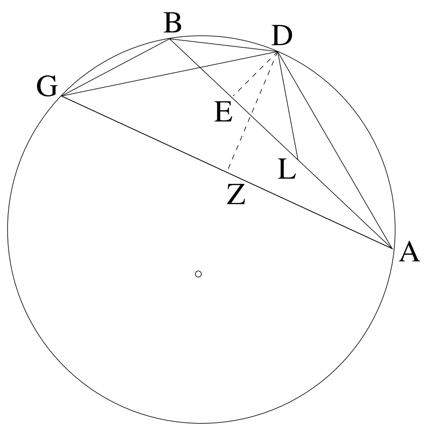
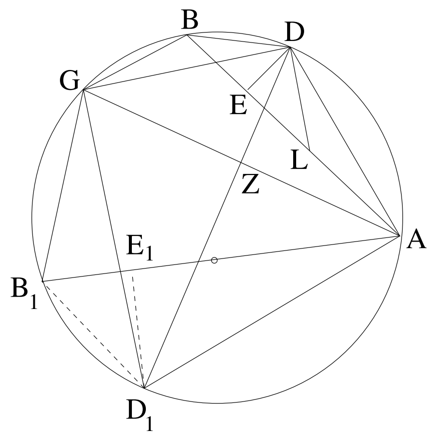
Een Iraans bewijs van de formules van Heron en Brahmagupta.

We bekijken een driehoek ABG met ongelijke zijden, zodat $AG > AB > BG$, en de omgeschreven cirkel. D is het middelpunt van boog ABG (zie figuur). Kies L op AB zodat $AL = BG$ en trek DL. We noteren de oppervlakte van een driehoek PQR als ΔPQR.



1. Laat zien: (i) driehoek DBG is congruent met driehoek DLA,
(ii) $\Delta ADG = \Delta ABG + \Delta LDB$
(iii) Driehoeken ADG en LDB zijn gelijkvormig.
Hint: als punten P, Q, R op een cirkel liggen dan is hoek PQR de helft van de boog waarop hij staat.

2. Stel E is het midden van BL en Z het midden van AG. Merk op dat de driehoeken GDZ en BDE ook gelijkvormig zijn.
Laat zien: (i) $DZ^2 : 2\Delta GDZ = 2\Delta GDZ : GZ^2$
(ii) $(DZ^2 - DE^2) : \Delta ABG = \Delta ABG : (GZ^2 - BE^2)$. [Bewijs dit precies!]
(iii) $\Delta ABG = \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))}$. Hierbij zijn a, b, c de lengtes van de zijden van de driehoek ABG en $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Hint: $DZ^2 + AZ^2 = DE^2 + AE^2$. Deze methode was al bekend uit de Griekse oudheid, en is vermoedelijk ontdekt door Archimedes (ca. 250 v.C.). De bewijsmethode in deze opgave is tiende-eeuws Iraans.



3. Bekijk nu een cyclische vierhoek met zijden $ABGB_1$. Cyclisch betekent dat de veelhoek kan worden ingeschreven in een cirkel. We noteren de oppervlakte van deze veelhoek als $[ABGB_1]$. We proberen het bewijs hierboven te generaliseren. D_1 is het midden van boog AB_1G en D_1E_1 is de loodlijn uit D_1 op AB_1.

Laat zien:

(i) De vier driehoeken BDE, GDZ, D_1GZ en $D_1B_1E_1$ zijn alle gelijkvormig.
(ii) $AE^2 - B_1E_1^2 : [ABGB_1] = [ABGB_1] : AE_1^2 - BE^2$.
(iii) De oppervlakte van een cyclische vierhoek met zijden a, b, c, d en halve omtrek $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ is gelijk aan $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

Deze regel wordt in verzen voor algemene vierhoeken gegeven door de Indiase wiskundige Brahmagupta (ca. 625). De regel is in de tiende eeuw voor cyclische vierhoeken bewezen door de Iraanse wiskundige Abū ^{c}Abdallāh al-Shannī. Zijn bewijsidee is als in deze opgave. De regel is niet geldig voor vierhoeken die niet cyclisch zijn.