, y) = (u, v)$.

Opgave 3.9 Druk u en v in x en y uit. Druk daarna ook (zonder te rekenen) x en y in u en v uit. *

Merk nu op dat elke rechte of cirkel $\mathcal{X}$ een vergelijking heeft van de vorm

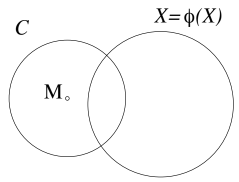
$$k(x^2 + y^2) + ax + by + p = 0$$

.

$\mathcal{X}$ is een rechte precies dan als $k = 0$. $\mathcal{X}$ gaat door M precies dan als $p = 0$ (ga dit na). Nu geldt $(x, y) \in \mathcal{X}$ precies dan als $(u, v) \in \phi(\mathcal{X})$.. Door voor x en y de uitdrukkingen in u en v in te vullen die we hebben afgeleid, krijgen we de vergelijking voor $\phi(\mathcal{X})$.

Opgave 3.10. Bewijs nu dat een inversie een rechte lijn of een cirkel overvoert in een rechte lijn of een cirkel; zoek precies uit in welke gevallen een cirkel dan wel een rechte lijn ontstaat. *

Opgave 3.11. *



Een speciaal geval doet zich voor wanneer de cirkel $\mathcal{X}$ de cirkel $\mathcal{C}$ loodrecht snijdt. Overtuig jezelf (bijvoorbeeld met de inversor) dat in dat geval $\phi(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Bewijs dit vervolgens (hint: je zou kunnen kijken naar de vergelijking van de rechte door de twee snijpunten van $\mathcal{X}$ en $\mathcal{C}$; het bewijs kan ook anders).

Opgave 3.12. Schrijf weer een kort dictaatje, waarin je de theorie die je gevonden hebt formuleert en bewijst. *

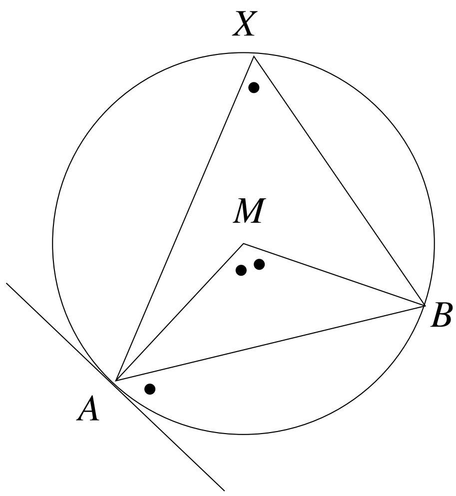
Opgave 3.13. (Premieopgave) Laten $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ lijnen of cirkels zijn. We definiren de hoek tussen twee cirkels als de hoek tussen de raaklijnen aan de twee cirkels in een der snijpunten. Analoog wordt de hoek tussen een lijn en een cirkel gedefinieerd als de hoek tussen die lijn en de raaklijn aan de cirkel in het snijpunt. Bewijs dat voor een inversie geldt dat de hoek tussen $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ gelijk is aan de hoek tussen $\phi(\mathcal{X})$ en $\phi(\mathcal{Y})$. Kun je nu de vorige twee opgaven opnieuw oplossen? *

De eigenschap uit opgave 3.13 heet "conformiteit". Men zegt dat ϕ een "conforme afbeelding" is, of dat ϕ "de hoeken behoudt".

3.5. Slot

De theorie van inversies speelt een rol bij een type niet-Euclidische meetkunde, de zogenaamde hyperbolische meetkunde. Verder zijn er verbanden met complexe functie theorie en met het maken van (land- of zee-) kaarten. Ook vinden we inversies terug in een aantal kunstwerken van M.C. Escher, onder andere de houtsneden uit de reeks "cirkellimiet". Je kunt deze zelf opzoeken en tijdens college zullen boeken met deze afbeeldingen worden getoond.

3.6. Bijlage 1: Stelling van de omtrekshoek.



De bedoelde stelling in 3.2 is de zogenaamde "stelling van de omtrekshoek". Zij $\mathcal{C}$ een cirkel met middelpunt M. A en B zijn twee punten op $\mathcal{C}$. De koorde AB en de stralen MA en MB zijn getrokken. X is een willekeurig punt op de cirkel. XA en XB zijn de verbindingslijnen van X met A en B. $\angle AXB$ heet de omtrekshoek in X op de koorde AB.

Dan geldt het volgende (Ga nog even na wat het laatste punt met omtrekshoeken te maken heeft).

- Als X aan dezelfde kant van AB ligt als M, dan is $\angle AXB = \frac{1}{2}\angle AMB$.
- Als X niet aan dezelfde kant van AB ligt als M, dan is $\angle AXB = \pi - \frac{1}{2}\angle AMB$.
- Als M op AB ligt dan is $\angle AXB = \frac{1}{2}\pi$.
- De raaklijn in A maakt met AB een hoek gelijk aan $\frac{1}{2}\angle AMB$.

3.7 Bijlage 2: Hoeken, bogen en koorden.

De in 3.3 bedoelde relatie tussen $|RA|, |RB|, |RC|$ en $|RD|$ is:

$$|RA| \cdot |RB| = |RC| \cdot |RD|.$$

Merk op dat het product $|RA| \cdot |RB|$ dus alleen afhangt van de ligging van R ten opzichte van de cirkel, niet van de richting van de lijn ARB of RAB door R. Het product $|RA| \cdot |RB|$ wordt wel de "macht"van het punt R ten opzichte van de cirkel genoemd; de stelling dat $|RA| \cdot |RB| = |RC| \cdot |RD|$ heet daarom ook de "machtsstelling".

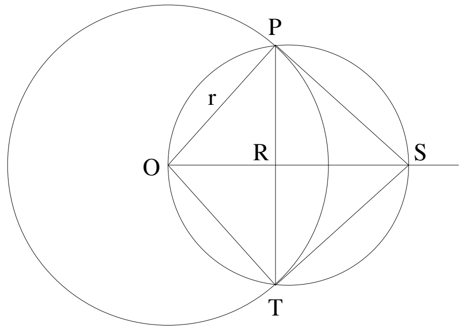
3.8 Bijlage 3: Inversies

De eigenschappen van de inversie ϕ, ten opzichte van een cirkel $\mathcal{C}$ met middelpunt M en straal R zetten we nog even op een rij.

1. $\phi^{-1} = \phi$.
2. ϕ beeldt af:
    - rechten door M op rechten door M,
    - rechten niet door M op cirkels door M,
    - cirkels door M op rechten niet door M,
    - cirkels niet door M op cirkels niet door M,
    - cirkels loodrecht op C op zichzelf.
3. ϕ is conform.

3.9 Bijlage 4: Over inversie in cirkels in het complexe vlak.

Aanvullende tekst door J. Stienstra.



In de bovenstaande figuur bekijken we een inversie ϕ in de cirkel $\mathcal{C}$ met middelpunt O en straal r. De figuur laat zien hoe men voor een punt S buiten de cirkel $\mathcal{C}$ (respectievelijk voor een punt R binnen $\mathcal{C}$) het "spiegelbeeld in de cirkel" bepaalt. Voor S neme men de cirkel door O en S met middelpunt op de lijn OS; deze snijdt de cirkel $\mathcal{C}$ in twee punten P en T; het "spiegelbeeld" R van S is dan het snijpunt van de lijnen PT en OS.

Opgave 3.14. Bewijs de correctheid van de zojuist beschreven constructie. Geef de constructie van het "spiegelbeeld" van een punt binnen $\mathcal{C}$.

Laten we nu het Euclidische platte vlak $\mathcal{E}$ identificeren met het complexe vlak $\mathbb{C}$. We doen dit zo dat de afstand tussen twee punten in het vlak die worden geïdentificeerd met de complexe getallen z en w, gelijk is aan de absolute waarde $|z-w|$ van het verschil tussen z en w.

Laat nu in het plaatje O corresponderen met het complexe getal m, S met z en R met w. De gegevens dat R op de halve lijn vanuit O door S ligt en dat $|OR| \cdot |OS| = r^2$, laten zich dan vertalen als

$$|w-m||z-m| = r^2 \qquad \text{en} \qquad w-m = \lambda(z-m) \quad \text{met} \quad \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\,.$$

We zien $\lambda = r^2|z-m|^{-2}$ en dus

$$w \;=\; m + r^2\frac{z-m}{|z-m|^2} \;=\; m + \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{m}}$$

Vanaf nu nemen we aan dat m een reëel getal is. Dan is $\overline{m} = m$ en kunnen we de bovenstaande formule voor w verder bewerken:

$$w = m + \frac{r^2}{\overline{z} - m} = \frac{m\overline{z} - m^2 + r^2}{\overline{z} - m} = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$$

met

$$a = \frac{m}{r}, \qquad b = \frac{r^2 - m^2}{r}, \qquad c = \frac{1}{r}, \qquad d = -\frac{m}{r}\,.$$

Het mooie van deze formules is dat a, b, c, d reële getallen zijn en dat voor de matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ geldt

$$\det A = -1\,, \qquad \operatorname{spoor} A = 0\,;$$

ter herinnering: $\det A = ad - bc$ en $\operatorname{spoor} A = a + d$.

Opgave 3.15. Zij $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ een reële 2×2-matrix met $\det A = -1$ en $\operatorname{spoor} A = 0$. Zij $S = \{-\frac{d}{c}\}$ als $c \neq 0$ en $S = \emptyset$ als $c = 0$. Definieer daarbij de afbeelding

$$\phi_A : \mathbb{C} \setminus S \longrightarrow \mathbb{C}\,, \qquad \phi_A(z) = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}\,.$$

Laat zien dat ϕ_A een inversie is in een cirkel $\mathcal{C}$ in het complexe vlak $\mathbb{C}$. Wat zijn het middelpunt en de straal van $\mathcal{C}$?
Besteed ook aandacht aan het geval $c = 0$.

Opgave 3.16. De situatie is als in Opgave 3.15. Laat zien dat als het imaginaire deel van het complexe getal z positief is ($\Im z > 0$) dan is ook $\Im \phi_A(z) > 0$.

Opgave 3.17. Laat $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ twee reële 2×2-matrices zijn met determinant -1 en spoor 0.
Geef een mooie formule voor de samengestelde afbeelding $\phi_B \circ \phi_A$.
Welke 2×2-matrix herken je in deze formule?
Wat gebeurt hier als $A = B$?

Opgave 3.18. Laat zien dat elke reële 2×2-matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met $\det A = +1$ of -1 het produkt is van reële 2×2-matrices met determinant -1 en spoor 0.
Aanwijzing: Als $\det A = +1$ en $a \neq 0$ dan is

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Onderzoek zelf de gevallen waarin $a = 0$ of $\det A = -1$.

Men definieert het *complexe bovenhalfvlak* $\mathfrak{H}$ door

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}.$$

Als $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ een reële 2×2-matrix is met $\det A = +1$ of -1 definiëren we de afbeelding

$$\phi_A : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H} \qquad \phi_A(z) = \begin{cases} \dfrac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d} & \text{als} \quad \det A = -1 \\ \dfrac{az + b}{cz + d} & \text{als} \quad \det A = +1 \end{cases}$$

Opgave 3.19. Ga m.b.v. de voorgaande opgaven na, dat de aldus beschreven ϕ_A inderdaad voor elke $z \in \mathfrak{H}$ gedefinieerd is en dat ook $\phi_A(z) \in \mathfrak{H}$. Laat ook zien dat elke zo gedefinieerde afbeelding ϕ_A een samenstelling is van inversies in cirkels met middelpunt op de reële as $\mathbb{R}$ en spiegelingen in lijnen evenwijdig aan de imaginaire as $\imath\mathbb{R}$.

Gezien de opvallende analogie met het Euclidische vlak met z'n spiegelingen en isometrieën kan men zich nu afvragen

Men kan aantonen: er is een "meetkunde" met alle punten in $\mathfrak{H}$ als verzameling "punten", met als "rechte lijnen" de doorsneden van $\mathfrak{H}$ met de cirkels met middelpunt op de reële as $\mathbb{R}$ en de lijnen evenwijdig aan de imaginaire as $\imath\mathbb{R}$; en met de hierboven gedefinieerde afbeeldingen ϕ_A als isometrieën, d.w.z.

afbeeldingen die de "afstand" behouden. Deze "afstand" is dan niet de gewone afstand die we gewend zijn; maar een van de eigenschappen moet zijn dat de rand (de reële as) oneindig ver ligt van alle punten in $\mathfrak{H}$. Kun je een formule voor deze "afstand" verzinnen? of op andere manier een definitie van deze "afstand" geven?

Opmerking: als men erin slaagt de afstand goed te definiëren, krijgen we een niet-Euclidische meetkunde, waarin er bij elke "rechte lijn" ℓ en elk "punt" P meer dan één rechte lijn m door P is die ℓ niet snijdt.

3 Cirkels, Hoeken en Bogen. Inversies.

3.1. Inleiding

Het derde college betreft drie onderwerpen (hoeken, bogen en inversies), die in concrete meetkundige situaties vaak optreden. Dit hoofdstuk is bedoeld als aanwijzing bij het ontdekken van een aantal belangrijke eigenschappen van hoeken, bogen en inversies. In de bijlagen worden die eigenschappen nog eens bij elkaar geplaatst.

3.2 Een stelling

Opgave 3.1. Zet twee punten op papier op zo'n afstand dat je tekendrehoek er niet tussendoor kan. Plaats pinnen o.i.d. in de punten. Beweeg je tekendriehoek tussen de punten/pinnen zo dat de beide rechthoekszijden langs de pinnen schuiven. Bekijk de kromme de beschreven wordt door het hoekpunt van de rechte hoek. Kijk ook wat er gebeurt als je een rechthoekszijde en de hypotenusa langs de pinnen laat schuiven. Beweeg nu ook andere concrete hoeken (uit een stuk karton geknipt) tussen de pinnen. Kijk ook wat er gebeurt als je de kromme aan de andere kant van de twee pinnen wilt voortzetten. Formuleer een vermoeden over de beschreven krommen. $*$

Opgave 3.2. Je vermoeden uit de voorgaande stelling gaat over beweging. Probeer nu een overeenkomstige stelling te vinden waar het bewegingsaspect niet meer in zit. Probeer de stellingen zo algemeen mogelijk te maken; let dus speciaal op bijzondere ligging van de pinnen ten opzichte van de verkregen kromme. Bij het zoeken naar bewijzen kan het handig zijn een gepaste hulplijn te trekken. $*$

Opgave 3.3. Formuleer de stelling die je gevonden hebt. Bewijs de stelling. $*$

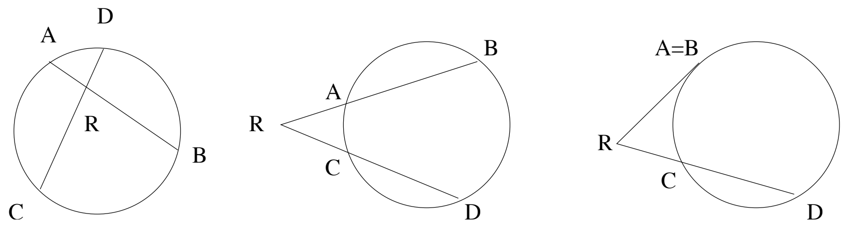
Opgave 3.4. Schrijf (thuis) een klein dictaatje over de stof die je in dit hoofdstuk tot nu toe uitgezocht hebt. $*$

3.3. Hoeken, bogen en koorden.

Opgave 3.5. Teken een cirkel, kies een punt R buiten de cirkel en trek twee lijnen RAB en RCD door R met A, B, C en D op de cirkel. Zoek gelijkvormige driehoeken in de resulterende figuur en zoek een mooi wiskundig resultaat over de lengtes $|RA|$, $|RB|$, $|RC|$ en $|RD|$. Bekijk ook het geval dat één of beide lijnen door R aan de cirkel raken. ∗

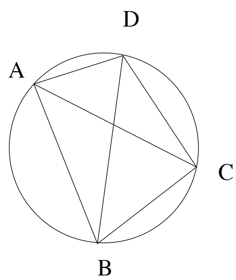
Lijnstukken met hun eindpunten op een cirkel (zoals AB en CD) heten koorden. De bijbehorende bogen heten bogen "op" de koorde.

Opgave 3.6. Zelfde opgave maar nu met R binnen de cirkel. ∗



Opgave 3.7. Schrijf nu weer een kort dictaatje waarin je de theorie die je gevonden hebt formuleert en bewijst. ∗

Opgave 3.8. (Premie-opgave) Vind een relatie tussen de diagonalen $|AC|$ en $|BD|$ van een koordenvierhoek (een vierhoek waarvan de hoekpunt op één cirkel liggen) en de vier zijden $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$ en $|DA|$. ∗



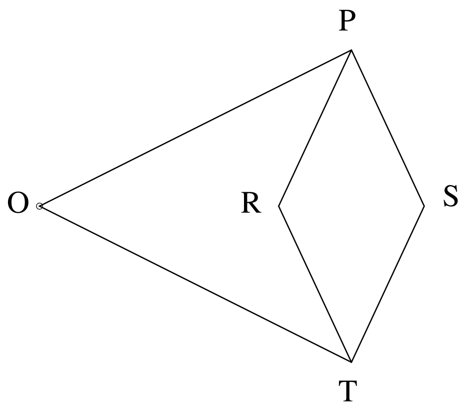
3.4. Inversies

We bestuderen nu een klasse afbeeldingen van het Euclidische vlak $\mathcal{E}$, die als "spiegelingen in een cirkel" kunnen worden beschouwd.

Laat $\mathcal{C}$ een cirkel zijn met middelpunt M en straal R. Voor elk punt $P \neq M$ is er precies één punt Q op de halve rechte MP (die in M begint) zodat $MP \cdot MQ = R^2$. Laat $\mathcal{E}'$ nu bestaan uit de verzameling $\mathcal{E}$ waaruit het punt M is weggelaten. Dan definiren we

$\phi : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'$ door $\phi(P) = Q$. De afbeelding ϕ heet de inversie in $\mathcal{C}$. Ga na dat $\phi^{-1} = \phi$.

We bestuderen inversies ook met behulp van een instrument, de zogenaamde "inversor van Peaucellier" (zie Figuur 3.1). O is een vast punt in het vlak waaromheen de armen OP en OT kunnen scharnieren. In P, R, S en T zitten scharnieren; in R en S kunnen ook tekenstiften geplaatst worden. Verder geldt $|OP| = |OT|$ en $|PR| = |PS| = |TR| = |TS|$.



Inversor van Peaucellier

Maak een inversor van Meccano onderdelen of anders.

Bewijs dat in iedere stand van het instrument geldt $OS \cdot OR = c$ voor een zekere constante $c > 0$ en druk c uit in de lengten van de stangen.

Het instrument voert dus eigenlijk de inversie afbeelding uit: in ieder stand van het instrument geldt $\phi(R) = S$, waarbij ϕ de inversie is ten opzichte van de cirkel $\mathcal{C}$ met middelpunt O en straal gelijk aan $\sqrt{c}$.

Teken de $\mathcal{C}$ die bij je inversor hoort.

We onderzoeken nu wat ϕ doet met cirkels en rechten.

Teken een rechte en beweeg (met een stift o.i.d.) punt R van de inversor langs de rechte en teken de kromme die door S beschreven wordt. Doe dat ook voor *een cirkel. Herhaal de oefening zo nodig. Je zult merken dat de gevonden krommen (meestal) cirkels zijn. In welke gevallen zijn het geen cirkels? Wat zijn het dan wel?*

De eigenschappen van ϕ die je gevonden hebt of vermoedt moeten nog wel bewezen worden. Het blijkt handig daarvoor cordinaten in te voeren. Neem daarvoor de oorsprong in M, neem $R = 1$ en stel $\phi(x, y) = (u, v)$.

Opgave 3.9 Druk u en v in x en y uit. Druk daarna ook (zonder te rekenen) x en y in u en v uit. *

Merk nu op dat elke rechte of cirkel $\mathcal{X}$ een vergelijking heeft van de vorm

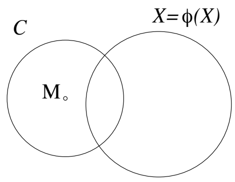
$$k(x^2 + y^2) + ax + by + p = 0$$

.

$\mathcal{X}$ is een rechte precies dan als $k = 0$. $\mathcal{X}$ gaat door M precies dan als $p = 0$ (ga dit na). Nu geldt $(x, y) \in \mathcal{X}$ precies dan als $(u, v) \in \phi(\mathcal{X})$.. Door voor x en y de uitdrukkingen in u en v in te vullen die we hebben afgeleid, krijgen we de vergelijking voor $\phi(\mathcal{X})$.

Opgave 3.10. Bewijs nu dat een inversie een rechte lijn of een cirkel overvoert in een rechte lijn of een cirkel; zoek precies uit in welke gevallen een cirkel dan wel een rechte lijn ontstaat. *

Opgave 3.11. *



Een speciaal geval doet zich voor wanneer de cirkel $\mathcal{X}$ de cirkel $\mathcal{C}$ loodrecht snijdt. Overtuig jezelf (bijvoorbeeld met de inversor) dat in dat geval $\phi(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Bewijs dit vervolgens (hint: je zou kunnen kijken naar de vergelijking van de rechte door de twee snijpunten van $\mathcal{X}$ en $\mathcal{C}$; het bewijs kan ook anders).

Opgave 3.12. Schrijf weer een kort dictaatje, waarin je de theorie die je gevonden hebt formuleert en bewijst. *

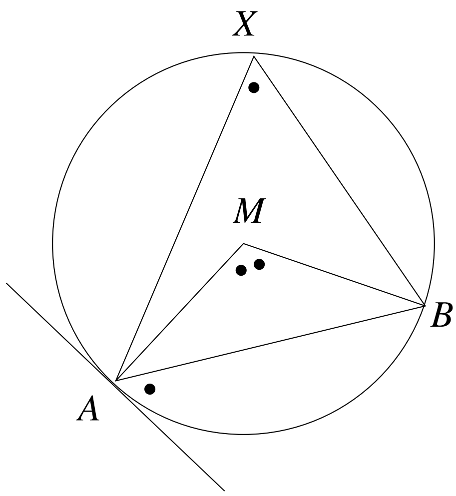
Opgave 3.13. (Premieopgave) Laten $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ lijnen of cirkels zijn. We definiren de hoek tussen twee cirkels als de hoek tussen de raaklijnen aan de twee cirkels in een der snijpunten. Analoog wordt de hoek tussen een lijn en een cirkel gedefinieerd als de hoek tussen die lijn en de raaklijn aan de cirkel in het snijpunt. Bewijs dat voor een inversie geldt dat de hoek tussen $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ gelijk is aan de hoek tussen $\phi(\mathcal{X})$ en $\phi(\mathcal{Y})$. Kun je nu de vorige twee opgaven opnieuw oplossen? *

De eigenschap uit opgave 3.13 heet "conformiteit". Men zegt dat ϕ een "conforme afbeelding" is, of dat ϕ "de hoeken behoudt".

3.5. Slot

De theorie van inversies speelt een rol bij een type niet-Euclidische meetkunde, de zogenaamde hyperbolische meetkunde. Verder zijn er verbanden met complexe functie theorie en met het maken van (land- of zee-) kaarten. Ook vinden we inversies terug in een aantal kunstwerken van M.C. Escher, onder andere de houtsneden uit de reeks "cirkellimiet". Je kunt deze zelf opzoeken en tijdens college zullen boeken met deze afbeeldingen worden getoond.

3.6. Bijlage 1: Stelling van de omtrekshoek.



De bedoelde stelling in 3.2 is de zogenaamde "stelling van de omtrekshoek". Zij $\mathcal{C}$ een cirkel met middelpunt M. A en B zijn twee punten op $\mathcal{C}$. De koorde AB en de stralen MA en MB zijn getrokken. X is een willekeurig punt op de cirkel. XA en XB zijn de verbindingslijnen van X met A en B. $\angle AXB$ heet de omtrekshoek in X op de koorde AB.

Dan geldt het volgende (Ga nog even na wat het laatste punt met omtrekshoeken te maken heeft).

- Als X aan dezelfde kant van AB ligt als M, dan is $\angle AXB = \frac{1}{2}\angle AMB$.
- Als X niet aan dezelfde kant van AB ligt als M, dan is $\angle AXB = \pi - \frac{1}{2}\angle AMB$.
- Als M op AB ligt dan is $\angle AXB = \frac{1}{2}\pi$.
- De raaklijn in A maakt met AB een hoek gelijk aan $\frac{1}{2}\angle AMB$.

3.7 Bijlage 2: Hoeken, bogen en koorden.

De in 3.3 bedoelde relatie tussen $|RA|, |RB|, |RC|$ en $|RD|$ is:

$$|RA| \cdot |RB| = |RC| \cdot |RD|.$$

Merk op dat het product $|RA| \cdot |RB|$ dus alleen afhangt van de ligging van R ten opzichte van de cirkel, niet van de richting van de lijn ARB of RAB door R. Het product $|RA| \cdot |RB|$ wordt wel de "macht"van het punt R ten opzichte van de cirkel genoemd; de stelling dat $|RA| \cdot |RB| = |RC| \cdot |RD|$ heet daarom ook de "machtsstelling".

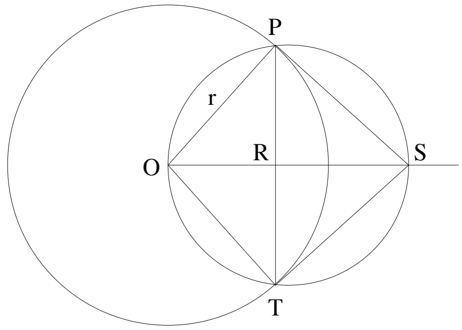
3.8 Bijlage 3: Inversies

De eigenschappen van de inversie ϕ, ten opzichte van een cirkel $\mathcal{C}$ met middelpunt M en straal R zetten we nog even op een rij.

1. $\phi^{-1} = \phi$.
2. ϕ beeldt af:
   - rechten door M op rechten door M,
   - rechten niet door M op cirkels door M,
   - cirkels door M op rechten niet door M,
   - cirkels niet door M op cirkels niet door M,
   - cirkels loodrecht op C op zichzelf.
3. ϕ is conform.

3.9 Bijlage 4: Over inversie in cirkels in het complexe vlak.

Aanvullende tekst door J. Stienstra.



In de bovenstaande figuur bekijken we een inversie ϕ in de cirkel $\mathcal{C}$ met middelpunt O en straal r. De figuur laat zien hoe men voor een punt S buiten de cirkel $\mathcal{C}$ (respectievelijk voor een punt R binnen $\mathcal{C}$) het "spiegelbeeld in de cirkel" bepaalt. Voor S neme men de cirkel door O en S met middelpunt op de lijn OS; deze snijdt de cirkel $\mathcal{C}$ in twee punten P en T; het "spiegelbeeld" R van S is dan het snijpunt van de lijnen PT en OS.

Opgave 3.14. Bewijs de correctheid van de zojuist beschreven constructie. Geef de constructie van het "spiegelbeeld" van een punt binnen $\mathcal{C}$.

Laten we nu het Euclidische platte vlak $\mathcal{E}$ identificeren met het complexe vlak $\mathbb{C}$. We doen dit zo dat de afstand tussen twee punten in het vlak die worden geïdentificeerd met de complexe getallen z en w, gelijk is aan de absolute waarde $|z-w|$ van het verschil tussen z en w.

Laat nu in het plaatje O corresponderen met het complexe getal m, S met z en R met w. De gegevens dat R op de halve lijn vanuit O door S ligt en dat $|OR|\cdot|OS| = r^2$, laten zich dan vertalen als

$$|w-m||z-m| = r^2 \qquad \text{en} \qquad w-m = \lambda(z-m) \quad \text{met} \quad \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\,.$$

We zien $\lambda = r^2|z-m|^{-2}$ en dus

$$w \;=\; m + r^2\frac{z-m}{|z-m|^2} \;=\; m + \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{m}}$$

Vanaf nu nemen we aan dat m een reëel getal is. Dan is $\overline{m} = m$ en kunnen we de bovenstaande formule voor w verder bewerken:

$$w = m + \frac{r^2}{\overline{z} - m} = \frac{m\overline{z} - m^2 + r^2}{\overline{z} - m} = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$$

met

$$a = \frac{m}{r}, \qquad b = \frac{r^2 - m^2}{r}, \qquad c = \frac{1}{r}, \qquad d = -\frac{m}{r}\,.$$

Het mooie van deze formules is dat a, b, c, d reële getallen zijn en dat voor de matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ geldt

$$\det A = -1\,, \qquad \operatorname{spoor} A = 0\,;$$

ter herinnering: $\det A = ad - bc$ en $\operatorname{spoor} A = a + d$.

Opgave 3.15. Zij $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ een reële 2×2-matrix met $\det A = -1$ en $\operatorname{spoor} A = 0$. Zij $S = \{-\frac{d}{c}\}$ als $c \neq 0$ en $S = \emptyset$ als $c = 0$. Definieer daarbij de afbeelding

$$\phi_A : \mathbb{C} \setminus S \longrightarrow \mathbb{C}\,, \qquad \phi_A(z) = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}\,.$$

Laat zien dat ϕ_A een inversie is in een cirkel $\mathcal{C}$ in het complexe vlak $\mathbb{C}$. Wat zijn het middelpunt en de straal van $\mathcal{C}$?
Besteed ook aandacht aan het geval $c = 0$.

Opgave 3.16. De situatie is als in Opgave 3.15. Laat zien dat als het imaginaire deel van het complexe getal z positief is ($\Im z > 0$) dan is ook $\Im \phi_A(z) > 0$.

Opgave 3.17. Laat $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ twee reële 2×2-matrices zijn met determinant -1 en spoor 0.
Geef een mooie formule voor de samengestelde afbeelding $\phi_B \circ \phi_A$.
Welke 2×2-matrix herken je in deze formule?
Wat gebeurt hier als $A = B$?

Opgave 3.18. Laat zien dat elke reële 2×2-matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met $\det A = +1$ of -1 het produkt is van reële 2×2-matrices met determinant -1 en spoor 0.
Aanwijzing: Als $\det A = +1$ en $a \neq 0$ dan is

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Onderzoek zelf de gevallen waarin $a = 0$ of $\det A = -1$.

Men definieert het *complexe bovenhalfvlak* $\mathfrak{H}$ door

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}.$$

Als $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ een reële 2×2-matrix is met $\det A = +1$ of -1 definiëren we de afbeelding

$$\phi_A : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H} \qquad \phi_A(z) = \begin{cases} \dfrac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d} & \text{als} \quad \det A = -1 \\ \dfrac{az + b}{cz + d} & \text{als} \quad \det A = +1 \end{cases}$$

Opgave 3.19. Ga m.b.v. de voorgaande opgaven na, dat de aldus beschreven ϕ_A inderdaad voor elke $z \in \mathfrak{H}$ gedefinieerd is en dat ook $\phi_A(z) \in \mathfrak{H}$. Laat ook zien dat elke zo gedefinieerde afbeelding ϕ_A een samenstelling is van inversies in cirkels met middelpunt op de reële as $\mathbb{R}$ en spiegelingen in lijnen evenwijdig aan de imaginaire as $\imath\mathbb{R}$.

Gezien de opvallende analogie met het Euclidische vlak met z'n spiegelingen en isometrieën kan men zich nu afvragen

Men kan aantonen: er is een "meetkunde" met alle punten in $\mathfrak{H}$ als verzameling "punten", met als "rechte lijnen" de doorsneden van $\mathfrak{H}$ met de cirkels met middelpunt op de reële as $\mathbb{R}$ en de lijnen evenwijdig aan de imaginaire as $\imath\mathbb{R}$; en met de hierboven gedefinieerde afbeeldingen ϕ_A als isometrieën, d.w.z.

afbeeldingen die de "afstand" behouden. Deze "afstand" is dan niet de gewone afstand die we gewend zijn; maar een van de eigenschappen moet zijn dat de rand (de reële as) oneindig ver ligt van alle punten in $\mathfrak{H}$. *Kun je een formule voor deze "afstand" verzinnen? of op andere manier een definitie van deze "afstand" geven?*

Opmerking: als men erin slaagt de afstand goed te definiëren, krijgen we een niet-Euclidische meetkunde, waarin er bij elke "rechte lijn" ℓ en elk "punt" P meer dan één rechte lijn m door P is die ℓ niet snijdt.

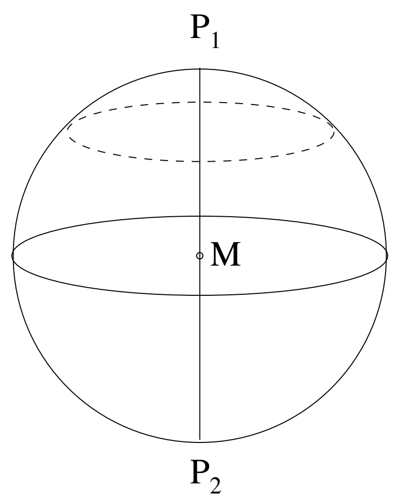
5 Bolmeetkunde

5.1 Inleiding

Dit hoofdstuk heeft de vorm van een doe-het-zelf cursus bolmeetkunde. In het begin ligt de nadruk op het afleiden van de formules, later ook op het gebruik ervan. Als bijlage is een overzicht van de formules van de boldriehoeksmeting toegevoegd.

5.2 Grondbegrippen

We beginnen met enkele inleidende opmerkingen. We zullen deze niet bewijzen, maar de lezer kan dit gemakkelijk zelf doen door uitschrijven in coördinaten e.d. We bekijken een bol met middelpunt M. Als een vlak deze bol snijdt, is de snijfiguur een cirkel. Omgekeerd is elke cirkel op de bol de snijfiguur van die bol en een vlak. Als het vlak door M gaat heet deze cirkel grootcirkel,[1] anders kleine cirkel. De loodlijn door M op het vlak van een cirkel snijdt de bol in twee punten, die de polen van die cirkel heten. Elke cirkel op de bol heeft twee polen. Elk punt op de bol is pool van één grootcirkel en van oneindig veel kleine cirkels.



Bol met middelpunt M, grootcirkel, hieraan evenwijdige kleine cirkel (gestippeld), en de twee polen P_1, P_2 van de grootcirkel en de kleine cirkel.

[1] waarschijnlijk een Germanisme, van Großkreis.

De hoek tussen twee cirkels op de bol is per definitie de hoek tussen de raaklijnen aan die twee cirkels in een snijpunt. De hoek tussen twee cirkelbogen is per definitie de hoek tussen twee raaklijnen aan die cirkelbogen in een gemeenschappelijk punt. (Met deze definitie is de hoek tussen twee cirkels altijd $\leq 90^o$, de hoek tussen twee cirkelbogen altijd $\leq 180^o$).

De hoofdschotel van dit hoofdstuk bestaat uit een aantal standaardmethoden voor de berekening van bogen op de bol met toepassingen. We beginnen met een paar oefeningen voor het voorstellingsvermogen. Het afsluitende hoofdstukje geeft nog wat theorie die tijdens de berekeningen zal worden uitgesteld.

Opgave 5.1. We veronderstellen dat de aarde een volmaakte bol is. (Dat is zij niet; waarom niet?) We voorzien deze bol van het bekende netwerk van meridianen en parallellen. Welke hiervan zijn grootcirkels, welke kleine cirkels? Waar liggen de polen van al deze cirkels? $*$

Opgave 5.2. Kies twee punten op een bol. Hoeveel kleine cirkels gaan er door die punten? Hoeveel grote cirkels? Bewijs je antwoord. Wat gebeurt er als de twee punten diametraal tegenover elkaar liggen? $*$

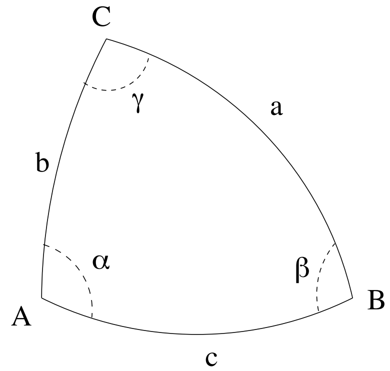
Opgave 5.3. Teken uit de hand een bol met middelpunt M en daarop een grootcirkel $\mathcal{C}_1$ en de beide polen P, P' daarvan. Teken ook een tweede grootcirkel $\mathcal{C}_2$ die de eerste grootcirkel snijdt. In hoeveel punten snijden die twee cirkels elkaar? Waar liggen die snijpunten ten opzichte van punt M? Teken ook de polen Q, Q' van $\mathcal{C}_2$. $*$

Opgave 5.4. Bewijs dat de hoek tussen twee grootcirkels $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ gelijk is aan de hoek tussen de vlakken V_1, V_2 waarin die grootcirkels liggen. (Hint: trek door M in V_1 en V_2 loodlijnen op de snijlijn van V_1 met V_2.) Opmerking: Deze mooie eigenschap zorgt er voor dat grootcirkels veel fraaiere wiskundige eigenschappen hebben dan kleine cirkels. $*$

Opgave 5.5. Kies twee vaste punten P_1, P_2 op een bol, niet diametraal tegen over elkaar. We kunnen op verschillende manieren van P_1 naar P_2 wandelen via een cirkelboog. Welke manier is de kortste, welke de langste? Vind eerst een vermoeden en probeer dit dan te bewijzen. $*$

5.3 De boldriehoek

Door elke twee punten op de bol gaat precies één grootcirkel, als die punten niet diametraal tegenover elkaar liggen. We kunnen die punten daarom op precies één manier verbinden met een boog van een grootcirkel van lengte $< 180^o$. (Het kan ook op precies één manier met een grootcirkelboog $> 180^o$.) Kiezen we drie punten A, B, C op de bol, waarvan er geen twee diametraal tegenover elkaar liggen, dan kunnen we die drie punten op precies één manier verbinden met grootcirkelbogen[2] van minder dan 180^o. Een figuur die we op die manier krijgen heet een boldriehoek. Bij elk drietal punten A, B, C op een bol waarvan er geen twee diametraal tegenover elkaar liggen hoort dus precies één boldriehoek.



We gebruiken de standaardnotaties: $a =$ boog BC, $b =$ boog AC, $c =$ boog AB, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$. Hoek BAC zien we dan als hoek tussen de twee halve rechten die in punt A raken aan boog AB en aan boog AC. Op die manier heeft elke boldriehoek drie zijden a, b, c met $0 < a, b, c < \pi$ en drie hoeken α, β, γ met $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$.

Boldriehoeken hebben de prettige eigenschap, dat als drie van de elementen $\{\ a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\ \}$ bekend zijn, de overige drie op redelijk eenvoudige manier berekend kunnen worden (soms zijn er twee mogelijkheden). We zullen de rest van dit hoofdstuk besteden aan een ontdekkingstocht door de diverse aspecten van dit probleem. Wij kiezen een aanschouwelijke aanpak.

Opgave 5.6. Wat herinner je je van dit probleem voor vlakke driehoeken? $*$
(Een vlakke driehoek heeft ook zes elementen $\{\ a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\ \}$, hoe hangen die samen?

[2]Duits: Großkreisbogen.

5.4 De rechthoekige boldriehoek

We onderzoeken eerst het geval $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Teken een boldriehoek ABC met $\gamma = 90^o$ en teken in de figuur ook punt M en de lijnen MA, MB, MC. Om de voorstelling wat te hulp te komen knutselen we deze boldriehoek ABC ook van papier in elkaar. ♢

*Het werkblad aan het eind van dit hoofdstuk (**5. 11**) knippen we uit (eerst kopiëren als je het diktaat heel wilt laten!) langs de cirkel en langs de rechten MB_1 en MB_2, en we vouwen langs MC en MA eerst naar achteren, en dan naar voren. Door nu MB_1 en MB_2 tegen elkaar te houden krijgen we een boldriehoek ABC met $B = B_1 = B_2$. (Het is de bedoeling dat je dat zo doet dat de letters A, C enz. aan de binnenkant zitten. NB: niet vastplakken!) Wijs in dit model de zes elementen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ aan.*

De bogen a, b, c zijn zo gekozen dat nu precies geldt $\gamma = 90^o$ (We zullen zometeen zien hoe je bij gegeven a en b boog c moet kiezen om dat voor elkaar te krijgen). ♢

Kies nu een punt E ergens op lijn MB. !n ons knutselmodel geef je dit punt aan met E_1 op lijn MB_1 en met E_2 op lijn MB_2 (natuurlijk $ME_1 = ME_2$, kies die punten niet te ver van B_1 en B_2 maar ook niet te dichtbij). Trek uit E in vlak MBC nu een loodlijn EF op MC. Uit het punt F op MC trek je in vlak MCA een loodlijn FD op MA. Trek in vlak MAB lijn DE. Doe dit alles ook in het knutselmodel (je moet dus D met E_2 verbinden).

Valt je iets op (in het model in uitgevouwen situatie)? Wat betekent dit eventueel voor de 'echte' boldriehoek?

Bewijs nu: EF staat loodrecht op FD, en ED staat loodrecht op MA. (Hint: als een lijn ℓ loodrecht staat op twee lijnen m en n in een vlak, dan staat ℓ loodrecht op alle andere lijnen in dat vlak.)

Hoek α is de hoek tussen de twee bogen BA en AC, en omdat dit grootcirkels zijn is α nu ook de hoek tussen de twee halfvlakkcn BAM en CAM. Dus $\alpha = \angle EDF$ (Je mag nu in de knutselfiguur MB_1 aan MB_2 vastplakken, met sellotape o.i.d.) ♢

Nu kun je proberen allerlei formules af te leiden uit de volgende feiten:

$$\sin\alpha = \frac{EF}{ED}, \cos\alpha = \frac{FD}{ED}, \tan\alpha = \frac{EF}{FD}, \sin a = \frac{EF}{EM}, \cos a = \frac{FM}{EM}, \tan a = \frac{EF}{FM}.$$

en soortgelijke formules voor b en c.

Opgave 5.7. Leid nu minstens één formule af, die een verband legt tussen drie van de getallen a, b, c, α, β. *

Van de zes elementen $\{ a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \}$ van onze boldriehoek is $\gamma = \frac{\pi}{2}$; er zijn nog 5 elementen over. Uit elk paar hiervan zou je alle andere willen afleiden met een formule.

Opgave 5.8. Probeer nu zoveel mogelijk van deze formules te vinden met behulp van de figuur; of door substitutie (bijvoorbeeld als je een formule voor a, b, α hebt, geldt dezelfde formule natuurlijk ook voor b, a, β; of door handige combinatie (bijv. met elkaar vermenigvuldigen, of delen) van voorgaande formules. Probeer alle 10 formules te vinden, één formule voor elk drietal elementen uit de verzameling $\{ a, b, c, \alpha, \beta \}$. (In welke zin zijn dat alle formules?) *

Opgave 5.9. Ga na wat je uit deze formules krijgt door het nemen van limieten, wanneer de driehoek heel klein wordt, dwz $a, b, c \to 0$, waarbij $\gamma = \frac{\pi}{2}$ blijft, en α, β naar constante waarden gaan ongelijk aan 0). Kende je deze formules al? Vind hieruit minstens 3 ezelsbruggetjes om de formules voor de rechthoekige boldriehoek te onthouden. *

5.5 De willekeurige boldriehoek

We bekijken nu de willekeurige boldriehoek met elementen $\{ a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\}$. Deze is in het algemeen bepaald door drie van deze elementen, die op 15 manieren uit deze zes gekozen kunnen worden. De drie andere moeten hier in deze 15 gevallen uit worden afgeleid, en we krijgen dus een behoorlijke formulewinkel.

Een aanschouwelijke manier om een paar van deze formules af te leiden is de volgende:

Gegeven een willekeurige boldriehoek ABC. We trekken door A een grootcirkel loodrecht op BC, die deze boog (of het verlengde ervan) in punt P snijdt. Stel $h =$ boog AP (teken de figuur zelf).

We hebben dan bijvoorbeeld: $\sin\beta = \frac{\sin h}{\sin c}$ en $\sin\gamma = \frac{\sin h}{\sin b}$ zodat $\sin\beta \cdot \sin c = \sin\gamma \cdot \sin b$. en dus $\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$. Natuurlijk geldt hezelfde ook voor bijv. a, α, c, γ, zodat (**Sinusregel**)

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

We veronderstellen nu even dat de hoeken β en γ beide scherp zijn. Dan valt punt P tussen de punten B en C. Schrijf nu $p =$ boog PC, q=boog PB. Dan is $a = p+q$, en $\cos q = \cos(a-p) = \cos a \cos p + \sin a \sin p$. Verder hebben we uit de formules voor de rechthoekige boldriehoek: $\cos b = \cos h \cdot \cos p$ en $\cos c = \cos h \cdot \cos q$, zodat $\frac{\cos q}{\cos p} = \frac{\cos b}{\cos c}$.

Delen en invullen van $\cos q$ levert $\frac{\cos c}{\cos b} = \cos a + \sin a \tan p$.

Nu herinneren we ons dat voor rechthoekige boldriehoeken geldt $\cos\gamma = \frac{\tan p}{\tan b}$. Dit gebruiken we om de $\tan p$ te verdrijven. We vermenigvuldingen nu alles met $\cos b$ en krijgen tenslotte (**Cosinusregel**):

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma.$$

Opmerkingen:

Voor bijvoorbeeld β stomp en γ scherp, en ook voor γ stomp en β scherp, is de formule nog steeds juist, zoals men gemakkelijk nagaat. Voor $\gamma = \frac{\pi}{2}$ krijgen we de cosinusregel voor de rechthoekige boldriehoek.

Opgave 5.10. Laat zien dat je door limietovergang (denk aan heel kleine driehoekjes, dus $a, b, c \to 0$, γ constant,) hieruit de cosinusregel voor een vlakke driehoek krijgt, en voor $\gamma = \frac{\pi}{2}$ door Taylorontwikkeling de stelling van Pythagoras. *

Tenslotte kan er ook een tangensregel worden afgeleid: We hebben $\tan\beta = \frac{\tan h}{\sin q}$ en $\tan\gamma = \frac{\tan h}{\sin p}$. Hieruit krijgen we op een soortgelijke manier als boven eerst $\frac{\tan\gamma}{\tan\beta} = \frac{\sin(a-p)}{\sin p} = \frac{\sin a}{\tan p} - \cos a$. Nu vullen we in $\tan p = \cos\gamma \tan b$ in de rechthoekige boldriehoek ACP. Vermenigvuldig daarna alles met $\cos\gamma$, hieruit volgt (**Tangens-regel**):

$$\frac{\sin\gamma}{\tan\beta} = \frac{\sin a}{\tan b} - \cos a \cos\gamma.$$

Hiermee kunnen alle benodigde formules worden afgeleid, gebruik makende van de volgende principes:

- Triviale substituties. Dit is hierboven al toegepast bij de sinusregel. We vonden daar een formule voor b, β, c, γ. Natuurlijk mogen we (b, β) met (a, α) verwisselen, want dit betekent alleen dat we de notatie veranderen. Dus krijgen we dezelfde formule voor a, α, c, γ. Enzovoort. Algemeen kunnen we dus de zijden (a, b, c) permuteren en de hoeken (α, β, γ) op dezelfde manier.

- Pooldriehoek. In paragraaf 5.7 zal het volgende worden aangetoond. Als er een boldriehoek is met elementen $\{ a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \}$, dan is er ook een boldriehoek met elementen $\{ \pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma, \pi - a, \pi - b, \pi - c \}$. De hoeken van de pooldriehoek zijn dus 180^o minus de zijden van de boldriehoek zelf, en omgekeerd.

  Dit is een vreemd principe, dat niet lijkt op iets wat in de "gewone" Euclidische vlakke meetkunde geldt.

  Je kunt daarom in een ware formule invullen $a = \pi - \alpha'$, $b = \pi - \beta'$, $c = \pi - \gamma'$, $\alpha = \pi - a'$, $\beta = \pi - b'$, $\gamma = \pi - c'$ en je krijgt dan opnieuw een ware formule als je alle accenten weglaat.

  (Opmerking: Dit principe is bij een rechthoekige boldriehoek niet bruikbaar, waarom niet?)

5.6 Opgaven over willekeurige boldriehoeken

Opgave 5.11. [Vluchtroutes] De kortste afstand tussen twee punten op de aardbol is langs de grootcirkel tussen die twee punten (vergelijk opgave 5.5). Als je de geografische coördinaten van die punten weet, kun je de kortste afstand en een aantal andere gegevens berekenen. We doen dit twee keer, eerst voor Schiphol ($\lambda = 4^o48'$ O.L., $\beta = 52^o18'$ N.B.) en New York, John F. Kennedy Airport ($\lambda = 73^o47'$ W.L., $\beta = 40^o38'$ N.B.). Let op, de ene heeft Oosterlengte en de tweede Westerlengte! *

a. Bereken de lengte van de boog tussen Schiphol en New York JFK langs de grootcirkel; en hieruit de vliegafstand in kilometers tussen die twee plaatsen (neem de aardomtrek als 40.000 km aan).

b. Bereken nu, in graden nauwkeurig, welke richting het vliegtuig moet volgen zodra het in Schiphol is opgestegen. Zou je dit verwachten? (Merk op dat New York op dezelfde breedte ligt als midden Italië.)

c. Bereken nu de geografische coördinaten van het meest Noordelijke punt van de vlucht route. (Hint: trek een grootcirkelboog uit de Noordpool loodrecht op de grootcirkelboog van Schiphol naar New York JFK. Waarom weet je zeker dat die boog de grootcirkel tussen Schiphol en New York snijdt?) Zoek dit meest noordelijke punt op de kaart op. Welke grote stad (van meer dan 100.000 inwoners) ligt hier het dichtste bij? Schat de minimale afstand tussen deze stad en de kortste vluchtroute Schiphol-New York. Heeft dit een maatschappelijke toepassing?

We bekijken nu al deze zaken (afstand, Noordelijkste punt) voor Schiphol en Vancouver ($\lambda = 123^o06'$ W.L., $\beta = 49^o10'$ N.B.), een grote stad aan de Canadese westkust. Schat eerst de afstand vanuit je intuïtie, voordat je aan de berekeningen begint. Bereken nu de afstand langs de grootcirkel en de geografische coördinaten van het Noordelijkste punt van de route. Zoek dit punt op de kaart op. Welke twee eilanden liggen hier liet dichtste bij? (Je hoeft geen minimale afstanden te schatten en geen grote plaatsen aan te geven, die zijn er niet in dat gebied). Schat nu ook de afstand als je van Schiphol in de Oost-Westrichting naar Vancouver vliegt, neem daarbij aan dat Schiphol en Vancouver allebei op ongeveer 50^o Noorderbreedte liggen. Zo krijg je een idee wat de route langs de grootcirkel bespaart.

Opgave 5.12. [Mekka] Gegeven de geografische coördinaten van Utrecht ($\lambda = 5^o7'$ O.L., $\beta = 52^o6'$ N.B.), en Mekka ($\lambda = 39^o49'$ O.L., $\beta = 21^o26'$ N.B.). De Moslims moeten in de richting van Mekka bidden. Bereken welke richting dit is vanuit Utrecht, in graden nauwkeurig. *

5.7 Pooldriehoeken

Opgave 5.13. Noem in de figuur van opgave 5.3 S en S' de snijpunten van de twee cirkels $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$. Stel dat die cirkels een hoek α maken. *

Punten S en S' zijn natuurlijk polen van een cirkel $\mathcal{C}_3$. Welk verband vermoed je tussen $\mathcal{C}_3$ en de punten P, P', Q, Q'? Welk verband vermoed je tussen α en de bogen tussen bijvoorbeeld P en Q? Kun je deze verbanden beredeneren?

Aan de hand van deze opgave zal de lezer weinig moeite hebben met de nog ontbrekende theorie van pooldriehoeken, die nodig is om de formulewinkels in het geval van de willekeurige boldriehoeken binnen de perken te houden.

Bij een gegeven boldriehoek zal de pooldriehoek op één of andere manier moeten worden samengesteld uit de polen van de zijden van de boldriehoek. Nu is er het probleem dat elke grootcirkel twee polen heeft, en je krijgt dus bij een gegeven boldriehoek ABC 8 punten waaruit je in elk geval een aantal mogelijke pooldriehoeken $A'B'C'$ zou kunnen kiezen. Er zijn diverse methoden om deze moeilijkheden te overwinnen, wij kiezen een laag bij de grondse.

We beginnen met de boldriehoek ABC, en we concentreren ons eerst op zijde AB. Deze verdeelt de bol in twee helften, en op precies één van die helften ligt punt C. We noemen nu C' de pool van zijde AB die op dezelfde helft ligt als C. Evenzo wordt A' de pool van BC die aan dezelfde kant van cirkel BC ligt als A, en B' wordt de pool van AC die aan dezelfde kant van cirkel AC ligt als B.

Definitie 5.1 [pooldriehoek]. Driehoek $A'B'C'$ heet de pooldriehoek van driehoek ABC. We geven de elementen van de pooldriehoek aan door accenten (dus $a' = B'C'$, $\alpha' = \angle B'A'C'$, enz.)

Wat zou de pooldriehoek van $A'B'C'$ zijn? Om deze vraag te beantwoorden merken we op, dat elk van de punten A', B' en C' door drie eigenschappen uniek bepaald is, te weten

$$\begin{array}{lll} BA' = 90^o & CA' = 90^o & AA' < 90^o \\ CB' = 90^o & AB' = 90^o & BB' < 90^o \\ AC' = 90^o & BC' = 90^o & CC' < 90^o. \end{array}$$

Dit kunnen we als volgt anders rangschikken:

$$\begin{array}{lll} B'A = 90^o & C'A = 90^o & A'A < 90^o \\ C'B = 90^o & A'B = 90^o & B'B < 90^o \\ A'C = 90^o & B'C = 90^o & C"C < 90^o. \end{array}$$

Conclusie: de pooldriehoek van $A'B'C'$ is weer ABC.

Bekijk nu de oorspronkelijke driehoek ABC, en verbind punt A met het middelpunt M van de bol. We bekijken vlak MAB met lijn MC', die loodrecht staat op dat vlak. Als we vlak MAB samen met lijn MC' over een hoek $\alpha = \angle BAC$ om de as MA roteren, dan komt vlak MAB op vlak MAC terecht, en lijn MC' komt op een lijn MD' terecht, zodat $\angle C'MD' = \alpha$. Lijn MD' staat loodrecht op vlak MAC. Zou D' nu de pool zijn van zijde AC van boldriehoek ABC?

Antwoord: nee, want B en D' liggen aan verschillende kanten van grootcirkel AC. Daarom ligt B' diametraal tegenover D', met als gevolg dat $a' = C'B' = \pi - \alpha$.

We concluderen nu ook $c' = \pi - \gamma$, $b' = \pi - \beta$.

Evenzo $a = a'' = \pi - \alpha'$, $b = b'' = \pi - \beta'$, $c = c'' = \pi - \gamma'$.

We hebben in dit hoofdstuk maar een zeer klein deel van de bolmeetkunde behandeld. Meer informatie is te vinden in de boeken in de literatuurlijst. Nog één slotopmerking: in de vlakke meetkunde hebben we $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ voor elke driehoek, in de bolmeetkunde niet. Daar geldt het volgende merkwaardige resultaat, als we de hoeken in radialen meten:

$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{O}{R^2}$ waarin O de oppervlakte van de boldriehoek ABC is en R de straal van de bol.

Opgave 5.14. Dit kun je zelf bewijzen door de grootcirkels die de zijden van boldriehoek ABC zijn te verlengen. Zo ontstaan er een aantal boltweehoeken. Een boltweehoek met hoek α heeft oppervlakte $\alpha \cdot 2R^2$. Je moet nu de bol zien te overdekken met een aanta! tweehoeken (waarvan je de oppervlakte weet) plus of min een aantal keer de oppervlakte van boldriehoek ABC. Literatuur: Molenbroek. *

5.8 De formules van de boldriehoeksmeting

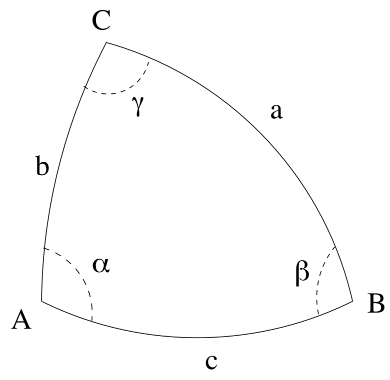
In de bijlage bij dit hoofdstuk is een lijst formules van de boldriehoeksmeting opgenomen. De volgende opgaven hebben de bedoeling de structuur en de bruikbaarheid van die formules te illustreren.

Opgave 5.15. Welke formules leggen een verband tussen vier (van de zes) elementen van een boldriehoek? Zo'n formule kan gebruikt worden, om een der elementen te berekenen als de andere drie gegeven zijn. Ga na welke formules geschikt zijn om op die manier a te berekenen. Idem voor α. Komen alle mogelijke combinaties van drie gegeven elementen voor? *

Opgave 5.16. Er komen ook formules voor in de lijst die een relatie geven tussen vijf elementen. Welke zijn dat? Zo'n formule kan niet gebruikt worden om een element uit drie gegeven elementen te bepalen. Bedenk hoe en waarvoor zulke formules wel gebruikt kunnen worden. *

Opgave 5.17. Zelfde vraag voor formules die relaties geven tussen zes elementen. *

5.9: Formules



5.9.1 Formules voor een rechthoekige boldriehoek

In een rechthoekige boldriehoek met c als hypotenusa ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) gelden de volgende formules.

$$\begin{array}{ll}
\cos c = \cos a \cos b & \\
\cos c = \cot\alpha \cot\beta & \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2} \\
\cos\alpha = \cos a \sin\beta & -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2} \\
\cos\beta = \cos b \sin\alpha & -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}
\end{array}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}, \quad \sin a, \sin b \leq \sin c$$

$$\cos\alpha = \frac{\tan b}{\tan c}, \quad \cos\beta = \frac{\tan a}{\tan c},$$

$$\tan\alpha = \frac{\tan a}{\sin b}, \quad \tan\beta = \frac{\tan b}{\sin a}$$

5.9.2 Formules voor een willekeurige boldriehoek

In een willekeurige boldriehoek gelden de volgende algemene formules. Uiteraard kunnen vanwege symmetrieoverwegingen in alle formules a, b en c verwisseld worden, mits α, β en γ op overeenkomstige manier worden verwisseld.

a. Sinusregel: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

   Zijde-cosinusregel: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot sinc \cdot \cos\alpha$.

   Hoek-cosinusregel: $\cos\alpha = -\cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos\alpha$.

b. hoogteformule: $\sin a \cdot \sin\beta = sinb \cdot \sin\alpha = \sin h_c$.

c. $\sin a \cdot \cos\beta = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos\alpha$

   $\sin\alpha \cdot \cos b = \cos\beta \cdot \sin\gamma + \sin\beta \cdot \cos\gamma \cdot \cos a$

d. De vergelijkingen van Delambre en Gauss:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b+c}{2} = \sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b+c}{2} = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2} = \cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$$

e. De vergelijkingen van Napier

$$\tan\frac{b+c}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \tan\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{b+c}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$\tan\frac{b-c}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \tan\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{b+c}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2}$$

f. De oppervlakte Δ van de boldriehoek wordt gegeven door $\Delta = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.

5.10 Literatuurlijst

C. von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie,* 2 vols, 1900,1903. Nachdruck in einem Band, Niederwalluf: Sandig, 1971.

Heinrich Dörrie, *Ebene und sphärische Trigonometrie*, München: Oldenbourg, 1950.

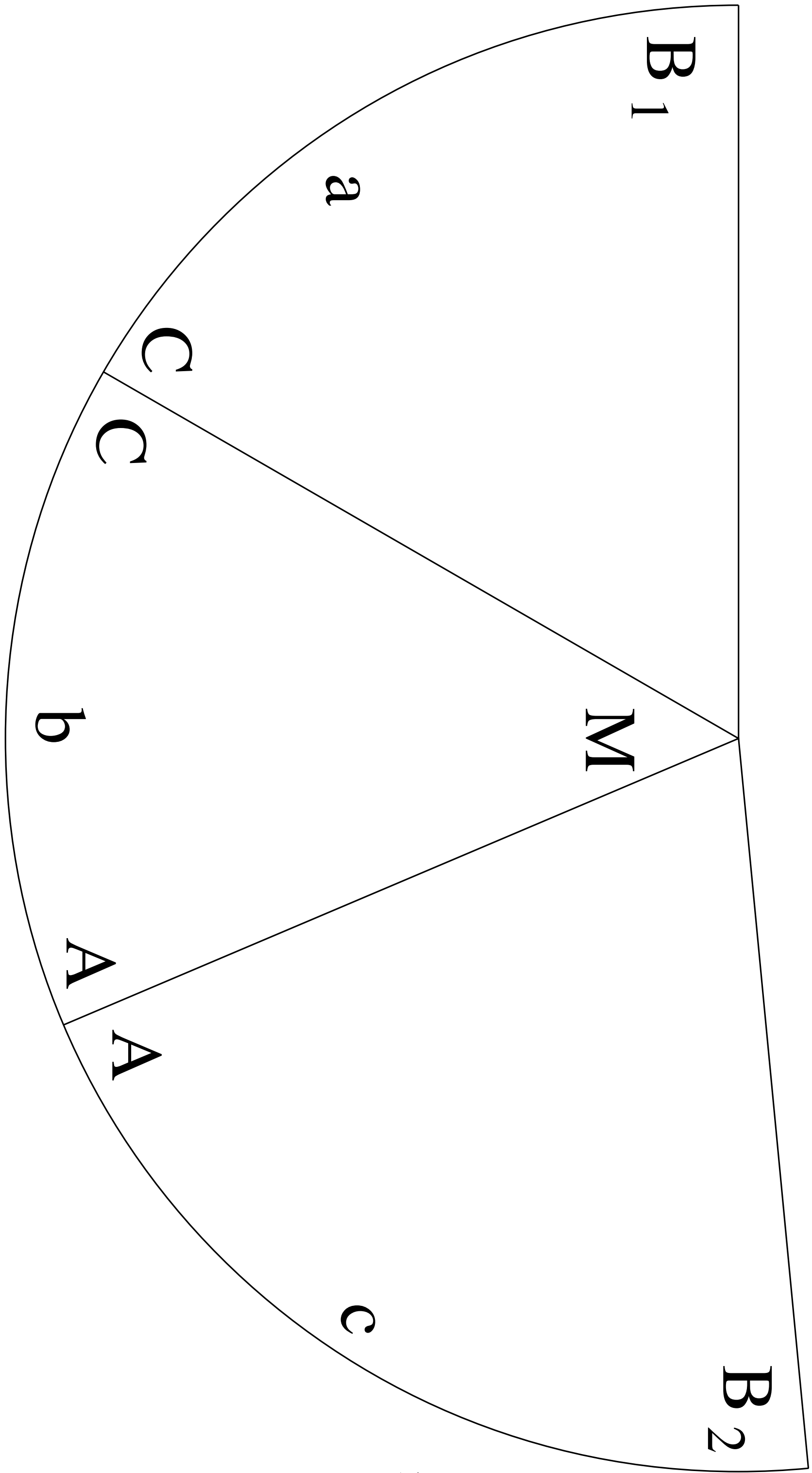
J.P.Hogendijk, Middeleeuws Islamitische methoden voor het vinden van de richting van Mekka, *Nieuwe Wiskrant* (juni 1993), pp. 45-52.

Kuno Fladt, *Elementargeornetrie, 3. Teil. Der Stoff der Obersekunda und Prima* (Darstellende Geometrie, Trigonometrie und analytische Geometrie). Leipzig und Berlin: Teubner, 1931. [zie blz. 97-137. Sehr gründlich.]

P. Molenbroek, *Leerboek der stereometrie.* Groningen-Batavia: Noordhoff, 1946. [zie blz. 56-64, 264-291]

W.M. Smart, *Textbook on spherical astronomy, sixth edition* Cambridge: Cambridge University Press, 1977 [zie pp. 1-24, toepassingen ook daarna].

5.11 Werkblad



B_1
a
C
C
M
b
A
A
c
B_2