Workshop: Hoeveel glazuur gaat er op een donut?

Handleiding voor docenten Jan Hogendijk, 2013.

In dit document staat een uitgebreide beschrijving van de donutworkshop voor mensen die de workshop gaan geven. Meestal hoef je niet een handleiding met instructies uit te reiken. Het is beter de workshop klassikaal te doen: stel het probleem voor de klas, geef de mensen dan instructies, laat ze elkaar helpen, en het probleem geleidelijk zelf oplossen.

Materiaal: per één à twee deelnemers één donut-set, die bestaat uit: 1. geglazuurde donut; 2. plastic bord; 3. plastic mes; 4. servet. Ik zal voor deze materialen zorgen. Het kost enige tijd deze sets klaar te maken; dat kan het beste voor het begin van de workshop, en de sets dan alvast klaarzetten op de plek waar de mensen gaan zitten, zodat je ze niet door de ruimte hoeft te slepen als de mensen er al zijn. Verder moeten een of twee vuilniszakken beschikbaar zijn om de troep aan het eind in te gooien. Je moet ook een soepblik of iets soortgelijks hebben met een etiket dat je eraf kan scheuren en uit kan rollen.

Samenvatting van de workshop (die kun je gebruiken als je de workshop zelf ergens geeft): **Glazuur op een donut.** *Het lijkt een moeilijke opgave om de hoeveelheid glazuur op een donut uit te rekenen. Een donut is namelijk op twee manieren krom en het oppervlak is daarom lastig te bepalen. Door te snijden in een echte geglazuurde donut kunnen we echter een goede benadering maken. Maar wat is de exacte hoeveelheid glazuur op een perfecte donut? We zullen zien dat daarvoor het centrale begrip "limiet" uit de wiskunde nodig is.*

Opmerking vooraf: de workshop staat hier aangegeven zodat je hem voor verschillende soorten mensen kunt geven. De formules kun je niet helemaal weglaten als je hem voor ouders geeft, maar ze moeten heel weinig nadruk krijgen. Je kunt het beste ook drie keer tijdens de workshop herhalen dat alles ook zonder formules te begrijpen is. Voor VWO-leerlingen mogen best een paar formules.

Begin de workshop met de mensen welkom te heten. Daarna begin je met het volgende uit te leggen:

De oppervlakte van een krom object is soms makkelijk te bepalen. Bijvoorbeeld bij een blikje soep is het niet moeilijk; je kunt het etiket eraf halen en uitrollen, dan heb je de oppervlakte van het zijvlak. (eventueel kun je dat demonstreren). Maar bij een sinaasappel is dat moeilijker. Als je hem schilt en de schil platdrukt scheurt hij altijd.

Maar het oppervlak van een bol is wel te berekenen met wiskunde; het resultaat is $4\pi r^2$ *als* r *de straal is. Dat wil zeggen: de straal van een ideale sinaasappel. Je bestudeert namelijk niet precies sinaasappels in de praktijk, maar een ideale sinaasappel, die perfecte bolvorm heeft, en die je uit de praktijk abstraheert. Dit doe je vaak in de wiskunde. Dit is noodzakelijk omdat de praktijk (onze werkelijkheid) zo ingewikkeld is dat die niet behandelbaar is zonder vereenvoudiging en abstractie.*

We gaan dit probleem nu bekijken in een iets ander geval, nl. een donut. Iedereen heeft een donut en een mes en bordje gekregen. Zo kunnen we ons alles gemakkelijk voorstellen, ook zonder veel kennis van wiskunde.

De bovenkant is van boven geglazuurd, of bedekt met een laagje room of hagelslag e.d., en we stellen ons de vraag: hoeveel glazuur (room, hagelslag e.d.) zit erop. Dat is belangrijk om te weten voor een bakker die de donuts moet maken. Daarvoor moeten we weten, hoe groot de oppervlakte van het geglazuurde gedeelte is.

Net als bij de sinaasappel gaan we hiervan ook een wiskundig probleem maken. We bedenken hoe een ideale donut eruit zou moeten zien: het gat in het midden is precies een cirkel; en de donut zelf is ook precies rond; ook de loodrechte doorsnedes moeten altijd precies een cirkel zijn. Je moet er enige tijd over doen om dit uit te leggen. Laat de mensen ook maar naar hun eigen donut kijken hierbij.

Als je notaties wil gebruiken dan kun je dat het beste zo doen, dat de buitenste rand van de donut straal $R+r$ heet en de binnenste rand (het gat) straal $R-r$. De dikte van de donut is dan $2r$ en R is de straal van de cirkel door het hart van de donut. Dan kun je straks de mensen laten inzien dat de donut gelijk is aan een cylinder met hoogte $2\pi R$ en straal van het grondvlak r, en de formules worden dan veel eenvoudiger.

Voor mensen die wiskunde kennen: je kan nu een ruwe schatting voor het geglazuurde deel geven. Het is groter dan de (loodrechte) projectie van de donut op een horizontaal vlak, dat is $\pi(R+r)^2 - \pi(R-r)^2 = 4\pi Rr$. *Het* *geglazuurde deel is kleiner dan deze projectie plus loodrechte opstaande kanten ter hoogte r, die kanten zijn $2\pi(R-r)r + 2\pi(R+r)r$; in totaal (projectie plus kanten) $8\pi Rr$. De oppervlakte ligt tussen deze grenzen.*

Nu stel je de vraag, wat de EXACTE oppervlakte is. Je laat de deelnemers eerst een poosje naar hun donut staren om daaruit te komen, er komt vermoedelijk niets uit.

Dan stel je voor, de donut in 4 gelijke delen te snijden met verticale sneden.

Je laat de deelnemers kijken of ze die vier delen in een andere volgorde kunnen leggen zodat ze iets slims kunnen opmerken. Sommige mensen vinden dan dat je ze aan elkaar kunt leggen als een soort slang.)

Dan vraag je, of dit de oppervlakte oplevert. Antwoord: nee; de slang is nog steeds een eng lichaam.

Vervolgens vraag je iedereen, elk van de 4 delen te halveren door een loodrechte snede. Je krijgt dan 8 delen. Ze kunnen proberen die weer op een interessante manier aan elkaar te leggen.

Na enig gepruts blijkt dit ook een slang te zijn, maar een veel rechtere. Deze lijkt al meer op een soepblik. (En die hebben we eerder gezien!)

In meer plakjes snijden gaat niet vanwege het geklieder. Maar je kunt de mensen nu vragen of ze op een idee gekomen zijn.

Er zijn er dan altijd wel een aantal die zeggen: als je verder gaat, in 16 plakjes, lijkt het nog meer op een soepblik.

En in 32 plakjes nog meer.

Je zegt dan: Dit heet een limietproces.

Je vraagt: als het aantal plakjes naar oneindig gaat, wat wordt dan de figuur? Je krijgt een cylinder met basis cirkel met straal r en hoogte de omtrek van cirkel met straal R, dat wil zeggen $2\pi R$. Als je niet deze notaties gebruikt kun je het resultaat toch wel aan de donut illustreren. De doorsnee van de slang is hetzelfde als de doorsnee van de donut. De omtrek van de slang is dus hetzelfde als de omtrek van de donut. En die kun je uitrekenen. De hoogte van de slang is gelijk aan de lengte van de cirkel door het hart van de donut. Deze lengte kun je ook uitrekenen. De gevraagde oppervlakte is het product van die twee - net zoals bij het soepblik: het etiket is hoogte van het soepblik maal omtrek van de basis.

Er is dus iets heel interessants gebeurd: we zien dat de oppervlakte van de donut gelijk is aan de oppervlakte van het soepblik met basis de doorsnede van de donut en hoogte de lengte van de hartcirkel van de donut. Het oppervlak van het soepblik kunnen we wel uitrollen; bij de donut zou dat heel moeilijk zijn!

In notaties: De totale oppervlakte van de donut is $2\pi r$ maal $2\pi R = 4\pi^2 rR$. De helft (voor het geglazuurde deel) is $2\pi^2 rR$. De bakker heeft dus nu antwoord op zijn vraag!

Dit klopt met de schattingen, want $4\pi < 2\pi^2 < 8\pi$; $2 < \pi < 4$, $\pi = 3,14...$

Nu kun je vragen: wat bedoelen we nu precies met de oppervlakte? Dit is een moeilijke vraag.

Je kunt een netwerk over de donut leggen,. dan aan elk punt raakvectoren trekken, dan de limiet daarvan nemen (van de som van de parallelogrammen die langs de raakvectoren liggen). = infi B. (Uitleggen zonder formules, want anders verzanden ze daarin).

Daarna kun je de formules meedelen (zie apart blaadje) voor de studenten en de ouders die daarin interesse hebben. Je kunt het beste een stapeltje neerleggen.

Uitleiding: uitleggen hoe dit te maken heeft met de wiskundestudie. Je zit niet de hele dag donuts uit elkaar te snijden. Ook niet de hele dag na te denken over dit soort filosofische problemen (van 'wat is de oppervlakte'). Meestal is het een mengsel van dit soort dingen. Er moet van alles gedaan worden; ook nadenken hoe je een model maakt dat past bij de praktijk (wat wij ook gedaan hebben; onze ideale donuts hadden precies cirkelvormige doorsnedes). En je moet goed kunnen rekenen met formules - dit moet je zelf kunnen, een rekenmachine is niet voldoende!

Er is al heel lang en veel over wiskunde nagedacht, dat leer je ook! Men is al vierduizend jaar lang bezig met wiskunde. Na een half jaar wiskundestudie zijn de studenten ongeveer op het niveau van 1750.

Een ander probleem - dit kunnen de deelnemers nu zelf oplossen: Wat is de inhoud van de donut?