

Inleveropgave 6, Infinitesimaalrekening A

Een wiskundig model voor een annuïteitenhypothec.

Inleiding. De meeste nieuwe hypotheeken die in Nederland afgesloten worden zijn zogenaamde annuïteitenhypotheeken. Hierbij leent de koper van een huis een groot bedrag B van de bank. Elke maand betaalt hij of zij een vast bedrag m [maandbedrag] aan de bank, dat bestaat uit rente van de hypotheekschuld en een aflossing. In het begin is het rentedeel groot en wordt maar een klein beetje afgelost. De hypotheekschuld wordt langzamerhand kleiner, en daardoor wordt het aflossingsdeel van m steeds groter. Na een van te voren afgesproken aantal N jaren (bijvoorbeeld $N = 30$) is het bedrag B helemaal afgelost. Een potentiële koper wil graag weten welk bedrag B hij of zij kan lenen als per maand een vast bedrag m (bijvoorbeeld 600 euro) kan worden betaald. Dit hangt natuurlijk af van de rentestand r (bijvoorbeeld $r = 0,02$ als de rente 2 procent per jaar is).

Deze situatie kunnen we eenvoudig (bij benadering!) modelleren met een differentiaalvergelijking. Stel $f(t)$ is de hypotheekschuld op tijdstip t [we meten de tijd in jaren].

- Beschrijf in woorden waarom na een klein aantal Δt jaren bij benadering geldt $f(t + \Delta t) = f(t) + r(\Delta t)f(t) - 12m\Delta t$
- Leid hieruit door limietovergang $\Delta t \rightarrow 0$ een differentiaalvergelijking af en vind alle functies f die een oplossing zijn.
- Vul nu in $f(N) = 0$ en bepaal hieruit $B = f(0)$.
- Stel $r > 0$ constant, en bepaal $\lim_{N \rightarrow \infty} B$. Ga na dat dit een bovengrens is aan het bedrag dat je kunt lenen.
- Bepaal nu met behulp van onderdelen a-c voor jouw situatie het bedrag B_{30} dat je kan lenen uitgaande van $N = 30$ jaar, de huur m die je nu per maand betaalt in euro, en r de rentestand van een annuïteitenhypothec, voor 1 jaar vast en ook voor 30 jaar vast (kijk die zelf na b.v. op www.homefinance.nl, naar menu hypotheekrente vergelijken - kies hypotheekvorm Annuïteitenhypothec, rentevaste periode b.v. 1 jaar en 30 jaar, 100 % hypotheek, en dan je favoriete bank). Bepaal ook het bedrag B_{20} uitgaande van een hypotheek van $N = 20$ jaar. [NB: gebruik van een rekenmachine bij het uitwerken van de getallen is toegestaan.] Thuiswoners kunnen een m kiezen tussen 500 en 1000 euro.

Tot nu toe maakt de regering het kopen van een huis voordeliger door een renteaftrek te verlenen. Dit komt ongeveer op het volgende neer. Van de rente die je over de uitstaande schuld betaalt vergoedt de belastingdienst een deel dat van je salaris afhangt en dat kan oplopen tot bijna de helft. Door deze regeling kunnen mensen meer betalen voor een huis.

- Neem aan dat deze maatregel er in jouw geval ongeveer op neerkomt dat de belastingdienst 30 procent van de rente vergoedt. Omdat het maandbedrag in het

begin bijna helemaal uit rente bestaat, kunnen we aannemen dat je nu een huis kan kopen voor een hoger, bruto maandbedrag M zodat je netto maandbedrag m hiervan 70 procent is. Bereken nu voor deze M en dezelfde rente r opnieuw de bedragen B_{30} en B_{20} uit onderdeel e. [N.B. De aanname geeft een zeer grove benadering van de effecten van de - erg ingewikkelde - belastingregels. Verderop in de looptijd van de lening is het rentedeel, en daarom ook de belastingaftrek lager, maar dan drukt het maandbedrag minder zwaar door inflatie en doordat je een hoger salaris verdient.]

Opmerking: De differentiaalvergelijking geeft een benadering. We hebben geen rekening gehouden met het feit dat ook gedurende delen van een jaar samengesteld interest geldt; hierdoor is de rente in 1 maand een klein beetje minder dan $\frac{1}{12}$ van de rente in 1 jaar. Je kunt alle bedragen preciezer uitrekenen door gebruik te maken van somformules voor meetkundige reeksen.

Inleveren uiterlijk 25 oktober bij aanvang van het werkcollege.