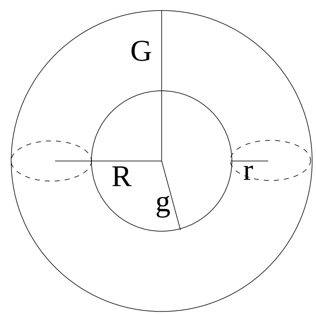
**Moderne berekening van de oppervlakte van de donut**
*zoals behandeld in het eerstejaars wiskundevak Infinitesimaalrekening B*

De formules geven ook aan wat voor soort berekening je moet maken om de oppervlakte van een tamelijk willekeurig lichaam te berekenen. Je kan hiermee veel moeilijkere lichamen aan dan een donut. N.B. Men hoeft helemaal niets van deze redenering en berekening te begrijpen. Het gaat alleen om het overbrengen van een sfeer. Er worden allerlei begrippen en methoden gebruikt die op het VWO niet worden behandeld maar die uitgebreid aan de orde komen in het eerste jaar van de wiskundestudie.

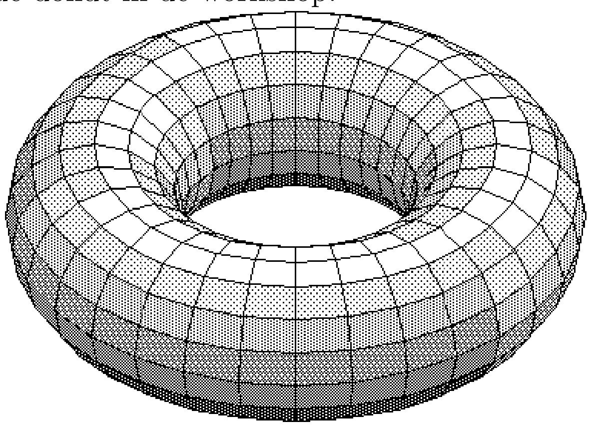



Stap 1: we beschrijven het oppervlak van de donut met behulp van formules (Dit heet: parametriseren). We doen dit in $x, y, z$-coordinaten in de driedimensionale ruimte. De straal van het gat aan de binnenkant noemen we $g$, de straal van de buitenkant $G$. Dan is de dikte van de donut $G - g$. We schrijven $r = \frac{1}{2}(G - g), R = \frac{1}{2}(G + g)$. Dan is $R$ de straal van de cirkel door het hart van de donut, en $r$ de halve dikte van de donut. We kiezen als $z$-as de rotatiesymmetrieas van de donut (loodrecht op het papier in de figuur hierboven).
Parametrisering van de donut: $x = (R+r\cos\phi)\cos\psi$; $y = (R+r\cos\phi)\sin\psi$; $z = r\sin\phi$ voor $0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \psi < 2\pi$. Elk punt van de donut krijgen we door precies één waarde van $\phi$ en één waarde van $\psi$ in te vullen. Die waarden zijn altijd positief of 0 en ze zijn kleiner dan $2\pi$.

Stap 2: Berekening van het "oppervlakte-element". Dat betekent: we leggen een netwerk over de donut (zie figuur aan de ommezijde) en berekenen een benadering van de oppervlakte van elk vlakje in het netwerk. Deze benadering is beter naarmate het netwerk fijner is. We berekenen eerst twee raakvectoren $T_\phi$ en $T_\psi$ door de parametrisering te differentiëren naar $\phi$ en naar $\psi$:

$T_\phi = (-r\sin\phi\cos\psi, -r\sin\phi\sin\psi, r\cos\phi) = (a_1, a_2, a_3)$
$T_\psi = (-(R + r\cos\phi)\sin\psi, (R + r\cos\phi)\cos\psi, 0) = (b_1, b_2, b_3)$.
Het uitproduct van deze twee vectoren is de vector $T_\phi \times T_\psi =$
$(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1) =$
$(Rr + r^2\cos\phi)(-\cos\phi\cos\psi, -\cos\phi\sin\psi, -\sin\phi)$.
De lengte van deze vector is $(Rr+r^2\cos\phi)\cdot\sqrt{\cos^2\phi\cos^2\psi + \cos^2\phi\sin^2\psi + \sin^2\phi}$
$= Rr + r^2\cos\phi$.
De oppervlakte van elk vlakje in het netwerk is $(Rr+r^2\cos\phi)\Delta\phi\Delta\psi$, waarbij $\Delta\phi$ (en $\Delta\psi$) het verschil is van de $\phi-$waarden (en $\psi-$waarden) van twee tegenoverliggende hoekpunten van het vlakje van het netwerk.

Stap 3: We integreren deze functie eerst over $\phi$: we krijgen
$\int_0^{2\pi}(Rr + r^2\cos\phi)d\phi = 2\pi Rr + r^2\sin(2\pi) - 0Rr - r^2\sin 0 = 2\pi Rr$.
De uitkomst integreren we over $\psi$: er komt $\int_0^{2\pi} 2\pi Rr d\psi = 4\pi^2 Rr$.
De oppervlakte van het glazuur is de helft hiervan, dus $2\pi^2 Rr$. Als we $R = \frac{1}{2}(G+g)$ en $r = \frac{1}{2}(G-g)$ invullen krijgen we als geglazuurde oppervlakte $\frac{1}{2}\pi^2(G^2 - g^2)$.
Ditzelfde resultaat hebben we vermoed door het experimenteel werken met de donut in de workshop.



In de workshop heeft elke deelnemer een donut gekregen en deze in 4 (of 8, of 16) stukken gesneden door het middelpunt. Door deze stukken anders aan elkaar te leggen krijgen we ongeveer een cylinder, steeds beter naarmate we de donut in meer delen snijden. Hierdoor kunnen we inzien wat de oppervlakte van de donut is en ook de inhoud, deze is $2\pi^2 r^2 R$. (De inhoud te vinden is ook een geschikte opgave bij Infi B.)

Universiteit Utrecht, Departement Wiskunde, 2016
Jan Hogendijk, www.jphogendijk.nl