

480
1.00

ALLEREERSTE GRONDEN
DER
BESCHOUWENDE
EN
WERKADIGE
MEETKUNST,

OPGESTELD TEN GEBRUIKE
VAN DE HEEREN OFFICIEREN
BIJ DE KORPSSEN
INFANTERIJ, KAVALLERIJ EN MARINIERS,
DOOR
JACOB DE GELDER,
HOOGLEERAAR TE LEYDEN.

TWEDE DRUK.



Te 's Gravenhage en te Amsterdam,
BIJ DE GEBROEDERS VAN CLEEF.

1827.

ALTEERSTE GRONDEN

BESCHOUWENDE

WERE DADIGE

MEETKUNST.

GEORATIE TEN GEBOURE

VAN DE HIEREN OFFICIER

RIJ DE KUNST

INVENTIE, KAVALEER DE OORLOGE

BOEK

JACOB DE GEBROEDERS

HOOGHEMANS EN VERMID



De GEBROEDERS VAN CILLEN
Te's Grapenhe en te Amsterdam.

1827.

VOORREDE. (*)

Men heeft steeds getwist, en sommigen twisten nog, over de wijze, op welke de beginselen der Meetkunst behooren aangeleerd en onderwezen te worden; en, wel ingezien zijnde, is die twist zonder eenige oorzaak, en gaat men dikwijls den langsten weg, wanneer men meent den kortsten te gaan. Welken weg men verkiest te volgen, zal men hiermede toch moeten beginnen, dat men de eigenschappen der meetkundige figuren, op welke alle toegepaste burgerlijke en militaire wetenschappen berusten, grondig leere kennen; dat is te zeggen, duidelijk bevatten; want, om van eenige wetenschap, die men verkregen heeft, in de toepassing gebruik te kunnen maken, moet dit weten duidelijk en grondig zijn; dat is, men moet niet slechts de regels weten, maar ook

(*) Deze Voorrede is, met weinig verandering, dezelfde, als die, welke voor den eersten druk geplaatst is.

ook derzelver grond en onderling verband duidelijk inzien; dat is, men moet den samenhang der waarheden, naar een duidelijk en beknopt opstel, hebben bestudeerd. Zulk een beknopt en duidelijk opstel te vervaardigen is voorzeker geene gemakkelijke taak. Ik heb aan mijne Beginselen der Meetkunst (aan den eersten druk namelijk) tien jaren besteed; en, sedert ik alhier in Leyden gevestigd ben, heb ik de laatste hand van beschaving aan dezelve gelegd, en welligt zal ik naderhand nog plaatsen bemerken, die hier en daar behooren te worden gepolijst. Doch hoe eenvoudig een opstel is, hoezeer men in hetzelfde alles besnoeid heeft, wat niet volstrekt en bij uitsluiting tot de eerste gronden behoort, zoo verlangt men toch in sommige gevallen bekortingen, en is men wel verplicht, om, zoo veel als met het belang eener geregelde studie bestaan kan, aan de begrippen sommiger menschen toe te geven; en hierom besloot ik, in den jare 1816, dit Leerboek, waarvan thans de tweede druk in het licht verschijnt, bijzonderlijk ten dienste van de infanterij en kavallerij en anderen, die in dit geval zijn, op te stellen.

Dit Leerboek moet dus beschouwd worden, als een uittreksel uit mijne Beginselen der Meetkunst. Ik heb uit dezelve bij één verzameld al het volstrekt onontbeerlijke; echter is de wijze van behandelen aanmerkelijk onderscheiden. In mijne Beginselen is al-

alles, naar een strengen betoogtrant, behandeld; hier integendeel, heb ik, om te bekorten, die waarheden, welke, om zoo te spreken, als door de proeven bevestigd kunnen worden, niet eigenlijk gezegd betoogd, maar slechts doen opmerken, als waarheden, welke de dagelijksche ondervinding bevestigt; hierdoor zal men al ten eerste van een groot aantal betoogen bevrijd worden, en ten minste van de zaken zelve zulk een duidelijk begrip verkrijgen, dat men zich in staat zal vinden, dezelve toe te passen. Andere zaken zijn wel moeten betoogd worden; doch ik vlei mij, deze betoogen, offchoon ik wel gedwongen ben geweest, dezelve oppervlakkig te behandelen, zóó te zullen hebben ingerigt, dat men ten minste het verband der meetkunstege waarheden, zonder welke men niet gezegd kan worden, Meetkunst te verstaan, genoegzaam zal leeren inzien; andere waarheden, welke ik, wegens derzelver nuttigheid, niet heb kunnen voorbijgaan, en welker betoogen te zwaar zijn, heb ik slechts opgegeven, en hen, die lust mogten hebben, dezelve na te gaan, tot mijne Beginselen verwezen. Met al dit onderscheid in den trant van behandelen tusschen mijne Beginselen en deze Allereerste Gronden, bestaat er voor het overige tusschen dezelve, in de voordragt der zaken en den stijl van spreken, eene volmaakte overeenstemming, welke, hoe moeilijk het

het ook voor mij was, bij het betreden van een geheel anderen weg, dezelve te behouden, niet mogt uit het oog verloren worden, zouden de kweekelingen van hetzelfde Instituut geene verschillende taal en stijl spreken, en hierdoor de overeenstemming verloren worden, welke, in de wetenschappelijke wijze van denken en spreken, bij de onderscheidene wapens onzer Krijgsmagt, zoo noodzakelijk behoort plaats te hebben.

Het is wat anders, het verband der Meetkunstige Leerstellingen, met de algemeen erkende waarheden (axiomata), van stuk tot stuk, aan te wijzen, en hierin van de regels der strengste redeneerkunde geen haar breed af te wijken; en wederom is het wat anders, die waarheden, welke, als algemeene grondslagen, de gewichtigste Leerstellingen behelzen, naar den strengsten betoogtrant, moeilijk te bewijzen zijn, en die zich echter zoo duidelijk aan het oog vertoonen, dat een nieuweling in den stijl en betoogtrant der Meetkunstenaars wel eens zich zelve vraagt: waarom moet zulk eene klaarblijkelijke waarheid met zoo veel omslag van woorden bewezen worden? grondig genoeg te leeren inzien, om den loop der verdere studien te kunnen vervolgen. Dit is, onder anderen, het geval met de leer der evenwijdige lijnen, op welke de geheele Meetkunst, om zoo te spreken, berust; deze Leer, de steen des

aan-

aansloots, naar de regels der kunst, op ontegenzeggelijke gronden vast te stellen, is niet gemakkelijk; en evenwel, staat het mij nog zeer wel voor, dat toen ik, nog een aankomend jongeling zijnde, voor het eerst de XII Stelling van het I Boek van STEENSTRA las, ik mij zeer verwonderde, dat waarheden, die zich zoo duidelijk aan mijn oog vertoonden, moesten bewezen worden. Ontelbare proeven hebben mij ook naderhand overtuigd, dat dit ook het geval is bij allen, die eenigermate verstaan, wat zij lezen: daarom heb ik ook, bij de zamenstelling van dit verkorte Leerboek, geen oogenblik geaarzeld, om over deze Leerluchtig heen te loopen; opdat de Leerling alzo ontlagen zou worden van betoogen, welke, indien zij dezelve naar de strikte regels der kunst moeten volgen, voor sommigen moeilijk en verdrietig zijn; en, indien zij gevoerd worden in den trant van zoo vele gediensige bekorters der Beginselen, in het ééne of andere opzigt, altijd mank gaan, en daarom geene bewijzen verdienen genoemd te worden (*).

Er zijn trage verstanden, die voor de kracht en klem van Meetkunstige bewijzen minder geschikt schijnen te zijn,

(*) Zie, wat ik dienaangaande, in de Voorrede van den tweeden druk van mijne Beginselen der Meetkunst, gezegd heb.

zijn, ten minste niet in staat, om, in de leeropdrachten, van eenig bewijs zulk eene voldoende reukenschap te geven, dat de Leeraar zich mag overtuigd houden, dat zij de kracht en klem van hetzelfde gevoelen. Ik zal mij thans over de oorzaken van dit verschijnsel niet verklaren; het is genoeg, dat men wete, dat vele menschen op zulk eene ongeschiktheid roem dragen, en evenwel in het geval zijn, van Meetkundige waarheden te moeten kennen. Zal men hun deze gronden door betoogen leeren, die zij niet kunnen volgen? of door proeven, die hen, in alle gevallen, de waarheid van het gestelde, als met hunne zinnelijke oogen, doen zien? Ik voor mij geloof: dat, in dit geval, de laatste weg alleen geoorloofd en de eenige is, die open staat, om den zoodanigen toch met iets nuttigs bekend te maken. Bij geluk kunnen de voornaamste hoofdwaarheden der Meetkunst, als, de Leer der Evenwijdige lijnen, de leer van de gelijkheid der parallelogrammen, welke op dezelfde grondlijn, en tuschen dezelfde evenwijdige lijnen staan, de leer der gelijkvormige figuren, de Leerstelling van PYTHAGORAS enz., op zulk eene wijze, door proeven worden aangewezen. Ik heb mij daarom, in de behandeling dezer Leerstellingen, alleen hierbij bepaald; en geloof, dat deze leerwijze, in het gestelde geval, voldoende is; want, indien men eenen

Leer-

Leerling twee parallelogrammen op gelijke grondlijnen en tuschen twee evenwijdige lijnen laat teekenen, en hem aanwijst, dat deze parallelogrammen in hetzelfde aantal gelijke stukken kunnen verdeeld worden; indien men hem deze waarheid, in onderscheidene gevallen, laat opmerken; welk verstandig man zal dan kunnen staande houden, dat hij, minder goed en minder aan het doel beantwoordende, deze waarheid verstaan zal, dan iemand, die dezelve door het gewone regelmatige betoog heeft leeren kennen? (*)

Ook zijn sommige dezer proeven inderdaad bewijzen, die, wel is waar, omslagtiger zijn dan de gewone, maar echter ook, aan den anderen kant, het voordeel hebben, dat zij de waarheid der zaak, op eene geheel zinnelijke wijze, overtuigend voorstellen; inzonderheid is zulks het geval voor de leer der gelijkvormige driehoeken. Wanneer men heeft leeren kennen, dat de verhouding van twee gelijkstichtige uitgebreidheden bestaat in de getallen, die aanwijzen, hoe veelmaal de gemeene maat dezer grootheden in elke van dezelve begrepen is; wanneer men weet, dat de evenredigheid in de gelijkheid der verhoudingen bestaat, wie zal dan

de

(*) En zulks is ook, al volgt men een anderen Leertrant, zeer nuttig.

de kortheid, de volstrekte strengheid en zinnelijkheid der betoogen van de I, II en VI Stell. VII Hoofdst., I Afdeeling, in twijfel kunnen trekken, daar, in deze betoogen, de figuur, als van zelve, de gestelde evenredigheden op eene zinnelijke wijze voorstelt?

Deze aangevoerde redenen, waarom ik dit Leerboek in dien trant heb behandeld, en gevorderd wordende door het oogmerk, waartoe ik het bestemde, zullen mij, bij de strengste kunstregters, die overigens mijne wijze van denken over de strenge naauwkeurigheid, uit mijne Beginselen, kunnen leeren kennen, verschooning doen vinden voor de in hun oog te groote sprongen en te oppervlakkigen trant van betoogen.

Ik heb, in de zamenstelling van deze Allereerste Gronden, de kennis der Rekenkunst, de leer der Evenredigheden en der Logarithmen, benevens de kennis van de Stelkunstige teekens ondersteld, en volstrekt niets meer, dan in mijne Allereerste Gronden der Cijferkunst (*) is voorgedragen; uit welk werkje, bepaaldelijk vooraf grondig behoort bestudeerd te worden alles, wat ik van de Evenredigheden der grootheden, II Deeltje, XXXVI Les, Bladz.

(*) Bij de Uitgevers dezes, onder den titel van Allereerste Gronden der Cijferkunst, te verkrijgen.

Bladz. 12, § 489 enz. gezegd heb; zonder welke voorzorg de meetkunstige grondstellingen, die geheel en al op de Evenredigheden berusten, (en deze zijn de voornaamste, dewijl op het begrip van evenredigheid het begrip der gelijkvormigheid, de ziel der werkdadige Meetkunst, berust) wel kunnen nageklapt, doch niet verstaan worden.

Dit geheele Leerboek is in drie Afdeelingen verdeeld. Het eerste handelt over de Meetkunst der vlakken; het tweede over de meetkunst der Lichamen, en het derde over de Werkdadige Meetkunst; dit laatste gedeelte is een kort uittreksel van een gedeelte der Werkdadige Meetkunst, welke ik, als een vervolg op mijne Beginselen, zoodra dringender bezigheden zullen zijn opgeruimd, hoop in het licht te geven. Ik heb getracht, in deze laatste Afdeeling, zoo veel het korte bestek, dat ik mij verpligt was voor te schrijven, gedoogde, de ware meetkunstige gronden te ontvouwen, op welke de zamenstelling en het gebruik van de Meettafel (Planchet) en Boussole berusten. Van den Sextant, een zoo nuttig en onontbeerlijk werktuig, in de handen van elk, die de situatie van eenig terrein wil bepalen, heb ik geene beschrijving gegeven; daar ik, in een stuk, dat reeds in den voorzomer van den jare 1816 was afgedrukt, doch waarvan de platen nog niet gereed zijn, dit werktuig in deszelfs

zamenstelling, wijze van behandelen en gebruik, uitvoerig beschreven heb; in hetzelfde formaat, als deze Allereerste Gronden, gedrukt zijnde, zal men het, des verkiezende, achter dit Leerboek kunnen laten inbinden, en zich alzoo eene gewigtige bijdrage bij de derde Afdeeling van dit werk danſchaffen.

JACOB DE GELDER.

Leyden, den 10 Januarij,

1827.



INHOUD.

I N H O U D.

E E R S T E A F D E E L I N G.

Over de Meetkunst der Vlakken.

INLEIDING. Verschillende soorten van Uitgebreidheden, Bladz. a	
I HOOFDSTUK. Over de Regte Lijnen en Hoeken; en over de manier, om de verhouding der hoeken door de verhouding van cirkelbogen uit te drukken	11
II HOOFDSTUK. Over de Eigenschappen der Evenwijdige Lijnen	19
III HOOFDSTUK. Over de Regtlijnige of Veelhoekige Figuren, in het algemeen; en over de standvastige som van derzelver hoeken	24
IV HOOFDSTUK. Overeenstemming van de Hoeken eens Driehoeks met hunne overstaande zijden. Gelijke- en Gelijkvormige Driehoeken.	30
V HOOFDSTUK. Over de Parallelogrammen, Regthoeken en Vierkanten, en het vinden van derzelver Inhouden	35
VI HOOFDSTUK. Aanwending van de Theorie der evenwijdige lijnen, op het verdeelen van regte lijnen, het zij in gelijke, het zij in evenredige deelen.	48
VII HOOFDSTUK. Over de Gelijkvormigheid der Figuren	55
VIII HOOFDSTUK. Over de onderlinge betrekking van de Vierkanten, welke op de zijden van eenen Driehoek beschreven zijn.	72
IX HOOFDSTUK. Eenige merkwaardige Eigenschappen van den Cirkel	84
X HOOFDSTUK. Over de Regelmatige Veelhoeken en de Quadratuur van den Cirkel	92
XI HOOFDSTUK. Over de Trigonometrie of Driehoeksmeting	105
	T W E E.

T W E E D E A F D E E L I N G.

Over de Meetkunst der Ligchamen.

- I HOOFDSTUK. *Over de ligging en snijding der Regte Lijnen en Platte Vlakken, in de Ligchamelijke Ruimte.* 131
- II HOOFDSTUK. *Over de drie- en veelvlakkige Hoeken, en de Bolvormige Driehoeken.* 138
- III HOOFDSTUK. *Over de veelvlakkige Ligchamen, inzonderheid de Prisma's, Parallelopipedums, Piramiden, afgeknotte Piramiden en Regels tot het vinden van derzelver Inhouden.* 150
- IV HOOFDSTUK. *Over de Ronde Ligchamen, en wel bepaaldelijk, over de Cilinders, Kegels en Bollen.* 171
- V HOOFDSTUK. *Over de Gelijkvormigheid der Ligchamelijke Figuren.* 195

D E R D E A F D E E L I N G.

Over de Werkdadige Meetkunst.

- INLEIDING. *Opgave van het Onderwerp dezer Afdeeling.* 201
- I HOOFDSTUK. *Over de Maten en Gewigten, en derzelver verhouding tot elkander.* 206
- II HOOFDSTUK. *Over de thans in gebruik zijnde Tien-deelige Schalen.* 211
- III HOOFDSTUK. *Over het Topographisch Teekenen, of de manier, om eenig Terrein met de voorwerpen, die zich op hetzelfde bevinden, zoo na mogelijk, overeenkomstig de Natuur af te beelden.* 215
- IV HOOFDSTUK. *Over het dadelijk meten, en het begrooten der afstanden op het veld.* 222
- V HOOFDSTUK. *Over het meten der Hoeken. Gronden, waarop de zamenstelling en het gebruik van de Meettafel en de Boussole berusten.* 228
- VI HOOFD-

- VI HOOFDSTUK. *Aanwijzing van het Gebruik van de Meettafel (Planchet) in het teekenkunstig bepalen van de onderlinge afstanden, en ligging der voorwerpen, die op eenig terrein voorkomen en over het verder situeren van hetzelfde.* 245
- VII HOOFDSTUK. *Over het Gebruik der Boussole, in het opnemen van een terrein.* 272
- VIII HOOFDSTUK. *Over het Waterpassen en het bepalen van de verticale doorsnijdingen van een terrein.* 278

VERKLARING

DER VOORNAAMSTE TEEKENS.

$=$ beteekent *gelijk* of *even groot*.

$A > B$ wordt gelezen, *A is grooter dan B*.

$A < B$ wil zeggen, *A is kleiner dan B*.

$A + B$ wordt gelezen, *de som van A en B, of A en B te samen genomen*.

$A - B$ wordt gelezen, *A verminderd met B*.

$AB \times AC$ beteekent *een rechthoek welker lengte en breedte de lijnen AB en AC zijn, of AB vermenigvuldigd met AC*.

AB^2 beteekent *het vierkant op AB beschreven*.

AB^3 beteekent *een cubus, wiens zijde de lijn AB is*.

$A : B$ wordt gelezen *de reden of verhouding van A tot B; en verstaan het getal malen dat B in A begrepen is*.

$A : B = C : D$ wordt gelezen, *A staat tot B gelijk C tot D, en verstaan, B is in A zoo veelmaal begrepen als D in C*.

BERIGT.

De drukfeilen, welke bij het gebruik van dit werk mogten ontdekt worden, zullen, ter gelegener tijd, aan de bezitters van hetzelfde worden afgeleverd.

ALLEREERSTE GRONDEN

DER

MEETKUNST.

I. AFDEELING.

Over de Meetkunst der Vlakken.

INLEIDING

Verskillende soorten van Uitgebreidheden.

§ 1. *Alle voorwerpen, die onder het bereik onzer zintuigen vallen, zijn stoffelijke lichamen, die uit hout, steen, metaal en andere natuurlijke zelfstandigheden zijn zamengesteld: alle deze lichamen hebben eene meerdere of mindere uitgebreidheid, die van de stof, uit welke deze lichamen bestaan, duidelijk te onderscheiden is. Men noemt deze uitgebreidheid, ter onderscheiding van andere soorten van uitgebreidheden, Lichamelijke Uitgebreidheid, in de taal der Meetkunst, eenvoudig Lichaam.*

§ 2. *Eene lichamelijke uitgebreidheid of een meetkunstig ligchaam is dan niet het natuurlijke ligchaam zelve; maar wel de ruimte, in welke dit ligchaam bestaat; de plaats, welke het inneemt.*

§ 3. *In elk ligchaam kan men duidelijk onderscheiden, wat binnen en wat buiten hetzelfde ligt. Wat men den omtrek van dit ligchaam noemt is eene Uitgebreidheid, welke zich, noch binnen, noch buiten dit ligchaam, uitstrekt; de omtrek is geen gedeelte van dit ligchaam; hij is de grenscheiding, tot zoo verre zich dit ligchaam uitbreidt; de plaats, waar het van de onliggende ruimte is afgescheiden.*

§ 4. De omtrek van elk ligchaam is eene uitgebreidheid van eene geheel andere natuur dan de lichamelijke uitgebreidheid. Uit eenig punt van de lichamelijke uitgebreidheid, kan men, in alle rigtingen, voor- en achterwaarts, regts en links, op en benedenwaarts, tot aan derzelver grenzen gaan; doch in den omtrek van een ligchaam, kan men zich wel in alle rigtingen over dien omtrek bewegen; maar, om in denzelven te blijven, mag men niet binnen dit ligchaam, en ook niet buiten hetzelfde komen.

§ 5. De omtrekken der lichamen noemt men *Vlakte Uitgebreidheden*, *Oppervlakten* of *Vlakken*; en deze hebben *volstrekt geene dikte*. Laat, om dit begrijpelijker te maken, een gepolijste ijzeren kogel met eene dunne verwstof overtoegen zijn, dan zal die verwstof, hoe dun zij over het oppervlak van den kogel zij uitgestreken, toch altijd eene zekere dikte hebben en de kogel zal, als met eene dunne verwschaal omkorst zijn; deze verwschaal heeft dikte, en is daarom een ligchaam: het oppervlak van den kogel ligt tuschen de verwschaal en den kogel, daar, waar deze twee zelfstandigheden elkander aanraken, en is dus van alle dikte ontbloot.

§ 6. Men kan zich eene vlakte afzonderlijk en zonder het ligchaam, waarvan het de grenspaal is, voorstellen. Een dun blaadje postpapier is een ligchaam; want het heeft nog eenige dikte; het blijft een ligchaam, al wordt het tien, honderd en meer-malen dunner gemaakt; het wordt eindelijk een vlak, dat aan alle kanten begrensd is en van hetwelk men alle dikte moet wegdenken.

§ 7. De deelen van eene lichamelijke uitgebreidheid *suiten*, volgens het beloop van zulke vlakken, aan elkander. De vlakke uitgebreidheden zijn dan de grenzen der lichamen en zij scheiden de deelen der lichamelijke uitgebreidheden van elkander af.

§ 8. De omtrek van het dunne blaadje postpapier is slechts in eene bestendige of in eene veranderlijke rigting uitgestrekt; naarmate het eene vierkante of rondachtige gedaante heeft; wij vinden dan, in de grenzen der vlakke uitgebreidheid, wederom eene

eene andere soort van uitgebreidheid dan in de vlakke of lichamelijke, en men geeft aan deze, ter ondersoeking van de twee voorgaande soorten, den naam van *Lengte Uitgebreidheid*. Zij worden, in Fig. 1 en 2, afzonderlijk voorgesteld, onder den naam van regte en kromme lijnen; doch de lijnen, alzoo voorgesteld, hebben, zullen zij in de teekening zichtbaar zijn, vooreerst eene zekere breedte, en ten anderen nog de dikte van den inkt; deze breedte en dikte moet men wegdenken en zich, bij eene regte of kromme lijn, eene uitgebreidheid, in eene bestendige of veranderlijke rigting voortgaande, en zonder dikte noch breedte zijnde, voorstellen.

§ 9. De deelen, die men zich, in eene vlakke uitgebreidheid, naar welgevallen kan voorstellen, grenzen aan elkander, volgens het beloop van lengte uitgebreidheden.

§ 10. De grenzen der lengte uitgebreidheden zijn punten, en de deelen eener lengte uitgebreidheid zijn door punten van elkander afgescheiden.

§ 11. Wanneer men zich met deze wijze, om de uitgebreidheden, in het afgetrokken, afzonderlijk te denken of zich voor te stellen, gemeenzaam gemaakt heeft, dan zal men bevinden, dat er driederlei soorten van uitgebreidheden bestaan: *lichamelijke uitgebreidheden*, *vlakke uitgebreidheden*, en *lengte uitgebreidheden*, welke doorgaans *Lichamen*, *Vlakken* en *Lijnen* genoemd worden, en wij kunnen nu van elke dezer soorten de volgende verstaanbare bepalingen geven.

§ 12. I. BEPALING. Een *Lichaam* is in alle rigtingen, in lengte, breedte en hoogte, tot aan deszelfs grenzen, uitgebreid.

§ 13. II. BEPALING. Een *Vlak* is alleen in lengte en breedte uitgestrekt en heeft geene de minste dikte noch hoogte.

§ 14. III. BEPALING. Eene *Lijn* is in lengte uitgestrekt, zonder breedte noch dikte te hebben.

§ 15. IV. BEPALING. Een *Punt* heeft geene de minste uitgebreidheid. Ten opzichte van uitgebreid te

4 ALLEREERSTE GRONDEN DER

zijn, is het niets: het is een ergens zijn, eene niet uitgebreide plaats in de ruimte.

§ 16. De lijnen worden in twee groote hoofdsoorten onderscheide: *regte* en *kromme lijnen*.

§ 17. V. BEPALING. Eene *Regte Lijn* is (Fig. 1.) altijd en overal in dezelfde rigting uitgestrekt. Men kan ook zeggen, dat eene regte lijn de kortste afstand is tusschen twee punten.

Eene volmaakte regte lijn biedt de Natuur aan: 10. In een draad, aan welken een gewigt is opgehangen; mits men zich dien draad, als geene dikte hebbende, voorstelt. 20. In eenen zonnestraal, welke, door eene kleine opening, in eene duistere kamer komt; mits dat men ook bij dezen straal alle dikte in de gedachte wegdenkt.

§ 18. VI. BEPALING. Een *Kromme Lijn* is eene lijn, welke onophoudelijk en tevens onmerkbaar van rigting verandert. Zie Fig. 2.

De weg, welken een schuins opgeworpen ligchaam doorloopt, is, bij voorbeeld, eene kromme lijn.

§ 19. *Alle regte lijnen hebben eenerlei beloop*; dat is, zij kunnen volkomen langs elkander gelegd worden; de kromme lijnen daarentegen zijn, op millioenen wijzen, van elkander onderscheiden.

§ 20. De vlakken worden insgelijks in twee groote hoofdsoorten, *platte* en *gebogene vlakken*, verdeeld.

§ 21. VII. BEPALING. Een *Vlak* is een *Plat Vlak*, wanneer eene regte lijn, in alle rigtingen, over hetzelfde bewogen zijnde, deze regte lijn dit vlak overal aanraakt, zonder ergens de geringste opening tusschen beide te laten.

De Natuur vertoont ons het volmaakte platte vlak in het oppervlak van een stilstaand water.

§ 22,

MEETKUNST. I. AFDEEL. INLEID. 5

§ 22. VIII. BEPALING. Een *gebogen vlak* is een vlak, dat in onderscheidene rigtingen gebogen is; zoo als, bij voorbeeld, de oppervlakten van alle rondachtige lichamen.

§ 23. *Alle platte vlakken hebben eenderlei beloop*: wanneer men twee platte vlakken op elkander legt, dan sluiten zij volmaakt op elkander, zonder eenige ruimte tusschen dezelve open te laten. In de gebogene vlakken bestaat eene oneindige verscheidenheid.

§ 24. Wanneer een punt in de ruimte bewogen wordt, dan loopt het door eene regte of kromme lijn; wordt eene regte of kromme lijn in beweging gebragt, dan geschiedt deze beweging noodzakelijk in een plat of gebogen vlak; en wordt een plat of gebogen vlak bewogen, dan geschiedt deze beweging in de lichamelijke ruimte. Men kan daarom elke regte of kromme lijn aanmerken, als door de beweging van een punt; elk vlak, als door de beweging eener lijn; en elk ligchaam, als door de beweging van een vlak voortgebragt te zijn. Deze wijze van beschouwen, heeft in vele gevallen eene zeer aanmerkelijke nuttigheid.

§ 25. De vlakken en lichamen zijn, op onderscheidene wijzen, door hare grenzen bepaald: deze verscheidenheid van bepaling leert ons, in de vlakke Figuren, regtlijnige en kromlijnige, en, in de lichamelijke, platvlakkige en ronde lichamen onderscheiden: en deze hoofdsoorten worden wederom in verscheidene *species* of soorten onderverdeeld, zoo als, bij voorbeeld, de regtlijnige Figuren, in driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, enz. Deze verschillende soorten van uitgebreidheden onderscheiden zich door de wijze, op welke hare grenzen, ten opzichte van elkander, gelegen zijn; wordende eene uitgebreidheid grooter, wanneer hare grenzen verder van elkander verwijderd worden: men zegt daarom.

§ 26. IX. BEPALING. De *Figuur* of *Gedaante* eener uitgebreidheid is de wijze, op welke zij bestaat en door hare grenzen bepaald wordt.

A 3

§ 27.

§ 27. Het woord *Figuur* wordt nogtans ook gebruikt voor de afteekening van eenige uitgebreidheid, welke dienen moet, om de waarheden der Meetkunst op te helderen, te betoogen of verstaanbaar te maken.

§ 28. Men noemt *Grootheid* (in het afgetrokkene) alles, wat grooter en kleiner kan worden; *alle meetkundige uitgebreidheden zijn grootheden*; omdat men in dezelve grenzen en deelen duidelijk kan onderscheiden.

§ 29. *Elke grootheid is nogtans geene meetkundige uitgebreidheid*. Een gewigt kennen wij door het gevoel; het kan zwaarder of ligter, dat wil zeggen, grooter of kleiner zijn; een gewigt is dus eene grootheid, en echter kan men het zich in geene zichtbare gedaante, zoo als, bij voorbeeld, eene regte lijn, voorstellen.

§ 30. Omdat elke meetkundige uitgebreidheid eene grootheid is, kan op dezelve dat alles worden toegepast, wat wij, in de IX en XXXVI *Lessen* van onze *Allereerste Gronden der Cijferkunst*, over de gelijkflachtige grootheden en derzelver verhoudingen tot elkander gezegd hebben. Het zal noodig zijn zich het volgende te herinneren.

Gelijkflachtige of gelijksoortige grootheden zijn zulke grootheden, welke tot één zamenhangend gelijkflachtig geheel kunnen vereenigd worden.

Gelijkflachtig zijn derhalve alle regte en kromme lijnen; gelijkflachtig zijn alle soorten van vlakken; gelijkflachtig zijn alle soorten van lichamen.

Geen punt kan dan als een gedeelte eener lijn; geene lijn als een gedeelte van een vlak; geen vlak als een gedeelte van een ligchaam worden aangemerkt. Een gedeelte van eene lijn is eene lijn; een gedeelte van een vlak is een vlak, en een gedeelte van een ligchaam is een ligchaam. De punten zijn grenzen der lijnen; de lijnen grenzen der vlakken, en de vlakken grenzen der lichamen.

§ 31. Gelijk men alleen gelijkflachtige grootheden met elkander meten kan, zoo ook kan men alleen *lijnen met lijnen, of afstanden met afstanden, vlakken met vlakken, lichamen met lichamen meten*.

Me-

Meten is op zichzelf een eenvoudig ding. Wanneer men meet, dan is er eene grootheid, die gemeten wordt, en eene andere gelijkflachtige grootheid, waarmede men meet, en die als maat of éénheid wordt aangenomen. Eene lijn *AB* (Fig. 3) met eene lijn *M* te meten, is deze lijn in deelen te verdeelen, die aan de lijn *M* gelijk zijn, en het aantal dezer deelen te tellen.

§ 32. Men meet gemakkelijk eene regte lijn met eene regte lijn: maar, wanneer men eenen onbedrevenen vraagt, hoe veelmaal een vierkant in eenen cirkel, of een cubus in eenen bol begrepen zij? dan zal hij al dadelijk verlegen zijn, en echter komt hij in quizende gevallen, om deze en dergelijke verhoudingen te moeten bepalen. Om zulks nu te kunnen doen, worden er regels vereischt. Alles, wat door regels wordt uitgevoerd, noemt men eene Kunst. Er moet dus eene kunst bestaan, om uitgebreidheden te meten; die kunst noemt men *Meetkunst*.

§ 33. Daar de grootte eener uitgebreidheid van de grootte en ligging van hare grenzen afhangt, kan men duidelijk begrijpen, dat, door deze grenzen te meten, die uitgebreidheid zelve kan gemeten worden: zoo meet men den inhoud van eenen driehoek, door alleen de basis en de hoogte te meten, zoo meet men den inhoud van eenen bol, door zijne middellijn te meten, enz.: daarom zegt men:

§ 34. X. BEPALING. De *Meetkunst* is de kunst, om te bepalen, hoe de grootte van elke uitgebreidheid afhangt van de wijze, op welke zij door hare grenzen bepaald is, ten einde, langs dien weg, de regels te vinden, om dezelve met uitgebreidheden van dezelfde soort te vergelijken.

§ 35. De *Meetkunst*, in dien zin genomen, (en eigenlijk kan zij in geen anderen zin verstaan worden,) is zoo wel, ten aanzien van de onontbeerlijkste toepassing, als ten aanzien van de beschaving der verstandelijke vermogens, de nuttigste aller kunsten; omdat zij niet slechts nuttig is, wanneer

men dezelve kent; maar bijna nog nuttiger, wanneer men dezelve beoefent; want zij scherpt het verstand op, leert juist en regelmatig denken en maakt den mensch geschikt, om diepzinnige zaken, met volkomene juistheid en gevoel van zelfsovertuiging, te doorgronden. Wie de Meetkunst beoefent, zoo als zij eigenlijk moet worden beoefent, zal bevin- den, dat zij een klein aantal ontegenzeggelijke waarheden tot grondslagen der redenering aanneemt, door dezelve de eigen- schappen der figuren ontwikkelt, uit deze ontwikkelde eigen- schappen, regels afleidt, om uitgebreidheden van dezelfde soort met elkander te vergelijken. Voor zoo verre nu de Meet- kunst strekt, om de eigenschappen der figuren na te speuren, zou men haar als eene kunst kunnen beschouwen; doch, voor zoo verre hare regels tot een geheel zamenstel van nuttige en toepasselijke waarheden vereenigd zijn, als eene wetenschap.

§ 36. De bedoeling van dit Leerboek is, om den min be- drevenen en dengenen, die zich niet opgewekt gevoelen, den zamenhang der waarheden, volgens den waren meetkun- stigen leertrant na te gaan, met de nuttigste en toepasselijk- ste waarheden der Meetkunst bekend te maken en de voor- naamste van dezelve, als door zinnelijke proeven, zoo veel mogelijk te doen opmerken, om hen tot eene meer diepzinni- ge studie der Meetkunst, (in mijne *Beginfelen der Meetkunst* vervat,) voor te bereiden.

Er zijn in de Meetkunst vele Leerstellingen, van welker waarheid men, zonder een streng betoog, wel kan overtuigd worden, en die men kan leeren toepassen; echter kan men, bij het gemis der ware Leerwijze, ook niet verder komen. Het grootere aantal waarheden, welke ik in dit Leerboek zal voordragen, zullen dan wel begrijpelijk gemaakt; maar in den striksten zin niet betoogd worden. Het zal meer eene voor- dragt der waarheden dan wel een betoog van dezelve zijn. Tusschen zuik eene voordragt en eenen zuiveren betoogtrant bestaat eigenlijk geen middenweg.

Met dat al, moet men, om van de waarheden, welke in dit Leerboek worden voorgedragen, een goed en nut- tig

tig gebruik te maken, trachten, om duidelijke begrippen van de algemeene hoofdgrondbeginselen te verkrijgen: deze zijn de *gelijk- en gelijkvormigheid der figuren*, en de *onderlinge verhou- ding der gelijkflachtige uitgebreidheden*.

§ 37. XI. BEPALING. Twee figuren zijn *gelijk- en gelijkvormig*, wanneer zij zoodanig op elkander ge- legd, of in elkander geplaatst kunnen worden, dat derzelver grenzen op of in elkander vallen.

Alzoo zijn, *Fig. 4*, de lijnen *A* en *B* gelijk, wanneer der- zelfver uiteinden in elkander kunnen gebragt worden.

En de figuren *P* en *Q* (*Fig. 5*) zijn gelijk- en gelijkvor- mig, wanneer de eene figuur zoodanig op de andere kan gelegd worden, dat de punten van den omtrek der eene fi- guur in den omtrek van de andere vallen.

§ 38. XII. BEPALING. Twee figuren zijn *gelijk- en ongelijkvormig*, wanneer de uitgebreidheid, binnen de grenzen van de eene figuur, volmaakt gelijk is, aan de uitgebreidheid binnen de grenzen van de twee- de, zonder dat nogtans deze figuren dezelfde gedaan- te hebben en in elkander kunnen geplaatst worden.

Een vierkante bak en een rond vat kunnen, bij voorbeeld, hetzelfde aantal pinten water inhouden, en echter kunnen deze lichamen, wegens hunne onderscheidene gedaante, niet in el- kander geplaatst worden.

§ 39. *Het meten der gelijkflachtige grootheden brengt ons tot het begrip van derzelver Verhouding, welke door getallen van evenmatige deelen worden uitgedrukt. De gelijkheid van ver- houding, welke er tusschen twee gelijkflachtige uitgebreidheden en nog twee andere gelijkflachtige uitgebreidheden bestaat, tot het begrip van Proportie of Evenredigheid.*

Laten *A* en *B*, *Fig. 6*, twee regte lijnen zijn, die de reg- te lijn *M*, tot eene gemeene maat hebben; zoo dan die ge- meene maat in *A* en *B* begrepen is 25 en 19 maal; dan zal men zeggen: *A* staat tot *B* in dezelfde reden of verhouding,

als 25 tot 19, het geen aldus geschreven wordt, $A:B=25:19$.

Wanneer C en D , Fig. 7, twee vlakke figuren zijn, in welke de figuur N begrepen is 25 en 19 maal, dan zal $C:D=25:19$ zijn.

Laten E en F , Fig. 8, twee lichamen zijn, in welke de gemeene maat P begrepen is 25 en 19 maal, dan zal $E:F=25:19$ zijn.

Uit zulke gelijke verhoudingen ontstaan evenredigheden, te weten:

$$A:B=C:D$$

$$A:B=E:F$$

$$C:D=E:F$$

§ 40. De leer der Evenredigheden is in de Meetkunst een voornaam hulpmiddel; omdat men, door derzelver tuschenkomst, de verhouding van twee gelijkflachtige uitgebreidheden, door die van twee andere gelijkflachtige, maar eenvoudiger, uitgebreidheden, kan voorstellen, en dingen nagaan, die anders moeilijk te bepalen zouden zijn. Offchoon twee krachten, op eene zinnelijke wijze, niet voorstelbaar zijn, kan men echter derzelver verhouding tot elkander door de verhouding van twee regte lijnen voorstellen en als 't ware zigbaar maken, en hierdoor wordt het onder anderen mogelijk, om de Meetkunst op de Evenwichtsleer, de Werktuigkunde en de beschouwing der Natuur toe te passen.

§ 41. Met behulp der Evenredigheden, worden de verhoudingen der uitgebreidheden door afgetrokkene getallen voorgesteld; wegens het onophoudelijk gebruik, dat men van deze wijze van voorstellen maakt, wordt de leer der Evenredigheden, benevens alle andere regelen der Rekenkunst, op de Meetkunst toepasselijk gemaakt. Om alles te verstaan, wat in dit Leerboek wordt voorgedragen, moet men alles, (vooral de XXXVI-en XXXVII Lesfen) wat in onze *Allereerste Gronden der Cijferkunst* is voorgedragen, beoefend en tamelijk goed begrepen hebben.

I H O O F D S T U K.

Over de Regte Lijnen en Hoeken; en over de manier, om de verhouding der hoeken door de verhouding van cirkelbogen uit te drukken.

§ 42. In de meetkundige beschouwingen en de toepassing van dezelve op alle zaken van het gemeene leven, heeft men onophoudelijk met afstanden van punten en de onderlinge ligging van regte lijnen te doen.

De afstanden van punten worden door regte lijnen, die deze punten vereenigen, bepaald; de onderlinge ligging van regte lijnen brengt ons op het denkbeeld van de regtlijnige hoeken.

§ 43. Beschouwt men eene regte lijn als den afstand van twee punten, dan is hare uitgebreidheid of lengte door den afstand dezer punten bepaald; maar dient zij, om de rigting of strek van een verafgelegen punt aan te wijzen; dan denkt men deze lijn als onbepaaldelijk verlengd te zijn.

§ 44. Men kan geene lijn zoo ver verlengd hebben, of zij is altijd (ten minste in de gedachte,) nog verder verlengbaar: deze hoedanigheid van eene regte lijn wordt uitgedrukt, door te zeggen: *Eene regte lijn kan onbepaaldelijk, dat is, tot in het oneindige, verlengd worden.*

§ 45. I. BEPALING. Wij onderstellen hier en in het vervolg, dat alle regte lijnen, die in eene figuur voorkomen, in hetzelfde platte vlak gelegen zijn. Of schoon het papier of bord, waarop deze figuur geteekend is, slechts eene bepaalde grootte heeft, zoo houdt men dit platte vlak, als naar alle kanten onbepaaldelijk te zijn uitgestrekt. Het woord *lijn* zal, in het vervolg, altijd *regte lijn* beteekenen.

als 25 tot 19, het geen aldus geschreven wordt, $A:B=25:19$.

Wanneer C en D , Fig 7, twee vlakke figuren zijn, in welke de figuur N begrepen is 25 en 19 maal, dan zal $C:D=25:19$ zijn.

Laten E en F , Fig. 8, twee lichamen zijn, in welke de gemeene maat P begrepen is 25 en 19 maal, dan zal $E:F=25:19$ zijn.

Uit zulke gelijke verhoudingen ontstaan evenredigheden, te weten:

$$A:B=C:D$$

$$A:B=E:F$$

$$C:D=E:F$$

§ 40. De leer der Evenredigheden is in de Meetkunst een voornaam hulpmiddel; omdat men, door derzelver tuschenkomst, de verhouding van twee gelijkslachtige uitgebreidheden, door die van twee andere gelijkslachtige, maar eenvoudiger, uitgebreidheden, kan voorstellen, en dingen nagaan, die anders moeilijk te bepalen zouden zijn. Offchoon twee krachten, op eene zinnelijke wijze, niet voorstelbaar zijn, kan men echter derzelver verhouding tot elkander door de verhouding van twee regte lijnen voorstellen en als 't ware zichtbaar maken, en hierdoor wordt het onder anderen mogelijk, om de Meetkunst op de Evenwichtsleer, de Werktuigkunde en de beschouwing der Natuur toe te passen.

§ 41. Met behulp der Evenredigheden, worden de verhoudingen der uitgebreidheden door afgetrokkene getallen voorgesteld; wegens het onophoudelijk gebruik, dat men van deze wijze van voorstellen maakt, wordt de leer der Evenredigheden, benevens alle andere regelen der Rekenkunst, op de Meetkunst toepasfelijk gemaakt. Om alles te verfaan, wat in dit Leerboek wordt voorgedragen, moet men alles, (vooral de XXXVI en XXXVII Lesfen) wat in onze *Allereerste Gronden der Cijferkunst* is voorgedragen, beoefend en tamelijk goed begrepen hebben.

I H O O F D S T U K.

Over de Regte Lijnen en Hoeken; en over de manier, om de verhouding der hoeken door de verhouding van cirkelbogen uit te drukken.

§ 42. In de meetkundige beschouwingen en de toepassing van dezelve op alle zaken van het gemeene leven, heeft men onophoudelijk met afftanden van punten en de onderlinge ligging van regte lijnen te doen.

De afftanden van punten worden door regte lijnen, die deze punten vereenigen, bepaald; de onderlinge ligging van regte lijnen brengt ons op het denkbeeld van de regtlijnige hoeken.

§ 43. Beschouwt men eene regte lijn als den afftand van twee punten, dan is hare uitgebreidheid of lengte door den afftand dezer punten bepaald; maar dient zij, om de rigting of strek van een verafgelegen punt aan te wijzen; dan denkt men deze lijn als onbepaaldelijk verlengd te zijn.

§ 44. Men kan geene lijn zoo ver verlengd hebben, of zij is altijd (ten minste in de gedachte,) nog verder verlengbaar: deze hoedanigheid van eene regte lijn wordt uitgedrukt, door te zeggen: Eene regte lijn kan onbepaaldelijk, dat is, tot in het oneindige, verlengd worden.

§ 45. I. BEPALING. Wij onderstellen hier en in het vervolg, dat alle regte lijnen, die in eene figuur voorkomen, in hetzelfde platte vlak gelegen zijn. Of schoon het papier of bord, waarop deze figuur geteekend is, slechts eene bepaalde grootte heeft, zoo houdt men dit platte vlak, als naar alle kanten onbepaaldelijk te zijn uitgestrekt. Het woord *lijn* zal, in het vervolg, altijd *regte lijn* beteekenen.

§ 46. II. BEPALING. Een *Hoek* (Fig. 9) is de onbepaalde vlakke ruimte P , begrepen tusschen twee regte lijnen AB en BC , welke elkander in een punt B ontmoeten, en in de gedachte onbepaaldelijk verlengd zijn. Men noemt deze regte lijnen AB en BC de *beenen* oft *zijden* van den hoek, en het punt B deszelfs *hoek- of toppunt*.

§ 47. Om deze bepaling grondig te verstaan, moet men wel bedenken, dat de beenen AB en BC slechts zoo ver kunnen geteekend worden, als het papier of bord strekt; omdat het vlak, waarin deze lijnen liggen, altijd eenen bepaalden omtrek heeft: wij moeten ons dit vlak voorstellen, als naar alle kanten onbepaaldelijk, zonder einde, uitgestrekt, en de beenen van den hoek, als tot in het oneindige verlengd te zijn; het gedeelte van dit oneindige vlak, gelegen tusschen de onbepaald voortlopende lijnen AB en BC , is de hoek, welke de lijnen AB en BC met elkander maken.

Een hoek is dan eene onbepaalde uitgebreidheid, welke aan twee kanten door de beenen AB en BC bepaald is; doch aan den tegenovergestelden streek van het hoekpunt naar Q volstrekt geene grenzen heeft.

§ 48. Wanneer in eene figuur een hoek is afgebeeld, dan kan men de beenen van dien hoek zoo kort of lang maken, als men goedvindt; de wezenlijke grootte van den hoek is onafhankelijk van de lengte zijner beenen, in de figuur geteekend: de hoek wijst slechts de rigting der beenen aan, welke als onbepaald lang moeten gedacht worden.

§ 49. Wanneer men, in Fig. 9, het been BC om het punt B laat omdraaijen, dan wordt de hoek ABC grooter of kleiner: men kan dan eenen hoek beschouwen, als te worden voorgebragt, door de omwenteling van eene onbepaalde regte lijn BC , om eenig punt B .

§ 50. III BEPALING. In het vervolg, zal in eene figuur een hoek worden afgebeeld door de letter, wel-

welke aan het hoekpunt staat, of door drie letters; maar, in het laatste geval, moet de letter, welke aan het hoekpunt staat, in het midden worden geplaatst. Men zegt dus (Fig. 9) hoek B , hoek ABC of hoek CBA .

§ 51. Elke hoek ABC kan, zie Fig. 10, door uit het hoekpunt B , lijnen BD , BE , BF , enz., binnen de beenen van denzelfden te trekken, in andere hoeken, ABD , DBE , EBF , FBC , verdeeld worden, welke som aan den geheelden hoek ABC gelijk is. Men kan ook twee of meer hoeken tot eenen geheelden hoek vereenigen, door deze hoeken zoodanig nevens elkander te leggen, dat derzelver hoekpunten in, en derzelver beenen langs elkander vallen.

§ 52. Wanneer men twee hoeken met elkander vergelijkt, dan kunnen zij, of even groot zijn, of eene ongelijke grootte hebben.

§ 53. Om te beoordeelen, of twee hoeken ABC en DEF , zie Fig. 12, even groot zijn, zoo legge men het hoekpunt E van den eenen hoek langs het hoekpunt B van den anderen; het been ED van den eenen hoek langs het been BA van den tweeden; indien dan het been EF van den eersten hoek langs het been BC van den tweeden valt, dan zegt men: dat deze hoeken gelijk zijn. Vallen de beenen EF en BC niet langs elkander, dan zal één dezer hoeken grooter dan de andere zijn.

§ 54. IV. BEPALING. Wanneer, Fig. 12, eene lijn CD , op eene andere lijn AB zoodanig geplaatst is, dat de hoeken ACD en BCD , aan beide zijden gelijk zijn, dan zegt men: dat de lijn CD loodregt (*perpendiculaire*,) op AB staat, en de hoeken ACD en BCD worden regte hoeken genoemd.

Men kan dan zeggen: dat twee lijnen loodregt op elkander staan, wanneer zij eenen rechten hoek met elkander maken; en dat een hoek regt is, wanneer zijne beenen loodregt op elkander staan.

§ 55. I STELLING. *Alle rechte hoeken, welke in onderscheidene figuren gemaakt zijn, zijn gelijk.*

Dit blijkt, wanneer men dezelve op elkander past.

§ 56. V BEPALING. Wanneer een hoek niet regt is, dan is hij scherp of stomp. Een hoek, die kleiner dan een rechte is, wordt *scherp*, en, grooter dan een rechte zijnde, *stomp* genoemd.

§ 57. VI BEPALING. Wanneer men, Fig. 13, één der beenen *AB* van eenen hoek *ABC* verlengt, dan wordt de hoek *CBD*, welke hierdoor ontstaat, het *supplement* of *aanvulsel* van den eersten hoek *ABC* genoemd.

§ 58. Het *supplement* van eenen rechten hoek, Fig. 12, is een rechte hoek. Het *supplement* van eenen scherpen hoek is een stompe hoek. Het *supplement* van eenen stompen hoek is een scherpe hoek.

§ 59. II STELLING. *Gelijke hoeken hebben gelijke supplementen.*

§ 60. III STELLING. Wanneer twee rechte lijnen, Fig. 14, elkander doorsnijden, dan zijn de overstaande hoeken (*P* en *Q*, als ook de overstaande hoeken *R* en *S*) gelijk; en wanneer één dezer hoeken regt is, dan zullen ook alle de andere hoeken regt zijn.

§ 61. IV STELLING. Een hoek en zijn *supplement*, te zamen genomen, is gelijk aan twee rechte hoeken.

§ 62. V. STELLING. Fig. 15. Wanneer uit een zeker punt (*A*) in eene lijn (*BC*) verscheidene lijnen in onderscheidene rigtingen boven die lijn getrokken worden, dan is de som der hoeken, (*P*, *Q*, *R*, *S* en *T*), welke daaruit ontstaan, gelijk aan twee rechte hoeken. Wil

men

men dit met teekens schrijven, dan schrijft men (*R* eenen rechten hoek beteekenende)

$$\text{hoek } P + \text{hoek } Q + \text{hoek } R + \text{hoek } S + \text{hoek } T = 2 R$$

§ 63. VI. STELLING. Trekt men uit een punt *A*, Fig. 16, eene menigte lijnen in het ronde, dan is de som der hoeken, (*A*, *B*, *C*, *D* en *E*,) welke op deze wijze ontstaan, gelijk aan vier rechte hoeken, dat is:

$$\text{hoek } A + \text{hoek } B + \text{hoek } C + \text{hoek } D + \text{hoek } E = 4 R$$

§ 64. De waarheden in de zes voorgaande Stellingen voorgedragen, zijn voor een streng bewijs vatbaar; doch zij vallen zoo duidelijk in het oog, dat men aan dezelve waarheid geen oogenblik twijffelen kan.

§ 65. Ongelijke hoeken hebben, als gelijkslagtige uitgebreidheden, eene zekere verhouding tot elkander, welke men altijd bepalen kan, wanneer men de gemeene maat van die hoeken zoekt, en dan uitmeet, hoe veelmaal die gemeene maat in elken dezer hoeken begrepen is.

Wanneer, Fig. 17, de hoek *GHI* de gemeene maat van de hoeken *ABC* en *DEF* is, welke in den hoek *ABC* dertienmaal, en in den hoek *DEF* achtmaal begrepen is; dan zal men den hoek *ABC* in dertien en den hoek *DEF* in acht gelijke deelen kunnen verdeelen, die alle aan elkander gelijk zijn, en men zal dan zeggen:

$$\text{hoek } ABC : \text{hoek } DEF = 13 : 8$$

§ 66. Omdat het te moeilijk zou zijn, bij het bepalen van de betrekking of verhouding van twee gegevene hoeken, de gemeene maat dezer hoeken te zoeken, zoo heeft men den rechten hoek, als de hoofdmaat, modulus, of éénheid van alle andere hoeken aangenomen, en dezelve in 90 kleinere hoeken, die men graden noemt, den graad in 60 minuten, de minuut in 60 seconden, de seconde in 60 tertien verdeeld.

Een rechte hoek houdt $90 \times 60 = 5400$ minuten, of $5400 \times 60 = 324000$ seconden, of $324000 \times 60 = 19440000$ tertien. Een rechte hoek, op die wijze verdeeld, zou dan als een maatstaf kunnen dienen, om alle andere hoeken met denzelfden af te meten. Bevond men, bij voorbeeld, dat een hoek

hoek 67 graden 38 minuten, 23 seconden inhield, (het geen men aldus schrijft, $67^{\circ}38'23''$), dan zou men hierdoor de verhouding van dien hoek tot eenen rechten hoek naauwkeurig genoeg kennen.

Het zou echter, op die wijze, nog moeilijk zijn hoeken te meten: men bedient zich tot dat einde van den omtrek eens cirkels; in dit gebruik van den cirkel, zullen wij het eerste voorbeeld aantreffen van de manier, om de verhouding van twee gelijkflachtige grootheden door die van twee andere gelijkflachtige grootheden voor te stellen.

§ 67. VII. BEPALING. Een Cirkel, Fig. 18, is eene platte vlakke, besloten binnen eene kromme lijn $ABCDE$, welke in zich zelve wederkeert, en welker punten, A, B, C, D, E , enz., alle, zonder onderscheid, even ver van één en hetzelfde punt M afstaan, hetwelk het middelpunt genoemd wordt. De kromme lijn $ABCDE$ noemt men den omtrek, en elke lijn AD , welke, door het middelpunt getrokken zijnde, ter wederzijde aan den omtrek bepaald is, middellijn, en elke lijn MB , welke van het middelpunt tot aan den omtrek getrokken wordt, noemt men den straal (radius) van den cirkel. Een gedeelte van den omtrek noemt men eenen cirkelboog.

§ 68. Het blijkt uit het bloote inzien van de figuur eens cirkels. 1^o. Dat alle deszelfs stralen even lang zijn. 2^o. Dat ook alle middellijnen deszelfde lengte hebben, en zoo wel den cirkel, als deszelfs omtrek, in twee gelijke- en gelijkvormige deelen verdeelen. 3^o. Dat een cirkel, in alle de deelen van deszelfs omtrek, deszelfde figuur heeft; dat wil zeggen, dat een gedeelte van den omtrek volkomen langs een ander gedeelte van den omtrek kan gelegd worden. Offchoon de omtrek eens cirkels eene kromme lijn is, kan men zich echter eene regte lijn voorstellen, die aan denzelfden gelijk is.

§ 69. VII. STELLING. Fig. 19. Wanneer men, uit de hoek-

hoekpunten (B en E) van twee gelijke hoeken, (ABC en DEF) als middelpunten, met gelijke stralen, (BG en EI) cirkelbogen (GH en IK) beschrijft, welke door de beenen dezer hoeken bepaald zijn, dan zullen deze cirkelbogen (GH en IK) eene gelijke lengte hebben.

Wanneer men deze hoeken op elkander legt, het hoekpunt E in het hoekpunt B , het been ED langs het been BA ; dan zal men de waarheid van het gestelde duidelijk zien.

§ 70. Uit het op elkander passen der hoeken ABC en DEF (Fig. 19) blijkt, dat ook de lijnen GH en IK , die men de koorden der bogen noemt, gelijk zijn: men mag dan besluiten: dat gelijke bogen door gelijke koorden onderspannen worden, en dat, omgekeerd, gelijke koorden gelijke bogen onderspannen. Men zal dan (Fig. 20) ook, met deszelfde opening van den passer, op den omtrek eens cirkels, gelijke boogen AB, BC, CD, DE, EF , enz. kunnen afpassen, en dus, op eene ligte wijze, eenen hoek kunnen vinden, welke drie, vier en meermalen tenen gegeven hoek AMB bevatten zal.

§ 71. VIII STELLING. Fig. 21. Twee ongelijke hoeken (ABC en DEF) staan tot elkander, in deszelfde reden, als de bogen, (GH en IK), welke, uit de hoekpunten (B en E) dezer hoeken, met gelijke stralen (BG en EI) beschreven en tuschen de beenen dezer hoeken begrepen zijn.

BETOOG. Laten de hoeken ABC en DEF eene gemeene maat hebben, welke in den hoek ABC negen en in den hoek DEF zevenmaal begrepen is; dan zal men den hoek ABC , in negen gelijke deelen, ABL , enz., en den hoek DEF in zeven gelijke deelen, DEM , enz. kunnen verdeelen; volgens de voorgaande Stelling, zal dan de boog GH in negen en de boog IK in zeven gelijke deelen verdeeld zijn; terwijl de boog GN , die negenmaal in den boog GH begrepen is, gelijk zal zijn aan den boog IO , die zevenmaal in IK begrepen is; de bogen GH en IK verhouden zich dan tot elkander, in deszelf-

de reden, als de hoeken ABC en DEF , namelijk als negen tot zeven; dat wil met andere woorden zeggen:

hoek ABC : hoek $DEF =$ hoog GH : hoog IK

§ 72. Elke hoek ABC staat dus tot vier rechte hoeken, tot twee rechte hoeken en tot éénen rechten hoek, gelijk de hoog, door de beenen van dien hoek bepaald, tot den geheelen omtrek, den halven omtrek, en een vierde van den omtrek des cirkels, waar van die hoog een gedeelte is. En, wanneer men uit het punt, alwaar twee loodlijnen elkander doorsnijden, met eenen willekeurigen straal, eenen cirkel beschrijft, dan wordt de omtrek dezes cirkels door die loodlijnen in vier gelijke deelen verdeeld.

§ 73. Uit de twee laatste Stellingen blijkt: hoe de omtrek van eenigen cirkel, groot of klein, dienen kan, om te meten: hoe veel graden en deelen van dezelve in eenigen hoek begrepen zijn. Men verdeele tot dat einde den omtrek van eenen cirkel ten naauwkeurigste in drie-honderd-en zestig gelijke deelen. *Wil men nu eenigen hoek meten, dan legge men het middelpunt van dien verdeelden cirkel in het hoekpunt van dien hoek, en telte, hoe veel deelen van den omtrek tusschen de beenen van dien hoek begrepen zijn; dan zal daaruit blijken: hoe veel graden die hoek groot is.* Op deze theorie berust de inrigting van alle werktuigen, als Transporteurs, Astrolabiums, Boussoles, enz., waarmede men, het zij op het papier of op het open veld, hoeken pleegt te meten; en welke werktuigen in de mondelijke Lessen en vooral in onze Werkdadige Meetkunst nader verklaard worden.

H AF.

II HOOFDSTUK.

Over de Eigenschappen der Evenwijdige Lijnen.

§ 74. De eigenschappen der Evenwijdige Lijnen moeten als de eigenlijke grondslag der Meetkunst beschouwd worden; omdat alle andere voorname Leerstukken op dezelve berusten. Den zamenhang dezer theorie met de eenvoudigste beginselen aan te wijzen is, in deze korte schets, ondoenlijk: wij kunnen slechts de zaken aanwijzen, en derzelver waarheid door beproeving bevestigen.

§ 75. I. BEPALING, Fig. 22. De afstand van een punt P tot eene rechte lijn AB is de loodlijn PC , welke uit dit punt P op die lijn AB valt.

§ 76. Die loodlijn is klaarblijkelijk korter dan eenige andere lijn, PD , PE of PF , welke uit dit punt P , tot deze lijn AB kan worden getrokken; want die lijnen worden langer, naarmate zij met de loodlijn PC eenen grooteren hoek maken.

§ 77. I. STELLING, Fig. 23. Wanneer men, uit twee punten (P en Q) van eene lijn (PQ), twee loodlijnen (AB en CD) door deze lijn (PQ) trekt, dan zullen deze lijnen, hoe verre zij, aan den eenen of aan den anderen kant, mogten verlengd worden, nimmer zamenkomen, of elkander nooit doorsnijden.

BEVOEG. Wanneer men de ééne helft van de figuur om de lijn PQ omdraait en op de andere helft laat vallen, dan zal, wegens de rechte hoeken, om de punten P en Q staande, de lijn QD op de lijn QC en de lijn PB op de lijn PA vallen; bijaldien dan de lijnen QD en PB elkander ergens ontmoeteden, dan zouden ook QC en PA elkander ontmoeten, en twee lijnen zouden dan elkander in twee punten doorsnijden, en dit is onmogelijk.

B 2

§ 78.

§ 78. II BEPALING, Fig. 23. *Evenwijdige (parallele) Lijnen*, zijn lijnen, die in hetzelfde vlak gelegen zijn en, hoe verre zij aan den eenen of anderen kant mogten verlengd worden, elkander nimmer ontmoeten.

§ 79. III BEPALING, Fig. 24. Wanneer twee lijnen AB en CD , het zij zij evenwijdig zijn of, verlengd zijnde, elkander ergens ontmoeten, door eenige derde lijn EF in de punten G en H gesneden worden, dan ontstaan er, om deze punten van doorsnijding, acht onderscheidene hoeken, welke, in den spreektrant der Meetkunstenaars, de volgende benamingen dragen. De hoeken AGE , BGE , CHF en DHF , worden *uitwendige hoeken* genoemd. De hoeken AGH , BGH , CHG en DHG dragen den naam van *inwendige hoeken*. Tot de uitwendige hoeken AGE , BGE , CHF en DHF behooren de inwendige hoeken CHG , DHG , AGH en BGH , welke, ten opzichte van de eerste, *tegenoverstaande inwendige hoeken* genoemd worden. Twee inwendige hoeken AGH en DHG , of BGH en CHG , aan de onderscheidene lijnen en aan de tegenovergestelde zijden van de snijlijn gelegen zijnde, noemt men *inwendige verwisselende hoeken*. Twee uitwendige hoeken AGE en DHF , of BGE en CHF , gelegen aan de onderscheidene lijnen, en aan de tegenovergestelde zijden van de snijlijn, noemt men *uitwendige verwisselende hoeken*; eindelijk dragen de hoeken AGH en CHG , of BGH en DHG , welke aan onderscheidene lijnen en aan denzelfden kant van de snijlijn gelegen zijn, den naam van *inwendige hoeken aan denzelfden kant van de snijlijn*.

§ 80. II STELLING, Fig. 24. Indien twee evenwijdige lijnen (AB en CD), door eene derde lijn (EF)

gesneden worden, dan zal men altijd mogen besluiten:

1°. Dat elke uitwendige hoek, (AGE , BGE , CHF , of DHF) gelijk is aan zijnen tegenoverstaanden inwendigen hoek (CHG , DHG , AGH of BGH .)

2°. Dat de inwendige verwisselende hoeken (AGH en DHG , of BGH en CHG ,) gelijk zijn.

3°. Dat de som van twee inwendige hoeken, (AGH en CHG , of BGH en DHG ,) aan dezelfde zijde van de snijlijn liggende, gelijk is aan twee rechte hoeken, of dat één dezer hoeken het supplement van den anderen is.

4°. Dat de uitwendige verwisselende hoeken (AGE en DHF , of BGE en CHF ,) gelijk zijn.

5°. En dat eindelijk de som der uitwendige hoeken, (AGE en CHF , of BGE en DHF ,) aan dezelfde zijde van de snijlijn gelegen, gelijk is aan twee rechte hoeken en gevolgelyk één dezer hoeken het supplement des anderen is.

NADERE VERKLARING. De ééne of andere dezer eigenschappen grondig te bewijzen is moeilijk; doch, eene van dezelve bewezen zijnde, zijn alle de andere gemakkelijk te betoogen. Gelukkiglyk kan men zich door beproeving overtuigen, dat, bij voorbeeld, de uitwendige hoek BGE , gelijk is aan den tegenoverstaanden inwendigen hoek DHG . Men stelle de snijlijn EF , waar men goedvindt, en beschrijve, nit de hoekpunten G en H , met gelijke stralen, twee cirkelbogen; men zal dan bevinden, dat deze cirkelbogen gelijk zullen zijn: maar deze gelijkheid zal ophouden plaats te hebben, zoodra de lijnen AB en CD zichtbaar naar den eenen of anderen kant, nader bij elkander komen.

Men zal zich van de overige deelen der Stelling op dezelfde wijze door beproeving kunnen overtuigen.

§ 81. Evenwijdige Lijnen worden dan altijd, door eene derde lijn, onder gelijke hoeken doorsneden; doch, zoodra de evenwijdigheid der lijnen AB en CD ophoudt plaats te hebben, dan

ook worden zij niet meer onder gelijke hoeken gesneden; dan ook zijn niet meer de inwendige en uitwendige verwisselende hoeken gelijk, en dan eindelijk is ook niet meer de som der inwendige hoeken, aan dezelfde zijde van de snijlijn, gelijk aan twee rechte hoeken: die gelijkheden zijn dus eigenschappen der evenwijdige lijnen; omdat zij ophouden plaats te hebben, zoodra de lijnen ophouden evenwijdig te zijn.

§ 82. Wanneer men dan in eenige Figuur aanneemt, dat twee lijnen evenwijdig zijn, en deze lijnen door eenige andere lijn worden doorgesneden, dan zal men altijd, hoe of waar deze snijlijn geplaatst zij, tot het gelijk zijn der hoeken mogen besluiten; maar ook hebben wij in onze Beginselen bewezen: dat, wanneer (Fig. 24) twee lijnen AB en CD , door eene derde lijn worden doorgesneden, en een uitwendige hoek gelijk is aan zijnen tegenoverstaanden inwendigen; of de inwendig of uitwendig verwisselende hoeken gelijk zijn; of wel de som der inwendige hoeken, aan denzelfden kant der snijlijn, gelijk is aan twee rechte hoeken, in elk dezer gevallen, tot de evenwijdigheid dezer alzo gesnedenen lijnen zal mogen besloten worden.

§ 83. Op de verklaarde eigenschappen der evenwijdige lijnen berust de zeer eenvoudige manier, om, door middel van houten driehoeken, lijnen te trekken, die evenwijdig loopen. Zij, Fig. 25, PQ eene lijn, R een gegeven punt; indien men dan door dit punt R , eene lijn GH evenwijdig aan de gegeven lijn PQ zal trekken, zoo legge men den houten driehoek ABC , met deszelfs kant BC , langs de lijn PQ ; voorts den houten driehoek DEF , met één van deszelfs kanten DE , langs den kant AB , van den driehoek ABC ; men houde met de linkerhand den driehoek DEF vast, en schuive met de rechterhand den driehoek ABC opwaarts, tot dat deszelfs kant BC , door het punt R ga; men trekke alsdan de lijn GH , welke, omdat de hoek ABC onveranderlijk dezelfde blijft, evenwijdig zal zijn aan de gegevene lijn PQ .

§ 84. Wanneer de kanten AB en AC en de kanten EF en DF met elkander eenen rechten hoek maken, dan zullen deze driehoeken ook dienen kunnen, om lijnen te trekken, die reghoekig op elkander staan.

§ 85.

§ 85. III. STELLING. Fig. 26. De hoeken, (ABC en DEF) welke beenen evenwijdig aan elkander loopen, zijn gelijk.

BETOOG. Want verlengt men DE tot in G ; dan zal, § 80, hoek $DEF =$ hoek $DGC =$ hoek ABC zijn.

§ 86. STELLING. Fig. 27. Wanneer men eenen hoek, (PCQ) met deszelfs deus heen, (CQ) langs eene rechte lijn (AB) heenschuift, dan beschrijft elk punt (D) van het andere been (CP) dezes bewegenden hoeks eene lijn (EF), die evenwijdig aan deze lijn (AB) zal loopen, en de punten D en C zullen in denzelfden tijd gelijke lijnen beschrijven.

De waarheid van dit gestelde is uit zich zelve blijkbaar.

§ 87. Wanneer, Fig. 27, de hoek PCQ een rechte hoek is, den staat de lijn CD loodrecht op beide lijnen AB en EF . Evenwijdige lijnen staan dan overal even ver van elkander.

§ 88. IV STELLING. Fig. 28. De lijnen, (AC en BD) welke de uiteinden van twee gelijke en evenwijdige lijnen (AB en CD) vereenigen, zijn gelijk en evenwijdig.

BETOOG. Want, laat de hoek ABD langs de lijn BD voortgeschoven worden, dan zal het punt A de evenwijdige lijn AC beschrijven; AC is dan evenwijdig aan BD , en, omdat de punten A en B te gelijk in C en D komen, zal $AC = BD$ zijn.

§ 89. V STELLING Fig. 29. Wanneer men, uit alle de punten (A, B, C , enz.) van eene kromlijnige figuur, gelijke en evenwijdige lijnen (Aa, Bb, Cc , enz.) trekt, dan zullen de uiteinden dezer lijnen in den omtrek eener kromlijnige figuur gelegen zijn, welke aan de eerste gelijk- en gelijkvormig zal zijn.

Deze eigenschap der evenwijdige lijnen, welke nuttiglijk tot het kopiëren van alle soorten van figuren kan aangewend worden, loopt klaarblijkelijk in het oog.

III. H O O F D S T U K.

Over de Regtlijnige of Veelhoekige Figuren, in het algemeen; en over de standvastige som van derzelve hoeken.

§ 90. I. BEPALING. **A**lle platte vlakken, welke aan alle kanten door rechte lijnen bepaald zijn, worden *regtlijnige* of *veelhoekige Figuren* genoemd.

§ 91. Men onderscheidt de regtlijnige of veelhoekige Figuren in driehoekige, vierhoekige, enz., ingesloten zijnde door rechte lijnen, Zie Fig. 30, 31, 32. Twee naast elkander liggende zijden maken eenen hoek. In elken veelhoek staat het aantal der zijden gelijk aan het aantal der hoeken. Wanneer men van eene regtlijnige figuur spreekt, welke meer dan drie zijden heeft, noemt men dezelve *Veelhoek*.

Eene veelhoekige Figuur kan niet minder dan drie zijden hebben; het aantal van derzelve zijden kan onbepaald groot zijn.

§ 92. In elken driehoek ABC , Fig. 30., onderscheidt men de zijden AB , BC , AC , welke zijne grenzen zijn; deze zijden zijn de afstanden der hoekpunten A , B en C ; nog onderscheidt men de hoeken A , B en C , welke de zijden, twee aan twee genomen, met elkander maken. Eene dezer zijden AB , (die horizontaal gelegen is,) noemt men de *basis* of *grondlijn*, en dan dragen de zijden AC en BC den naam van *opstaande zijden*; en dan ook worden de hoeken A en B , die aan de basis gelegen zijn, de *hoeken aan de basis* genoemd en de hoek C de *tophoek*. Echter kan men elke zijde eens driehoeks als basis aanmerken. De hoek A , welke door twee zijden AC en AB gemaakt wordt, wordt gezegd tegen over de derde zijde BC te staan.

§ 93. II. BEPALING. Men onderscheidt de driehoek-

hoeken in *gelijkzijdige*, *gelijkbeenige* en *ongelijkzijdige*. Een *gelijkzijdige driehoek* is een driehoek, die drie gelijke zijden heeft. Een *gelijkbeenige driehoek* is een driehoek, die twee gelijke zijden heeft. Een *ongelijkzijdige driehoek* is een driehoek, wiens zijden alle in lengte van elkander verschillen.

§ 94. Men kan op elke gegebene lijn AB , Fig. 33, eenen gelijkzijdigen driehoek beschrijven. Beschrijf uit de punten A en B , als middelpunten, met de lijn AB , als straal, twee cirkbogen, die elkander in C snijden, en trek dan de lijnen AC en BC ; dan is ABC een gelijkzijdige driehoek.

§ 95. Ook kan men, op dezelfde wijze, op eene gegebene lijn AB , Fig. 34, eenen gelijkbeenigen driehoek ABC beschrijven, wiens gelijke beenen AC en BC gelijk zijn aan eene gegebene lijn P .

§ 96. Insgelijks zal men, zie Fig. 35, op eene gegebene lijn AB eenen driehoek kunnen beschrijven, wiens opstaande zijden AC en BC aan twee gegebene lijnen P en Q gelijk zijn. Hetgeen uit de beschouwing der Figuur genoegzaam blijkt.

§ 97. Daar de rechte lijn de kortste afstand is tusschen twee punten, en gevolgelyk de som van twee zijden van eenen driehoek grooter dan de derde zijde moet zijn, zal in Figuur 34, het dubbel van de lijn P grooter dan AB , en in Fig. 35, de som der lijnen P en Q grooter dan AB moeten zijn.

§ 98. III. BEPALING. De lijn, welke in eene veelhoekige figuur, (vierhoek, vijfhoek, zeshoek,) Fig. 31 en 32, de hoekpunten van twee niet op elkander volgende hoeken vereenigt, noemt men eene *Diagonaal* of *Hoekpuntslijn*.

§ 99. IV. BEPALING. De hoek D van eenen veelhoek, Fig. 32, wordt gezegd naar buiten te staan, wanneer de hoekpuntslijn CE , welke de hoekpunten E en C van de naastgelegene hoeken vereenigt, binnen den veelhoek valt. De hoek D

staat, Fig. 36, daarentegen naar binnen, wanneer die hoekpuntslijn *CE* buiten den veelhoek valt.

§ 100. I. STELLING. Fig. 37. Wanneer alle de hoeken van eenen veelhoek naar buiten staan, dan zal, hoe groot het aantal van deszelfs zijden zijn moge, (het zij een driehoek, vierhoek, twintighoek, enz.) en hoe groot of klein die veelhoek moge zijn, de som van de supplementen van alle deszelfs hoeken standvastig en altijd gelijk zijn aan vier rechte hoeken, of driehonderd-en-zestig graden.

OPHELDERING. Men verleng de zijden *AB*, *BC*, *CD*, *DE* en *EA*; dan ontstaan de hoeken *FBG*, *GCH*, *HDI*, *IEK* en *KAF*, welke (zie § 57) de supplementen der hoeken *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEA* en *EAD* zijn: de som van deze supplementen is gelijk aan vier rechte hoeken.

Men teekene, behalve den vijfhoek, welke de 37^e figuur voorstelt, eenen driehoek, vierhoek, zeshoek, zevenhoek, en make, door het verlengen der zijden, de supplementen der hoeken; men mete met eenen transporteur elk supplement, teekene het getal graden aan, hetwelk elk supplement bedraagt en telle deze graden op; dan zal men voor de som 360° vinden; verschilt dit iets, dan moet zulks worden toegeschreven aan de onnaauwkeurigheid der meting, en, omdat het op een klein werktuig, hoedanig de transporteur is, moeilijk valt, gedeeltens van graden naauwkeurig te meten. Doch, de Leerling is nu reeds op de hoogte, om te kunnen bevatten, hoe deze waarheid uit de eigenschappen der evenwijdige lijnen volgt.

BETOOG. Men trekke *BL*, *BM* en *BN* evenwijdig aan *CH*, *DI* en *EK*, dan is, zie § 80 en 85.

$$\text{hoek } FBG = \text{hoek } FBG$$

$$\text{hoek } GCH = \text{hoek } GBL$$

$$\text{hoek } HDI = \text{hoek } LBM$$

$$\text{hoek } IEK = \text{hoek } MBN$$

$$\text{hoek } KAF = \text{hoek } FBN$$

Telt

Telt men deze gelijke hoeken bij elkander, dan moet de som der hoeken *FBG*, *GCH*, *HDI*, *IEK* en *KAF*, dat is, de som van de supplementen van de hoeken des veelhoeks, gelijk zijn aan de som der hoeken *FBG*, *GBL*, *LEM*, *MBN* en *NBF*, dat is, zie § 63, gelijk aan vier rechte hoeken.

§ 101. II STELLING. Fig. 38. Het supplement (*CBD*) van elken hoek eens driehoeks is gelijk aan de som der twee andere hoeken (*BAC* en *ACB*). En de som van alle de hoeken eens driehoeks is gelijk aan twee rechte hoeken, of honderd-en-tachtig graden.

BETOOG. Verleng *AB*, en trek *BE* evenwijdig aan *AC*, dan is (zie § 80) hoek *CBE* = hoek *ACB*, en hoek *EBD* = hoek *BAC*; telt men deze gelijkheden bij elkander, dan vindt men: hoek *CBD* = hoek *BAC* + hoek *ACB*.

Telt men bij deze laatste vergelijking hoek *ABC* = hoek *ABC*; dan zal men vinden: hoek *ABC* + hoek *BAC* + hoek *ACB* = hoek *ABC* + hoek *CBE* + hoek *EBD* = 2R = 180°.

§ 102. Het supplement van elken hoek eens driehoeks is dan altijd groter dan één der twee andere hoeken; alzoo is, in Fig. 38, hoek *CBD* > hoek *BAC*; en hoek *CBD* > hoek *ACB*.

§ 103. Een driehoek kan wel éenen rechten of éenen stompen hoek; maar nooit twee rechte, en nog veel minder, twee stompe hoeken hebben. Hierdoor komt men tot de volgende bepalingen.

§ 104. V. BEPALING. Ten aanzien der hoeken, bestaan er drieërlei soort van driehoeken: *regthoekige*, *stomphoekige* en *scherphoekige*. Een *regthoekige driehoek* is een driehoek, die éenen rechten hoek *B* heeft, (zie Fig. 39.) zijne twee andere hoeken *A* en *C* zijn scherp; de zijden *AB* en *BC*, die om den rechten hoek *B* staan, noemt men de *regthoekszijden*, de zijde *AC*, tegen over den rechten hoek *B*, de *hypotenusa* of *schuinsche zijde*. Een *stomphoekige driehoek* is een driehoek, die éenen stompen hoek heeft. En een *scherphoekige driehoek* is een driehoek, die drie scherpe hoeken heeft.

§ 105.

§ 105. Uit het betoog van de II. Stelling, volgt nog, hoe men, twee hoeken van eenen driehoek kennende, den derden hoek door berekening vinden kan. Men trekt namelijk de som der gegeven hoeken van 180° af.

Laat, Fig. 30, gegeven zijn hoek $A = 49^\circ 17' 35''$, en hoek $B = 73^\circ 28' 27''$; dan vindt men den hoek C , door berekening, aldus:

$$\begin{array}{l} \text{hoek } A = 49^\circ 17' 35'' \\ \text{hoek } B = 73^\circ 28' 27'' \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{hoek } A \\ \text{hoek } B \end{array}} \right\} \text{optellen.}$$

$$\begin{array}{l} \text{hoek } A + \text{hoek } B = 122^\circ 46' 2'' \\ \text{hoek } A + \text{hoek } B + \text{hoek } C = 180^\circ 00' 00'' \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{hoek } A + \text{hoek } B \\ \text{hoek } A + \text{hoek } B + \text{hoek } C \end{array}} \right\} \text{afrekken.}$$

$$\text{hoek } C = 57^\circ 13' 58''$$

§ 106. In eenen regthoekigen driehoek ABC , Fig. 39, is de som der scherpe hoeken A en C gelijk negentig graden. Wanneer dus van eenen regthoekigen driehoek éenen der scherpe hoeken kent, zal men een anderen scherpen hoek vinden, door den gegevenen scherpen hoek van 90° af te trekken.

Gegeven zijnde de scherpe hoek $A = 58^\circ 19' 23''$; dan vindt men den scherpen hoek C aldus:

$$\begin{array}{l} \text{hoek } A + \text{hoek } C = 90^\circ 00' 00'' \\ \text{hoek } A = 58^\circ 19' 23'' \\ \hline \text{hoek } C = 31^\circ 40' 37'' \end{array}$$

§ 107. III STELLING.: Fig. 37. De som van alle de hoeken eens veelhoeks, wiens hoeken alle naar buiten staan, is gelijk aan zoo veelmaal twee rechte hoeken, als het getal der zijden min twee bedraagt. Dat is, wanneer men het getal der zijden $= n$ en de som der hoeken $= S$ stelt; dan is

$$S = (n - 2) \times 2 R.$$

BETOOG. De som van elken hoek eens veelhoeks en zijn supplement, is (zie § 61.) gelijk aan twee rechte hoeken, dat is $= 2 R$.

Indien de veelhoek n zijden heeft, dan is de som van alle des-

deszelfs hoeken, te zamen genomen met de som van de supplementen van alle die hoeken, gelijk aan $n \times 2 R$.

Trekt men hier van af de som van de supplementen der hoeken, welke, zie § 100, gelijk is aan vier rechte hoeken; dat is $2 \times 2 R$; dan zal men voor de som van alle de hoeken overhouden, $S = (n - 2) \times 2 R$.

§ 108. Stelt men in deze formule $n = 3$; dan is $n - 2 = 1$; en men vindt voor de som van de hoeken eens driehoeks $2 R = 2 \times 90^\circ = 180^\circ$.

Stelt men $n = 4$; dan is $n - 2 = 2$ en $S = 2 \times 2 R = 4 R = 4 \times 90^\circ = 360^\circ$, voor de som van de hoeken van elken vierhoek.

De som van de hoeken van elken vijfhoek is $= 3 \times 2 R = 6 R = 540^\circ$, enz.

§ 109. Wanneer van eenen veelhoek alle de hoeken, tot op éenen na bekend zijn, dan zal men den onbekenden hoek vinden, door de som van alle de bekende hoeken van $(n - 2) \times 2 R$ af te trekken.

IV HOOFDSTUK.

Overeenstemming van de Hoeken eens Driehoeks met hunne overstaande zijden. Gelijke- en gelijkvormige Driehoeken.



§ 110. I STELLING. Fig. 40. *De hoeken, welke, in eenen gelijkbeenigen driehoek, tegen over de gelijke zijden staan, zijn gelijk.*

Opheldering. Wanneer AC en BC de gelijke zijden zijn, dan zullen de hoeken B en A , welke tegen over deze gelijke zijden staan, gelijk zijn.

Betoog. Men kan zich eene lijn CD voorstellen, welke den hoek ACB , in twee gelijke hoeken ACD en BCD verdeelt; laat dan den driehoek BCD om die lijn CD omdraaijen, tot dat hij op den driehoek ACD valt; dan zal BC langs AC , het punt B in A en BD langs AD vallen; derhalve moet hoek $B =$ hoek A zijn.

§ 111. De hoek ADC is derhalve ook gelijk aan den hoek BDC ; gevolgelijk zal de lijn, welke den tophoek van eenen gelijkbeenigen driehoek in twee gelijke deelen verdeelt, de basis regthoekig doorsnijden, en dezelve in twee gelijke deelen verdeelen.

§ 112. Indien men BC tot in E verlengt, dan is hoek $ACE =$ hoek $A +$ hoek $B = 2$ hoek $A = 2$ hoek B ; en $\frac{1}{2}$ hoek $ACE =$ hoek $A =$ hoek B ; Een der gelijke hoeken van eenen gelijkbeenigen driehoek is derhalve gelijk aan de helft van het supplement van den derden hoek.

§ 113. Bijaldien dan de tophoek van een gelijkbeenigen driehoek gegeven is, zal men één der hoeken aan de basis vinden, door de helft van het supplement van den tophoek te nemen. Zij de tophoek $= 37^{\circ}18'$; dan zal een hoek aan de basis $= 71^{\circ}21'$ zijn.

zijn. En, is één der hoeken aan de basis gegeven, dan zal de tophoek gevonden worden, door het dubbel van dien hoek van 180° af te trekken. Zij gegeven hoek $A = 36^{\circ}18'$; dan is $2A = 72^{\circ}36'$ en $C = 107^{\circ}24'$.

§ 114. De hoeken van eenen gelijkzijdigen driehoek zijn (omdat hij ten opzichte van elke zijde gelijkbeenig is,) alle aan elkander gelijk. Elke hoek is dus gelijk aan één derde van 180° ; dat is, gelijk aan zestig graden.

§ 115. Wanneer, Fig. 40, een driehoek twee gelijke hoeken A en B heeft, dan zullen de zijden, over die gelijke hoeken staande, gelijk zijn, en zulk een driehoek zal bijgevolg gelijkbeenig zijn.

§ 116. II STELLING. Fig. 41. *In elken driehoek (ABC) staat altijd een grooter hoek tegen over een grootere zijde.*

Opheldering. Dat is, indien AC grooter dan BC is, dan zal men altijd mogen besluiten, dat hoek ABC grooter dan hoek BAC zal zijn.

Betoog. Wanneer AC grooter dan BC is, dan kan men $CD = BC$ nemen; trekt men dan de lijn BD , dan is BCD een gelijkbeenigen driehoek, en hoek $CBD =$ hoek BDC .

Nu is hoek ABC grooter dan hoek CBD , en bijgevolg, ook grooter dan hoek CDB .

Maar, volgens § 102, is hoek CDB grooter dan hoek CAB . Derhalve moet noodzakelijk de hoek ABC grooter dan de hoek BAC zijn.

§ 117. Men kan ook het omgekeerde betoogen, te weten: dat in elken driehoek, uit het grooter of kleiner zijn der hoeken, tot het grooter of kleiner zijn der overstaande zijden mag besloten worden; staande in elken driehoek eene grootere zijde tegen over eenen grooteren hoek.

§ 118. Wij hebben, boven § 37, reeds doen opmerken, wat men in de Meetkunst door gelijke- en gelijkvormige figuren verstaat; uit de bepaling, welke wij, daar ter plaatse van de gelijk- en gelijkvormigheid gegeven hebben; blijkt, dat men door

door dadelijke op elkander pasing, (*superpositio*) over de gelijk- en gelijkvormigheid der figuren kan oordeelen; dan, daar men, in de beschouwing der meetkundige figuren, niet altijd door dadelijke superpositie, over de gelijk- en gelijkvormigheid kan oordeelen; zoo moet men de voornaamste omstandigheden kennen, welke ons tot het gelijk- en gelijkvormig zijn kunnen doen besluiten: deze omstandigheden zijn in de volgende Grondstellingen begrepen.

§ 119. III STELLING. Fig. 42. Twee veelhoekige figuren ($ABCDE$ en $abcde$) kunnen niet gelijk- en gelijkvormig zijn; indien niet alle de zijden en hoeken (AB , BC , CD , DE , EA en A , B , C , D , E) van de eerste, in eene natuurlijke volgorde genomen, gelijk zijn aan de zijden en hoeken (ab , bc , cd , de , ea en a , b , c , d , e) van de tweede figuur.

BETOOG. Want deze figuren kunnen niet gelijk- en gelijkvormig zijn, indien zij niet op elkander kunnen gepast worden; passen zij op elkander, dan vallen de hoekpunten a , b , c , d , e in de hoekpunten A , B , C , D en E ; en dan zijn klaarblijkelijk alle de zijden en alle de hoeken in beide figuren gelijk.

§ 120. IV STELLING. Fig. 43. Wanneer eene zijde (AB) met twee hoeken (A en B), aan die zijde gelegen, in eenen driehoek, (ABC) gelijk zijn aan eene zijde (DE) met de hoeken (D en E) aan die zijde gelegen van eenen anderen driehoek (DEF); dan zal men hier uit mogen besluiten, dat deze driehoeken gelijk- en gelijkvormig zullen zijn.

BETOOG. Leg het punt D in A , DE langs AB ; dan valt E in B ; DF langs AC ; EF langs BC en het punt F in C ; de driehoeken zijn dan gelijk- en gelijkvormig.

Men mag dan ook besluiten (zie § 119) dat hoek F = hoek C ; DF = AC , en EF = BC zal zijn.

§ 121.

§ 121 V STELLING. Fig. 43. Wanneer twee zijden (AB en AC) van eenen driehoek (ABC) met den hoek (A), tuschen deze zijden gelegen, gelijk zijn aan twee zijden (DE en DF) van eenen anderen driehoek (DEF) met den hoek (D), tuschen die zijden gelegen; dan zal men hieruit mogen besluiten: dat deze driehoeken gelijk- en gelijkvormig zijn.

BETOOG. Men legge het punt D in A , en DE langs AB ; dan valt het punt E in B , DF langs AC en het punt F in C ; de driehoeken zijn derhalve gelijk- en gelijkvormig; bijgevolg, § 119. hoek E = hoek B ; hoek F = hoek C en BC = EF .

§ 122. VI STELLING. Fig. 43 en 44. Wanneer de drie zijden (AB , BC en AC) van eenen driehoek (ABC) gelijk zijn aan de drie zijden (DE , EF en DF) van eenen anderen driehoek (DEF); dan zal men hieruit mogen besluiten: dat deze driehoeken gelijk- en gelijkvormig zijn, en dat de hoeken, welke in deze driehoeken, tegen over de gelijke zijden staan, gelijk zijn.

BETOOG. Men legge de driehoeken ABC en DEF onder elkander, zoo als de 44^e figuur dit voorstelt, en hetgeen (aangezien AB = DE is) geschieden kan: trek dan de lijn CF .

Omdat dan AC = DF is, zal (§ 119) hoek ACF = hoek DFC zijn.

En omdat EF = BC is, zal, om dezelfde reden, hoek BCF = hoek EFC zijn.

Telt men deze hoeken bij elkander, dan zal hoek ACB = hoek DFE zijn.

Volgens § 121, zal dan ook hoek A = hoek D en hoek E = hoek B moeten zijn.

§ 123. De driehoek is de eenige regthoekige of veelhoekige figuur, in welke men, uit de gelijkheid der zijden, tot de gelijk- en gelijkvormigheid mag besluiten. De zijden van eenen vijfhoek $ABCDE$, bij voorbeeld, (zie Fig. 42) kunnen, in dezelfde volgorde genomen, gelijk zijn aan de zijden van eenen ande-

C

ren

ren vijfhoek $abcde$, zonder dat daarom deze figuren gelijk- en gelijkvormig zijn: en dit is klaar; want stel, dat de vijfhoeken $ABCDE$ en $abcde$ gelijk- en gelijkvormig zijn; dan zijn de zijden gelijk; indien men dan de zijden van den vijfhoek $abcde$ om derzelver hoekpunten laat omdraaijen, hergeen in alle veelhoeken, behalve in den driehoek geschieden kan, dan blijven de zijden wel even lang; maar, daar de hoeken veranderen, zal men den vijfhoek $abcde$ niet meer op den vijfhoek $ABCDE$ kunnen passen.

§ 124. Met de V Stelling, staat eene andere waarheid in verband, waarvan men, bij het nadenken over de eigenschappen der figuren, dikwijls een nuttig gebruik kan maken, deze waarheid wordt in de volgende Stelling voorgedragen.

§ 125. VI. STELLING. Fig. 45. Wanneer twee zijden (AB en AC) van eenen driehoek (ABC) gelijk zijn aan twee zijden (DE en DF) van eenen anderen driehoek (DEF), maar de hoek, tuschen deze eerste zijden in den eersten driehoek (ABC), grooter is dan de hoek (EDF), tuschen de zijden (DE , DF) in den anderen driehoek (DEF); dan zal men daaruit mogen besluiten, dat de derde zijde (BC) van den eersten driehoek (ABC) grooter zal zijn, dan de derde zijde (EF) van den tweeden driehoek (DEF).

BETOOG. Omdat $DE = AB$ is, zoo zal men den driehoek DEF op den driehoek ABC kunnen leggen, zoo als de figuur zulks voorstelt; en dan is: 1°. $AH + CH > AC$, en 2°. $BH + HF > BF$; telt men deze ongelijkheden bij elkander, zoo zal $AH + FH + BH + CH$: dat is, $AF + CB > AC + BF$ zijn; trekt men hier van af $AC = AF = DF$; zoo zal klaarblijkelijk $BC > BF$; dat is, $BC > EF$, overblijven.

§ 126. Het omgekeerde dezer stelling wordt ook gemakke-lijk betoogd.

V HOOFD-

V H O O F D S T U K.

Over de Parallelogrammen, Regthoeken en Vierkanten, en het vinden van derzelver Inhouden.

§ 127. I BEPALING. Fig. 46. **E**n Parallelogram is eene vierhoekige figuur $ABCD$, welker overstaande zijden (AB en DC als ook AD en BC) evenwijdig aan elkander zijn.

§ 128. I STELLING. Fig. 46. Elke hoekpuntslijn van een parallelogram, deelt hetzelfde in twee gelijke- en gelijkvormige driehoeken, en deszelfs overstaande zijden en hoeken zijn gelijk.

BETOOG. Zulks blijkt door elke proef, die men hier van verliest te nemen. Doch het betoog is ook ligt: want, wegens de evenwijdigheid der zijden, zal (§ 80), indien men de hoekpuntslijn BD neemt, $hoek a = hoek a$ en $hoek b = hoek b$, en daarom (zie § 120) driehoek ABD , gelijk- en gelijkvormig met driehoek BCD ; derhalve $AB = CD$, $AD = BC$ en $hoek A = hoek C$. Voor de hoekpuntslijn AC zal hetzelfde gelden.

§ 129. Wanneer (Fig 47) een parallelogram éenen regten hoek A heeft, dan is ook (§ 80) de hoek B regt, en dan zijn ook (§ 128) de hoeken B en D regt.

§ 130. II BEPALING. Een regthoekig parallelogram of Regthoek is een parallelogram, hetwelk éenen regten hoek heeft.

§ 131. III BEPALING. Een Vierkant (Quadrant) is een regthoekig gelijkzijdig parallelogram.

§ 132. De regthoeken en vierkanten zijn hierin van de scheefhoekige parallelogrammen onderscheiden, dat zij gelijke
hoek-

hoekpuntslijnen hebben; daar in een schiefhoekig parallellogram integendeel de hoekpuntslijnen ongelijk zijn.

§ 133. IV. BEPALING. Men bedient zich, in de Leer der parallellogrammen, van de volgende spreekwijzen. Een parallellogram $ABCD$ wordt gezegd, onder twee gegeven lijnen P en Q , en eenen gegeven hoek R , zamengeseld te zijn, wanneer twee aanleggende zijden AB en AD , aan deze lijnen P en Q gelijk zijn, en de hoek BAD , welke deze zijden met elkander maken, zoo groot is als de gegeven hoek R . Een regthoek $ABCD$ (Fig. 47) wordt gezegd, onder twee lijnen P en Q te zijn zamengeseld, wanneer twee aan elkander liggende zijden AB en AD van dien regthoek, aan deze lijnen P en Q gelijk zijn. Een vierkant $ABCD$, Fig. 48 wordt gezegd, op een lijn P beschreven te zijn, wanneer eene zijde AB van dit vierkant (en bijgevolg elke andere van deszelfs zijden) aan deze lijn P gelijk is. In eenen regthoek $ABCD$ (Fig. 47) noemt men twee aan elkander liggende zijden AB en AD , de lengte en de breedte van dien regthoek. De hoogte van een parallellogram $ABCD$ (Fig. 46) is de loodlijn DE , welke, uit eenig punt van de bovenzijde DC , op de basis valt; zij is eigenlijk de afstand tusschen de basis en de bovenzijde; en die afstand is (zie § 87) overal dezelfde. De hoogte van eenen driehoek is de loodlijn, welke uit het hoekpunt van den tophoek op de basis, of wel (indien één der hoeken aan de basis stomp is,) op het verlengde van dezelve valt.

§ 134. I. STELLING. Parallellogrammen, die onder gelijke zijden en gelijke hoeken zijn zamengeseld, zijn gelijk- en gelijkvormig.

De waarheid der grondstelling is uit zich zelve klaar.

§ 135.

§ 135. II. STELLING, Fig. 49. Wanneer men de basis van een schief of regthoekig parallellogram ($ABCD$) in een zeker aantal gelijke deelen (AE , EG , enz.) ondersield verdeeld te zijn, en men dan door alle de punten, welke deze deelen van elkander afscheiden, lijnen (EF , GH , enz.) trekt, welke evenwijdig aan de opstaande zijden (AD en BC) zijn, dan zal het parallellogram in even zoo vele gelijke- en gelijkvormige parallellogrammen verdeeld zijn, als er gelijke deelen in de basis zijn aangenomen.

BETOOG. Want, wegens de evenwijdigheid der lijnen EF , GH , aan de opstaande zijde AD , zijn $AEFD$, $EGHF$ parallellogrammen, die onder gelijke hoeken EAD , GEF , enz. zijn zamengeseld; omdat nu ook $AE = EG$ en $AD = EF = GH$ (zie § 128) is, zullen, volgens de voorgaande Stelling, deze parallellogrammen alle gelijk- en gelijkvormig zijn.

§ 136. Hier uit volgt onmiddellijk: dat, wanneer men (zie Fig. 50) de basis AB in a , en de opstaande zijde AD in b gelijke deelen verdeeld, en door de deelpunten lijnen trekt, die evenwijdig aan de opstaande zijde en aan de basis loopen, het geheele parallellogram daardoor zal verdeeld zijn, in een aantal gelijke- en gelijkvormige parallellogrammen, hetwelk gelijk zal zijn aan het product der getallen a en b , met elkander vermenigvuldigd. Want de lijnen, door de deelpunten van de basis getrokken, deelen het parallellogram in a gelijke- en gelijkvormige parallellogrammen, en de lijnen getrokken, door de deelpunten van de opstaande zijde, deelen elk één dezer parallellogrammen wederom in b gelijke deelen; dus is het geheele parallellogram in a maal b deelen verdeeld.

§ 137. Laat, Fig. 51. De lijn M beschouwd, als de eenheid van de lengtemaat in de lengte AB van eenen regthoek a , en in de breedte CD b maal begrepen zijn; dan zal men de lengte AB in a , en de breedte AD in b , gelijke deelen kunnen verdeelen, en indien men nu, even als boven, door de deelpunten lijnen trekt, die evenwijdig aan de breedte AD en aan

de lengte AB loopen, dan zal de geheele regthoek $ABCD$ verdeeld zijn in een aantal van $a \times b$ vierkanten, welke de lijn M tot zijde hebben.

§ 138. De affstanden der punten; dat is, de regte lijnen worden door regte lijnen, dat is, door roeden, voeten, duimen, lijnen, door ellen, meters, of andere aangenomene maten, gemeten, en de inhouden van alle foorten van vlakke figuren door de vierkanten, op die roeden, voeten, duimen, lijnen, ellen, meters, enz. beschreven, waaraan men den naam van vierkante roeden, vierkante voeten, vierkante duimen, vierkante lijnen, vierkante ellen, vierkante meters geeft. Men houdt in het algemeen, het vierkant, op de éénheid van de lengtemaat beschreven, voor de natuurlijke maat der vlakken, omdat gelijke vierkanten aan elkander kunnen gesloten worden, zonder dat zij eenige tusschenruimte, tusschen beiden openlaten.

§ 139. Indien men derhalve weet, hoeveelmaal de éénheid van de lengtemaat, in de lengte en breedte van eenen regthoek begrepen is, dan zal het product dezer twee getallen aanwijzen, hoeveelmaal het vierkant, op die éénheid beschreven, in de vlakke ruimte van dien regthoek zal begrepen zijn. Men noemt dit, op eene oneigenlijke wijze, de lengte met de breedte te vermenigvuldigen; want het is niet de lengte, welke met de breedte vermenigvuldigd wordt; maar het zijn de getallen, die de verhouding van de lengtemaat op de lengte en breedte voorstellen, welke, met elkander vermenigvuldigd zijnde, een product geven, het welk de verhouding van den inhoud van het vierkant, op de éénheid van de lengtemaat beschreven, op den inhoud van den regthoek doet bekend worden.

§ 140. VOORBEELD. Laat, Fig. 51, gegeven zijn $AB = 31,7$ voeten $AD = 19,5$ voeten; dan zal de inhoud van den regthoek $ABCD = 31,7 \times 19,5 = 618,15$ vierkante voeten zijn.

§ 141. Wanneer men, Fig. 51., op eene basis AB , welke eene gegeeene lengte heeft, eenen regthoek van eenen gegeeenen inhoud zal plaatsen, dan zal men de breedte vinden, welke, tot dat einde, aan dien regthoek zal moeten gegeven worden, wanneer

men

men den inhoud, in vierkante éénheden uitgedrukt, door de gegeeene lengte van de basis deelt.

§ 142. VOORBEELD. Laat de inhoud 635,3 vierkante meters moeten inhouden, en de basis $AB = 31,3$ meters zijn; dan zal de breedte $AD = \frac{635,3}{31,3} = 20,2971$ nagenoeg genomen moeten worden.

§ 143. Wanneer men op lijnen, die 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 voeten, enz., lang zijn, vierkanten beschrijft; dan zullen derzelver inhouden, tot elkander staan, als de tweede magten dezer getallen, dat is, als 1, 4, 9, 16, 25, enz., welke getallen de vierkanten voeten uitdrukken, die in de inhouden dezer vierkanten begrepen zijn. Om die reden, houdt eene vierkante Rijnlandsche roede 144 vierkante voeten; eene vierkante voet 144 vierkante duimen; en eene vierkante duim, 144 vierkante lijnen; een vierkante meter 100 vierkante decimeters, een vierkante decimeter 100 vierkante centimeters, en een vierkante centimeter 100 vierkante millimeters.

§ 144. Wanneer men dan weet, hoeveelmaal de lengte van eenen voet, van eenen meter, enz. op de zijde van een vierkant begrepen is; dan zal men dit getal slechts tot de tweede magt behoeven te verheffen, (dat is men zich zelven te vermenigvuldigen,) om te vinden, hoeveelmaal de vierkante voet of de vierkante meter in den inhoud van dit vierkant zal begrepen zijn.

§ 145. En, wanneer men, omgekeerd, de zijde van een vierkant wil vinden, hetwelk een zeker aantal vierkante voeten of vierkante meters inhoud zal hebben; dan zal men uit dit getal den vierkants-wortel moeten trekken, en die wortel zal dan te kennen, hoeveelmaal één voet of één meter op de zijde van dit vierkant zal moeten begrepen zijn. (Zie wegens deze Wortel-trekking, de Allereerste Gronden der Cijferkunst LI Les.)

§ 146. VOORBEELD. Stel dat een vierkant 10 vierkante voeten inhoud moet hebben; dan zal de zijde gelijk moeten genomen worden aan $\sqrt{10} = 3,15228$ voeten nagenoeg.

§ 147. Het blijkt, uit de voorgaande, §, hoe de inhoud van eenen regthoek van deszelfs lengte en breedte afhangt;

(Verg. X Bep. Int. Blad. 7.) Het geen hier verklaard is, is de grondslag van het meten van alle regthoekige Figuren.

§ 148. III. STELLING. Fig. 52. *Alle parallelogrammen, die gelijke basen en gelijke hoogte hebben (en dus tusschen dezelfde evenwijdige lijnen kunnen geplaatst worden) hebben eenen gelijken inhoud.*

Opheldering. Het is van het grootste belang, om deze voorname Grondwaarheid der Meetkunst volkomen te verstaan en diep in het geheugen in te prenten. Laten, Fig. 52, $ABCD$ en $BEPG$ twee parallelogrammen zijn, staande op gelijke basis AB en BE ($AB = BE$) en hebbende gelijke hoogte, of, dat hetzelfde beteekent, welke tusschen dezelfde evenwijdige lijnen AE en DF kunnen geplaatst worden; dan zal, hoe zeer de Figuren dezer parallelogrammen van elkander onderscheiden zijn, hoe schuin het parallelogram $BEPG$ ten opzichte van het parallelogram $ABCD$ geplaatst zij, nogtans beide parallelogrammen denzelfden inhoud hebben.

BETOOG. Deze grondwaarheid zal ten klaarste betoogd zijn, indien men het parallelogram $BEPG$ in stukken verdeelen kan, welke, op eene zekere wijze gerangschikt zijnde, de ruimte van het parallelogram $ABCD$ ten naauwkeurigste vervullen.

Dit kan altijd plaats hebben, hoe groot of klein de parallelogrammen zijn, mits slechts hunne basen even lang zijn, en zij tusschen dezelfde evenwijdige lijnen zijn begrepen.

Men trekke AH en IE evenwijdig aan BC en EC ; voorts door de punten H en I de lijn KL .

Men trekke door de punten K en L de lijnen KM en LN evenwijdig aan BC en EC , en door de punten M en N de lijn OP .

Voorts door de punten O en P de lijnen QQ en PR evenwijdig aan BC en EC en door de punten Q en R de lijn ST .

Eindelijk nog, door de punten S en E , de lijnen SU en TV .

Dan zullen de driehoeken BEI , EIL , ILN , LNP , NPR , PRT , TVF , en vierhoek $RTVG$ in rangorde gelijk- en gelijk-

lijkvormig zijn aan de driehoeken ABH , AHK , KHM , KMO , OMQ , QOS , SUD , en aan den vierhoek $SQCU$. Vergelijk § 85 en § 120.

Men zal dan de stukken, waarin het parallelogram $BEPG$ verdeeld is, naar aanwijzing van de getallen 1, 2, 3, enz. in het parallelogram $ABCD$, zoodanig kunnen plaatsen, dat die stukken de vlakte van dit laatste parallelogram, ten blijke van de gelijkheid der inhouden, geheel en ten allernaauwkeurigste vervullen.

Men beproeve deze verdeeling op twee andere parallelogrammen, welke op gelijke basen, en tusschen dezelfde evenwijdige staan, (door, op dezelfde wijze, evenwijdige lijnen te trekken,) en men zal altijd dezelfde uitkomst verkrijgen, alleenlijk zal men in het parallelogram $ABFG$, een grooter aantal stukken verkrijgen, maar mate het, ten opzichte van het parallelogram $ABCD$, een schuiner stand heeft. De onderwijzer late hiervan eenige voorbeelden nit werken.

§ 149. Is men van de waarheid dezer grondstelling overtuigd; dan zal men ook inzien, dat alle (Fig. 53,) parallelogrammen, $ABCD$, $ABEF$, $ABGH$, op dezelfde basis AB , en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen staande, gelijke inhouden zullen hebben. Onder alie deze parallelogrammen is een regthoek $ABEF$; de inhoud van dien regthoek $ABEF$, is (zie § 139) gelijk aan de lengte AB , met de breedte of hoogte BE vermenigvuldigd; maar dit product geeft ook den inhoud van eik der parallelogrammen $ABCD$ en $ABGH$, enz. Indien men nu, uit de punten C en H , de loodlijnen CI en HK op het verlengde van de basis AB vallen, dan is $AF = CI = HK$; het zal dan hetzelfde zijn, of men AB met AF , dan wel of men AB met CI , of met HK vermenigvuldigt; het product zal altijd den inhoud van één dezer parallelogrammen aangeven; men heeft dan, om den inhoud van een parallelogram te vinden, dezen

§ 150. REGEL. Meet de lengte AB van ééne zijner zijden, met eenen voet, duim, meter, enz. Laat, uit eenig punt van de overstaande zijde, eene loodlijn CI of HK , op de basis of het verlengde van dezelfde vallen; meet dan ook met dezelfde maat de lengte van deze loodlijn; vermenigvuldigt de twee getallen,

welke de lengte van de basis en van de hoogte uitdrukken, met elkander, dan zal het product te kennen geven, hoe veelmaal een vierkante voet, een vierkante duim, of vierkante meter, in de vlakke van dit parallelogram begrepen zal zijn.

VOORBEELD. Laat, Fig. 53, van het parallelogram $ABCD$ gegeven zijn $AB = 13$ duim 5 lijnen, en $CI = 17$ duim 7 lijnen? Dan is $AB = 137$ lijnen, en $CI = 211$ lijnen; derhalve $AB \times CI = 137 \times 211 = 28907$ vierkante lijnen $=$ inh. parall. $ABCD$, deelende dit getal van 28907 vierk. lijnen, door 144 vierkante lijnen, welke in den inhoud van eenen vierkanten duim begrepen zijn, dan vindt men voor den inhoud, 200 vierk. duimen, 107 vierk. lijnen.

§ 151. Trekt men (Fig. 53.) de hoekpuntslijnen AC , AE en AG ; dan is drieh. $ABC = \frac{1}{2}$ parall. $ABCD$; drieh. $CDE = \frac{1}{2}$ parall. $CDEF$ en drieh. $ABC = \frac{1}{2}$ parall. $ABGH$. Daar nu de helften van gelijke dingen gelijk zijn, zullen de driehoeken ABC , ABE en ABG gelijken inhoud hebben. Men leert hieruit dan die voortreffelijke eigenschap van den driehoek kennen: dat alle driehoeken, welke op dezelfde basis en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen staan, gelijken inhoud hebben — hetgeen men ook aldus kan uitdrukken — Driehoeken, die gelijke basis en gelijke hoogte hebben, zijn gelijk.

§ 152. REGEL. Men zal dan den inhoud van eenen driehoek vinden, wanneer men één zijner zijden vermenigvuldigt met de helft van de loodlijn, welke uit het hoekpunt van den overstaanden hoek, op die zijde valt, of men vermenigvuldigt de basis met de helft van de hoogte.

VOORBEELD. Laat, Fig. 53, van den driehoek ABC gegeven zijn $AB = 17$, 37 meters, en $CI = 23$, 53 meters? dan is Inh. drieh. $ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CI = \frac{1}{2} \times 17, 37 \times 23, 53 = 204, 35805$ vierk. meters $= 204$ vierk. met. 35 vierk. decim. 80 vierk. centim. en 50 vierk. millimeters. Men late den Leerling eenen driehoek tekenen, en den inhoud van denzelven op drie onderscheidene wijzen bepalen.

§ 153. De inhoud van eenen regthoekigen driehoek ABE , is gelijk aan het halve product der regthoekszijden; dat is, inh. $ABE = \frac{1}{2} AB \times BE$.

§ 154.

§ 154. V BEPALING. Fig. 54 en 55. Een Trapezium is een vierhoekige figuur, waarvan slechts twee tegenoverstaande zijden AB en DC evenwijdig zijn. Het is *schiefhoekig*, (zie Fig. 54.) wanneer alle hoeken scherp of stomp zijn; *regthoekig*, (zie Fig. 55.) Wanneer het twee rechte hoeken heeft. In een regthoekig trapezium, zijn de zijden AB , AD , DC de *regthoekszijden*; AB en DC de *uiterste regthoekszijden* en AD de *middelste regthoekszijde*.

§ 155. REGEL. De inhoud van elk trapezium is gelijk aan de som der overstaande evenwijdige zijden, vermenigvuldigd met de helft van den afstand dezer zijden tot elkander. En van een regthoekig trapezium is de inhoud gelijk aan de som der uiterste regthoekszijden vermenigvuldigd met de helft van de middelste regthoekszijde, dat is:

in Fig. 54... Inh. $ABCD = \frac{1}{2} (AB + DC) \times CE$.

in Fig. 55... Inh. $ABCD = \frac{1}{2} (AB + DC) \times AD$.

BETOOG. De waarheid hiervan is klaar; want trekt men de hoekpuntslijn AC , en laat men, in Fig. 54, AF loodrecht op het verlengde van DC vallen en CE loodrecht op AB ; dan is Inh. drieh. $ABC = \frac{1}{2} AB \times CE$ en Inh. drieh. $ACD = \frac{1}{2} DC \times AF = \frac{1}{2} DC \times CE$; telt men deze inhouden bij elkander; dan is Inh. trap. $ABCD = \frac{1}{2} AB \times CE + \frac{1}{2} DC \times CE = \frac{1}{2} (AB + DC) \times CE$. In Fig. 55 is $AD = AF = CE$ en Inh. trap. $ABCD = \frac{1}{2} (AB + DC) \times AD$.

1 VOORBEELD. Zij, in Fig. 54, voorstellende het profiel of de doorsnede van eenen dijk, de breedte van de basis $AB = 84$ voet de breedte van den kruin $CD = 36$ voet; de hoogte $CE = 20$ voet; men vraagt den inhoud van dit profiel te vinden? Men zal vinden: Inh. $ABCDE = \frac{1}{2} (AB + CD) \times CE = \frac{1}{2} (84 + 36) \times 20 = \frac{1}{2} \times 120 \times 20 = 1200$ vierkante voeten.

2. VOORBEELD. Zij gegeven, Fig. 55, $AB = 17, 37$ decim. $DC = 9, 72$ decim, en $AD = 7, 81$ decim? dan zal men voor den inhoud van dit regthoekig trapezium vinden, 105 vierk. decim. 78 vierk. mill. $64\frac{1}{2}$ vierk. millim.

§ 156. De regels in § 139, 150, 152 en 155 voorgedragen, moeten als de grondslag van het meten van de inhouden van alle

four.

soorten van vlakke Figuren worden aangemerkt; welhaast zullen wij deze regels verder leeren roepassen; keeren wij thans tot de beschouwing der parallelogrammen te rug.

§ 157. II. STELLING. Fig. 56. *De inhoud der parallelogrammen (ABCD en EFGH), die gelijke hoogte hebben, verhouden zich tot elkander in dezelfde reden, als hunne basen. Dat is, men moet bewijzen: dat* $\text{parall. } ABCD : \text{parall. } EFGH = AB : EF$.

BETOOG. Hier hebben wij een tweede voorbeeld, hoe de verhouding van twee gelijkslachtige uitgebreidheden, door de verhouding van twee gelijkslachtige uitgebreidheden van eene andere soort, kunnen worden voorgesteld. Vergelijk § 71. Bladz. 17.

Laat P de gemeene maat zijn van de grondlijnen AB en EF : laat die gemeene maat in AB zevenmaal, en in EF negenmaal begrepen zijn; dan zal men de basis AB in zeven deelen, elk gelijk AI , en de basis EF in negen gelijke deelen, elk gelijk EL , kunnen verdeelen, en dan zal $AI = EL$ zijn.

Trekt men door de deelpunten dezer grondlijnen, lijnen, die evenwijdig loopen aan de opstaande zijden AD en EH ; dan is (zie § 135.) het parall. $ABCD$ in zeven gelijke en gelijkvormige parall. verdeeld, die alle met het geheele parall. $ABCD$ dezelfde hoogte hebben; zijnde $AIKD$ één dezer parallelogrammen; en het parall. $EFGH$ is in negen gelijke en gelijkvormige parallel. verdeeld, die alle met geheele parall. $EFGH$ dezelfde hoogte hebben; $ELMH$ is één dezer parallelogrammen.

Omdat nu de parallelogr. $ABCD$ en $EFGH$, gelijke hoogte hebben, zoo hebben dan ook de parall. $AIKD$ en $ELMH$ gelijke hoogte; maar zij hebben ook gelijke basis AI en EL ; daarom zijn (§ 148.) hunne inhoud en gelijk.

Men kan dan zeggen, dat het parall. $AIKD$ zevenmaal in $ABCD$ en negenmaal in $EFGH$ begrepen is; het parallelogr. $AIKD$ is dan de gemeene maat der parall. $ABCD$ en $EFGH$ in elk van dezelve, zoo veelmaal begrepen, als de gemeene maat

maat P der grondlijnen AB en CD ; in elke van dezelve verhouden is; men mag dan besluiten, dat:

inh. parall. ABCD : inh. parall. EFGH = AB : EF.

§ 158. Men trekke, Fig. 56, de hoekpuntslijnen AC en EG ; dan zal, omdat de driehoeken ABC en EFG de helften der parall. $ABCD$ en $EFGH$ zijn: *inh. drieh. ABC : inh. drieh. EFG = AB : EF* zijn; dat is: *De inhoud, der driehoeken, die gelijke hoogten hebben, staan tot elkander in dezelfde reden als hunne basen.*

§ 159. Wanneer men derhalve (Fig. 57.) uit het hoekpunt (C) van eenen driehoek (ABC) eene lijn (CD), tot aan eenig punt (D) van de overstaande zijde (AB) trekt, dan zal deze lijn (CD) den driehoek (ABC) verdeelen in twee andere driehoeken (ACD en BCD), die tot elkander, in dezelfde reden staan, als de deelen (AD en BD), in welke die lijn (CD) de overstaande zijde (AB) verdeelt. Want deze driehoeken hebben dezelfde hoogte.

§ 160. V STELLING. Fig. 58. *Parallelogrammen (ABCD en EFGH), die gelijke basen (AB en EF); maar gelijke hoogten hebben, verhouden zich tot elkander, in dezelfde reden, als hunne hoogten.*

BETOOG. Men trekke AK en BI loodregt op AB , en FL en EM loodregt op EF ; dan is $\text{parall. } ABCD = \text{regth. } ABIK$, en $\text{parall. } EFGH = \text{regth. } EFLM$, (zie § 48.)

De regthoeken $ABIK$ en $EFLM$, kunnen aangemerkt worden als op de basen AK en EM te staan, en dan hebben zij de gelijke hoogten AB en EF ; deze regthoeken staan dan tot elkander als AK tot EM ; dus ook: $\text{parall. } ABCD : \text{parall. } EFGH = AK : EM$.

§ 161. Trekt men de hoekpuntslijnen AC en EG , dan zal men zien: *dat de driehoeken, die gelijke basen hebben, tot elkander staan, in dezelfde reden, als hunne hoogten.*

§ 162. VI STELLING. Fig. 59. *Zoo wel de parallelogrammen, als de driehoeken, die ongelijke hoogten heb-*

hebben, staan tot elkander, in de zamengestelde reden van hunne basen en hoogten.

BETOOG. Men late uit de punten D en H , de loodlijnen DI en HK , op de basen AB en EF vallen; dan is, (zie § 150.) *parallg.* $ABCD = AB \times DI$, en *parallg.* $EFGH = EF \times HK$: men mag dan stellen:

$$\text{parallg. } ABCD : \text{parallg. } EFGH = AB \times DI : EF \times HK.$$

§ 163. Men herleze hier, hetgeen wij in de XLIII Les van onze *Allereerste Gronden der Cijferk.* § 645 van de zamengestelde evenredigheden gezegd hebben; het zeer eenvoudig begrip der zamengestelde evenredigheden, alleen in getallen opgemerkt, wordt verder in de XLIV Les uitvoerig verklaard en op voorbeelden toegepast. Wie deze Lesfen aandachtiglijk heeft nagegaan, moet de spreekwijs *zamengestelde reden*, waarvan men zich in de Meetkunst zoo menigmaal bedient, in derzelver kracht en ware beteekenis grondig verstaan, zonder dat het noodig is, deze zaak hier ter plaatse breedvoeriger te ontwikkelen.

§ 164. VII STELLING. Fig. 59. *Wanneer twee parallelogrammen, of twee driehoeken, gelijke inhouden hebben, dan staan hunne basen in de omgekeerde reden van hunne hoogten.*

BETOOG. Want *inh.* *parallg.* $ABCD = AB \times DI$ en *inh.* *parallg.* $EFGH = EF \times HK$; derhalve $AB \times DI = EF \times HK$, en daaruit volgt dan, $AB : EF = HK : DI$; dat is, AB en EF staan, in de omgekeerde reden van DI tot HK .

§ 165. De Leerstellingen, in dit Hoofdstuk behandeld, zijn, zoo als op zijnen tijd blijken zal, in het Werkdadige der Meetkunst van het uitgestrekste nut; maar niet minder belangrijk is derzelver gebruik in de ontdekking van andere merkwaardige eigenschappen der meetkundige Figuren. Uit de voorgedragene Stellingen, is onder anderen gebleken, *dater ongelijkvormige figuren, bij voorbeeld, driehoeken, bestaan, welker inhouden volkomen gelijk zijn*, en dit grondbeginsel baant den weg, om veelhoekige figuren te veranderen in andere veelhoekige figuren

ren van denzelfden inhoud, en welke ééne zijde minder hebben. De volgende Stelling zal leeren, dat zulks eenvoudiglijk, door het trekken van evenwijdige lijnen, ten uitvoer kan gebragt worden.

§ 166. VIII STELLING. Fig. 60. *Elke veelhoekige figuur kan veranderd worden in eene andere veelhoekige figuur, die denzelfden inhoud en ééne zijde minder heeft?*

BETOOG. Laat $ABCD$ eene vijfhoekige figuur zijn; indien men dan AB verlengt, de hoekpunten B en D trekt, en CF evenwijdig aan BD ; dan zal de vierhoek $AEDC =$ vijfhoek $ABCDE$ zijn; want indien men bij elken der gelijke driehoeken BFD en BCD , (zie § 151.) de vierhoekige $ABDE$ optelt, dan zal *vierh.* $AFDE =$ *vielh.* $ABCDE$ zijn.

§ 167. Door de herhaling van dezelfde bewerking, (en deze bewerking kan men aan elke zijde van den veelhoek beginnen,) zal men eindelijk tot eenen driehoek komen. *Elke veelhoekige figuur kan dan, met behoud van deszelfs inhoud, in eene driehoekige figuur veranderd worden.*

VI - H O O F D S T U K.

Aanwending van de Theorie der evenwijdige lijnen, op het verdeelen van rechte lijnen, het zij in gelijke, het zij in evenredige, deelen.



§ 168. I STELLING. Fig. 61. *Wanneer men op eene lijn (XY) eenige aan elkander grenzende gelijke deelen (AB, BC, CD) neemt, en door de deelpunten (A, B, C, D) lijnen, (AE, BF, CG, DH) trekt, die onderling evenwijdig aan elkander loopen; dan zal elke andere lijn, (PQ), welke in het vlak dezer evenwijdige lijnen getrokken wordt, door dezelve in gelijke deelen (EF, FG, GH) worden verdeeld.*

BETOOG. Men trekke de lijnen EI, FK en GL, evenwijdig aan XY, dan zijn, wegens de evenwijdigheid der lijnen, (§ 85.) hoek I = hoek K = hoek L, en verder hoek IEF = hoek KFG = hoek LGH, en eindelijk nog hoek IFE = hoek KGF = hoek LHG; terwijl, omdat ABIE, BCKF en CDLG parallelogrammen zijn, $IE = AB = BC = FK = CD = LG$ is; de driehoeken EIF, FKG en GLH, zijn dan (§ 120.) gelijk- en gelijkvormig, en daarom zal $EF = FG = GH$ zijn.

§ 169. II STELLING. Fig. 62. *Wanneer een stelsel van drie evenwijdige lijnen, (AD, BE en CF), door twee andere lijnen (AC en DF) gesneden wordt, dan snijden die evenwijdige lijnen van die twee andere lijnen deelen af, welke tot elkander in eene welgeordende evenredigheid staan. ($AB:BC = DE:EF$).*

BETOOG. Laat de gemeene maat der lijnen AB en BC in

in de eerste dezer lijnen vijfmaal en in de tweede driemaal begrepen zijn; dan zal men AB in vijf, en BC in drie, en dus de geheele lijn AC in acht gelijke deelen kunnen verdeelen; trekt men dan door de deelpunten lijnen, welke evenwijdig loopen aan AD; dan zal (voorgaande Stelling,) DE in vijf, EF in drie, en de geheele lijn DF in acht gelijke deelen verdeeld zijn, en één dezer deelen, zal dan de gemeene maat van de lijnen DE en EF zijn; die gemeene maat zal derhalve in de lijnen DE en EF, zoo veelmaal zijn begrepen, als de gemeene maat der lijnen AB en CD in elke van dezelve begrepen is; derhalve zal $AB:BC = DE:EF$ zijn.

§ 170. Dit betoog geheel onafhankelijk zijnde van de stelling of plaatsing der lijn DF, zoo zal het betoogde altijd waarheid blijven, waar men verkiezen mogt, de lijn DF te plaatsen; dus zal het ook nog waar zijn, wanneer men de lijn DF door het punt A laat gaan; alsdan verandert fig. 62 in fig. 63, en men leert dan hieruit: dat, wanneer eene lijn BE evenwijdig getrokken wordt aan eene van de zijden CF eens driehoeks, die lijn BE de twee andere zijden AC en AF in evenredige deelen zal verdeelen; zijnde $CB:AB = EF:AE$.

§ 171. Omgekeerd zal men, indien twee zijden AC en AF van eenen driehoek in evenredige deelen ($AB:BC = AE:EF$) verdeeld zijn, mogen besluiten, dat de lijn BE, welke deze deelpunten vereenigt, evenwijdig aan de derde zijde CF zal loopen. Want indien BH evenwijdig ware aan CF, dan zou $AB:BC = AH:HF$ moeten zijn; maar eigenlijk is $AB:AC = AE:EF$, derhalve zou $AH:HF = AE:EF$, en daarom $AH + HF:AE + EF = AH:AE$ of $AF:AF = AH:AE$ moeten zijn; hetgeen onmogelijk is.

Uit dit alles kan men gewigtige gevolgen afleiden.

§ 172. 1°. Wanneer men (Fig. 64) op de beenen van eenen hoek EAI, van het hoekpunt A af te rekenen, gelijke deelen neemt; op het been AE gelijke deelen, AB, BC, CD, DE, enz., en op het been AI gelijke deelen, AF, FG, GH, HI, enz., zonder dat de gelijke deelen op het been AE, gelijk behoeven te zijn aan de gelijke deelen, op het andere been AI;

D

dan

50 ALLEREERSTE GRONDER DER

dan zullen de lijnen BF , CG , DH , EI , welke de deelpunten dezer beenen vereenigen, onderling evenwijdig zijn.

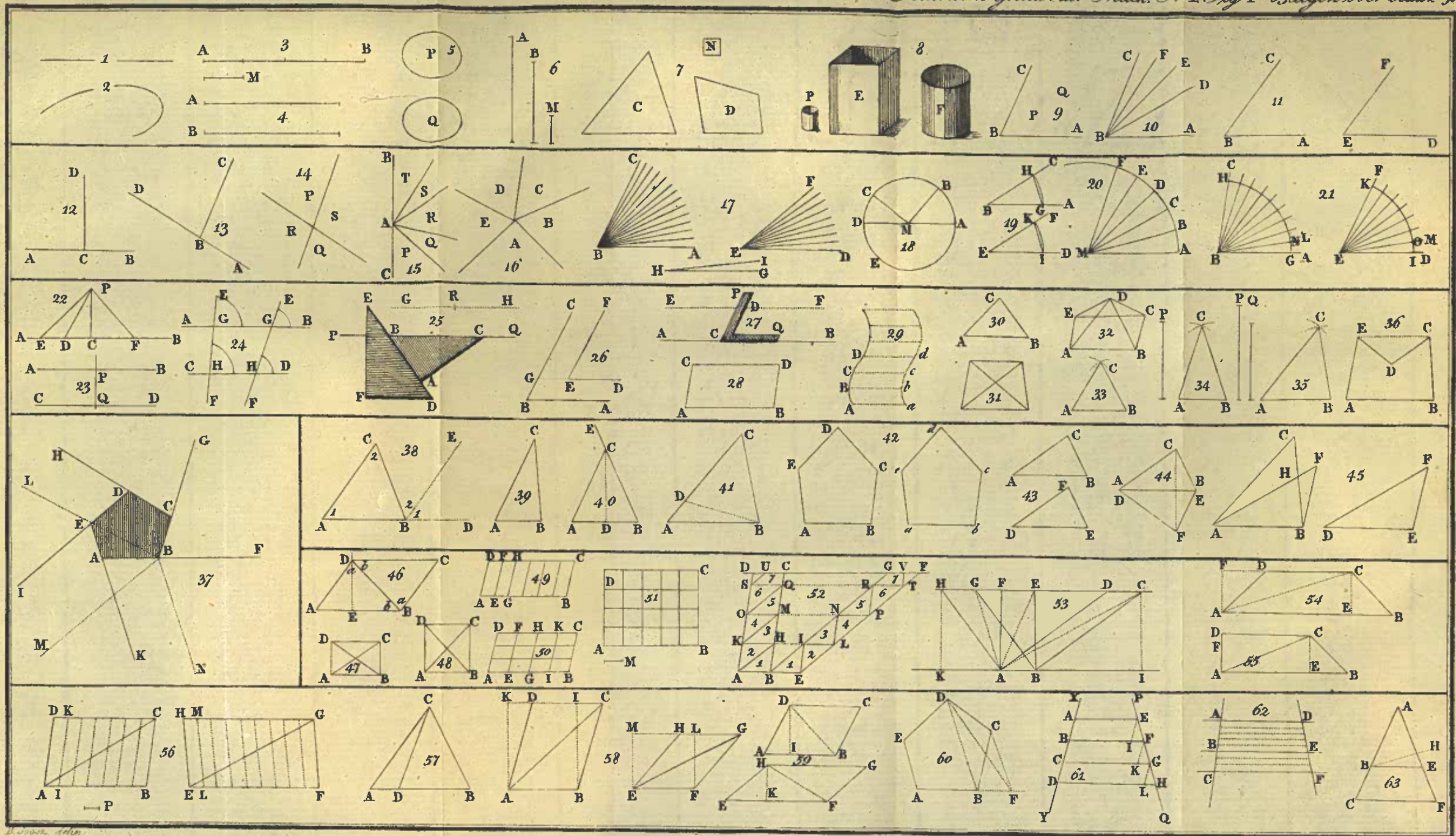
§ 173. 2°. Deze evenwijdige lijnen BF , CG , DH , EI zijn in eene opklimmende rekenkundige reeks; de eerste BF is in de tweede CG tweemaal, in de derde DH driemaal, in de vierde EI viermaal, enz., begrepen. De waarheid hier van zal blijken, wanneer men door de punten F , G , H , enz., lijnen evenwijdig aan AE trekt; want dan worden de evenwijdige lijnen CG , DH , EI , enz. in gelijke deelen verdeeld. Hier op steunt de inrigting en het gebruik van den *Proportie-pasfer*.

§ 174. 3°. En wanneer men door de punten B , C en D , lijnen evenwijdig aan AI trekt, dan zullen deze evenwijdige lijnen, de lijnen CG , DH , EI , enz., insgelijks in gelijke deelen verdeelen, en ditsvolgens de lijnen, welke door de punten F , G , H enz. evenwijdig aan AE getrokken zijn, in het beloop dezer evenwijdige lijnen zelve ontmoeten; het geheele oppervlak van den driehoek AIE zal dan in gelijke- en gelijkvormige driehoeken verdeeld zijn, welke in rijen, tuschen de evenwijdige lijnen BF , CG , DH en EI , verspreid liggen.

Aan het toppunt A , ligt een driehoek ABF , tuschen de lijnen BF en CG liggen drie, tuschen de lijnen CG en DH vijf, tuschen de lijnen DH en EI zeven driehoeken, enz., tuschen elke twee volgende lijnen twee driehoeken meer. Men heeft dan in de n de rij een aantal van $2n - 1$ driehoeken ABF , en het aantal dezer rijen is zoo groot als er deelen in de zijde AE van den driehoek zijn: het aantal der driehoeken, waarin de geheele driehoek AIE verdeeld is, is dan gelijk aan de som van de termen der rekenkundige reeks

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, enz. $2n - 1$
welke uit n termen bestaat

De som der uiterste termen is $1 + 2n - 1 = 2n$, de helft van het getal der termen $= \frac{1}{2}n$, derhalve is (*Aller. Grond. Cijff.* § 872.) de som van alle de termen $2n \times \frac{1}{2}n = n \times n = n^2$. Waaruit dus blijkt: dat, wanneer men in de zijde van eenen driehoek een aantal van bij voorbeeld 6 of 8 of 11 of 25 gelijke deelen stelt, het oppervlak van dien driehoek,



alleenlijk door het trekken van evenwijdige lijnen, in $6 \times 6 = 36$ of $8 \times 8 = 64$, of $11 \times 11 = 121$, of $25 \times 25 = 625$, gelijke- en gelijkvormige driehoeken zal kunnen verdeeld worden. Deze eigenschap des driehoeks, zal ons naderhand te pas komen, om de inhouden der gelijkvormige driehoeken met elkander te vergelijken. Zie § 206 en verv.

§ 175. Deze Leerstellingen, kunnen dienen: 1°. om eene lijn in gelijke of evenredige deelen te verdeelen; 2°. om alle for- ten van Meet- en Bouwkunstige Schalen zamen te stellen.

§ 176. 1°. Om eene gegebene lijn AB , Fig. 65 in een zeker aantal gelijke deelen, bij voorbeeld, in zeven gelijke deelen, te verdeelen? Zoo trekke men, uit het punt A , eene onbepaalde lijn AC , en men neme op dezelve, van A naar C , zeven gelijke deelen $AD = DE = EF = FG = GH = HI = IC$, (één dezer deelen kan men zoo groot nemen, als men ver- kiest,) men trekke de lijn BC , en door de deelpunten I, H, G, F, E, D lijnen, die evenwijdig aan BC loopen; dan zul- len deze evenwijdige lijnen de gegebene lijn AB in zeven ge- lijke deelen verdeelen.

§ 177. 2°. Om eene gegebene lijn AB , Fig. 66, in eene ge- gevene reden, bij voorbeeld, in deelen te verdeelen, welke tot elkander staan, als drie tot vier? Zoo trekke men wederom eene onbepaalde lijn AE , en neme op dezelve AD gelijk drie en DE gelijk vier gelijke en naar welgevallen genomene de- elen; indien men dan de lijn BE trekt en DC evenwijdig aan BE ; dan zal $AC : BC = AD : DE = 3 : 4$ zijn.

Moest de lijn AC , in reden van de lijnen P en Q verdeeld worden; dan zou men $AD = P$ en $DE = Q$ nemen, en op dezelfde wijze te werk gaan.

§ 178. Op alle bouwkunstige teekeningen vindt men Schalen van de voetmaten, met welke de afmetingen van de deelen van een gebouw, door het vergelijken van de teekening met dezelve, bepaald worden. Laat, Fig. 67, AB eene lijn zijn, welke twaalf gelijke deelen bevat; indien dan elk dezer de- elen éenen voet voorstelt, en AD loodregt op AB getrokken, en aan ééne dezer gelijke deelen gelijk genomen wordt, en

men dan verder de lijn BD trekt, en door de deelpunten van de lijn AB , lijnen, die evenwijdig aan AD loopen; dan zal (zie § 173) a_1 een twaalfde van éenen voet, of éenen duim, en voorts b_2 , c_3 , d_4 , enz. de lengte van twee, drie, vier, enz. duimen voorstellen.

§ 179. De constructie en het gebruik van de gewone tien- en twaalfdeelige Schalen, onder den naam van *Pleinschalen* bekend, en, welke in de Werkdadige Meetkunst zoo algemeen gebruikt worden, steunen op hetzelfde beginsel. Wanneer men (in Fig. 68) de lijn AB , als de éenheid der afstanden (de lengtemaat) aanneemt; dan zal men, op de volgende wijze, eene maatstaf kunnen vervaardigen, op welke de veelvouden van die lengtemaat, benevens de tiende en honderdste deelen van dezelve zichtbaar zullen zijn.

Men verlange de lijn AB , en neme op dezelve $BC = CD = DE = EF$, enz. $= AB$, en stelle bij de punten C , D , E , F , enz. de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, enz. om de veelvouden van de lengtemaat aan te wijzen.

Men trekke AH loodregt op AB en PM loodregt op AP , of evenwijdig aan AH , en men neme $AH = AB$ (eigenlijk is die gelijkheid niet volstrekt noodzakelijk; men kan AH naar welgevallen aannemen.)

Door de punten H en M wordt eene regte lijn getrokken, die aan AP evenwijdig zal loopen, en door de punten B , C , D , E , enz. lijnen BG , CI , DK , evenwijdig aan AH ; dan zal $GH = AB$; $GI = BC$; $IK = CD$, enz. zijn.

Men verdeele de lijnen AB en GH , als ook de lijnen AH en PM , elke lijn ten nauwkeurigste in tien gelijke deelen.

De deelpunten der lijnen AH en PM worden door regte lijnen vereenigd, die onderling evenwijdig loopen en gelijke afstanden tot elkander zullen hebben.

Eindelijk vereenige men de deelpunten der lijn AB met die van de lijn GH ; het punt B met het punt L van GH ; het punt 1 in AB met het punt 2 in GH , enz.; dan heeft men de figuur, welke gemeenlijk onder den naam van *Pleinschaal* bekend is, en hoedanige, naar het gebruik dat men er

van

van maken wil, in eene bepaalde grootte vervaardigd wordt.

§ 180. Het gebruik van deze Schaal is als volgt. Laat AB éenen duim verbeelden: de getallen, die onderaan van B tot P staan, beteekenen dan duimen; zoo is $BC = 1$ duim; $BF = 4$ duim, enz. Deze duimen worden van het punt B naar de regterhand geteld. De getallen, tuschen B en A , (van B , naar de linkerhand gaande,) stellen de tiende deelen van éenen duim voor; zijnde $B_1 = 0,1$; $B_2 = 0,2$; $B_3 = 0,3$, enz. De getallen naast de dwarslijn BG , van onder naar boven staande, gevende honderdste deelen van éenen duim te kennen; te weten, in den driehoek BGL , zijn de lijntjes, die evenwijdig aan LG loopen, van onder naar boven, honderdste deelen van duimen; namelijk $a_1 = 0,01$; $b_2 = 0,02$; $c_3 = 0,03$, enz.

Wil men nu op deze Schaal eene lijn bepalen, die 2,73 duimen lang is, zoo lette men op de lijnen de , pq en DK , welke de lijnen der duizendste deelen en tiende deelen van éenen duim, en de lijn van twee duimen zijn; men zette het eene been van eenen pasfer op het punt e , alwaar de lijnen de en pq elkander snijden en opene voorts den pasfer, tot dat deszelfs andere been in d op de lijn DK komt; dan zal de pasfer de lijn $de = d_3 + ce + c_3 = BD + Bp + c_3$ onderspannen, en deze lijn de zal dan de lengte van 2,73 duimen hebben.

Wil men eene regte lijn, bij voorbeeld de zijde van eenige figuur, of den afstand van twee punten, in duimen meten; dan neemt men deze zijde, of den afstand dezer punten, tuschen de beenen van den pasfer, en zoeken eerst tuschen welke geheele duimen de lengte van die lijn begrepen zij? Laat dit tuschen de 3,5 en 3,6 duim vallen; dan zoeken men (het ééne been van den pasfer langs Eh schuivende,) het punt i , alwaar de dwarslijn der vijf tiende deelen eene lijn der honderdste deelen ontmoet; is dit het punt i , dan zal die lijn 3,57 duim lang zijn. Het gebruik van deze soort van Schalen moet men door verdere oefening leeren kennen.

§ 181. De deugd eener *Pleinschaal* bestaat in de volkomene gelijkheid der deelen, de juiste evenwijdigheid, den gelijken afstand

stand, de juistheid, de fijnheid en gelijke dikte der lijnen. Verkoos men eene schaal van duimen in 12 lijnen en 144 punten ingedeeld; dan zou men AB en AH , elk in twaalf gelijke deelen verdeelen; en voorts, op dezelfde wijze, als boven is aangewezen, te werk gaan. Wanneer de lijn AB eene Amsterdamsche roede voorstelde, dan zou men op zulk eene schaal de evenredige waarde van Amsterdamsche voeten en duimen voorstellen, door AB in dertien en AH in elf deelen te verdeelen. In het vervolg zullen wij op het verder gebruik van deze schalen moeten te rug komen.

VII. HOOFDSTUK.

Over de Gelijkvormigheid der Figuren.

§ 182. **E**lk, die voor het eerst het wel gelijkend afbeeldsel van een' zijner bekenden ziet, herkent terstond den afgebeelden persoon en zegt, in verwondering opgetogen, dit is wel getroffen! Het afbeeldsel moge levensgroot of in miniatuur zijn uitgevoerd, het wel gelijken, het volmaakt getroffen zijn, moet alleen als de oorzaak van deze verrassende uitwerking beschouwd worden. Dit *wel gelijken*, dit *wel getroffen zijn*, is bij de Meestkunstenaars onder den naam van *Gelijkvormigheid* (gelijkheid van gedaante, gelijkheid van vorm, gelijkheid van figuur) bekend.

§ 183. Om zich het wezen der Gelijkvormigheid duidelijk voor te stellen, moet men het afgebeelde of oorspronkelijke met het afbeeldsel vergelijken; in het oorspronkelijke, alle de voornaamste punten in den omtrek, als ook de verschillende deelen van het geheel, in hunne ligging en onderlinge afstanden van elkander, opmerken, en deze alle (dit spreekt van zelf,) moeten ook in de afbeelding voorkomen; elk punt in het oorspronkelijke, heeft dan zijn overeenkomstig punt in de afbeelding. Nu zal het afbeeldsel volmaakt aan het oorspronkelijke gelijken, aan het oorspronkelijke gelijkvormig zijn, wanneer de afstand van elke twee punten, in het oorspronkelijke, tot den afstand der twee overeenkomstige punten in het afbeeldsel, overal, waar men twee zulke punten in het oorspronkelijke zou verkiezen te nemen, in dezelfde bestendige reden staat, als een getal tot een getal, of als eene lijn tot eene lijn.

§ 184. De Gelijkvormigheid is derhalve met het begrip van evenredigheid onafscheidelijk verknocht. Laten, om de zoo even

gegevene verklaring op te helderen, in *Fig. 69*, *A, B, C, D, E, F, G, H, I* eenige punten zijn, in de vlakke verspreid liggende, en *a, b, c, d, e, f, g, h, i* een gelijk aantal punten, ten opzichte van elkander oogenfchijnlijk op dezelfde wijze als de eerste liggende; dan zal de onderlinge ligging van het tweede stelsel van punten *a, b, c*, enz. gelijkvormig zijn met de onderlinge ligging van het eerste stelsel *A, B, C*, enz. wanneer $AB:ab = 5:2$ staande, ook tevens $CD:cd = 5:2$; $HI:hi = 5:2$; $FG:fg = 5:2$; $AC:ac = 5:2$, enz. is en, wanneer dus, in het algemeen, de afstand van twee punten in de eerste figuur, tot den afstand, der overeenkomstige punten in de tweede, door de uitgestrektheid van beide figuren, in dezelfde reden staan, als vijf tot twee. Wanneer de afstanden tot elkander in eene andere verhouding stonden, als, bij voorbeeld, van 5 tot 3, of van 8 tot 1, enz. dan nog zou de gelijkvormigheid in de onderlinge evenredige afstanden der punten blijven bestaan, en indien de afstanden gelijk waren, dan zouden beide figuren bovendien volkomen gelijk zijn: men zou als dan zeggen: zij zijn gelijk- en gelijkvormig.

§ 185. Hetgeen wij van de gelijkvormige ligging van twee stelsels van punten gezegd hebben, is ook op de regtlijnige figuren toepasfelijk. De veelhoekige figuren *ABCDE*, en *abcde*, *Fig. 70*, zullen gelijkvormig zijn, wanneer de afstanden van de hoekpunten van de eerste figuur, tot de afstanden van de overeenkomstige hoekpunten van de tweede, in dezelfde bestendige reden staan; dat is, wanneer $AB:ab = AC:ac = AD:ad = AE:ae = BC:bc = BD:bd = BE:be = CD:cd = CE:ce = DE:de$.

§ 186. Het blijkt dan: dat tot de Gelijkvormigheid van twee regtlijnige figuren gevorderd wordt, dat beide figuren het zelfde aantal hoekpunten, en bijgevolg hetzelfde aantal zijden en hoeken hebben, en tot de gelijkvormigheid dezer figuren, worden als dan even zoo vele gelijke redens vereischt, als het mogelijk is, het aantal hoekpunten van ééne dezer figuren, twee aan twee, met elkander te vereenigen. Wanneer het aantal zijden $= n$ geheid wordt; dan is het getal dezer mogelij-

lijke zamenvoegingen gelijk aan $\frac{1}{2}n(n-1)$. Stelt men in deze formule $n = 3$; dan is $\frac{1}{2}n(n-1) = 3$. Stelt men $n = 4$; dan wordt $\frac{1}{2}n(n-1) = 6$, enz.; waar uit blijkt: dat twee driehoeken gelijkvormig zullen zijn, wanneer derzelver zijden evenredig zijn; maar heeft eene figuur meer dan drie zijden, dan is de evenredigheid dezer zijden tot het bestaan der gelijkvormigheid wel noodzakelijk; maar niet genoegzaam, om tot dezelve te mogen besluiten.

§ 187. De gelijkvormigheid der kromlijnige figuren, en die der ligchamelijke uitgebreidheden bestaat, onder dezelfde voorwaarden en op dezelfde wijze. Wij kunnen derhalve de volgende bepalingen als grondslagen onzer verdere beschouwingen aannemen.

§ 188. I BEPALING. Wanneer men twee drie- of veelhoekige figuren van het zelfde aantal zijden met elkander vergelijkt, dan noemt men overeenkomstige hoekpunten, die hoekpunten, welke in beide figuren in dezelfde rangorde, op elkander volgen; en de zijden, welke om die hoekpunten gelegen zijn, dragen den naam van even eens geplaatste of gelijkstandige zijden. Duidelijkshalve zullen wij dezelve, in beide figuren, door dezelfde letters uitdrukken. Zie *Fig. 70*. Alzoo zijn *A* en *a*, *D* en *d* overeenkomstige hoekpunten *AB* en *ab*; *DE* en *de*, enz. even eens geplaatste zijden.

§ 189. II BEPALING. Nemende het woord figuur in de uitgestrekste beteekenis, zoo wel voor uitgebreidheden, welke binnen zekere grenzen besloten zijn, als voor punten en figuren, die in de ruimte verspreid liggen, en onderling eene zekere betrekkelijke ligging hebben; dan zijn twee figuren gelijkvormig, wanneer de afstand van elke twee punten, in de eene figuur, tot den afstand van de overeenkomstige twee pun-

ten, in de andere, tot elkander, in dezelfde bestendige reden staan.

Beginnen wij met de beschouwing van de Gelijkvormigheid der eenvoudigste regtlijnige figuren, de driehoeken namelijk.

§ 190. I STELLING. Fig. 71. Onderling gelijkhoekige driehoeken, (ABC en abc) zijn gelijkvormig.

OPHELDING. Dat is, indien hoek $A =$ hoek a , en hoek $B =$ hoek b , en bijgevolg hoek $C =$ hoek c is; dan zal moeten bewezen worden, dat $AB:ab = AC:ac = BC:bc$ zal zijn.

BETOOG. Laten de twee even eens geplaatste zijden, AB en ab , eene gemeene maat M hebben, welke in AB zeven, en in ab viermaal begrepen is; dan zal men AB in zeven gelijke deelen, AD , DE , enz. en ab in vier gelijke deelen ad , de , enz. kunnen verdeelen, en AD zal gelijk ad zijn.

Trek door de deelpunten D , E en d , e lijnen, die evenwijdig loopen aan de zijden BC en bc ; dan zullen, (zie § 168,) de zijden AC en ac , de eerste in zeven, en de tweede in vier gelijke deelen verdeeld zijn.

Nu zeg ik: dat $AF = af$ zal zijn. Dit is gemakkelijk te bewijzen; want, wegens de evenwijdige lijnen, is hoek $ADF =$ hoek $ABC =$ hoek $abc =$ hoek adf ; ook is hoek $A =$ hoek a , en $AD = ad$; derhalve zal, (zie § 120.) $AF = af$, en $DF = df$ zijn.

De zijden AC en ac hebben, dus eene gemeene maat, in elke van dezevee zoo veelmaal begrepen zijnde, als de gemeene maat der zijden AB en ab , in elke van deze begrepen is; derhalve zal $AB:ab = AC:ac$ moeten zijn.

Trekt men door dezelfde deelpunten, lijnen DH en dh , evenwijdig aan AC en ac ; dan zullen de zijden BC en bc , de eerste in zeven gelijke deelen CH , en de tweede in vier gelijke deelen ch verdeeld zijn; nu is (zie § 128.) $CH = DF = df = ch$, derhalve zal ook $AB:ab = BC:bc$ moeten zijn.

§ 191.

§ 191. Wanneer men, Fig. 71, uit de hoekpunten der gelijke hoeken C en c , A en a , loodlijnen op de overstaande zijden AB en ab , BC en bc laat vallen; dan zijn de driehoeken APC en apc , als ook ABQ en abq gelijkvormig; derhalve $AC:ac = CP:cp = AB:ab$. In gelijkvormige driehoeken staan dan de even eens geplaatste zijden tot elkander, in dezelfde reden, als de loodlijnen, welke uit de hoekpunten der overstaande hoeken op deze zijden vallen. Het is ook ligtelijk te zien, dat $CP:cp = AQ:aq$ is, of dat de loodlijnen, welke uit de gelijke hoeken van gelijkvormige driehoeken op de overstaande zijden vallen, aan elkander evenredig zijn, en in dezelfde reden staan, als de even eens geplaatste zijden.

§ 192. Omdat de onderlinge gelijkhoekigheid van twee driehoeken, tot derzelver gelijkvormigheid voldoende is, zal men, door aan de zijden van eenen gegebenen driehoek, evenwijdige lijnen te trekken, zoo vele aan dien gegebenen driehoek gelijkvormige driehoeken kunnen vinden, als men goedvindt.

§ 193. II STELLING. Fig. 71. Gelijkvormige driehoeken zijn onderling gelijkhoekig.

OPHELDING. Dat is, indien $AB:ab = AC:ac = BC:bc$ is; dan zal hoek $A =$ hoek a ; hoek $B =$ hoek b , en hoek $C =$ hoek c zijn.

BETOOG. Laten de zijden AB en ab eene gemeene maat M hebben, in AB (bij voorbeeld,) zevenmaal en in ab begrepen zijnde viermaal: verdeel dan AB in zeven en ab in vier gelijke deelen; dan zal $AD = ad$ zijn.

Trek door de deelpunten lijnen, evenwijdig aan AC en ac ; dan zal AC in zeven, en ac in vier gelijke deelen verdeeld zijn, en, wegens de evenredigheid $AB:ab = AC:ac$, zal $\frac{1}{2} AB: \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} AC: \frac{1}{2} ac$; of $AD:ad = AF:af$ moeten zijn; omdat nu $AD = ad$ is, zoo zal ook $AF = af$ zijn.

Om dezelfde reden zal $CH = DF = ch = df$ zijn. Volgens § 122. is dan hoek $A =$ hoek a ; hoek $B =$ hoek b ; $ADF =$ hoek $adf =$ hoek b en hoek $C =$ hoek c .

§ 194.

§ 194. Laat eene zekere maat M in de zijden AB , BC en AC , van den driehoek ABC (Fig. 71.) begrepen zijn, p , q en r -maal, (als wanneer $AB = p \times M$; $BC = q \times M$, en $AC = r \times M$ zal zijn; indien men dan eene kleinere of grootere maat m aanneemt, en eenen driehoek abc zamenstelt, wiens zijden $ab = p \times m$, $bc = q \times m$, en $ac = r \times m$ zijn; dan zal die driehoek abc gelijkvormig zijn aan den driehoek ABC ; want men heeft, door zulk eene constructie, de drie volgende evenredigheden:

$$p \times M : p \times m = q \times M : q \times m$$

$$p \times M : p \times m = r \times M : r \times m$$

$$q \times M : q \times m = r \times M : r \times m$$

dat is:

$$AB : ab = BC : bc$$

$$AB : ab = AC : ac$$

$$BC : bc = AC : ac$$

en de driehoeken ABC en abc zijn derhalve gelijkvormig en gevolgelyk onderling gelijkhoekig.

Wanneer men derhalve weet, dat de zijden van eenen driehoek ABC gelijk zijn aan een zeker aantal roeden, $AB = 123$, $BC = 107$ en $AC = 96$ roeden; dan zal men, door middel van eene Schaal, hoedanige wij in § 179. hebben leeren zamenstellen, eenen driehoek abc kunnen teekenen, welke gelijkvormig is aan dien driehoek ABC . Men neme, tot dat einde, op deze Schaal, drie lijnen P , Q en R ; $P = 123$; $Q = 107$ en $R = 96$ deelen van dezelve, en men make, zie § 96. eenen driehoek abc , welker zijden ab , bc en ac aan deze lijnen P , Q en R gelijk zijn; dan zal de driehoek abc aan den driehoek ABC gelijkvormig zijn.

§ 195. III. STELLING. Fig. 71. Wanneer een hoek (A) van eenen driehoek (ABC) gelijk is aan eenen hoek (a) van eenen anderen driehoek (abc) en de zijden, om die gelijke hoeken staande, evenredig zijn ($AB : ab = AC : ac$); dan zullen deze driehoeken gelijkvormig zijn.

B.

BETOOG. Laat $AB : ab = 7 : 4$ zijn; verdeel dan AB in zeven, en ab in vier gelijke deelen; dan zal $AD = ad$ zijn: trekt men nu door die deelpunten lijnen evenwijdig aan BC en bc ; dan zal AC in zeven en ac in vier gelijken deelen verdeeld zijn; omdat na $AB : ab = AC : ac$ is, zoo zal ook $\frac{1}{7} AB : \frac{1}{7} ab = \frac{1}{4} AC : \frac{1}{4} ac$; of $AD : ad = AF : af$ zijn; maar nu is $AD = ad$; derhalve zal ook $AF = af$ zijn.

Wij hebben dan, in de driehoeken ADF en adf , de volgende gelijke dingen; hoek $A =$ hoek a , $AD = ad$ en $AF = af$; derhalve (zie § 121) hoek $ADF = adf$, en hoek $AFD =$ hoek afd ; derhalve (§ 121) hoek $ADF =$ hoek $B =$ hoek $adf =$ hoek b en hoek $AFD =$ hoek $C =$ hoek $afd =$ hoek c ; de driehoeken ABC en abc zijn derhalve onderling gelijkhoekig en bijgevolg gelijkvormig.

§ 196. I. AANMERKING. De Leer der gelijkvormige driehoeken is zoo wel in de Beschouwende als Werkdadige Meetkunst van het grootste gewigt. De eerste en derde Stellingen leeren, onder welke omstandigheden, tot de Gelijkvormigheid van twee driehoeken mag besloten worden. Men kan hier bijvoegen: dat, indien men, uit het onderlinge gelijkhoekig zijn van driehoeken, tot derzelver onderlinge gelijkvormigheid zal besluiten, het genoeg is, dat twee hoeken van den eenen driehoek aan twee hoeken van den anderen gelijk zijn; omdat, in dit geval, de overige hoeken, wegens de standvastige som van de hoeken eens driehoeks, noodzakelyk gelijk moeten zijn.

§ 197. II. AANMERKING. Zijn twee gelijkvormige driehoeken, in eene Figuur, ten opzichte van elkander niet altijd zoo symmetriek geplaatst, als de 71 Figuur dezelve voorstelt, kan echter het opstellen der evenredigheden, uit die gelijkvormigheid volgende, nimmer eenige zwaarigheid maken; men zorge slechts, dat de voorgaande en volgende termen der evenredigheid, welke men wil opstellen, zulke zijden zijn, welke in de wederzijdsche driehoeken over de gelijke hoeken staan.

§ 198. III. AANMERKING. Het blijkt uit de twee eerste Stellingen: dat in de driehoeken de onderlinge gelijkhoekigheid, of de evenredigheid der zijden (elke van deze op zich

zelva

zelve genomen,) genoeg is, om uit éne van deze twee tot de gelijkvormigheid der driehoeken te besluiten; maar, wanneer de figuren vier of meer zijden hebben, dan moeten met éne dezer twee omstandigheden meer dingen samenloopen, om tot de gelijkvormigheid dezer figuren te mogen besluiten:

§ 199. IV. STELLING. Fig. 70. Wanneer twee veelhoekige Figuren ($ABCDE$ en $abcde$) onderling gelijkhoekig ($A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, en $E = e$) en de zijden, om de gelijke hoeken staande, evenredig zijn, ($AB:ab = BC:bc = CD:cd = DE:de = AE:ae$) dan zullen die Figuren gelijkvormig zijn.

BETOOG. Men trekke de hoekpuntslijnen AC , AD , BD , BE , CE ; en ac , ad , bd , be , ce , omdat dan de hoek $B =$ hoek b , en $AB:ab = BC:bc$ is, zijn (§ 195) de drie hoeken ABC en abc gelijkvormig en daarom, $AB:ab = BC:bc = AC:ac$.

Op dezelfde wijze blijkt het: dat $BE:be = AB:ab$ is enz., de afstanden der hoekpunten in de eerste Figuur staan, dan tot de afstanden van de overeenkomstige hoekpunten in de tweede, in dezelfde reden; de Figuren zijn derhalve gelijkvormig.

§ 200. Men kan ook ligtelijk het omgekeerde betoogen: te weten, dat de hoeken van gelijkvormige regtlijnige Figuren onderling gelijk, en de zijden, om die gelijke hoeken staande, evenredig zijn.

§ 201. V. STELLING. Fig. 72. Wanneer men, binnen den omtrek van eene kromlijnige Figuur, een punt (P) aanneemt, en uit dit punt tot aan alle de punten (A , B , C , D , enz.) van den omtrek dezer Figuur, rechte lijnen (PA , PB , PC , PD , enz.) trekt, en van het vaste punt (P) af te rekenen, op deze lijnen deelen (Pa , Pb , Pc , Pd enz.) neemt; welke tot de geheele lijnen (PA , PB , PC , PD enz.) in dezelfde

bestendige reden staan; dan zullen deze punten, (a , b , c , d , enz.) gelegen zijn in den omtrek eener andere figuur, welke aan deze eerste gelijkvormig zal zijn.

BETOOG. Want trekt men bij voorbeeld de lijnen AD en ad ; dan zullen de driehoeken PAD en Pad (omdat $PA:Pa = PD:Pd$ is,) gelijkvormig zijn; derhalve $AD:ad = PA:Pa$.

Hetzelfde zal voor elke twee andere punten plaats hebben: en de figuren zullen derhalve gelijkvormig zijn.

§ 202. Indien men dan eene lijn AP om een punt P kan laten draaijen, en twee veranderlijke punten A en a in die lijn aanneemt, waarvan het eerste in den omtrek der Figuur blijft, en het tweede zich zoodanig beweegt, dat overal Pa tot PA in de zelfde reden is; dan zal het punt a eene figuur beschrijven, welke gelijkvormig zal zijn aan de figuur $ABCD$.

§ 203. Men kan gemakkelijk eenen toestel vervaardigen, door welchen zulk beweegbare punten worden daargesteld. Laten Fig. 73, de zijden BC en CD , van een parallelogram $ADCB$, naar welgevallen verlengd, en op deze verlengde zijden de punten A en P met het punt a in dezelfde rechte lijn worden genomen; indien men dan de zijden van dit parallelogram, als linialen aanmerkt, die om de hoekpunten omdraaijen, en dien geheel toestel om het punt P in beweging brengt, dan zullen de punten A , a en P bestendig in dezelfde rechte lijn blijven, en AP zal tot aP in dezelfde bestendige reden blijven als AC tot BC . Indien men dan het punt A langs den omtrek AQR van eene figuur beweegt; dan zal het punt a den omtrek van eene figuur aqr beschrijven, welke aan AQR gelijkvormig zal zijn. Deze toestel is de gewone Pantographe, of Verkleinaap.

§ 204. Wanneer men eene regtlijnige figuur, gelijkvormig zijnde aan eene gegevene veelhoekige figuur, wil samenstellen; dan trekke men (Fig. 74.) uit één der hoekpunten A , de hoekpuntslijnen AC , AD , AE , tot de overige hoeken, neme voorts in de zijde AB , een punt b , en trekke bc , cd , de , ef

even-

evenwijdig aan BC , CD , DE en EF ; dan zal de figuur $abcdef$ gelijkvormig zijn aan de gegebene figuur $ABCDEF$.

§ 205. De inhouden van twee gelijkvormige figuren hebben altijd eene zekere verhouding tot elkander; doch deze verhouding is niet dezelfde als die van twee van derzelver even eens geplaatste zijden, zoo als onbedrevenen in den eersten opslag zouden denken. De volgende Leerstellingen zullen de betrekking tusschen de verhouding der inhouden met die der gelijkstandige zijden leeren kennen.

§ 206. VI STELLING. Fig. 75. De inhouden van twee gelijkvormige driehoeken staan tot elkander, in dezelfde reden, als de inhouden der vierkanten, welke op twee van derzelver even eens geplaatste zijden beschreven zijn.

OPHELDERING. Wanneer de driehoeken ABC en abc gelijkvormig, AB en ab , twee even eens geplaatste zijden zijn, en op deze zijden de vierkanten $ABED$ en $abed$ beschreven worden; dan zal $inh. ABC: inh. abc = inh. ABED: inh. abed$ zijn.

BETOOG. Laat de gemeene maat der gelijkstandige zijden AB en ab , in AB vijfmaal, en in ab driemaal begrepen zijn; dan zal AB vijf deelen, elk gelijk AF , en ab drie deelen, elk gelijk af inhouden, en AF zal gelijk af zijn.

Trek door de deelpunten dezer zijden, lijnen, die evenwijdig loopen aan de andere zijden der driehoeken; dan wordt het oppervlak van den driehoek ABC , in vijfmaal vijf of vijf-en-twintig gelijke en gelijkvormige driehoeken AFG verdeeld, en het oppervlak van den driehoek abc , in drie maal drie, of negen gelijke en gelijkvormige driehoeken, elk gelijk aan den driehoek afg . Zie § 174.

Om dat de driehoeken ABC en abc gelijkvormig zijn, zoo is $AG = ag$ en $FG = fg$ (zie § 190.); derhalve driehoek AGF gelijk- en gelijkvormig aan driehoek afg ; de driehoek

AFG is dus de gemeene maat van de inhouden der driehoeken ABC en abc , in den eersten 25 en in den tweeden 9 maal verhouden; maar $AF = af$ in AB vijfmaal en in ab driemaal begrepen zijnde, zoo is het vierkant $AFIH =$ het vierkant $afih$ in $ABED$ 25 maal en in $abed$ begrepen 9 maal: de gemeene maat der driehoeken ABC en abc , is dan in elken van dezelve zoo veel maal begrepen, als de gemeene maat der vierkanten $ABED$ en $abed$, in elk van dezelve begrepen is; dit nu zoo zijnde, is driehoek ABC tot driehoek abc , in dezelfde reden, als het vierkant op AB (of $ABDE$) tot het vierkant op ab (of $abed$.)

§ 207. Om dezelfde reden, zullen de inhouden der gelijkvormige driehoeken ABC en abc zich tot elkander verhouden, als de inhouden der vierkanten op BC en bc , of op AC en ac , beschreven. Het zal (zie Fig. 71.) ook niet moeilijk vallen, om te bewijzen: dat de inhouden der gelijkvormige driehoeken ABC en abc tot elkander in dezelfde reden staan, als de vierkanten, welke op de eveneens geplaatste loodlijnen CP en cp , of AQ en aq , beschreven zijn.

§ 208. BERIGT. Omdat de inhoud van eenen rechthoek $ABCD$ gevonden wordt door de lengte AB met de breedte AC te vermenigvuldigen, zoo zullen wij in het vervolg den inhoud van zulk eenen rechthoek door $AB \times AC$ voorstellen: en, omdat de inhoud van een vierkant $ABCD$ gevonden wordt door ééne van deszelfs zijden AB tot de tweede magt te verheffen, zoo zal in het vervolg AB^2 beteekenen den inhoud van het vierkant op de lijn AB beschreven. Men zal dan het betoogde aldus voorstellen. Zie Fig. 71.

$$\text{drieh. } ABC: \text{drieh. } abc = AB^2: ab^2$$

$$\text{drieh. } ABC: \text{drieh. } abc = BC^2: bc^2$$

$$\text{drieh. } ABC: \text{drieh. } abc = AC^2: ac^2$$

$$\text{drieh. } ABC: \text{drieh. } abc = CP^2: cp^2$$

$$\text{drieh. } ABC: \text{drieh. } abc = AQ^2: aq^2$$

$$\text{drieh. } ABC: \text{drieh. } abc = AP^2: ap^2$$

$$\text{drieh. } ABC: \text{drieh. } abc = BP^2: bp^2$$

§ 209. VII STELLING. Fig. 76. Wanneer men,

E

uit

uit de even eens geplaatste hoekpunten (C en c) van twee gelijkvormige veelhoeken ($ABCDE$ en $abcde$), tot aan alle derzelve hoekpunten (A , B en a , b), hoekpuntslijnen (AD , BD , en ad , bd) trekt; dan zullen deze gelijkvormige veelhoeken, ($ABCDE$ en $abcde$) elk in hetzelfde aantal eveneens geplaatste driehoeken (ADE , ABD , BCD en ade , abd , bcd) verdeeld zijn, (zijn de dit aantal der even eens geplaatste driehoeken, in elke figuur, altijd twee minder dan het getal van derzelve hoeken of zijden,) en de inhouden der even eens geplaatste driehoeken, zullen, zoo wel tot elkander, als tot de inhouden der geheele veelhoeken, dezelfde beschiedige redenen hebben. Dat is:

drieh. ADE : drieh. ade = drieh. ABD : drieh. abd
 drieh. ADE : drieh. ade = drieh. BCD : drieh. bcd
 drieh. ABD : drieh. abd = drieh. BCD : drieh. bcd
 drieh. ADE : drieh. ade = $ABCDE$: $abcde$

BETOOG. Laten twee even eens geplaatste zijden, AB en ab , tot elkander in eene gegebene reden staan, als zeven tot vier; dan zal $\frac{1}{4} AB = \frac{1}{4} ab$ zijn; indien men alle de zijden en hoekpuntslijnen, van den veelhoek $ABCDE$, in zeven, en alle de zijden en hoekpuntslijnen van den veelhoek $abcde$, in vier gelijke deelen verdeelt; dan zal $DI = \frac{1}{4} DE$; $IH = \frac{1}{4} AE$; $DH = \frac{1}{4} AD$; $HG = \frac{1}{4} AB$; $DG = \frac{1}{4} DB$; $FG = \frac{1}{4} BC$ en $DF = \frac{1}{4} CD$ zijn. Om dezelfde reden, zal $di = \frac{1}{4} de$; $hi = \frac{1}{4} ae$; $dh = \frac{1}{4} ad$; $hg = \frac{1}{4} ab$; $dg = \frac{1}{4} bd$; $gf = \frac{1}{4} bc$ en $df = \frac{1}{4} cd$ zijn; wegens de gelijkvormigheid der veelhoeken zal dan $DI = di$, $IH = ih$, $HG = hg$, $DG = dg$, $FG = fg$ en $DF = df$ zijn. De driehoeken DIH , DHG en DFG zijn, dan (§ 122.) gelijk- en gelijkvormig aan de driehoeken dih , dhg en dgh . Nu zijn (§ 174.) de driehoeken DIH , DHG en DFG , elk zeven-maal-zeven, dat is, negen-en-veertigmaal in de driehoeken AED , ABD en BCD begrepen, en die zelfde driehoeken dih , dhg en dgh

DFG , (of wel de driehoeken dih , dhg en dgh , die aan dezelfde gelijk zijn,) vier-maal-vier, dat is, zestienmaal, in de driehoeken aed , abd en bcd ; derhalve zal drieh. ADE : drieh. ade = drieh. ABD : drieh. abd = drieh. BCD : drieh. BCD zijn; en eindelijk zal, volgens de leer der aaneengeschakelde evenredigheden, (zie *Allereerste Grond. der Cijferk.* § 260.) drieh. AED + drieh. ABD + drieh. BCD : drieh. aed + drieh. abd + drieh. bcd = drieh. AED : drieh. ade = drieh. ABD : drieh. abd = drieh. BCD : drieh. bcd moeten zijn.

§ 210. VIII STELLING. Fig. 76. De inhouden der gelijkvormige veelhoeken staan tot elkander, in dezelfde redenen, als de inhouden der vierkanten, welke op derzelve even eens geplaatste zijden, of even eens geplaatste hoekpuntslijnen, beschreven zijn. Dat is, $ABCDE$: $abcde$ = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2 , enz.

BETOOG. Volgens § 209. is veelh. $ABCDE$: veelh. $abcde$ = drieh. ABD : drieh. abd ; maar volgens § 206. is drieh. ABD : drieh. abd = AB^2 : ab^2 ; derhalve is veelh. $ABCDE$: veelh. $abcde$ = AB^2 : ab^2 , enz.

§ 211. IX. STELLING. Fig. 72. In het algemeen, staan de inhouden van alle gelijkvormige figuren tot elkander, in dezelfde redenen, als de inhouden der vierkanten, beschreven op de afstanden van twee van derzelve overeenkomstige punten.

OPHELDERING. De inhoud van de kromlijniige figuur $ABCDEFGH$ zal tot den inhoud van de kromlijniige figuur $abcdefgh$ staan, in dezelfde reden, als bij voorbeeld AD^2 tot ad^2 ; als BE^2 : be^2 , als AP^2 : ap^2 , enz.

BETOOG. Wanneer men zich, in den omtrek van beide figuren, eene menigte van overeenkomstige punten A en a , B en b , C en c , D en d , E en e , F en f , G en g , H en h voorstelt, en deze punten, door de lijnen AB en ab , BC en bc , CD en cd , DE en de , enz. vereenigt; dan verkrijgt men

E 2

twee

twee gelijkvormige veelhoeken, welker inhouden tot elkander staan, als de vierkanten, beschreven op de afstanden van de overeenkomstige punten.

Neeft men, tusfchen de punten *A* en *B*, in de eene, en, tusfchen de punten *a* en *b*, in de andere figuur, nog meer overeenkomstige punten; dan zal men gelijkvormige veelhoeken van een grooter aantal zijden vinden, welker inhouden tot elkander in dezelfde reden zullen blijven.

Die gelijkvormige veelhoeken, zullen nu minder van de kromlijngige figuren, in welke zij beschreven zijn, verschillen, naarmate men het aantal der zijden onophoudelijk vermeerdert; ten laatste zullen die regelmatige veelhoeken aan de kromlijngige figuren, waar in zij beschreven zijn, gelijk worden: de inhouden van deze laatste, zullen dan tot elkander in dezelfde reden blijven, als de vierkanten op de afstanden der even eens geplaatste punten.

§ 212. VRAAGSTUK. Fig. 74. Gegeven zijnde, eene drie of veelhoekige figuur *ABCDEF*, benevens de lengte van ééne zijner zijden *AB*, uitgedrukt in een aantal van *a* éenheden van zekere lengtemaat, bij voorbeeld, voeten, duimen, ellen of meters; te vinden, hoe lang de overeenkomstige zijde *Ab* van eene aan deze gelijkvormig zijnde figuur *Abcdef*, in denzelfde éenheden van voeten, duimen, ellen of meters zal moeten genomen worden, op dat die gevraagde veelhoekige figuur *Abcdef*, tot de gegebene zich verhoude als het getal *p* tot het getal *q*?

OPLOSSING. Volgens de voorwaarde der vraag moet

$$ABCDE : Abcdef = q : p$$

zijn; maar volgens § 210 is

$$ABCDE : Abcdef = AB^2 : Ab^2$$

Stel kortheidshalve de gevraagde zijde *Ab* = *x*; dan is, aangezien *AB* = *a* is,

$$ABCDE : Abcdef = a^2 : x^2$$

en derhalve

$$q : p = a^2 : x^2$$

uit deze evenredigheid den vierden term oplossende, heeft men

$$x^2 =$$

$$x^2 = a^2 \times \frac{p}{q} = a^2 \times \frac{pq}{q^2} = \frac{a^2}{q^2} \times pq$$

trekt men hier uit den vierkants wortel; dan heeft men eenvoudig:

$$x = \frac{a}{q} \times \sqrt{pq}$$

VOORBEELD. Laat gegeven zijn *a* = 3,743 meters, en laat *Abcdef* gelijk aan zeventien negen- en twintigste deelen van *ABCDEF* moeten zijn; dat is, *Abcdef* = $\frac{17}{29}$ *ABCDEF*. Dan is $29 \times Abcdef = 17 \times ABCDEF$ en *ABCDEF* : *Abcdef* = 29 : 17; bijgevolg *p* = 17 en *q* = 29; derhalve

$$x = \frac{a}{q} \sqrt{pq} = \frac{3.743}{29} \times \sqrt{17 \times 29} = \frac{3.743}{29} \times \sqrt{493}$$

nu is $\sqrt{493} = 22,2036$ nagenoeg; derhalve

$$x = \frac{3.743 \times 22,2036}{29} = 2,81063 \text{ nagenoeg.}$$

Men late hier van meer voorbeelden uitwerken.

§ 213. Men kan ook hetzelfde Vraagstuk, zonder berekening, door eene Meetkundige Constructie oplossen. Laat, Fig. 77, *ABC* een driehoek zijn en laat begeerd worden, eenen aan dezen gelijkvormigen driehoek *Abc* te vinden, welks inhoud tot den inhoud van den gegebenen driehoek *ABC* staat, als de lijn *p* tot de lijn *q*; dan ga men aldus te werk.

1°. Trekt uit het punt *A*, eene onbepaalde lijn *AE*, naar welgevallen.

2°. Neem op deze lijn *AE* de lijn *AE* = *p* en *AD* = *q*.

3°. Trek de lijn *DB* en, evenwijdig aan dezelve, *EF*, die *AB* of derzelver verlengde in *F* zal doorsnijden.

4°. Trek *BH* loodregt op *AB*.

5°. Deel *AF* in *G* midden door.

6°. Beschrijf uit, *G* als middelpunt, met *AG* = *GF*, als straal, den halven cirkel, welke de loodlijn *BH* in het punt *H* doorsnijdt.

7°. Maak *Ab* = *AH*; dan zal *Ab* de basen van den begeerden driehoek zijn.

8°. Verleng, indien het noodig is, AC en trek bc evenwijdig aan BC ; dan zal *drieh. Abc : drieh. ABC* $= p : q$ zijn.

De grond dezer constructie zal in het volgende Hoofdstuk § 227 blijken.

§ 214. ALGEMEENE AANMERKING. De Leer van de Gelijkvormigheid der figuren is de eenige grondslag van de kunst, om in eene beknopte teekening, die men doorgaans *Topographische, Chorographische* of *Situatie Kaart* noemt, alle voorwerpen, merkwaardige punten, gebergten, boschen, landerijen, wegen, vaarten, beken, rivieren, stroomen, zeekusten, enz., van eenig land of terrein, in derzelver betrekkelijke grootte, onderlinge ligging en evenredige afstanden, in een klein en echter naauwkeurig bestek, voor oogen te stellen, of, met andere woorden, van de kunst, om eene zeer verkleinde en tevens naauwkeurige afbeelding van dit terrein te vervaardigen.

Uit de beschouwing van *Fig. 69*, zal men een tamelijk goed denkbeeld, van het opnemen en in teekening of kaart brengen van een terrein kunnen verkrijgen. Laten $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ eenige merkwaardige punten, op de opene vlakte van hetzelfde zijn. Wanneer men dan deze punten, op de eene of andere wijze, (en zulks kan men naar welgevallen inrigten,) door lijnen in de gedachte vereenigt, dan verkrijgt men de driehoeken N°. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8. Men zal in deze punten met een Werktuig (een Astrolabium, Boussole) de hoeken van alle deze driehoeken, door waarneming kunnen bepalen. Indien men nu slechts eenen afstand, bij voorbeeld, den afstand der punten B en D , of de lijn BD , meet (Laat $BD = 413$ roeden zijn,) dan zal men met deze gegevens eene teekening kunnen vervaardigen, in welke de onderlinge ligging dezer punten, op eene gelijkvormige wijze, wordt voor oogen gesteld.

Men neme, bij voorbeeld, één-honderdste gedeelte van eenen duim, om daarmede de lengte van eene roede af te beelden: en make dan $bd = 413$ deelen, of 413 honderdste deelen van éenen duim, met eenen transporteur, hoek $fdb =$ hoek FBD

en

en hoek $bdf =$ hoek BDF ; dan verkrijgt men den driehoek bdf , die aan den driehoek BDF gelijkvormig zal zijn. Men ga op dezelfde wijze voort, met op bf den gelijkvormigen driehoek CBF over te brengen; dan zullen, na dat alle deze driehoeken zijn overgebracht, de punten a, b, c, d, e, f, g, h en i met de punten A, B, C, D, E, F, G, H en I gelijkvormig gelegen zijn: Was men nu begeerig, te weten, hoe ver de punten B en H , op het terrein, van elkander verwijderd zijn; dan zou men in de teekening, de overeenkomstige punten b en h , tusfchen den pasfer nemen en op de Schaal meten, hoe veel honderdste deelen van duimen in dien afstand begrepen zijn? zoo veel honderdste deelen van duimen als men hier voor vindt, zoo veel roeden zullen, op het natuurlijk terrein, de punten B en H van elkander afstaan.

VIII. H O O F D S T U K.

Over de onderlinge betrekking van de Vierkanten, welke op de zijden van eenen Driehoek beschreven zijn.

§ 215. I. WERKSTUK. Fig. 78. In eene lijn AB een punt C gegeven zijnde, uit dit punt C eene loodlijn CF op deze lijn AB op te rigten?

CONSTRUCTIE. Neem het punt D , naar welgevallen, en $CE = CD$. Beschrijf met eene willekeurige opening des passers, uit de punten D en E , twee cirkelbogen, die elkander in F snijden; dan staat de lijn, die door de punten C en F getrokken wordt, loodrecht op AB . Want, omdat $DC = CE$; $DF = EF$ en $CF = CF$ is, zal (§ 122) hoek $ACF =$ hoek ECF zijn en CF zal loodrecht op AB staan.

ANDERS. Fig. 79. Om uit B eene loodlijn op AB op te rigten, zoo neem het punt C naar welgevallen, en beschrijf, uit de punten B en C , met BC , als straal, twee cirkelbogen, die elkander in D snijden, uit D met denzelfden straal den cirkelboog EF . Trekt van C door D de lijn CE , den boog EF in E snijdende; dan zal BE loodrecht op AB staan. Want (§ 114) hoek $CBD =$ hoek $CDB = 60^\circ$, en (§ 111) hoek $DBE = \frac{1}{2} CBD = 30^\circ$; derhalve hoek $ABE =$ hoek $ABD +$ hoek $DBE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

§ 216. II. WERKSTUK. Fig. 80. Op eene gegeeve lijn AB een vierkant te beschrijven?

CONSTRUCTIE. Trek de lijn AC loodrecht op AB ; maak $AC = AB$; beschrijf, uit B en C , met AB als straal twee cirkelbogen, die elkander in D snijden; dan zal (de lijnen BD en CD getrokken hebbende,) $ABDC$ het begeerde vierkant zijn. De juistheid der constructie zal daaraan blijken, dat de hoekpuntslijnen AD en BC even lang zijn.

§ 217.

§ 217. I. HULPSTELLING. Fig. 81. Wanneer eene rechte lijn (AB) in twee deelen, naar welgevallen, gedeeld is; dan is het vierkant, op de geheele lijn beschreven, gelijk aan de som van de vierkanten, op derzelver deelen beschreven, met nog tweemaal den rechthoek onder deze deelen. Dat is, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 AC \times BC$.

BETOOG. Zij $ABDE$ het vierkant, op AB beschreven. Neem $BF = BC$; trek CI en FH evenwijdig aan BD en AB ; dan is klaarblijkelijk $HCIE = AC^2$, $CBFG = BC^2$ en $ACGH = GFDI = AC \times BC$; derhalve $ABDE = HCIE + CBFG + ACGH + FGID$; of $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 AC \times BC$.

§ 218. II. HULPSTELLING. Fig. 82. Wanneer eene lijn (AB) in twee deelen verdeeld is; dan is het vierkant, op de geheele lijn (AB), met het vierkant op één der stukken (BC), gelijk aan het vierkant op het andere stuk (AC), met tweemaal den rechthoek onder de geheele lijn (AB) en het eerst genomen stuk (BC). Dat is,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2 AB \times BC.$$

BETOOG. Wanneer men, onder het vierkant $ABDE$, het vierkant $IDLK$ ligt, dat aan het vierkant $CBFG$ gelijk is; dan is de figuur $ABLKIEA$, gelijk aan de som der vierkanten op AB en BC ; maar die zelfde figuur is nog gelijk aan het vierkant $HCIE$ met nog de som der gelijke rechthoeken $ABFI$ en $GFLK$; derhalve is $AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2 AB \times BC$. Op dezelfde wijze zal het blijken: dat ook $AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2 AB \times AC$.

§ 219. III. HULPSTELLING. Fig. 83. Het verschil van twee vierkanten is gelijk aan den rechthoek, welke de som en het verschil van de zijden dezer vierkanten tot lengte en breedte hebben.

BETOOG. Laten $ABCD$ en $AEFG$ twee vierkanten zijn, bij het hoekpunt A in elkander geplaatst, zoo als de figuur aanwijst; indien men dan GF tot in H verlengt en den regthoek $BEPH$ naast $GHCD$ plaatst dan is de regthoek $DKIG$; gelijk aan de figuur $DCBEFG$, welke aan het verschil der vierkanten $ABCD$ en $AEFG$ gelijk is; maar die regthoek heeft tot lengte $DK = AB + AE$ en tot breedte $DG = AB - AE$; derhalve zal $AB^2 - AE^2 = (AB + AE) \times (AB - AE)$ zijn.

§ 220. IV. HULPSTELLING. Wanneer vier lijnen evenredig zijn; dan is de regthoek onder de uiterste gelijk aan den regthoek onder de middelste, en de vierkanten op deze lijnen beschreven, zijn dan insgelijks evenredig.

BETOOG. Wanneer lijnen A, B, C en D evenredig zijn; en men meet dezelve met eene maat M ; dan zullen de getallen, welke te kennen geven, hoeveelmaal die maat in deze lijnen begrepen is, evenredig zijn. Laten a, b, c en d die getallen zijn; dan zal $a : b = c : d$ zijn, en dan is $a \times d = b \times c$ en $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$; maar $a \times d$ beteekent dan den inhoud van den regthoek, onder A en D , en $b \times c$, den inhoud van den regthoek onder B en C ; derhalve zijn die regthoeken van gelijken inhoud. Eindelijk drukken de getallen a^2, b^2, c^2 en d^2 uit de inhouden der vierkanten, op de lijnen A, B, C en D beschreven; die vierkanten zijn derhalve ook evenredig.

§ 221 I. STELLING. Fig. 84. In elken regthoekigen driehoek (ABC) is het vierkant, beschreven op de schuinsche zijde (AC), gelijk aan de som van de vierkanten, op de beide regthoeks zijden (AB en BC). En, wanneer men, uit het hoekpunt vanden regten hoek (B), eene loodlijn (BD) op de schuinsche zijde laat vallen, dezelve in twee deelen (AD en DC) verdeelende; dan is, vooreerst, het vierkant op elke regthoeks zijde gelijk

aan den regthoek, welke de schuinsche zijde tot lengte en het stuk van dezelve, hetwelk aan die regthoeks zijde gelegen is, tot breedte heeft, en, ten anderen, is het vierkant, op deze loodlijn (BD) beschreven, gelijk aan den regthoek onder de deelen, in welke zij de schuinsche zijde verdeelt. Dat is:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ AB^2 &= AC \times AD; \text{ en } BC^2 = AC \times BD. \\ BD^2 &= AD \times DC \end{aligned}$$

Het eerste gedeelte dezer Stelling, is de van ouds beroemde Leerstelling van PYTHAGORAS, welke in de Werkdadige Meetkunst van even zoo veel nut, als de Leer der Gelijkvormige figuren, is.

1°. Men kan zich van de waarheid dezer Leerstelling, door de volgende proef, overtuigen.

Beschrijf tot dat einde, Fig. 85, op de schuinsche zijde AC , het vierkant $ACDE$, en op de regthoeks zijden AB en BC , de vierkanten $ABHI$ en $BCFG$. De driehoek ABC moge groot of klein zijn, indien hij slechts regthoekig is, zal men het vierkant, op de grootste regthoeks zijde BC , in drie, en het vierkant, op de kleinste regthoeks zijde AB , in twee stukken kunnen verdeelen; welke vijf stukken, alle te zamen genomen, zoodanig aan elkander zullen kunnen gevoegd worden, dat zij, ten proeve van de waarheid der Stelling, het vierkant, op de hypothenusa beschreven, geheel vol maken.

Verleng tot dat einde DC en EA en IH , tot in K en M , en trek de lijn, KM , die BC in N doorsnijdt; dan heeft men, in het grootste vierkant $BCFG$, de stukken, CFK , $BCKN$ en KNG , met 1, 2 en 3 in de figuur geteekend, en in het kleinste vierkant $ABHI$, de stukken ABL en $ALHI$, in de figuur met 4 en 5 geteekend.

Deze stukken kunnen (gelijk men uit de figuur ziet,) in de ruimte van het vierkant $ACDE$, op de schuinsche zijde beschreven, volkomen aan elkander gesloten worden; want, indien men CF tot in P , en AI tot in O verlengt, en DQ

even-

evenwijdig aan BC , $CR = KG$ neemt, en voorts RS evenwijdig aan BC ; dan zal men in het vierkant, op de schuinsche zijde beschreven, de stukken 1, 2, 3, 4 en 5 verkrijgen, die aan de stukken van de vierkanten, op de regthoeks-zijden beschreven, en met dezelfde getallen geteekend, gelijk- en gelijkvormig zullen zijn.

2°. Van het tweede gedeelte der Stelling kan men zich op gelijke wijze door beproeving overtuigen. Op de zijden van den regthoekigen driehoek ABC , Fig. 86, vierkanten beschreven hebbende, zoo zal de lijn BD , welke, uit het hoekpunt B van den regten hoek, op de schuinsche zijde valt, verlengd zijnde, het vierkant $ACEF$, op de schuinsche zijde beschreven, in twee regthoeken $CEZD$ en $ADZF$ verdeelen.

De regthoek $CEZD$ is de regthoek, welke AC tot lengte en CD tot breedte heeft, en de regthoek $ADZF$ is de regthoek, welke AC tot lengte en AD tot breedte heeft.

Dat de regthoek $CEZD$ zoo groot van inhoud is als het vierkant $BCIK$, blijkt aldus.

Trek KL evenwijdig aan CE of BD , en IM evenwijdig aan AC ; dan is het vierkant $BCIK$ in de stukken n°. 1, 2 en 3 verdeeld.

Trek voorts EO evenwijdig aan BC , en verleng CI tot in N ; dan is de regthoek $CEZD$ in de stukken n°. 1, 2 en 3 verdeeld. Wanneer nu BC grootste der twee regthoeks-zijden is; dan zal men altijd het vierkant $BCIK$ en den regthoek $CEZD$ elk in drie stukken kunnen verdeelen, en dan zal n°. 1 gelijk n°. 1; n°. 2 gelijk n°. 2, en n°. 3 gelijk n°. 3 zijn.

Hieruit en uit het eerste gedeelte der Stelling, kan men reeds besluiten, dat het vierkant $ABGH$, op de kleinste regthoeks-zijde AB beschreven, gelijk zal moeten zijn aan den regthoek $ADZF$; maar men kan ook dit vierkant en dien regthoek in gelijke stukken verdeelen.

Trek PG evenwijdig aan BZ , HQ evenwijdig aan AC ; maak $GR = PH$, en trek RS evenwijdig aan BZ ; dan is het vierkant $ABGH$ in de stukken n°. 4, 5, 6 en 7 verdeeld.

Verleng AH tot in V ; trek de lijn FO , die bevonden zal

wordt.

worden evenwijdig aan AB te zijn. Maak eindelijk $PT = RS$ en trek TU evenwijdig aan AV ; dan zal de regthoek $ADZF$ in de stukken n°. 4, 5, 6 en 7 verdeeld zijn; en men zal bevinden: dat n°. 4 gelijk n°. 4; n°. 5 gelijk n°. 5; n°. 6 gelijk n°. 6; en n°. 7 gelijk n°. 7 zal zijn.

3°. Van het derde of laatste gedeelte der Stelling zal men zich ook bij beproeving kunnen overtuigen. Fig. 87.

Verleng de loodlijn BD en maak $DE = BD$; beschrijf op DE het vierkant $DEFG$; dan is dit vierkant gelijk aan het vierkant op BD beschreven. Maak $DI = AD$, en trek IH en HC evenwijdig aan DC en DI ; dan is $DIHC$ de regthoek onder de deelen AD en DC ; en nu zal vierkant $DEFG$ gelijk aan den regthoek $DIHC$ moeten zijn.

Om zulks door de proef aan te toonen, zoo trek door de punten E en C de lijn EKC . Voorts LI evenwijdig aan CK en LM evenwijdig aan DI ; dan is de regthoek $DIHC$ in de stukken No. 1, 2, 3 en 4 verdeeld.

Trek verder de lijnen FO en DN evenwijdig aan IL en NP evenwijdig aan EF ; dan is ook het vierkant $DEFG$ in vier stukken, No. 1, 2, 3 en 4 verdeeld, en men zal bevinden: dat No. 1, gelijk No. 1; No. 2, gelijk No. 2; No. 3 gelijk No. 3 en No. 4 gelijk No. 4 zal zijn.

Hoe groot of klein een regthoekige driehoek zij, welk eene reden men tuschen deszelfs regthoeks-zijden aanneemt; wanneer men slechts op voorschrevene wijze te werk gaat, zal men, door beproeving altijd van de waarheid der gestelde zaken kunnen overtuigd worden; doch het kan nuttig zijn, dat wij het gestelde uit de gelijkvormigheid der driehoeken leeren afleiden.

BETOOE. Fig. 84. Omdat BD loodregt op AC staat, is de driehoek BCD regthoekig; hoek $BDC =$ hoek ABC ; hoek $BCD =$ hoek ACB ; de driehoeken ABC en BCD zijn dan § 197 gelijkvormig; derhalve $AC : BC = BC : DC$, en daar uit volgt dan $BC^2 = AC \times DC$.

Om dezelfde reden zijn de driehoeken ABC en ABD gelijkvormig; derhalve $AC : AB = AB : AD$ en $AB^2 = AC \times AD$.

Telt men de vergelijkingen $BC^2 = AC \times CD$ en $AB^2 = AC \times AD$

$\times AD$

$\times AD$ bij elkander; dan verkrijgt men $BC^2 + AB^2 = AC \times DC + AC \times AD = AC^2$.

De driehoeken ABD en BCD zijn insgelijks gelijkvormig; omdat zij gelijkhoekig zijn; derhalve is $AD : BD = BD : DC$; derhalve $BD^2 = AD \times BD$.

§ 222. Menigvuldig zijn de toepassingen van dit Leerstuk. Vooreerst, kan men door hetzelfde, wanneer twee zijden van eenen rechthoekigen driehoek gegeven zijn, de derde zijde vinden: Want $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$; $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$ en $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$.

I. VOORBEELD. Laat gegeven zijn $AB = 51$ duim en $BC = 140$ duim: hoe veel duim zal dan AB lang zijn? Wanneer $AB = 51$ duim lang is; dan is $AB^2 = 51 \times 51 = 2601$ vierkante duimen. Voorts $BC = 140$ duim zijnde; is $BC^2 = 140 \times 140 = 19600$ vierkanten; derhalve $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2601 + 19600 = 22201$ vierkante duimen; trekt men uit dit getal den vierkants-wortel; dan vindt men $AC = \sqrt{22201} = 149$ duimen, zoo als men ook bij de proef bevinden zal.

2. VOORBEELD. Hoe lang is de hoekpuntslijn van een vierkant, welks zijde éénen meter lang is? Antw. 1,41421356 nagenoeg.

3. VOORBEELD. Hoe lang is de hoekpuntslijn van eenen rechthoek, lang zijnde 31 voet 8 duim en breed 21 voet 9 duim? Antw. 38 voet 5 duim.

4. VOORBEELD. Van den rechthoekigen driehoek ABC , Fig. 84, is gegeven $AC = 1061$ en $AB = 561$ men vraagt naar de rechthoekszijde BC ? Antw. $BC = 1200,18$ enz.

§ 223. 2°. Kan men, Fig. 84 twee zijden van eenen rechthoekigen driehoek gegeven zijnde, de lengte van de loodlijn BD en de deelen AD en DB van de schuinsche zijde AC berekenen. Want, omdat $AB^2 = AC \times AD$ en $BC^2 = AC \times CD$ is, zoo zal $AD = \frac{AB^2}{AC}$ en $CD = \frac{BC^2}{AC}$ zijn; en, omdat $AB \times BC = AC \times BD$ (zie § 152); zoo zal $BD = \frac{AB \times BC}{AC}$; zija

duo

duo twee zijden gegeven; dan zal men eerst de derde zijde berekenen, vervolgens de stukken van de schuinsche zijde en eindelijk de loodlijn.

5. VOORBEELD. Gegeven zijnde $AB = 51$ duim, en $BC = 140$ duim; stukken van de schuinsche zijde en de loodlijn te vinden? Men vindt (zie 1^e Voorb.) $AC = 149$ duim; derhalve is

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{51 \times 51}{149} = \frac{2601}{149} = 17\frac{63}{149}$$

$$CD = \frac{BC^2}{AC} = \frac{140 \times 140}{149} = \frac{19600}{149} = 131\frac{11}{149}$$

$$BD = \frac{AB \times BC}{AC} = \frac{51 \times 140}{149} = \frac{7140}{149} = 47\frac{135}{149}$$

6. VOORBEELD. Fig. 84. Gegeven zijnde, $AC = 17,93$ en $AB = 9,382$, hetzelfde te vinden? Antw. $AD = 4,9092$ $CD = 13,0208$ $BD = 7,9951$

§ 224. 3°. Men kan nu ook, zoo wel door constructie, als door berekening, een vierkant vinden, eenen inhoud hebbende, gelijk aan de som van de inhouden van twee of meer vierkanten.

§ 225. 4°. Ook kan men door constructie een vierkant vinden, wiens inhoud aan het verschil van de inhouden van twee vierkanten gelijk is.

§ 226. 5°. Wanneer eene lijn als éénheid wordt aangenomen; dan zal men door constructie lijnen kunnen vinden, welke lengte aan $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$, enz. gelijk zijn.

Men geve hier van aan den Leerling voorbeelden.

§ 227. 6°. Meer belangrijk is thans de vraag: om een vierkant te vinden, denzelfden inhoud hebbende, als een gegeven rechthoek.

Om deze Vraag te kunnen construeren, zoo dient men te weten, dat alle hoeken, welke in eenen halven cirkel geplaatst worden, rechte hoeken zijn. Dat wil zeggen, wanneer, Fig. 88, ABC een halve cirkel is, AB tot middellijn hebbende, dat dan alle hoeken ACB welker toppunten C in den omtrek liggen en welker beenen door de punten A en B loopen, regt zullen zijn. Want, indien men, uit het middelpunt D , den straal DC trekt; dan is hoek $CAB =$ hoek ACD , en hoek $ABC =$ hoek

hoek BCD ; telt men deze gelijke hoeken bij elkander, dan is *hoek* $BAC + \text{hoek } ABC = \text{hoek } ACB$, en *hoek* $BAC + \text{hoek } ABC + \text{hoek } ACB = 2 \text{ hoek } ACB = 180^\circ$; derhalve *hoek* $ACB = 90^\circ$.

Deze waarheid kennende, kan men deze Vraag op tweedertelwijze door constructie oplossen.

1°. Laat $ABCD$, Fig., 89, de gegeven regthoek zijn. Verleng DC ; maak $CE = BC$; deel DE in F midden door; beschrijf, uit F , met $DF = FE$ als straal eenen halven cirkel, suljdende het verlengde van BC in G ; dan zal CG de zijde van het begeerde vierkant zijn. Want, trekkende de lijnen DG en EG ; dan is DCE een regthoekigen driehoek en derhalve $CG^2 = DC \times CE = DC \times DC = \text{regthoek } ABCD$. Het vierkant $CGHI$ is dan gelijk aan regthoek $ABCD$.

2°. Of men beschrijve, Fig. 90, op de langste zijde AB van den gegebenen regthoek $ABCD$ eenen halven cirkel (na AB in E midden door gedeeld te hebben,) make $AF = AD$, trekke FG loodrecht op AB ; dan zal de lijn AG de zijde van het begeerde vierkant zijn. Want BG getrokken hebbende, zal $AG^2 = AB \times AF = AB \times AD$ zijn.

Rekenkundig zou men deze Vraag oplossen, door den vierkants-wortel uit het product van de lengte en breedte van den gegebenen regthoek te trekken. De Meetkundige constructie van het vraagstuk in het voorgaande Hoofdstuk § 212, voorgedragen, berust ook op dezelfde gronden.

§ 228. Men late nog de volgende Vraagstukken construeren.

7°. Een gegeven vierkant in twee andere vierkanten te verdeelen, welker inhouden tot elkander eene gegevenc reden hebben?

8°. Eene gegevenc lijn in twee deelen te verdeelen, zoodanig dat de som van de vierkanten der deelen gelijk zij aan een gegeven vierkant?

9°. Eene gegevenc lijn in twee deelen te verdeelen, zoodanig dat de regthoek onder de deelen gelijk zij aan een gegeven vierkant?

10. Eene gegevenc veelhoekige figuur daar constructie tot een vierkant te maken:

§ 129.

§ 229. II. STELLING. Fig. 91. In elken driehoek (ABC) is het vierkant van de zijde (AC), tegen over eenen scherpen hoek (B) staande, gelijk aan de som der vierkanten, op de twee andere zijden (AB en BC), verminderd met den dubbelden regthoek, welke éene dezer twee andere zijden (AB) tot lengte heeft, en tot breedte dat gedeelte (BD) van die zijde (AB), hetwelk gelegen is tusschen dezen scherpen hoek (B) en de loodlijn, welke uit het hoekpunt (C), tegen over die zijde (AB) staande, op dezelve valt. Dat is,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD.$$

BETOOG. Volgens de II. Hulpst. § 218, Bladz. 73 is

$$AD^2 + 2AB \times BD = AB^2 + BD^2$$

trekt men hier van af $2AB \times BD = 2AB \times BD$; dan houdt men over:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD$$

hier bij tellende $CD^2 = CD^2$; dan zal men verkrijgen:

$$AD^2 + CD^2 = AB^2 + BD^2 + CD^2 - 2AB \times BD$$

nu is $AD^2 + CD^2 = AC^2$ en $BD^2 + CD^2 = BC^2$; derhalve

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD.$$

§ 230. III. STELLING. Fig. 92. In elken stomphoekigen driehoek (ABC) is het vierkant van de zijde (AC), tegen over den stompen hoek (B), gelijk aan de som van de vierkanten der twee andere zijden (AB en BC), opgeteld bij den dubbelen regthoek, welke éene der zijden (AB), om den stompen hoek (B) staande, tot lengte heeft, en tot breedte den afstand van het hoekpunt van den stompen hoek (B) tot de loodlijn, welke, uit het overstaande hoekpunt (C), op die zijde (AB) valt. Dat is.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BD.$$

BETOOG. Volgens de eerste Hulpst. § 217. Bladz. 73, is

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2AB \times BD$$

F

tel

tel hier bij $CD^2 = CD^2$; dan is

$$AD^2 + CD^2 = AB^2 + BD^2 + CD^2 + 2 AB \times BD$$

Nu is (I. Stell. § 221) $AD^2 + CD^2 = AC^2$ en $BD^2 + CD^2 = BC^2$; derhalve is ook

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 AB \times BD.$$

§ 231. Uit het betoogde in de drie voorgaande Stellingen blijkt: dat het vierkant, op de zijde van eenen driehoek beschreven, gelijk, grooter of kleiner dan de som van de vierkanten der twee andere zijden zal zijn, naar dat de hoek, over die zijde gelegen, regt, scherp of stomp is.

§ 232. Wij hebben dan voor de zijde, over eenen scherp hoek staande, in Fig. 91.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \times BD$$

en hier uit zal dan volgen:

$$BD = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 AB} \dots\dots (1)$$

en, in Fig. 92, voor het vierkant van de zijde, tegen over den stompen hoek,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 AB \times CD$$

en uit deze zal volgen:

$$BD = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 AB} \dots\dots (2)$$

Men zal dan, wanneer de drie zijden van den driehoek ABC gegeven zijn, met behulp der formule (1) of (2), voor elke zijde van dien driehoek, de stukken kunnen vinden, in welke die zijde verdeeld wordt door de loodlijn, welke uit den hoek, over die zijde staande, op dezelve valt. Heeft men die stukken gevonden, dan zal men die loodlijnen zelve door de formules $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{BC^2 - BD^2}$ kunnen vinden, en heeft men die loodlijnen gevonden; dan zal men den inhoud des driehoeks naar den regel van § 152 vinden.

VOORBEELD. Zij gegeven $AB = 418$ meters; $BC = 290$ meters; $AC = 480$ meters? Dan zal men vinden:

$$BD = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 AB} = \frac{418^2 + 290^2 - 480^2}{2 \times 418} = 34$$

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{290^2 - 34^2} = 288$$

en hieruit, $Inh. ABC = \frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2} \times 418 \times 288 = 60192$ vierkante meters.

§ 233. Men kan echter den inhoud des driehoeks, uit zijne drie bekende zijden, veel gemakkelijker vinden. Wanneer men a , b en c voor de drie bekende zijden stelt, en $s = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} (a + b + c)$; den inhoud $= I$; dan is:

$$I = \sqrt{[s \times (s - a) \times (s - b) \times (s - c)]}$$

Zie het bewijs dezer formule *Beg. Meetk. III Boek*, § 232.

VOORBEELD. Zij gegeven $a = 290$, $b = 480$ en $c = 418$? Dan is $a + b + c = 1188$, en $s = \frac{1}{2} (a + b + c) = 594$; derhalve $s - a = 304$; $s - b = 114$, en $s - c = 176$; en derhalve

$$s = \sqrt{(594 \times 304 \times 114 \times 176)} = 60192.$$

Met Logarithmen werkende, is die berekening veel gemakkelijker. Men geve meer Voorbeelden en late eenige van den zelve door Logarithmen uitwerken.

IX. HOOFDSTUK.

Eenige merkwaardige Eigenschappen van den Cirkel.

§ 234. **R**eeds hebben wij, van § 67 — § 73, den Cirkel leeren kennen, en deszelfs gebruik in het meten der hoeken aangewezen. Wij zullen thans deszelfs meest merkwaardige Eigenschappen voordragen. In de eerste plaats beginnen wij op te merken, dat de Cirkel vele eigenschappen heeft, die men striktelijk betoogen kan; doch welke zoo van zelve in het oog loopen, dat men, bij het inzien der figuur, van derzelver waarheid terstond moet overtuigd worden. Deze eigenschappen zijn de volgende: Zie *Beg. Meetk. V. Boek.*

§ 235. I. STELLING. *Cirkels, die gelijke stralen of middellijnen hebben, hebben ook gelijke omtrekken en inhouden.*

§ 236. II. STELLING. *Fig. 93. Wanneer eene lijn (PQ) regthoekig door het midden van eene andere lijn (AB) gaat; dan staan alle punten (P, Q, R, enz.) van die lijn op gelijke afstanden van de uiteinden (A en B) dezer eerste lijn (AB). En alle punten (P, Q, R, enz.), welke op gelijke afstanden van de uiteinden (A en B) eener lijn (AB) gelegen zijn, liggen in eene rechte lijn (RQ), welke die lijn (AB) midden door deelt en regthoekig doorsnijdt.*

§ 237. Hier uit leert men: *hoe men eene lijn kan trekken, die eene gegeeene lijn regthoekig en in twee gelijke deelen doorsnijdt.* Laat, *Fig. 93*, *AB*, de gegeeene lijn zijn. Beschrijf, uit *A* en *B*, als middelpunten, met dezelfde opening van den

pas-

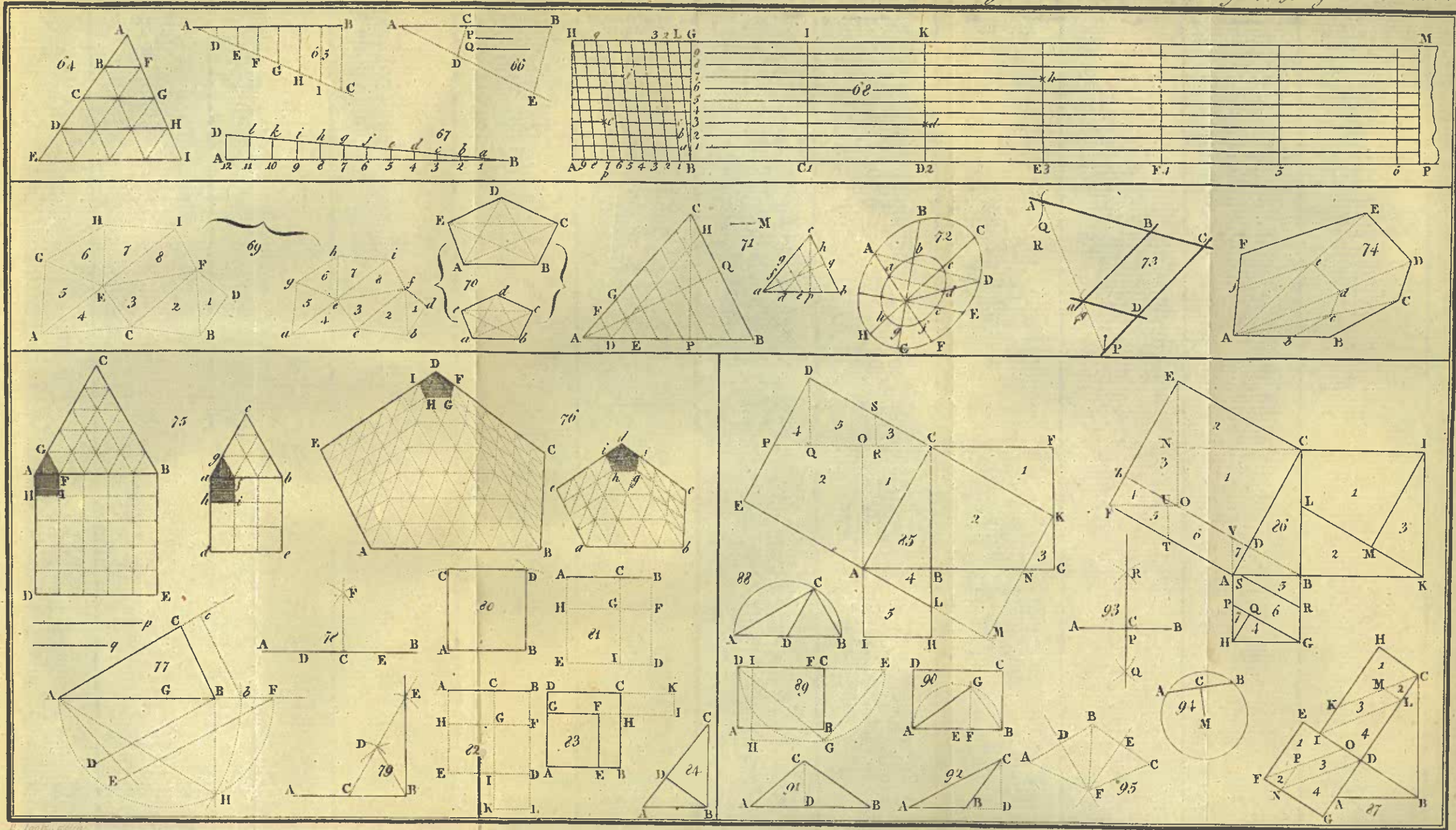
E

A

A

H

D



pasfer, twee cirkelbogen, die elkander in Q doorsnijden; en uit dezelfde punten, met dezelfde of eene andere opening van den pasfer, twee cirkelbogen, die elkander in R snijden; dan zal de lijn QR , die door de punten Q en R getrokken wordt, de begeerde lijn zijn.

§ 238. III. STELLING. Fig. 94. De lijn (CM), welke regthoekig door het midden (C) van eene koorde AB getrokken wordt, loopt noodzakelijk door het middelpunt van dien cirkel. De lijn (CM), die het midden (C) van eene koorde (AB) met het middelpunt van den cirkel vereenigt, staat regthoekig op deze koorde. En de lijn (CM), welke uit het middelpunt (M) eens cirkels, regthoekig op eene koorde (AB) valt, deelt dezelve in twee gelijke deelen (AC en BC).

§ 239. IV. STELLING. Fig. 95. Drie punten (A , B en C), welke niet in dezelfde lijn liggen, zijn altijd in den omtrek van eenen cirkel gelegen.

BETOOG. Men trekke naar het voorschrift van § 237, eene lijn DF , welke regthoekig door het midden van AB gaat, en eene andere lijn EF , regthoekig door het midden van BC gaande; deze lijnen ontmoeten elkander in F ; dan is $AF = BF = FC$; de cirkel, welke derhalve uit F met AF , als straal beschreven wordt, zal door de punten A , B en C gaan.

§ 240. Men kan dan het middelpunt van elken cirkel door constructie vinden, en om elken driehoek eenen cirkel beschrijven.

§ 241. V. STELLING. Fig. 96, De koorden (AB en CD), die in eenen cirkel gelijke boogen (AB en CD) onderspannen, en (zie § 70) gelijk zijn, staan op gelijke afstanden (ME en MF), van het middelpunt; maar de afstand eener koorde wordt grooter; wanneer de koorde kleiner wordt, en omgekeerd.

§ 242. I. BEPALING. Fig. 97. Eene lijn BC ,
word

wordt gezegd den cirkel in een punt A aan te raken, wanneer die lijn, geheel buiten den omtrek gelegen zijnde, met denzelven slechts een enkel punt gemeen heeft, dat het raakpunt genoemd wordt. En een lijn DE wordt gezegd den cirkel te snijden, of eene snijlijn te zijn, wanneer een gedeelte DE van die lijn, binnen den omtrek, en twee andere deelen van dezelve buiten den omtrek gelegen zijn.

§ 243. VI. STELLING. Fig. 97. De straal (AM), welke het aanrakingspunt (A) eener raaklijn (CD) aan den cirkel met het middelpunt van dien cirkel vereenigt, staat regthoekig op deze raaklijn. En eene lijn (BC), welke regthoekig op het uiteinde (A) van eenen straal, of van eenige middellijn des cirkels staat, zal denzelven in dit punt (A) aanraken.

Dit is zigbaar; want, wanneer men de lijn BC , naar den eenen kant meer dan naar den anderen kant doet hellen, zal zij den cirkel snijden.

§ 244. I. WERKSTUK. Fig. 98. Om eenen hoek ABC in twee gelijke deelen te verdeelen? gaat men aldus te werk. Neem $BD = BE$; beschrijf, met denzelfden straal naar welgevallen, uit de punten D en E twee cirkelbogen, die elkander in F snijden; dan zal de lijn BF , welke uit B door F getrokken wordt, den hoek ABC midden door deelen; want volgens § 122, zal hoek $ABF =$ hoek CBF zijn.

§ 245. VII. STELLING. Fig. 99. Elk punt P , van eene lijn (BD), welke eenen hoek (ABC) midden door deelt, is op eenen gelijken afstand van de beenen van dien hoek gelegen, en de middelpunten van alle cirkels, welke de beenen van eenen hoek aanraken, zijn gelegen in de lijn, welke dien hoek in twee gelijke deelen verdeelt.

Want hoek $PBR =$ hoek PBQ en hoek $BRP =$ hoek BQP

BQP en $BP = BQ$ zijnde, zal $PR = PQ$ zijn. Dit zal overal plaats hebben, waar men het punt P op de lijn BD nemen moge: de cirkel welke uit P met PR beschreven wordt, zal de beenen van den hoek ABC , in de punten R en Q aanraken, en de middelpunten van alle cirkels, die de beenen aanraken, liggen in de lijn BD . Hier uit leert men:

§ 246. II. WERKSTUK. In eenen driehoek eenen cirkel te beschrijven, die de drie zijden aanraakt? Laat Fig. 100, ABC de gegeven driehoek zijn; deel de hoeken A en B door de lijnen AM en BM midden door. Laat uit M de loodlijn MD op AB vallen. Beschrijf uit M met MD als straal eenen cirkel; dan zal deze de zijden des driehoeks, in de punten D , E en F , aanraken.

§ 247. II. BEPALING. Fig. 101. Wanneer men, op eene onbepaalde regte lijn PQ , een punt A aanneemt, en door dit punt de lijn RS , loodregt op deze eerste lijn trekt; dan zullen alle cirkels, die uit andere punten B, C, D enz., op die eerste regte lijn genomen, met de stralen BA, CA, DA , enz. beschreven worden, (volgens § 243) die regte lijn aanraken, en onderling met elkander slechts het punt A gemeen hebben. Twee cirkels, worden dan gezegd elkander aan te raken, wanneer zij slechts één enkel punt gemeen hebben. Die aanraking is uitwendig, wanneer de omtrek van den eenen cirkel buiten den omtrek van den anderen ligt, en inwendig, wanneer de omtrek van één der rakende cirkels, geheel binnen den omtrek van den tweeden gelegen is.

§ 248. VIII. STELLING. Wanneer twee cirkels elkander aanraken, dan zijn de middelpunten van die cirkels met het raakpunt in dezelfde lijn gelegen.

Dit blijkt uit de voorgaande bepaling.

§ 249. III. BEPALING. Fig. 102. Een cirkel-sec-

tor is gedeelte van den cirkel, begrepen tusschen twee stralen van den cirkel, en een gedeelte van den omtrek, tusschen deze stralen gelegen.

§ 250. IV. BEPALING. Fig. 103. Een cirkel-segment is een gedeelte van den cirkel, begrepen tusschen een cirkelboog en deszelfs koorde.

§ 251. V. BEPALING. Fig. 104. Een hoek AMB wordt gezegd, in den cirkel op eenen boog ADB aan het middelpunt te staan, wanneer het hoekpunt M van dien hoek, in het middelpunt staat, en de beenen AM en BM van denzelven, door de uiteinden A en B van dien boog loopen.

§ 252. VI. BEPALING. Fig. 104. Een hoek ACB wordt gezegd, in den cirkel aan den omtrek op eenen boog te staan; wanneer het hoekpunt van dien hoek in den omtrek van den cirkel valt, en deszelfs beenen AC en BC door de uiteinden van dien boog loopen. Een hoek staat in een cirkel-segment, wanneer de beenen van dien hoek, door de uiteinden van de koorde loopen, en deszelfs hoekpunt in den boog van dit segment gelegen is.

§ 253. IX. STELLING. Fig. 105. Wanneer een raaklijn (AB) en een snijlijn (CD) elkander, in den omtrek des cirkels, in een punt (C) doorsnijden; dan zijn de helften der bogen (CED en $CFGID$) van den omtrek, die tusschen de beenen van de hoeken (ACD en BCD), welke deze lijnen met elkander maken, gelegen zijn, de maat dezer hoeken.

OPHELDING. Dat wil zeggen, wanneer de hoek $ACD = 73^\circ$, en bijgevolg hoek $BCD = 107^\circ$ is; dan zal de helft van den boog $CED = 73^\circ$, en de helft van den boog $CFGID = 107^\circ$ zijn.

BETOOG. Men trekke de middellijn CMH en MI evenwijdig

wijdig aan CD ; dan is (§ 80) hoek $MDC =$ hoek $DCM =$ hoek $DMI =$ hoek IMH ; gevolgelyk boog $ID =$ boog $IH = \frac{1}{2}$ boog DH . Nu is boog $CEDIH =$ boog $CFGH = 90^\circ$.

Trekt men van hoek $ACH = 90^\circ = \frac{1}{2}$ boog $CEDIH$ af hoek $DCH = \frac{1}{2}$ boog DIH ; dan zal men overhouden, hoek $ACD = \frac{1}{2}$ boog CED .

En telt men bij hoek $BCH = 90^\circ = \frac{1}{2}$ boog $CFGH$ op hoek $DCH = \frac{1}{2}$ boog DIH ; dan zal hoek $BCD = \frac{1}{2}$ boog $CFGID$ zijn.

§ 254. X. STELLING. Fig. 106. Een hoek (ACB), welke, aan den omtrek des cirkels, op eenen boog (AB) staat, wordt gemeten door de helft van den boog (AB), op welken hij geplaatst is.

BETOOG. Trek door het punt C , de raaklijn PQ . De som der hoeken PCA , ACB en QCB , welke (§ 62) gelijk is aan 180° , wordt gemeten door de helft van den omtrek des geheelen cirkels ABC .

Volgens de voorgaande Stelling, worden de hoeken PCA en QCB gemeten, door de helften der bogen AC en BC ; derhalve hoek $PCA +$ hoek $QCB = \frac{1}{2}$ boog $AC + \frac{1}{2}$ boog BC ; trekt men deze gelijkheid af van hoek $PCA +$ hoek $ACB +$ hoek $QCB = \frac{1}{2}$ boog $AC + \frac{1}{2}$ boog $BC + \frac{1}{2}$ boog $AB = 180^\circ$; dan zal men overhouden hoek $ACB = \frac{1}{2}$ boog AB .

Uit deze laatste Stelling kan men de volgende merkwaardige Leerstellingen afleiden.

§ 255. 1°. Alle hoeken, welke in eenen halven cirkel staan, zijn regt. Alle hoeken, welke in een cirkel-segment staan, dat grooter of kleiner dan een halve cirkel is, zijn scherp of stomp.

§ 256. 2°. Wanneer, Fig. 106, twee hoeken AMB en ACB op denzelfden boog AB , de één aan het middelpunt, en de ander aan den omtrek staat; dan zal de hoek (AMB) aan het middelpunt gelijk zijn aan tweemaal den hoek (ACB) aan den omtrek.

§ 257. 3°. Alle hoeken (ACB , ADB , AEB , Fig. 107) welke op denzelfden boog (AB) aan den omtrek staan, zijn gelijk.

§ 258. 4°. Wanneer men derhalve een hoek ADB , met dezelfde beide beenen AD en BD , langs twee vaste punten A en B heenschuift; dan zal punt D een cirkelboog beschrijven.

§ 259. 5°. Wanneer de hoekpunten A , B , E en C , van eenen vierhoek $ABEC$, in den omtrek van eenen cirkel gelegen zijn, dan zijn de sommen der overstaande hoeken gelijk aan twee rechte hoeken.

§ 260. XI. STELLING. Fig. 108. Wanneer twee koorden (AB en CD) van eenigen cirkel elkander in een punt (E) doorsnijden; dan zullen de regthoeken onder de deelen gelijk zijn ($AE \times BE = CE \times DE$).

BETOOG. Trek de koorden CA en DB ; dan zijn de hoeken A en D , als op denzelfden boog BC staande (§ 257) gelijk. Om dezelfde reden zijn de hoeken C en B gelijk; ook is hoek $AEC =$ hoek DEB . De driehoeken ACE en BDE zijn dan (zie § 190) gelijkvormig, en derhalve $CE : AE = BE : ED$ en (volgens § 220) $AE \times BE = CE \times ED$.

§ 261. Fig. 109. Wanneer ééne dezer koorden AB een middellijn is, en de andere koord CE die middellijn regthoekig snijdt; dan is $CE = ED$, en derhalve $AE \times BE = CE \times DE = CE^2 = DE^2$.

§ 262. Wanneer (Fig. 109) FGH en IKL , twee andere koorden zijn, welke regthoekig op de middellijn staan; dan zal insgelijks $FG^2 = GH^2 = AG \times GB$ en $IK^2 = KL^2 = AK \times BK$ zijn, en men zal derhalve mogen kefluiten: dat, $IK^2 : FG^2 = AK \times BK : AG \times GB$ zal zijn.

§ 263. Trekt men Fig. 109, de koorden AI en AC ; dan zal (aangezien de hoeken AIR en ACB regt zijn) $AI^2 = AB \times AK$ en $AC^2 = AE \times AB$ zijn; derhalve

$$AI^2 : AC^2 = AB \times AK : AB \times AE = AK : AE,$$

ook zal men, om dezelfde reden, mogen stellen:

$$AC^2 : AB^2 = AE : AB.$$

§ 264. XII. STELLING. Fig. 110. Wanneer uit een punt (P), buiten den cirkel gelegen, twee snijlijnen (PAB

(PAB en PCD) tot binnen den omtrek van den cirkel getrokken worden; dan zal altijd $AP \times PB = DP \times PC$ zijn.

BETOOG. Trek de koorden BD en AC ; dan is hoek $B =$ hoek ACP ; omdat deze hoeken het supplement van den zelfden hoek ACD zijn. Om dezelfde reden is hoek $D =$ hoek CAP : de driehoeken ACP en DBP zijn dan gelijkvormig; derhalve $AP : PC = PD : PB$ en $AP \times PB = PC \times PD$.

§ 265. Laat men de lijn PCD , om het punt P omdraaijen, tot dat zij den cirkel in E aanraakt; dan zullen de punten D en C zich in E vereenigen, en dan zal $PE^2 = PA \times PB$ worden.

X. HOOFDSTUK.

Over de Regelmatige Veelhoeken en de Quadratuur van den Cirkel.

§ 266. Wanneer men, *Fig. 111*, eenige gelijkbeenige driehoeken P, Q, R , enz. die gelijk- en gelijkvormig zijn, met hunne toppunten nevens elkander ligt, dan verkrijgt men eene figuur $ABCDM$, en wanneer men dan uit M als middelpunt, met AM als straal eenen cirkel beschrijft; dan zal de omtrek van dien cirkel door de overige punten B, C en D loopen. Ook, wanneer men, uit het punt M , eene loodlijn ME op AB laat vallen; dan zal de cirkel, welke uit M met ME beschreven wordt, de zijden AB, BC, CD , enz. dezer figuur aanraken. Men ziet ook, dat, wegens de gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken P, Q, R , de zijden AB, BC, CD enz., als ook de hoeken ABC, BCD , enz. gelijk zullen zijn.

§ 267. Laten de tophoeken AMB dezer gelijkbeenige driehoeken aan eenig evenmatig gedeelte van vier rechte hoeken gelijk genomen worden; bij voorbeeld, $AMB = \frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$; of $AMB = \frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$; of $AMB = \frac{1}{5} \times 360^\circ = 72^\circ$; of $AMB = \frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$, enz., dan zal het blijken, dat men door drie gelijke- en gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken, welker tophoeken 120° zijn, eenen gelijkzijdigen driehoek zal verkrijgen; door vier gelijke- en gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken, welker tophoeken 90° zijn, aan elkander te voegen, een vierkant verkrijgen, enz. Alle veelhoeken op deze wijze verkregen, zullen gelijkzijdig en tévens gelijkhoekig zijn.

§ 268. I. BEPALING. Een Regelmatige Veelhoek is een veelhoek, die gelijke zijden en gelijke hoeken heeft.

§ 269.

§ 269. Het blijkt uit het reeds verklaarde. 1°. Dat, in en om elken regelmatigen veelhoek, eenen cirkel kan beschreven worden. 2°. Dat de middelpunten dezer cirkels in het zelfde punt vallen, dat ook het middelpunt van den veelhoek genoemd wordt. 3°. Dat de lijnen, welke twee hoeken van den regelmatigen veelhoek midden door deelen, elkander in het gemeenschappelijke middelpunt van den veelhoek, en van de in- en omgeschreyene cirkels zullen ontmoeten. 4°. Dat de regelmatige veelhoek kan aangemerkt worden, als uit zoo vele gelijke- en gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken AMB, BMC te zijn zamengeseld, als die veelhoek, zijden of hoeken heeft: men noemt elken dezer gelijkbeenige driehoeken, de middelpunts driehoek van den veelhoek, den hoek AMB den centerhoek, en den hoek ABC de polygoonshoek.

§ 270. Wanneer n het getal der zijden beteekent, dan is $\frac{360^\circ}{n}$ gelijk aan den centerhoek, en, omdat (§ 112) in eenen gelijkbeenigen driehoek ABM , het supplement van den tophoek, gelijk is aan de som van de hoeken aan de basis, zal de polygoonshoek van eenen regelmatigen n hoek, gelijk zijn aan $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ gelijk aan $\frac{(n-2) \times 360^\circ}{n}$. Voor eenen regelmatigen elfhoek is derhalve de centerhoek gelijk $\frac{1}{11} \times 360^\circ = 32^\circ 43' 38\frac{2}{11}''$ en de polygoonshoek $= 180^\circ - 32^\circ 43' 38\frac{2}{11}'' = 147^\circ 16' 21\frac{9}{11}''$.

§ 271. I. WERKSTUK. *Fig. 112*. In eenen gegebenen cirkel eenen regelmatigen vierhoek te beschrijven?

CONSTRUCTIE. Dewijl de centerhoek van eenen regelmatigen vierhoek $= \frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$; zoo beschrijf in den gegeven cirkel, twee middellijnen AB en CD , die elkander rechthoekig doorsnijden, en trek de koorden AC, BC, BD en AD ; dan zal $ADBC$, den regelmatigen vierhoek, in den cirkel beschreven, zijn.

§ 272. Indien men door de punten A, B, C en D , raaklijnen aan den cirkel trekt; dan zal $EFGH$ den regelmatigen vierhoek zijn, om denzelfden cirkel beschreven.

§ 273.

§ 273. *Het vierkant MCGB is klaarblijkelijk tweemaal in het vierkant ACBD, en viermaal in het vierkant EFGH begrepen; indien men dan den straal van den cirkel gelijk één stelt, dan zal de inhoud van het vierkant, in den cirkel beschreven, gelijk twee vierkante eenheden, en het vierkant, om den cirkel beschreven, gelijk vier vierkante eenheden zijn.*

§ 274. II. WERKSTUK. Fig. 113. *In eenen gegeven cirkel eenen regelmatigigen zeshoek en eenen regelmatigigen driehoek te beschrijven.*

CONSTRUCTIE. De centerhoek van eenen regelmatigigen zeshoek, is gelijk aan $\frac{1}{2} \times 360^\circ = 60^\circ$; de zeshoek bestaat dus uit zes gelijkzijdige middelpunts driehoeken; waaruit volgt: *dat de zijde van eenen regelmatigigen zeshoek gelijk is aan den straal van den ingeschrevenen cirkel.* Laat dan *ABCDE* de gegevenen cirkel, *M* deszelfs middelpunt zijn. Beschrijf, uit *A*, als middelpunt met *AM*, als straal, eenen cirkelboog, welke den omtrek des gegevenen cirkel, in de punten *B* en *F* snijdt; trek de middellijnen *AMD*, *BME* en *FMC*; dan is de omtrek in zes gelijke deelen verdeeld. Trekt men nu de koorden *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* en *FA*; dan is *ABCDEF* de regelmatigige zeshoek; en de koorden *AC*, *CE* en *EA* trekkende, dan zal *ACE* de regelmatigige driehoek zijn, in den gegevenen cirkel beschreven.

§ 275. Om dat $CM = DC$ en $BM = DE$ is, zal $DG = GM$, en drieh. $DCE =$ drieh. MCE zijn, en hieruit ziet men duidelijk: *dat de inhoud van den regelmatigigen zeshoek, het dubbel is van den regelmatigigen driehoek, welken met dien zeshoek in denzelfden cirkel beschreven is.*

§ 276. III. WERKSTUK. Fig. 114. *Een cirkel gegeven zijnde, de zijde van eenen regelmatigigen vijfhoek en tienhoek te vinden, die in denzelfden kan beschreven worden.*

CONSTRUCTIE. Trek in den cirkel twee middellijnen, *AB* en *CD*, die elkander regthoekig in *M* doorsnijden; beschrijf uit *A* met *AM* als straal, eenen cirkelboog, die den omtrek in *E* snijdt; en uit *E* met *AC* als straal eenen cirkelboog, die *BM* in *F* doorsnijdt; dan zal *CF* de zijde van den

regelmatischen vijfhoek, en *FM* de zijde van den regelmatigigen tienhoek zijn, in dien cirkel beschreven. De grond van deze fraaie en tevens eenvoudige constructie voor dit eenvoudig Leerboek te zwaar zijnde, vindt men in de *V. Stel. VI. Boek der Beginselen*. Men zal nu ook gemakkelijk de zijde van eenen regelmatigigen vijftien en dertighoek, in den cirkel beschreven, kunnen vinden.

§ 277. IV. WERKSTUK. Fig. 113. *Een regelmatigigen veelhoek in eenen cirkel beschreven zijnde, in denzelfden eenen regelmatigigen veelhoek te beschrijven, die het dubbel aantal zijden heeft.*

CONSTRUCTIE. Laat *DE* de zijde van eenen regelmatigigen veelhoek, bij voorbeeld, zeshoek zijn; trekt volgens § 237, eene lijn *MH*, die de koorde en haren boog *DE* in *I* midden door deelt, door uit *D* en *E* met denzelfden straal de cirkelbogen te beschrijven, welke elkander in *H* doorsnijden, en de lijn *MH* te trekken. Indien men dan de koorden *DI* en *EI* trekt; dan zullen deze de zijden van den regelmatigigen twaalfhoek zijn.

§ 278. Men zal, door het herhalen van dezelfde bewerking, in eenen cirkel eenen regelmatigigen 24, 48, 96, 192, 384, 768, enz. eenen regelmatigigen 8, 16, 32, 64, 128; 256, 512, 1024, eenen regelmatigigen 20, 40, 80, 160, 320, 640, enz. hoek kunnen beschrijven.

§ 279. V. WERKSTUK. Fig. 112. *Wanneer in eenen cirkel eenen regelmatigigen veelhoek beschreven is, eenen regelmatigigen veelhoek van het zelfde aantal zijden om denzelfden te beschrijven?*

CONSTRUCTIE. Men trekke door de hoekpunten *A*, *B*, *C* en *D*, van den regelmatigigen veelhoek, die in den cirkel beschreven is, de raaklijnen *HE*, *FG*, *GH* en *EF*; dan zullen deze met elkander eenen regelmatigigen veelhoek bepalen, welke om den cirkel zal beschreven zijn.

§ 280. Hieruit volgt, dat alle veelhoeken, die men in den cirkel beschrijven kan, ook om den cirkel beschreven kunnen worden.

§ 281. AANMERKING. Het zijn de regelmatig, drie-, vier- en vijfhoeken, en die, welke twee, vier, acht, zestienmaal zoo veel zijden hebben, welke, door eenvoudig van passer en liniaal gebruik te maken, in den cirkel kunnen beschreven worden: de overige kan men slechts bij beproeving vinden.

Om, bij voorbeeld, eenen regelmatig elfhoek, in eenen cirkel te beschrijven, zoo deele men 360° in elf gelijke deelen; dan vindt men voor den centerhoek $32^\circ \frac{8}{11}$. Trek dan uit het middelpunt van den gegebenen cirkel, door middel van den transporteur, twee stralen, die met elkander eenen hoek van $32^\circ \frac{8}{11}$ maken; beproef, of de boog, welke tusschen deze stralen begrepen is, elfmaal in den omtrek vervat is; ontbreekt hier nog iets, dan moet men de beenen van den passer, een weinig anders stellen, tot zoo lang men de opening van de koorde van een elfde gedeelte van den omtrek juist verkregen zal hebben.

§ 282. II. BEPALING. Fig. III. De loodlijn EM , welke uit het middelpunt M van eenen regelmatig veelhoek, op ééne van deszelfs zijden valt, noemt men de *apothema* van dien veelhoek. Voor alle de middelpunts driehoeken van eenen veelhoek zijn die *apothemata* even lang.

§ 283. I. STELLING. Fig. III. De inhoud van eenen regelmatig veelhoek is gelijk aan deszelfs omtrek, vermenigvuldigd met de helft van de *apothema* van dien veelhoek.

BETOOG. Laat ABM de middelpunts driehoek van eenen regelmatig veelhoek, bij voorbeeld, van eenen n hoek zijn; ME de *apothema*; dan is de inhoud van dien driehoek (zie § 152,) gelijk aan $AB \times \frac{1}{2} ME$; neemt men den inhoud van dien driehoek n maal; dan verkrijgt men den inhoud van den regelmatig n hoek, gelijk aan $n \times AB \times \frac{1}{2} ME$; maar $n \times AB$, is gelijk aan den omtrek; derhalve inhoud van den regelmatig veelhoek gelijk aan den omtrek, vermenigvuldigd met de halve *apothema*.

§ 284.

§ 284. II. STELLING. Fig. 115. Alle regelmatig veelhoeken van het zelfde aantal zijden zijn gelijkvormig, en de omtrekken van zulke regelmatig gelijkvormige veelhoeken staan tot elkander, in dezelfde reden, als de stralen of middellijnen der omgeschrevene cirkels. Eindelijk staan de inhouden van zulke regelmatig gelijkvormige veelhoeken tot elkander, in dezelfde reden, als de vierkanten, op de stralen of middellijnen der in- en omgeschrevene cirkels beschreven.

BETOOG. Dat de regelmatig veelhoeken, die het zelfde aantal zijden hebben, gelijkvormig zijn, blijkt daar uit, dat vooreerst hunne polygoons- en center-hoeken gelijk zijn, en ten anderen, dat, wegens de gelijkheid hunner zijden, de zijden, om de gelijke hoeken staande, evenredig zijn.

1°. Laten, in Fig. 115. ABM en abm , de middelpuntsdriehoeken, van twee regelmatig n -hoeken, (bij voorbeeld, van twee regelmatig twintighoeken) zijn; dan is hoek $AMB =$ hoek $amb = \frac{360^\circ}{n}$, en bijgevolg hoek $A =$ hoek a ; hoek $B =$ hoek b ; deze middelpuntsdriehoeken zijn derhalve gelijkvormig, en wij hebben, volgens § 190,

$$AB : ab = AM : am$$

$$AB : ab = CM : cm$$

vermenigvuldig de termen van elke eerste reden met n , dan is:

$$n \times AB : n \times ab = AM : am$$

$$n \times AB : n \times ab = CM : cm$$

maar $n \times AB$ is de omtrek van den eersten en $n \times ab$ de omtrek van den tweeden veelhoek, AM en am zijn de stralen der omgeschrevene en CM en cm de stralen der ingeschrevene cirkels; derhalve staan de omtrekken der gelijkvormige regelmatig veelhoeken, als de stralen der in- en omgeschrevene cirkels, en bijgevolg ook als het dubbel dezer stralen.

2°. Verder heeft men, dat voor de gelijkvormige middelpunts driehoeken ABM en abm , zie § 206,

G

Ink.

98 ALLEREERSTE GRONDEN DER

$$\text{Inh. } ABM : \text{Inh. } abm = AM^2 : am^2$$

$$\text{Inh. } ABM : \text{Inh. } abm = CM^2 : cm^2$$

vermenigvuldig de termen van de eerste reden dezer evenredigheden met n , dan is

$$n \times \text{Inh. } ABM : n \times \text{Inh. } abm = AM^2 : am^2$$

$$n \times \text{Inh. } ABM : n \times \text{Inh. } abm = CM^2 : cm^2$$

maar $n \times \text{Inh. } ABM$ is de inhoud van den eersten, en $n \times \text{Inh. } abm$ de inhoud van den tweeden veelhoek; de inhouden der gelijkvormige regelmatige veelhoeken staan derhalve tot elkander, in dezelfde reden, als de vierkanten van de stralen der om- en ingeschrevene cirkels.

§ 285. Laten, in twee cirkels van onderscheidene middellijnen, veelhoeken A, B, C, D, E, F , enz., van $n, 2n, 4n, 8n, 16n, 32n$ zijden, enz., in den eenen cirkel, en veelhoeken a, b, c, d, e, f , enz., van $n, 2n, 4n, 8n, 16n, 32n$ zijden, enz., in den anderen cirkel beschreven zijn; dan zal A met a , B met b , C met c , D met d , enz. gelijkvormig zijn; indien dan de straal van den eersten cirkel R , en die van den tweeden r gesteld worden; dan zal, volgens het bewezene, zijn:

$$\text{Omt. } A : \text{omtr. } a = R : r$$

$$\text{Omt. } B : \text{omtr. } b = R : r$$

$$\text{Omt. } C : \text{omtr. } c = R : r, \text{ enz.}$$

en derhalve $\text{Omt. } A : \text{omtr. } a = \text{Omt. } B : \text{omtr. } b = \text{Omt. } C : \text{omtr. } c$, enz. Dat is, de omtrekken van onderscheidene gelijkvormige veelhoeken, in twee onderscheidene cirkels beschreven, blijven tot elkander, in dezelfde reden, als de stralen of middellijnen dezer cirkels.

Verder zal volgens het betoogde

$$A : a = R^2 : r^2$$

$$B : b = R^2 : r^2 \text{ enz.}$$

derhalve $A : a = B : b = C : c = D : d = E : e = R^2 : r^2$; dat is, de inhouden van onderscheidene gelijkvormige regelmatige veelhoeken, in onderscheidene cirkels beschreven, staan tot elkander, in dezelfde bestendige reden, als de vierkanten, van de

stralen

MEETKUNST. I. AFDEEL. X. HOOFDST. 99

stralen of middellijnen der cirkels, in welke die veelhoeken beschreven zijn.

§ 286. III. STELLING. Alle cirkels zijn gelijkvormige figuren.

§ 287. IV. STELLING. Fig. 116. De omtrekken der cirkels staan tot elkander, in dezelfde reden, als hunne stralen of middellijnen, en de inhouden dezer cirkels, als de vierkanten, op hunne stralen of middellijnen beschreven.

BETOOG. Laten in de cirkels, welker stralen AM en am zijn, twee regelmatige vierhoeken $ABCD$ en $abcd$, twee regelmatige achthoeken $AGBHCEDF$ en $agbhceidf$, twee regelmatige zestienhoeken $ANGOBPHQCREIDKFL$ en $angobphqcreidkfl$ beschreven zijn; dan staan de omtrekken dezer vier, acht en zestienhoeken (volgens § 285) tot elkander, als de stralen AM en am of als de middellijnen AC en ac ; en de inhouden der vier, acht en zestienhoeken tot elkander, als de vierkanten, op de stralen AM en am , of als de vierkanten, op de middellijnen AC en ac beschreven.

Laten nu in beide cirkels regelmatige 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, enz. hoeken beschreven worden; dan zullen nog de omtrekken dezer veelhoeken, van hetzelfde aantal zijden, in reden van de stralen of middellijnen AM en am of AC en ac zijn, en hunne inhouden, als de vierkanten, op die stralen of middellijnen beschreven.

Men ziet, uit de figuur, dat hoe grooter het aantal der zijden wordt, de omtrek van den veelhoek zoo veel te nader bij aan den omtrek van den cirkel en de inhoud van dien veelhoek zoo veel te nader bij aan den inhoud des cirkels zal komen; eindelijk zal men, door onophoudelijk het aantal der zijden van de ingeschrevene veelhoeken te verdubbelen, veelhoeken van een oneindig aantal zijden verkrijgen, welker omtrek en inhoud aan den omtrek en inhoud des cirkels, in welke zij beschreven zijn, zullen gelijk zijn; daar dan de om-

trekken en de inhouden van die telkens in zijden verdubbelde veelhoeken, in reden als de stralen en de vierkanten der stralen bij-
ven, zoo zullen de omtrekken der cirkels, als hunne stralen of middellijnen, en de inhouden, als de vierkanten op hunne stralen of middellijnen, zich tot elkander verhouden.

§ 288. IV. STELLING. *Fig. 116. De inhoud van eenen cirkel is gelijk aan deszelfs omtrek, vermenigvuldigd met de helft van den straal van dien cirkel.*

BETOOG. De inhoud van elken regelmatig veelhoek is gelijk aan den omtrek vermenigvuldigd met de helft van de apothema. Denken wij nu in den cirkel eenen regelmatig veelhoek van een zeer groot en onnoemelijk aantal zijden; dan kan men den omtrek van dien veelhoek voor den omtrek des cirkels en de apothema voor deszelfs straal nemen, en de inhoud des cirkels is alzoo gelijk aan den omtrek vermenigvuldigd met de helft van den straal.

§ 289. *Wanneer men dan weet, hoe zich de middellijn tot den omtrek eens cirkels verhoudt, dan zal men in staat zijn, om uit de gegebene middellijn van eenen cirkel zijnen omtrek, of uit den omtrek zijne middellijn en bijgevolg door één van beiden den inhoud te berekenen.* Hoe deze reden bepaald wordt, kan men in het VI. Boek, Bladz. 160 en verv. en in het VIII. B. Bladz. 229 van mijne *Beginf. der Meetk.* vinden aangewezen. ARCHIMEDES bepaalde de reden van de middellijn tot den omtrek als 7 tot 22; deze reden is te groot. METIUS als 113 tot 355, deze komt zeer nabij en is iets te klein. LUDOLF VAN CEULEN stelde de middellijn gelijk aan de éénheid en vond, dat de omtrek alsdan gelijk is aan

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288.

In getallen kan eigenlijk dien omtrek niet juist worden uitgedrukt; in een ruwe berekening is de omtrek nagenoeg 3,14; in gevallen, die meer naauwkeurigheid vorderen, kan men zich met het getal 3,14159 vergenoegen, en men kan in geen geval komen, dat de strengste naauwkeurigheid het gebruik van 3,14159265856 vorderen zou.

§ 290.

§ 290. Drukken wij dit getal 3,14159 enz., dat wij voor-
aan het *Ludolphiaansche Getal* zullen noemen, uit door de Grieksche Letter π , en laat de middellijn van eenen cirkel gelijk zijn aan a éénheden van duimen, voeten, roeden, me-
ters; de omtrek, in de zelfde éénheden uitgedrukt, gelijk p , en de inhoud, in vierkanten van die éénheden, gelijk I ; dan hebben wij vooreerst, omdat de middellijnen der cirkels tot elkander, als de omtrekken staan, $1 : a = \pi : p$ en derhalve $p = a \pi$. REGEL. Men moet dus de middellijn met het *Ludolphiaans getal* ($\pi = 3,14159$) vermenigvuldigen, om den omtrek te verkrijgen.

§ 291. Maar, uit de vergelijking $p = a \pi$, volgt ook $a = \frac{p}{\pi}$; dat is, REGEL. Indien de omtrek van eenen cirkel gegeven is, moet men dien omtrek door het *Ludolphiaansch getal* deelen, om deszelfs middellijn te vinden.

§ 292. Wanneer men $p = a \pi$ vermenigvuldigt met de halve straal, dat is, met $\frac{1}{2}a$; dan verkrijgt men:

$$p \times \frac{1}{2}a = I = \frac{1}{2}\pi a^2 = 0,78539816 \times a^2.$$

REGEL. Men moet het vierkant van de halve middellijn, of het vierkant den straal, met het *Ludolphiaans getal* vermenigvuldigen om den inhoud te verkrijgen.

§ 293. Uit de vergelijking $I = \frac{1}{2}\pi a^2$ volgt $4I = \pi a^2$; $a^2 = \frac{4I}{\pi}$ en $a = 2\sqrt{\frac{I}{\pi}}$. REGEL. Om eens cirkel te be-

schrijven, die eenen gegebenen inhoud zal hebben, moet men viermaakt den inhoud door het *Ludolphiaansch getal* deelen, en uit het quotient den vierkants-wortel trekken.

1. VOORBEELD. Hoe lang is de omtrek van eenen cirkel, wiens middellijn 173.3 duimen groot is? Antw. 544.438 d.

2. VOORBEELD. Indien de straal van eenen cirkel 17,371 meters lang is, hoeveelmaal is dan één meter in den omtrek begrepen? Antw. 109,1453 maal.

3. VOORBEELD. Om den buitensten omtrek van een cirkel gonde kuip te vinden, heeft men eens kaard van het ene tot

G 3

het

het andere eind gespannen en deze koord bevonden 23 voet 7 duim lang te zijn; hoe groot is dan de middellijn buiten Werks? Antw. 7 voet 6 duim 0,98 lijnen.

5. VOORBEELD. Hoeveelmaat is een vierkante voet in eenen cirkel begrepen, wiens middellijn 3 voet 7 duim en 5 lijnen lang is? Antw. 10,28109 maal.

6. VOORBEELD. Met eenen straat, welke 1,372 meters lang is, is een cirkel beschreven; hoeveelmaal bevat zijn inhoud den inhoud van den vierkanten Meter? Antw. 4,31026 maal.

7. VOORBEELD. Hoe veel vierkante voeten bevat een cirkel, wiens omtrek 73,71 voeten lang is? Antw. 432,3573 v.

8. VOORBEELD. Hoe groot moet de middellijn van eenen cirkel genomen worden, op dat hij eenen inhoud van 769 vierkante voeten hebbe? Antw. 31,327 voeten.

9. VOORBEELD. Men rekest den omtrek van onze Aarde op 5400 Geographische mijlen of 7200 uren gaans: hoe veel Geographische mijlen en uren gaans zijn wij dan, op het oppervlak, van het middelpunt verwijderd? Antw. 859,44 mijl.

§ 294. Indien men zich in de berekening van deze voorbeelden van de Logarithmen wil bedienen, het geen oneindig gemakkelijker is, dan hebben wij om den omtrek uit de middellijn te vinden, de formule

$$\text{Log. } p = \text{Log. } a + 0,4971499 \dots \dots \dots (1)$$

Om de middellijn door den omtrek te vinden

$$\text{Log. } a = \text{Log. } p - 0,4971499 \dots \dots \dots (2)$$

Om de inhoud door de middellijn te vinden

$$\text{Log. } I = 2 \times \text{Log. } a - 0,1049101 \dots \dots \dots (3)$$

Om den inhoud door den omtrek te vinden

$$\text{Log. } I = 2 \text{ Log. } p - 1,0992099 \dots \dots \dots (4)$$

En om eindelijk de middellijn van eenen cirkel te vinden, die eenen gegebenen inhoud zal hebben,

$$\text{Log. } a = \frac{\text{Log. } I + 0,1059101}{2} \dots \dots \dots (5)$$

In de meeste dagelijkse gevallen, kan men zich met vijf cijfers van de tiendeeligen der Logarithmen vergenoegen.

§ 295

§ 295. V. STELLING. Fig. 117. De inhoud van eenen cirkel (ABC) staat tot den inhoud van eenen sector (AMB), tot dien cirkel behoorende, in dezelfde reden, als de omtrek van dien cirkel, tot den omtrek van den boog van dien sector.

BETOOG. Laat AD de gemeene maat van den omtrek ABC , en van den boog AB zijn; stel die gemeene maat in den omtrek des cirkels a maal en in den omtrek van den boog b maal begrepen. Trek den straal DM ; dan zal de sector ADM ook a maal in den inhoud des cirkels, en b maal in den inhoud van den sector AMB begrepen zijn; wij hebben dus:

$$\text{Inh. cirk. } ABC : \text{Inh. sect. } AMB = a : b$$

$$\text{Omt. } ABC : \text{omtr. boog } AB = a : b$$

en daaruit volgt dan:

$$\text{Inh. cirk. } ABC : \text{Inh. sect. } AMB = \text{omtr. cirk. } ABC : \text{omtr. boog } AB.$$

§ 296. Omdat de omtrek van eenen cirkel tot den omtrek van één' zijner bogen staat, gelijk 360° tot den hoek AMB , zoo zal ook de inhoud des cirkels tot den inhoud van den sector staan, als 360° tot den hoek (AMB), welke de stralen van den sector met elkander maken.

§ 297. VI. STELLING. Fig. 117. De inhoud van eenen cirkel-sector is gelijk aan deszelfs boog (AB), vermenigvuldigd met de helft van den straal des cirkels, tot welken dien sector behoort.

BETOOG. Want, indien men de termen van de tweede reden der evenredigheid,

$$\text{Inh. cirk. } ABC : \text{Inh. sect. } AMB = \text{omtr. } ABC : \text{boog } AB$$

met $\frac{1}{2} AM = \frac{1}{2} r$ vermenigvuldigt; dan zal men vinden:

$$\text{Inh. cirk. } ABC : \text{Inh. sect. } AMB = \text{omtr. } ABC \times \frac{1}{2} r : \text{boog } AB \times \frac{1}{2} r$$

nu is (zie § 288.) $\text{Inh. cirk. } ABC = \text{omtr. } ABC \times \frac{1}{2} r$; derhalve zal ook $\text{Inh. sect. } AMB = \text{boog } AB \times \frac{1}{2} r$ zijn.

§ 298. Men zal dan, wanneer de straal van eenen cirkel sector, en de hoek, welke deszelfs stralen met elkander ma-

G 4

ken,

ken, gegeven zijn, den inhoud van dien sector kunnen berekenen.

REGEL. Zoek den inhoud van den cirkel, volgens § 292, door het Ludolphiaans Getal te vermenigvuldigen met het vierkant van den gegebenen straal. Zeg dan 360° staat tot den hoek, welke de stralen van den sector met elkander maken, gelijk de inhoud van den cirkel, tot den inhoud van den sector.

VOORBEELD. Gegeven zijnde, (Fig. 117,) $AM = 36,3$ duim, hoek $AMB = 57^\circ$, den inhoud van den sector AMB te vinden? Antw. 655,44325 vierkante duimen.

§ 299. III. BEPALING. Fig. 117. Gelijkvormige sectoren ABM en abM zijn sectoren, die door onderscheidene stralen bepaald zijn, en aan het middelpunt gelijke hoeken maken.

§ 300. IV. BEPALING. Gelijkvormige segmenten AEB en aeb zijn segmenten, welke door gelijkvormige bogen bepaald zijn, of in welke gelijke hoeken kunnen geplaatst worden. Vergel. § 252.

§ 301. VII. STELLING. De inhouden van gelijkvormige sectoren en van gelijkvormige segmenten staan tot elkander, als de vierkanten hunner stralen, of als de vierkanten hunner koorden, of ook als de vierkanten, op hunne bogen beschreven.

BETOOG. 1°. Men heeft de evenredigheid, boog AEB : boog $aeb = AM: aM$; vermenigvuldig deze evenredigheid met de evenredigheid, $\frac{1}{2}AM: \frac{1}{2}aM = AM: aM$; dan verkrijgt men $Inh. Sect. AEBM: Inh. Sect. aebM = AM^2: aM^2$.

2°. Drieh. ABM : drieh. $abM = AM^2: aM^2$; derhalve is $Sect. ABM: Sect. abM = drieh. AMB: drieh. aMb$; waaruit dan volgen zal: $Segm. AEB: Segm. aeb = AM^2: aM^2$.

XI. HOOFDSTUK.

Over de Trigonometrie of Driehoeksmeting.

§ 302. **I**n de werkdadige Meetkunst is men dikwijls genoodzaakt, om, uit eenige bekende zijden of hoeken van eenen driehoek, die zijden of hoeken van denzelfden, welke men niet kent, te bepalen; dit kan nu wel altijd met de pleinschaal en den transporteur gemakkelijk worden uitgevoerd; doch, daar men, bij het gebruik dezer werktuigen, van derzelgebreken, en van de kleinheid hunner verdeelingen afhangt, is men wel genoodzaakt, om, in metingen, welke eenen grooteren graad van naauwkeurigheid vorderen, zijne toevlugt tot de berekening te nemen. Wij zullen, in dit Hoofdstuk, de gronden en het gebruik dezer regels leeren kennen.

§ 303. De ondervinding heeft geleerd: dat er, in eenen driehoek, drie van elkander onafhankelijke dingen (zijden of hoeken,) moeten gegeven zijn, om de andere zijden of hoeken te kunnen bepalen. Hier doen zich vier gevallen op.

1°. Wanneer ééne zijde met twee hoeken, (en bijgevolg ook de derde hoek) gegeven zijn.

2°. Wanneer twee zijden met éénen hoek, over ééne van die zijden staande, gegeven zijn.

3°. Wanneer twee zijden met den ingesloten hoek bekend zijn.

4°. Wanneer de drie zijden zijn gegeven.
Wanneer de drie hoeken van eenen driehoek gegeven zijn, blijft de driehoek onbepaald; omdat men een onnoemelijk aantal van driehoeken kan vinden, die onderling gelijkhoekig zijn: In dit geval kan men slechts de onderlinge verhouding der zijden vinden.

§ 304. Men onderscheidt de regthoekige driehoeken van de scheefhoekige; in dezelve is altijd de rechte hoek van zelven bekend; behalve dezen moeten dan gegeven zijn. 1°. *Of één regthoekszijde en één der scherpe hoeken.* 2°. *Of de hypothenusa en één der scherpe hoeken.* 3°. *Of de beide regthoekszijden.* 4°. *Of de schuinsche zijde met één der regthoekszijden.*

§ 305. Om de hoeken van eenen driehoek op eene gemakkelijke wijze met deszelfs zijden te kunnen vergelijken, heeft men voor elken hoek eenige lijnen uitgedacht, welke met dien hoek onafscheidelijk verknocht zijn en met denzelven veranderen. Deze lijnen noemt men *Goniometrische, Hoekmeetkundige Lijnen.*

§ 306. Laat (zie Fig. 118,) ABC eenigen hoek verbeelden. Beschrijf uit het hoekpunt B , met eene lijn BD , als fraal, welken wij, (het zij wij eenen hoek op zich zelven, of tot eenige andere figuur behoorende, beschouwen,) als de éénheid der lengtemaat, waarmede men de zijden der figuur meet, zullen aannemen, eenen cirkel $DEFGH$; dan is de boog DE de betrekkelijke maat van den hoek ABC ; want, zoo als die boog zich tot den geheelen omtrek verhoudt, alzo verhoudt zich de hoek ABC tot vier rechte hoeken.

Men trekke door het hoekpunt B de onbepaalde loodlijn FH , en verleng AB naar welgevallen; dan is de hoek CBF het complement en de hoek CBG het supplement van den hoek ABC ; gelijk ook de boog EF het complement, en de boog EFG het supplement van den boog DE genoemd wordt. Trekt men verder de onbepaalde lijnen PQ en RS , den cirkel in de punten D en F aanrakende; dan noemt men de lijn PQ de lijn der tangenten, en RS de lijn der cotangenten; indien men verder EI loodregt op AB en EK , loodregt op BF trekt; dan noemt men:

1°. De lijn $EI = BK$ de *Sinus* van den hoek ABC , of van den boog DE .

2°. De lijn $EK = BI$ de *Cofinus* van den hoek ABC , of van den boog DE .

3°. De

3°. De lijn DL de *Tangens* van den hoek ABC , of van den boog DE .

4°. De lijn BM de *Secans* van den hoek ABC , of van den boog DE .

5°. De lijn FM de *Cotangens* van den hoek ABC , of van den boog DE .

6°. De lijn BM de *Cofecans* van den hoek ABC , of van den boog DE .

Het blijkt hier uit: dat de *sinus, cosinus, tangens, cotangens, secans en cofecans* van eenen boog, is de *cosinus, sinus, cotangens, tangens, cofecans en secans* van het complement van dien boog. Wanneer dus a een zekeren boog beteekent; dan is $90^\circ - a$ het complement van dien boog, en wij hebben dan deze vergelijkingen:

$$\begin{array}{l|l} \text{Sin. } a = \text{Cos. } (90^\circ - a) & \text{Cot. } a = \text{Tang. } (90^\circ - a) \\ \text{Cos. } a = \text{Sin. } (90^\circ - a) & \text{Sec. } a = \text{Cofec. } (90^\circ - a) \\ \text{Tang. } a = \text{Cot. } (90^\circ - a) & \text{Cofec. } a = \text{Sec. } (90^\circ - a) \end{array}$$

Men vergelijke de figuren 119, 120 en 121 met Fig. 118, en men zal zien: wat de opgenoemde Goniometrische Lijnen worden, ingeval de hoeken of bogen, tot welke zij behooren, in het tweede, derde of vierde quadrant vallen.

In het vervolg zal *Sin. a* beteekenen de sinus van den hoek of boog a ; *Cos. (a + b)* de cosinus van de som der hoeken of bogen a en b ; *Tang. (a - b)* zal beteekenen de tangens van het verschil der bogen a en b , enz.

§ 307. Uit de figuren 118, 119, 120 en 121 is ligtelijk het volgende op te maken.

1°. In de gelijke en gelijkvormige regthoekige driehoeken BIE en BKE is, (zie § 221,) $EP^2 + BI^2 = BE^2$, of $BK^2 + EK^2 = BE^2$; dat is, de boog $DE = a$ stellende,

$$\text{Sin}^2 a + \text{Cos}^2 a = 1 \dots \dots (1)$$

2°. In den regthoekigen driehoek BDL is $BL^2 = BD^2 + DL^2$; dat is:

$$\text{Sec}^2 a = 1 + \text{Tang}^2 a \dots \dots (2)$$

3°. In den regthoekigen driehoek BFM is $BM^2 = BF^2 + FM^2$; dat is:

$$\text{Cofec}^2 a = 1 + \text{Cot}^2 a \dots \dots (3)$$

4°. De

4°. De gelijkvormige regthoekige driehoeken *BIE* en *BDL* geven de evenredigheid, $BI : IE = BD : DL$; dat is $\text{Cos. } a : \text{Sin. } a = 1 : \text{Tang. } a$, en derhalve

$$\text{Tang. } a = \frac{\text{Sin. } a}{\text{Cos. } a} \dots (4)$$

5°. De gelijkvormige driehoeken *BKE* en *BFM* geven de evenredigheid, $BK : KE = BF : FM$; dat is, $\text{Sin. } a : \text{Cos. } a = 1 : \text{Cot. } a$; men zal derhalve hebben:

$$\text{Cot. } a = \frac{\text{Cos. } a}{\text{Sin. } a} \dots (5)$$

6°. Vermenigvuldigt men de (4) met de (5) vergelijking; dan verkrijgt men:

$$\text{Tang. } a \times \text{Cos. } a = 1 \dots (6)$$

en uit deze volgt dan verder:

$$\text{Tang. } a = \frac{1}{\text{Cos. } a} \dots (7) \text{ en } \text{Cos. } a = \frac{1}{\text{Tang. } a} \dots (8)$$

7°. De gelijkvormige driehoeken *BIE* en *BDL* geven verder de evenredigheid, $BI : BE = BD : BL$; dat is, $\text{Cos. } a : 1 = 1 : \text{Sec. } a$, en hieruit volgt dan:

$$\text{Sec. } a = \frac{1}{\text{Cos. } a} \dots (9) \text{ en } \text{Cos. } a = \frac{1}{\text{Sec. } a} \dots (10)$$

8°. De gelijkvormige driehoeken *BKE* en *BFM* geven de evenredigheid, $BK : BE = BF : BM$; of, $\text{Sin. } a : 1 = 1 : \text{Cofec. } a$; derhalve:

$$\text{Cofec. } a = \frac{1}{\text{Sin. } a} \dots (11) \text{ en } \text{Sin. } a = \frac{1}{\text{Cofec. } a} \dots (12)$$

§ 308. Deze twaalf vergelijkingen of formules leeren hoe de Goniometrische Lijnen van den zelfden hoek of boog van elkander afhangen: maar behalve deze zijn nog de volgende volstrekt onontbeerlijk:

$$\text{Sin. } (a+b) = \text{Sin. } a \times \text{Cos. } b + \text{Sin. } b \times \text{Cos. } a \dots (13)$$

$$\text{Sin. } (a-b) = \text{Sin. } a \times \text{Cos. } b - \text{Sin. } b \times \text{Cos. } a \dots (14)$$

$$\text{Cos. } (a+b) = \text{Cos. } a \times \text{Cos. } b - \text{Sin. } a \times \text{Sin. } b \dots (15)$$

$$\text{Cos. } (a-b) = \text{Cos. } a \times \text{Cos. } b + \text{Sin. } a \times \text{Sin. } b \dots (16)$$

(zie *Beg. der Meetk. III. Stel. VIII B.*) Stelt men in formule (13) en (15) $a = b$; dan vindt men:

Sin.

$$\text{Sin. } 2a = 2 \text{ Sin. } a \times \text{Cos. } a \dots (17)$$

$$1 - \text{Cos. } a = 2 \text{ Sin}^2 \frac{1}{2} a \dots (18)$$

$$1 + \text{Cos. } a = 2 \text{ Cos}^2 \frac{1}{2} a \dots (19)$$

Deelt men formule (13) door formule (15); dan verkrijgt men, na behoorlijke herleiding:

$$\text{Tang. } (a+b) = \frac{\text{Tang. } a + \text{Tang. } b}{1 - \text{Tang. } a \times \text{Tang. } b} \dots (20)$$

$$\text{Tang. } (a-b) = \frac{\text{Tang. } a - \text{Tang. } b}{1 + \text{Tang. } a \times \text{Tang. } b} \dots (21)$$

en wanneer men, in deze laatste, $b = 45^\circ$ stelt; dan verkrijgt men:

$$\text{Tang. } (a + 45^\circ) = \frac{1 + \text{Tang. } a}{1 - \text{Tang. } a} \dots (22)$$

$$\text{Tang. } (a - 45^\circ) = \frac{1 - \text{Tang. } a}{1 + \text{Tang. } a} \dots (23)$$

Uit de formules (13), (14), (15) en (16) vindt men nog door optellen en aftrekken.

$$\text{Sin. } a \times \text{Sin. } b = \frac{1}{2} \text{Cos. } (a-b) - \frac{1}{2} \text{Cos. } (a+b) \dots (24)$$

$$\text{Cos. } a \times \text{Cos. } b = \frac{1}{2} \text{Cos. } (a+b) + \frac{1}{2} \text{Cos. } (a-b) \dots (25)$$

$$\text{Sin. } p + \text{Sin. } q = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} (p+q) \times \text{Cos. } \frac{1}{2} (p-q) \dots (26)$$

$$\text{Sin. } p - \text{Sin. } q = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} (p-q) \times \text{Cos. } \frac{1}{2} (p+q) \dots (27)$$

$$\text{Cos. } p + \text{Cos. } q = 2 \text{ Cos. } \frac{1}{2} (p+q) \times \text{Cos. } \frac{1}{2} (p-q) \dots (28)$$

$$\text{Cos. } q - \text{Cos. } p = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} (p+q) \times \text{Sin. } \frac{1}{2} (p-q) \dots (29)$$

Ook vindt men uit de vier laatste formules:

$$\text{Sin. } a + \text{Sin. } b : \text{Sin. } a - \text{Sin. } b = \text{Tang. } \frac{1}{2} (a+b) : \text{Tang. } \frac{1}{2} (a-b) \dots (30)$$

$$\text{Cos. } a + \text{Cos. } b : \text{Cos. } b - \text{Cos. } a = \text{Cot. } \frac{1}{2} (a+b) : \text{Tang. } \frac{1}{2} (a-b) \dots (31)$$

$$\text{Tang. } a + \text{Tang. } b : \text{Tang. } a - \text{Tang. } b = \text{Sin. } (a+b) : \text{Sin. } (a-b) \dots (32)$$

Het betoog van deze en meer andere formules, welke wij hier als de meest onontbeerlijke hebben opgegeven, vindt men in het VIII Boek onzer *Beginfelen*.

§ 309. Men verbeelde zich, dat men (den straal *BD* van den metenden cirkel, *Fig. 118—121*, gelijk aan de éénheid genomen hebbende,) voor elken boog van het eerste quadrant, van minuit tot minuit, of van tien tot tien secunden, de lengte van de Sinus, Cosinus, Tangens en Cotangens, in tiende, honderdste, duizendste deelen, enz. van den straal be-

re-

rekend en de waarde van alle die lijnen in eene Tafel vereenigd hebbe; dan is die tafel de *Natuurlijke Sinus-Tafel*, waarvan men zich in de Platte en Sphærische Driehoeksmetingen bedient. Men gebruikt echter doorgaans, (omdat de berekeningen daardoor aanmerkelijk verligt worden,) de *Logarithmus-Sinus-Tafel*, in welke de Logarithmen der getallen, die de waarde van elken Sinus, Cosinus, Tangens en Cotangens voorstellen, in plaats van die getallen zelf, genomen zijn. Om deze laatste Tafel te kunnen gebruiken, moet met den aard en het gebruik der Logarithmen bekend zijn. Alles, wat tot de kennis van den aard en het gebruik der Logarithmen betrekking heeft, vindt men in onze *Allereerste Gronden der Cijferkunst*, LII LES en verv. voorgedrag. De beste Tafels zijn die van CALLET. Zien wij nu, hoe de Goniometrische Lijnen op het berekenen der Driehoeken worden toegepast. Wij zullen, in de volgende Stellingen, eerst de hoofdgrondwaarheden voordragen, en daarna dezelve op de oplossing van alle de gevallen der Driehoeksmeting toepassen.

§ 310. I. STELLING. Fig. 122. In elken regthoekigen driehoek is. 1°. Elke regthoekszijde gelijk aan de andere regthoekszijde, vermenigvuldigd met de tangens van den hoek over deze eerste regthoekszijde staande. 2°. De schuinsche zijde is gelijk aan ééne der regthoekszijde, gedeeld door de Cosinus van den hoek, aan die regthoekszijde. 3°. Elke regthoekszijde is gelijk aan de schuinsche zijde, vermenigvuldigd met de Sinus van den hoek, over die regthoekszijde staande. 4°. Of gelijk aan de schuinsche zijde, vermenigvuldigd met de Cosinus van den scherpen hoek aan die regthoekszijde. Dat is: 1°. $BC = AB \times \text{Tang. } A$. 2°. $AC = AB : \text{Cos. } A$. 3°. $BC = AC \times \text{Sin. } A$; en $AB = AC \times \text{Cos. } A$.

BETOOG. Laat met AD , gelijk zijnde aan de éénheid van de lengtemaat, den cirkelboog DE beschreven worden; trek dan DF en EG regthoekig op AB ; dan is DF de tangens

gers van hoek A ; EG de sinus van A en AG de cosinus van A ; de regthoekige gelijkvormige driehoeken ABC , ADF en AGE geven dan de evenredigheden:

$$AD : DF = AB : BC; \text{ of } 1 : \text{Tang. } A = AB : BC$$

$$AG : AE = AB : AC \quad \text{Cos. } A : 1 = AB : AC$$

$$AE : EG = AC : BC \quad 1 : \text{Sin. } A = AC : BC$$

$$AE : AG = AC : AB \quad 1 : \text{Cos. } A = AC : AB$$

Lost men uit deze evenredigheden de vierde evenredige op, dan verkrijgt men:

$$BC = AB \times \text{Tang. } A; AC = \frac{AB}{\text{Cos. } A}; BC = AC \times \text{Sin. } A;$$

$$AB = AC \times \text{Cos. } A$$

§ 311. II. STELLING. Fig. 123. In elken driehoek staan de zijden tot elkander, in dezelfde reden, als de sinusfen der tegenoverstaande hoeken; dat is:

$$AC : BC = \text{Sin. } B : \text{Sin. } A$$

$$AC : AB = \text{Sin. } B : \text{Sin. } C$$

$$BC : AB = \text{Sin. } A : \text{Sin. } C$$

BETOOG. Laat uit C de lijn CD loodrecht op AB vallen; dan heeft men, in de regthoekige driehoeken ACD en BCD , volgens de voorgaande Stelling, $CD = AC \times \text{Sin. } A = BC \times \text{Sin. } B$; en derhalve $AC : BC = \text{Sin. } B : \text{Sin. } A$.

§ 312. BERIGT. Wij zullen, in het vervolg, de zijden van eenen driehoek uitdrukken door dezelfde letters, als de tegenoverstaande hoeken; de hoeken echter door hoofdletters A , B , C , en de zijden, over dezelve staande, door kleine letters a , b , c . Wij zullen dus, in plaats van AB , AC en BC , schrijven c , b en a .

§ 313. III. STELLING. Fig. 123. In elken driehoek is de som van twee zijden tot derzelver verschil, gelijk de tangens van het complement van den halven ingesloten hoek, tot de tangens van het halve verschil der twee andere hoeken; dat is,

$$a + b : a - b = \text{Tang. } (90^\circ - \frac{1}{2}C) : \text{Tang. } \frac{1}{2}(A - B)$$

B.

BETOOG. Volgens de voorgaande Stelling is

$$a : b = \sin. A : \sin. B$$

derhalve zal men ook kunnen stellen:

$$a + b : a - b = \sin. A + \sin. B : \sin. A - \sin. B.$$

maar volgens de (30) form. Bladz. 109 is *

$$\sin. A + \sin. B : \sin. A - \sin. B = \text{Tang. } \frac{1}{2}(A+B) : \text{Tang. } \frac{1}{2}(A-B)$$

derhalve

$$a + b : a - b = \text{Tang. } \frac{1}{2}(A+B) : \text{Tang. } \frac{1}{2}(A-B)$$

Nu is $A + B + C = 180^\circ$; derhalve $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90^\circ$, en $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 90^\circ - \frac{1}{2}C$ en $\text{Tang. } \frac{1}{2}(A+B) = \text{Tang. } (90^\circ - \frac{1}{2}C)$

de laatste evenredigheid wordt derhalve:

$$a + b : a - b = \text{Tang. } (90^\circ - \frac{1}{2}C) : \text{Tang. } \frac{1}{2}(A-B)$$

§ 314. IV. STELLING. Fig. 123. In elken driehoek is het vierkant van ééne der zijden gelijk aan de som van de vierkanten der twee andere zijden, verminderd met tweemaal het product dezer zijden, vermenigvuldigd met de Cosinus van den ingesloten hoek. Dat is,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos. A.$$

BETOOG. Laat uit het hoekpunt van den tophoek, de lijn CD loodrecht op de basis vallen, dan is, volgens § 229:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$$

maar in den rechthoekigen driehoek ADC is, zie § 310, $AD = AC \times \cos. A$, derhalve is

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AC \times \cos. A$$

of wel, $BC = a$, $AC = b$ en $AB = c$ stellende,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos. A.$$

§ 315. Wanneer de hoek A stomp wordt; dan moet het teeken van den term $2bc \times \cos. A$, van — in + veranderd worden.

§ 316. V. STELLING. Wanneer men van de halve som van de drie zijden van eenen driehoek twee zijden naar welgevallen genomen, elk afzonderlijk af-trekt,

trekt, en het product dezer verschillen door het product dezer zijden deelt; dan zal de vierkants-wortel uit het quotant gelijk zijn aan de sinus van de helft van den hoek, welke tusschen deze zijden gelegen is. Dat is,

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

BETOOG. Uit de voorgaande Stelling is gebleken, dat $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos. A$ is; hieruit volgt dan:

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

men trekke deze vergelijking af van $1 = 1$; dan heeft men:

$$1 - \cos. A = \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

In plaats van $1 - \cos. A$, kan men, Zie 18 form. Bladz. 109, schrijven $2 \sin^2. \frac{1}{2} A$, en volgens § 219 is

$a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c) \times (a+b-c)$; derhalve

$$2 \sin^2. \frac{1}{2} A = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$$

en, alles door twee deelende,

$$\sin^2. \frac{1}{2} A = \frac{(a-b+c) \times (a+b-c)}{4bc}$$

Stelt men nu $s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$; dan is $s-b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(a-b+c)$ en $s-c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(a+b-c)$; de laatste vergelijking wordt dan:

$$\sin^2. \frac{1}{2} A = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

en hieruit den vierkants-wortel trekkende, zal men verkrijgen:

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

§ 317. VI. STELLING. Fig. 123. De inhoud van elken driehoek is gelijk aan het halve product van twee zijner zijden, vermenigvuldigd met de Sinus van den halven ingesloten hoek. Dat is

$$\text{Inh. drieh. } ABC = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin. A.$$

114 ALLEREERSTE GRONDEN DER

BETOOG. Volgens § 152 is, *inhoud driehoek ABC* $= \frac{1}{2} AB \times CD$; maar (zie § 310) $CD = AC \times \sin. A$; derhalve is *inh. drieh. ABC* $= \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin. A$

§ 318. Hiervuit volgt (Fig. 124) dat *inhoud driehoek ABC* $= \frac{1}{2} AB \times CD \times \sin. BDC$ is.

§ 319. VII. STELLING. Fig. 123. De inhoud van eenen driehoek ABC is gelijk aan de helft van het vierkant van ééne zijner zijden, vermenigvuldigd met het product van de Sinusfen van de aangelegene hoeken, gedeeld door de Sinus van den tegenoverstaanden hoek. Dat is:

$$\text{Inh. drieh. } ABC = \frac{1}{2} AB^2 \times \frac{\sin. A \times \sin. B}{\sin. C}$$

BETOOG. Uit de voorgaande Stelling is gebleken; dat

$$\text{Inh. drieh. } ABC = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin. A$$

Nu is $\sin. C : \sin. B = AB : BC$; derhalve $BC = \frac{AB \times \sin. B}{\sin. C}$;

stelt men deze waarde van AC in de voorgaande vergelijking; dan verkrijgt men:

$$\text{Inh. drieh. } ABC = \frac{1}{2} AB^2 \times \frac{\sin. A \times \sin. B}{\sin. C}$$

A GEVALLEN der Regthoekige Driehoeken.

§ 320. I. GEVAL. Fig. 122. Van eenen regthoekigen driehoek gegeven zijnde ééne der regthoekszijde en één der scherpe hoeken; den anderen scheven hoek, benevens de onbekende zijde, te vinden?

FORMULEN. Laat gegeven zijn de zijde AB met den scheven hoek A; dan is 1°. $C = 90^\circ - A$; 2°. $BC = AB \times \tan. A$, en $AC = AB : \cos. A$. Hiernit volgt dezen

REGEL. 1°. Trek den bekenden scherpen hoek van 90° ; dan is het verschil gelijk aan den onbekenden scherpen hoek.

2°. Vermenigvuldig de gegebene regthoekszijde, met de tangens van den aangelegenen scherpen hoek; dan is het product gelijk aan de onbekende regthoekszijde.

3°.

MEETKUNST. I. AFDEEL. XI. HOOFDST. 115

3°. Deel de gegebene regthoekszijde door de cosinus van den scherpen hoek, gelegen aan de gegebene regthoekszijde; het quotient zal gelijk zijn aan de hypotenusa.

Wil men in Logarithmen werken, dan is

$$\log. BC = \log. AB + \log. \tan. A$$

$$\log. AC = \log. AB - \log. \cos. A$$

VOORBEELD. Fig. 125. Om de hoogte AB van een gebouw te bepalen, is men van den voet van dit gebouw op den waterpas liggende grond achteruitgegaan, en heeft eenen willekeurigen afstand BD van 64 voeten gemeten; in D een astrolabium op deszelfs voet CD geplaatst, en bevonden den hoek AEC $= 57^\circ 30'$; men vraagt hoe veel voeten het punt A (het bovenste van den gevel) boven de horizontale lijn verheven zij? zijnde $CD = 4\frac{1}{2}$ voet.

BEREKENING. Omdat de lijn $EC = BD = 64$ voeten is, en in den driehoek CEA, volgens § 310, $AE = CE \times \tan. ACE$; zoo rekent men aldus.

$$\log. CE = 1,8061800 \quad \left. \begin{array}{l} \log. CE = 1,8061800 \\ \log. \tan. ACE = 0,1958127 \end{array} \right\} \text{optellen.}$$

$$\log. \tan. ACE = 0,1958127$$

$$\log. AE = 2,0019927$$

$$AE = 100,5 \text{ voeten.}$$

Telt men hier bij $CD = BE = 4,5$ voeten, zoo verkrijgt men, voor de hoogte van het gebouw, boven den grond, $AB = 105$ voeten.

2 VOORBEELD. Fig. 122. Gegeven zijnde $BC = 217$, en hoek $A = 36^\circ 43'$; den hoek C, de zijden AB en AC, te vinden?

$$C = 90^\circ - A = 90^\circ - 36^\circ 43' = 53^\circ 17'$$

$$\log. BC = 2,3364597 \quad \left. \begin{array}{l} \log. BC = 2,3364597 \\ \log. \tan. C = 0,1273604 \end{array} \right\}$$

$$\log. \tan. C = 0,1273604 \quad \left. \begin{array}{l} \log. BC = 2,3364597 \\ \log. \cos. C = 9,7765983 \end{array} \right\}$$

$$\log. AB = 2,4638201 \quad \left. \begin{array}{l} \log. AB = 2,4638201 \\ \log. AC = 2,5598614 \end{array} \right\}$$

$$AB = 290,95 \quad AC = 326,96$$

§ 321. II. GEVAL. Fig. 122. Van eenen regthoekigen driehoek gegeven zijnde de schuinsche zijde, met ééne der scherpe hoeken, den anderen scherpen hoek, benevens de twee regthoekszijden, te vinden?

FORMULEN. Laat gegeven zijn, de schuinsche zijde AC en den scherpen hoek A ; dan is $C = 90^\circ - A$; $BC = AC \times \sin A$, en $AB = AC \times \cos A$. Hier uit volgt dezen

REGEL. 1°. Trek den bekenden scherpen hoek van 90° ; dan is, het verschil de onbekende scherpe hoek.

2°. Vermenigvuldig de schuinsche zijde met de Sinus van den gegebenen scherpen hoek; dan verkrijgt gij de regthoekszijde, welke over dien scherpen staat.

3°. En deze zelfde schuinsche zijde, vermenigvuldigd hebbende met de Cosinus van den gegeven hoek; dan verkrijgt gij de regthoekszijde, welke aan dien scherpen hoek gelegen is.

Wilt men met Logarithmen werken; dan is

$$\text{Log. } BC = \text{Log. } AC + \text{Log. } \sin A$$

$$\text{Log. } AB = \text{Log. } AC + \text{Log. } \cos A$$

VOORBEELD. Fig. 122. Laat gegeven zijn $AC = 314$ en hoek $A = 41^\circ 27'$; dan hoek C , benevens de regthoekszijden te vinden?

$$C = 90^\circ - 41^\circ 17' = 47^\circ 33'$$

$$\text{Log. } AC = 2,4969296 \quad \text{Log. } AC = 2,4969296$$

$$\text{Log. } \sin A = 9,8208358 \quad \text{Log. } \cos A = 9,8747910$$

$$\text{Log. } BC = 2,3177654 \quad \text{Log. } AB = 2,3717208$$

$$BC = 207,16 \quad AB = 235,35$$

§ 321. III. GEVAL. Fig. 122. De twee regthoekszijden gegeven zijnde, de scherpe hoeken en de schuinsche zijde te vinden?

$$\text{FORMULEN. } \tan A = \frac{BC}{AB} \text{ en } AC = \frac{AB}{\cos A}$$

uit deze formules volgt dan dezen

REGEL. 1°. Deel ééne der regthoekszijden door de tweede, het quotient zal zijn de tangens van den hoek, tegen over de eerste regthoekszijde.

2°. Indien men dezen gevonden hoek van 90° afstrekt; dan verkrijgt men den anderen scherpen hoek.

3°. Deel de regthoekszijde, welke aan den eerst gevonden hoek

gelegen is, door de Cosinus van dien hoek; dan zal het quotient de schuinsche zijde geven.

In Logarithmen werkende, heeft men:

$$\text{Log. } \tan A = \text{Log. } BC - \text{Log. } AB$$

$$\text{Log. } AC = \text{Log. } AB - \text{Log. } \cos A$$

VOORBEELD. Fig. 122. Gegeven zijnde, $AB = 823$ en $BC = 716$; de scherpe hoeken A en C , benevens de schuinsche zijde, AC te vinden?

$$\text{Log. } BC = 2,8549130$$

$$\text{Log. } AB = 2,9201233$$

$$\text{Log. } AB = 2,9201233$$

$$\text{Log. } \cos A = 9,8796514$$

$$\text{Log. } \tan A = 9,9347897$$

$$A = 40^\circ 42' 52'' ,3$$

$$C = 49^\circ 17' 7'' ,7$$

$$\text{Log. } AC = 3,0404719$$

$$AC = 1097,67$$

§ 323. IV. GEVAL. Fig. 122. De schuinsche zijde, met ééne der regthoekszijden gegeven zijnde; de scherpe hoeken, met de andere regthoekszijde, te vinden.

FORMULEN. Laat, gegeven zijn AB en AC ; dan is $\cos A = \frac{AB}{AC}$, $C = 90^\circ - A$, en $BC = AB \times \tan A$.

REGEL. 1°. Deel de gegebene regthoekszijde door de schuinsche; dan zal het quotient gelijk zijn aan de Cosinus van den hoek, welke tuschen deze schuinsche en regthoekszijde gelegen is.

2°. Trek den gevonden hoek af van 90° ; dan zal het verschil den anderen scherpen hoek doen bekend worden.

3°. Vermenigvuldig de gegebene regthoekszijde, met de Tangens van den eerst gevondenen scherpen hoek; dan zal het product de onbekende regthoekszijde geven.

In Logarithmen werkende, heeft men:

$$\text{Log. } \cos A = \text{Log. } AB - \text{Log. } AC$$

$$\text{Log. } BC = \text{Log. } AB + \text{Log. } \tan A$$

VOORBEELD. Fig. 122. Laat gegeven zijn, $AB = 193$ en $AC = 250$; om de hoeken A en C , benevens de schuinsche zijde BC , te vinden?

H 3

Log.

$\text{Log. } AB = 2,2855573$	$\text{Log. } AB = 2,2855573$
$\text{Log. } AC = 2,4014005$	$\text{Log. Tang. } A = 9,9240483$
$\text{Log. Cos. } A = 9,8841568$	$\text{Log. } BC = 2,2096056$
$A = 40^\circ 0' 54'' .9$	$BC = 162,034$
$C = 49^\circ 59' 5'' .1$	

B. GEVALLEN der Scheefhoekige Driehoeken.

§ 324. I. GEVAL. Fig. 123. Van eenen scheefhoekigen ABC gegeven zijnde ééne zijde, benevens twee van derzelver hoeken, den derden hoek en de twee andere zijden te vinden.

FORMULEN. Laat gegeven zijn de zijde AB , benevens de hoeken A en B ; dan is $C = 180^\circ (A + B)$. Voorts

$$\text{Sin. } C : \text{Sin. } B = AB : AC$$

$$\text{Sin. } C : \text{Sin. } B = AB : BC$$

$$AB = \frac{AB}{\text{Sin. } C} \times \text{Sin. } B \text{ en } BC = \frac{AB}{\text{Sin. } C} \times \text{Sin. } A$$

REGEL. 1°. Trekt de som der twee gegebene hoeken van 180° af; dan is het verschil de derde onbekende hoek.

2°. Deel de gegebene zijde door de sinus van den hoek, welke tegen over denzelfven staat; noem dit komende quotient het getal M

3°. Om ééne der onbekende zijden te vinden, zoo vermenigvuldig het getal M met de sinus van den hoek, welke over die zijde staat, het product zal die onbekende zijde zijn.

AANMERKING. Wanneer men in de berekening van dit of van het volgende geval, de sinus van eenen stompen hoek, moet zoeken; dan moet men de sinns van het supplement van dien stompen hoek nemen.

VOORBEELD. Fig. 126. Om, door berekening te vinden, hoe ver men in een punt A , van een ver afgelegen voorwerp, bij voorbeeld, eenen toren C verwijderd zij? zoo metz men een onbepaalde lijn AB , stel deze gelijk te zijn aan 817 meters; voorts waargenomen hebbende de hoeken A en B , te weten: hoek

$$A =$$

$A = 67^\circ 19'$ hoek $B = 78^\circ 17'$, zoo vraagt men: hoe ver de punten A en B van het voorwerp C verwijderd zijn.

$$A = 67^\circ 19'$$

$$B = 78^\circ 17'$$

$$A + B = 145^\circ 36'$$

$$C = 34^\circ 24' = \text{suppl. } (A + B)$$

$$\begin{array}{l} \text{Log. } AB = 2,9122221 \\ \text{Log. Sin. } C = 9,7520231 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Log. } AB \\ \text{Log. Sin. } C \end{array}} \right\} \text{af trekken.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Log. } M = 3,1601990 \\ \text{Log. Sin. } B = 9,9912184 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Log. } M = 3,1601990 \\ \text{Log. Sin. } A = 9,9650371 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Log. } AC = 3,1514174 \\ AC = 1417,16 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Log. } BC = 3,1252361 \\ BC = 1334,25 \end{array}$$

§ 325. II. GEVAL. Fig. 123. Twee zijden AC en BC , benevens één der hoeken A of B , tegen over die zijden staande, gegeven zijnde; de twee onbekende hoeken, benevens de derde zijde, te vinden.

FORMULEN. Laat gegeven zijn AC en BC , benevens de hoek A . Stel dan de evenredigheid: $BC : AC = \text{Sin. } A : \text{Sin. } B$; waaruit $\text{Sin. } B = \frac{AC \times \text{Sin. } A}{BC}$. In deze formule moet altijd $BC > AC \times \text{Sin. } A$ zijn; zoo niet, dan zijn de gegevens onbestaanbaar.

Tot $\text{Sin. } B$ behooren twee hoeken: 1°. de hoek, dien men in de Tafel vindt, en die is scherp; 2°. het supplement van dien hoek. De omstandigheden moeten in het werkdadige leeren, welk dezer twee hoeken behoort genomen worden.

De onbekende hoek C wordt gevonden door de formule $C = 180^\circ - (A + B)$.

De zijde AB eindelijk, door te stellen $\text{Sin. } A : \text{Sin. } C = BC : AB$, waaruit $AB = \frac{BC \times \text{Sin. } C}{\text{Sin. } A}$.

Dit geval komt ten uiterste zeldzaam voor.

§ 326. III. GEAAL. Fig. 123. Twee zijden AC en BC , of a en b , met den ingesloten hoek C , gegeven zijnde, de onbekende hoeken, benevens de derde zijde, te vinden.

OPLOSSING. Volgens de derde Stelling, is

$$a + b : a - b = \text{Tang. } (90^\circ - \frac{1}{2} C) : \text{Tang. } \frac{1}{2} (A - B)$$

hieruit de vierde evenredige oplosfende is, indien wij $\frac{1}{2} (A - B) = M$ stellen.

$$\text{Tang. } M = \frac{a - b}{a + b} \times \text{Tang. } (90^\circ - \frac{1}{2} C)$$

deelt men teller en noemer van het gebroken $\frac{a - b}{a + b}$ door b ; dan verkrijgt men:

$$\text{Tang. } M = \frac{a : b - 1}{a : b + 1} \times \text{Tang. } (90^\circ - \frac{1}{2} C)$$

Nu kan men $\frac{a}{b} = \text{Tang. } \phi$ stellen, en dan wordt de vergelijking

$$\text{Tang. } M = \frac{\text{Tang. } \phi - 1}{\text{Tang. } \phi + 1} \times \text{Tang. } (90^\circ - \frac{1}{2} C)$$

Maar (Form. 23. Bl. 109) $\frac{\text{Tang. } \phi - 1}{\text{Tang. } \phi + 1} = \text{Tang. } (\phi - 45^\circ)$; dus

$$\text{Tang. } M = \text{Tang. } (\phi - 45^\circ) \times \text{Tang. } (90^\circ - \frac{1}{2} C)$$

door de berekening van deze formule, vindt men den hoek M . Nu heeft men verder:

$$\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B = 90^\circ - \frac{1}{2} C$$

$$\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B = M$$

derhalve zal

$$A = (90^\circ - \frac{1}{2} C) + M$$

$$B = (90^\circ - \frac{1}{2} C) - M$$

zijn, en de zijde $AB = c$ wordt door ééne dezer twee evenredigheden gevonden:

$$\text{Sin. } A : \text{Sin. } C = a : c$$

$$\text{Sin. } B : \text{Sin. } C = b : c$$

FORMULEN. Laat a de grootste en b de kleinste der twee gegeven zijden zijn; dan is.

$$1^\circ. \quad \frac{a}{b} = \text{Tang. } \phi$$

$$2^\circ. \quad \text{Tang. } M = \text{Tang. } (\phi - 45^\circ) \times \text{Tang. } (90^\circ - \frac{1}{2} C)$$

$$3^\circ. \quad \begin{cases} A = (90^\circ - \frac{1}{2} C) + M \\ B = (90^\circ - \frac{1}{2} C) - M \end{cases}$$

$$4^\circ. \quad C = \frac{a \times \text{Sin. } C}{\text{Sin. } A} = \frac{b \times \text{Sin. } C}{\text{Sin. } B}$$

Dit stelsel van formules geeft dan den volgenden zeer gemakkelijk te onthouden.

REGEL 1°. Trek de Logarithmus van de kleinste der twee gegeven zijden van den Logarithmus van de grootste zijde af; beschouw het verschil, als de Tangens van zekeren hoek ϕ , welke altijd grooter dan 45° zal zijn.

2°. Trek van dien hoek 45° af, trek ook de helft van den ingesloten hoek van 90° ; tel de Logarithmen van de Tangenten dezer verschillen bij elkander; dan verkrijgt men de Logarithmus tangens van den hulphoek M .

3°. Tel dezen laatst gevonden hoek M bij $90^\circ - \frac{1}{2} C$ op, en trek denzelven van $90^\circ - \frac{1}{2} C$ af; dan is de som de grootste en het verschil de kleinste der onbekende hoeken; staande in elken driehoek de grootste hoek tegen over de grootste zijde.

4°. Om de onbekende zijde te vinden, tel de Logarithmus van ééne der gegeven zijden bij de Logarithmus Sinus van den ingesloten hoek en trek van de som de Logarithmus Sinus van den hoek, welke tegen over deze bekende zijde staat, het verschil zal de Logarithmus van de onbekende zijde zijn.

VOORBEELD. Fig. 240. Wetende, dat men, in het punt C , van de punten A en B , de volgende affianden heeft, $AC = b = 2839^m,7$; $BC = a = 4309^m,73$; indien dan de hoek C , naauwkeurig gemeten zijnde, bevonden wordt, gelijk te zijn aan $56^\circ 39' 33''$, vraagt men: niet allen, de hoegrootheid van de hoeken A en B ; maar ook voornamelijk den afstand van de punten A en B van elkander te vinden?

1°. Berekening der Hoeken.

Gegeven $C = 56^{\circ} 39' 33'', 4$

$\frac{1}{2} C = 28^{\circ} 19' 46'', 7$

$90^{\circ} - \frac{1}{2} C = 61^{\circ} 40' 14'', 3$

Log. $a = 3,6344500$

af Log. $b = 3,4532725$

Log. Tang. $\phi = 0,1811775$

$\phi = 56^{\circ} 37' 08'', 15$

$\phi - 45^{\circ} = 11^{\circ} 37' 08'', 15$

L. T. $(90^{\circ} - \frac{1}{2} C) = 0,2683210$

L. T. $(\phi - 45^{\circ}) = 9,3130545$

Log. Tang. $M = 9,5813755$

$M = 20^{\circ} 52' 35'', 84$

$(90^{\circ} - \frac{1}{2} C) = 61^{\circ} 40' 13'', 30$

derhalve $A = 82^{\circ} 32' 49'', 14$

$B = 40^{\circ} 47' 37'', 46$

Beide deze berekeningen geven dezelfde uitkomst, hetwelk nogtans geen zeker waarborg is; want men kan zich in de Log. Sin. C vergissen, zonder zulks aan de ongelijkheid der uitkomsten te bemerken.

§ 327. GEWIGTIG GEVAL. De eerste en derde gevallen der scheefhoekige driehoeken vindt men vereenigd in de berekening van den afstand van twee afgelegene voorwerpen, welker afstandsbepaling, in de Werkdadige Meetkunst, gedurig voorkomt. Laten Fig. 127, A en B twee afgelegene voorwerpen zijn, welke afstand men begeert te vinden; dan ga men aldus te werk,

1°. Men neme eene basis CD, en mete derzelver lengte.

2°. In het punt C, mete men de hoeken ABC en BDC.

3°. In het punt D moeten insgelijks de hoeken BDA en ADC worden waargenomen.

Men zal dan een genoegzaam aantal gegevens hebben, om den afstand AB te vinden.

Want, volgens het eerste geval, zal men in den driehoek ACD, de zijden AC en AD, en den driehoek BDC de zijden BC en BD vinden.

Door

1°. Berekening van de onbekende zijde c.

a) Door de eerste vergelijking.

Log. $a = 3,6344500$

Log Sin. $C = 9,9219033$ bij

$3,5563533$

Log. Sin. $A = 9,9963153$ af

Log. $c = 3,5600380$

b) Door de tweede vergelijking.

Log. $b = 3,4532725$

Log. Sin. $C = 9,9219033$

$3,3751758$

Log. Sin. $B = 9,8151378$

Log. $c = 3,5600380$

$c = 3613^m,098$

Door het derde geval, zal men, in den driehoek ABD, den onbekenden afstand AB vinden.

1°. VOORBEELD. Fig. 127. Gemeten hebbende, $CD = 1257$ voeten, hoek $ACD = 75^{\circ} 19'$, hoek $BCD = 49^{\circ} 13'$, hoek $BDC = 87^{\circ} 19'$ en hoek $ADC = 47^{\circ} 10'$; den afstand AB te vinden? Antw. $AB = 971,209$ voeten.

2°. VOORBEELD. Fig. 128. Gemeten hebbende, $CD = 1578,3$ Roeden, hoek $ACD = 68^{\circ} 39'$, hoek $BCD = 75^{\circ} 49'$, hoek $ADC = 62^{\circ} 43'$, en hoek $BDC = 53^{\circ} 17'$; dan zal men vinden: $AB = 3333,229$ Roeden.

§ 328. IV. GEVAL. Fig. 123. De drie zijden a , b en c van eenen driehoek gegeven zijnde, deszelfs hoeken door berekening te vinden?

FORMULEN. Indien $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ gesteld wordt, dan zal, zie § 316,

$$\text{Sin. } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}; \text{ Sin. } \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

$$\text{en Sin. } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \text{ zijn, en dan volgt hier}$$

uit dezen

REGEL 1°. Tel de gegebene zijden van den driehoek bij elkander.

2°. Trek van deze halve som elke der twee zijden af, welke om den gevraagden hoek staan, en tel de Logarithmen van deze verschillen bij elkander.

3°. Trek van de som dezer Logarithmen af de som van de Logarithmen der zijden, welke om den gevraagden hoek staan.

4°. Neem de helft van dit laatste verschil; deze helft zal de Logarithmus Sinus van de helft van den gevraagden hoek zijn.

VOORBEELD. Gegeven zijnde $a = 739$, $b = 802$, en $c = 755$; de hoeken A, B en C, te vinden?

Be-

Berekening van den hoek A .

$a = 739$

$b = 809$

$c = 755$

$\text{Log. } b = 2,9079485$

$\text{Log. } c = 2,8779470$

$2s = 2303$

$\text{Log. } bc = 5,78582955$

$s = 1151,5$

$s - b = 342,5$

$\text{Log. } (s - b) = 2,5346606$

$s - c = 396,5$

$\text{Log. } (s - c) = 2,5982432$

$\text{Log. } (s - b) + \text{Log. } (s - c) = 5,1329038$

$\text{af, Log. } bc = 5,7858955$

$19,3470083$

2)

$\text{Log. Sin. } \frac{1}{2} A = 9,6735041$

$\frac{1}{2} A = 28^{\circ}07'59'',85$

$\text{en } A = 56^{\circ}15'59'',70$

$\text{Men vindt op dezelfde wijze } \begin{cases} B = 65^{\circ}33'40'',80 \\ C = 58^{\circ}27'59'',50 \end{cases}$

en ten blijke van de juistheid der berekening, maakt de som der berekende hoeken 180° .

§ 329. AANMERKING. Alle de gevallen der Driehoeksmeting (der scheefhoekige en regthoekige,) kunnen, met behulp van de pleinschaal en den transporteur, teekenkundig worden opgelost. Het is nuttig, dat de Leerling voor elk geval, ten minste één voorbeeld teekenkundig oplosse. Nemen wij het voorbeeld van Fig. 127. Men neme op de schaal eene lijn CD , bevattende zoo vele deelen als deze lijn roeden lang is; met den transporteur make men, aan de punten C en D , de waargenomene hoeken; dan verkrijgt men, door de snijding van de beenen dezer hoeken, de punten A en B ; neem nu de lijnen AB , AC , AD , BC en BD , tusschen de beenen van den passer, en meet op de pleinschaal, hoe vele deelen deze lijnen lang zijn, en zoo veel roeden zullen de punten A en B , en van elkander en van de punten C en D afstaan.

C. Merkwaardige gevallen der Practijk.

330. I. VRAAGSTUK. Fig. 127, 128. De afstand van twee pun-

punten A en B gegeven zijnde, en uit twee andere punten C en D , hebbende waargenomene de hoeken ACB , BCD , ADB en ADC , zoo begeert men te vinden, hoe verre de punten C en D van elkander, en van de punten A en B verwijderd zijn?

OPLOSSING. Neem, Fig. 127a, de lijn cd gelijk aan een zeker getal roeden of meters, (een zeker getal van die eenheden, in welke AB gegeven is; maak op de lijn cd , de hoeken acb , bcd , adc en adb , gelijk aan de waargenomene hoeken ACB , BCD , ADC en ADB , dan zijn de figuren 127a, 128b, gelijkvormig aan Fig. 127 en 128; bereken dan, volgens § 327, de lijnen ac , bc , ad , bd en ab ; deze gevonden hebbende, stel dan verder de volgende evenredigheden op

$ab: AB = ac: AC$

$ab: AB = ad: AD$

$ab: AB = bc: BC$

$ab: AB = bd: BD$

$ab: AB = cd: CD$

of wil men, tot de berekening dezer evenredigheden, de Logarithmen gebruiken, zoo stelle men:

$\text{Log. } AB - \text{Log. } ab = \text{Log. } p$

dan zal

$\text{Log. } AC = \text{Log. } ac + \text{Log. } p$

$\text{Log. } AD = \text{Log. } ad + \text{Log. } p$

$\text{Log. } BC = \text{Log. } bc + \text{Log. } p$

$\text{Log. } BD = \text{Log. } bd + \text{Log. } p$

$\text{Log. } CD = \text{Log. } cd + \text{Log. } p$

zijn. Dit werkstuk is, in de Beg. der Meetk. anders opgelost.

I. VOORBEELD. Fig. 127. Gegeven zijnde, $AB = 18736$ meters, hoek $ACB = 65^{\circ}18'$, hoek $BCD = 46^{\circ}37'$; hoek $ADB = 82^{\circ}19'$ en hoek $ADC = 42^{\circ}51'$; dan zal men vinden: $CD = 3569,09$; $AC = 56937,39$; $AD = 77742,27$; $BC = 204151,05$ en $BD = 181498,92$.

II. VOORBEELD. Fig. 128. Gegeven zijnde, $AB = 31719$ meters, hoek $ACD = 49^{\circ}33'$, hoek $BCD = 77^{\circ}19'$, hoek $ABC = 61^{\circ}25'$ en hoek $BDC = 59^{\circ}21'$; dan zal men vinden:

CD

$CD = 16122,6$; $AC = 15161,5$; $BC = 20221,9$; $AD = 13138,8$; en $BD = 22920,8$.

§ 331. II. VRAAGSTUK. Fig. 129. De onderlinge ligging van drie punten A , B en C , (dat is de zijden en hoeken van den driehoek ABC ,) kennende en gesteld zijnde, dat men ergens, buiten of binnen dien driehoek ABC , in P , hebbe waargenomen de hoeken APC en BPC , onder welke deze punten gezien worden, zoo vraagt men: hoe ver dit standpunt P , van de gezegde punten A , B en C verwijderd zij?

OPLOSSING. Wil men dit Vraagstuk teekenkundig oplossen, zoo construeer men met de pleinschaal den driehoek ABC , (Fig. 130) wiens zijden zoo vele deelen bevatten, als dezelve roeden of meters lang zijn; deel de zijden BC en AC , in D en E , in twee gelijke deelen, en trek DG en EF loodrecht op BC en AC . Maak de hoeken BCG en ACF met den transporteur gelijk aan de complementen der waargenomen hoeken BPC en APC ; beschrijf eindelijk, uit G en F , als middelpunten, met GC en CF , als stralen, twee cirkelbogen, die elkander in P doorsnijden; dan zal P het begeerde punt zijn; indien men dan de lengte der lijnen AP , BP en CP , op de pleinschaal meet, dan zal men vinden, hoe veel roeden of meters het punt C van de punten A , B en C verwijderd is.

Vereischt het bepalen dezer afstanden eene groote nauwkeurigheid; dan moet men de berekening gebruiken, en dan dient het volgende stelsel van formules.

Stel $BC = a$, $AC = b$ en $AB = c$, hoek $ABC = B$, hoek $BPC = m$, hoek $APC = n$; $BP = D$; $PC = D'$ en $AP = D''$; dan zal

$$\begin{aligned} 1^\circ. & \quad \text{Tang. } \phi = \frac{a \times \text{Sin. } n}{b \times \text{Sin. } m} \\ 2^\circ. & \quad M = 180^\circ - \frac{1}{2} (B + m + n) \\ 3^\circ. & \quad \text{Tang. } N = \text{Tang. } (45^\circ - \phi) \times \text{Tang. } M \\ 4^\circ. & \quad p = M + N \text{ en } q = M - N \\ 5^\circ. & \quad D' = \frac{a \times \text{Sin. } p}{\text{Sin. } m} = \frac{b \times \text{Sin. } q}{\text{Sin. } n} \end{aligned}$$

6°.

$$6^\circ. \quad D = \frac{a \times \text{Sin. } (p + m)}{\text{Sin. } m} = \frac{c \times \text{Sin. } (q - C)}{\text{Sin. } (m + n)}$$

$$7^\circ. \quad D'' = \frac{b \times \text{Sin. } (q + n)}{\text{Sin. } n} = \frac{c \times \text{Sin. } (p - A)}{\text{Sin. } (m + n)}$$

Wanneer echter $m + n > 180^\circ$ is, blijkt daaruit, dat het punt P binnen den driehoek ligt en dan moet, in plaats van de tweede formule, $M = \frac{1}{2} (B + m + n)$ genomen worden. Wie begerig is den grond dezer formules te leeren kennen, raadplege onze *Beginselen der Meetkunst*, IX B. § 700 *Bladz. 275 en verv.*

VOORBEELD. Fig. 131. De middelpunten van de torens der groote kerken van 's Gravenhage, den Briel en Rotterdam, ten opzichte van elkander gelegen, als in Fig. 131, wordt voorgesteld, hebben (zie *Précis historique* van Z. E. den Generaal KRAIJENHOFF,) in meters, de afstanden, welke Logarithmen zijn:

Log. aff. Haag tot Briel = 4,3389145 = Log. a

Log. aff. Briel tot Rotterd. = 4,3484188 = Log. b

Log. aff. Rotterd. tot Haag = 4,3270133 = Log. c

De hoeken van dezen driehoek zijn de volgende:

Uit den Haag.....hoek $A = 62^\circ 23' 14'',3$

—— Briel.....hoek $B = 57^\circ 30' 36'',2$

—— Rotterdam hoek $C = 60^\circ 6' 9'',5$

Nu hebben wij, uit het dak van het Gebouw der Koninklijke Artillerie, Genie en Marine-School te Delft, met den Sextant van ADAMS, waargenomen de twee volgende hoeken:

Haag met Briel, of hoek $m = 106^\circ 48' 00''$

Briel met Rotterdam, of hoek $n = 90^\circ 31' 30''$

Hoe ver is dan het voornoemde Schoolgebouw van de middelpunten van de torens dezer drie plaatsen verwijderd? Men zal door de berekening vinden: de afstand van het Schoolgebouw tot den toren van den Haag = 8328,71 meters; tot den toren van den Briel = 17907,04 meters; en tot den toren van Rotterdam = 13136,89 meters.

§ 332. III. VRAAGSTUK. Fig. 123. Twee zijden van een driehoek ABC , met den ingesloten hoek, gegeven zijnde, de

in-

128 ALLEREERSTE GRONDEN DER

inhoud van dien driehoek te berekenen. Laat gegeven zijn $AB = 716,9$ meters, $AC = 537,3$ meters, hoek $A = 65^{\circ}28'$?

Men heeft $I = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin. A$ (zie § 317,); men rekene dan als volgt:

$$\begin{array}{r} \text{Log. } AB = 2,8554586 \\ \text{Log. } AC = 2,7302168 \\ \text{Log. Sin. } A = 9,9589077 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{optellen.}$$

$$\begin{array}{r} 5,5445831 \\ \text{Log. 2} = 0,3010300 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{afstrekken.}$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. } I = 5,2435531 \\ I = 175207,61 \text{ vierkante meters.} \\ \text{of, } I = 1752,0761 \text{ ares.} \end{array}$$

§ 333. IV. VRAAGSTUK. Fig. 123. Van den driehoek ABC is gegeven, $AB = 217,3$ roeden, hoek $A = 63^{\circ}29'$, en hoek $B = 47^{\circ}33'$: men vraagt den inhoud te berekenen?

Volgens § 319, is $I = \frac{1}{2} AB^2 \times \sin. A \times \sin. B : \sin. C$; men rekene dan aldus:

$$\text{Men vindt } C = 180^{\circ} - (A + B) = 69^{\circ}8'$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. } AB = 2,3370597 \\ 4,6741194 \\ \text{Log. Sin. } A = 9,9517282 \\ \text{Log. Sin. } B = 9,8668189 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{optellen.}$$

$$\begin{array}{r} 4,4926665 \\ \text{Lo. Sin. } C = 9,9705383 \\ \text{Log. 2} = 0,3010300 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{optellen.}$$

$$0,3715683 \text{ trek af van } P$$

$$\begin{array}{r} \text{komt Log. } I = 4,2210982 \\ I = 16637,9 \text{ vierk. roeden.} \\ \text{of } I = 27 \text{ morg. } 437,9 \text{ vierk. voeten.} \end{array}$$

§ 334. V. VRAAGSTUK. Fig. 124. Om den inhoud van den driehoek ABC te vinden, heeft men gemeten, $AB = 63,7$ voeten, de lijn $CD = 53,8$ roeden, en hoek $BDC = 73^{\circ}28'$; men begeert den inhoud te berekenen?

Ge

MEETKUNST. II. AFDEEL. XI. HOOFDST. 129

Gebruik makende van de formule $I = \frac{1}{2} AB \times CD \times \sin. BDC$, zie § 318, dan zal men voor den inhoud 1642,683 vierk. roeden vinden.

§ 335. VI. VRAAGSTUK. Fig. 132. Den inhoud van een cirkel-sector te vinden, wanneer deszelfs straal $AD = r$ en koorde $DE = b$ gegeven zijn.

OPLOSSING. Trek AEC rechthoekig op BD ; dan is $DE = BE = \frac{1}{2} b$, en stellende hoek $BAD = 2$ hoek $DAC = p$; dan is, zie § 310, $\sin. \frac{1}{2} p = \frac{\frac{1}{2} b}{r} = \frac{b}{2r}$: indien men der-

halve de koorde BD door het dubbel van den straal deelt; dan verkrijgt men de Sinus van de helft van den hoek BAD , of van de helft van den boog BD .

Volgens § 292, is inhoud van den geheelen cirkel $= \pi r^2$ en, volgens § 295, is.

$$360^{\circ} : p = \text{Inh. cirk} : \text{Inh. sect. } BAD$$

dat is; omdat $\text{Inh. cirkel} = \pi r^2$ is

$$360^{\circ} : p = \pi r^2 : \text{Inh. Sect. } BAD$$

en hieruit de vierde evenredige oplosfende, zal men (den inhoud van den Sector $BAD = I$ stellende,) vinden:

$$I = \frac{\pi p}{360^{\circ}} \times r^2$$

§ 336. VII VRAAGSTUK. Fig. 132. Den inhoud van een cirkel-segment BGD , uit deszelfs koorde $BD = 2b$ en de grootste breedte $CE = a$, te vinden?

OPLOSSING. Laat hoek BAD in minuten van graden uitgedrukt $= p$; de straal $AD = r$, en de inhoud van het segment $BCD = I$ gesteld worden; dan is, volgens § 310, (de koorde CD trekkende) hoek $CDE = \frac{1}{2}$ hoek $BAC = \frac{1}{2}$ hoek $BDAD = \frac{1}{4} p$, en in den rechthoekigen driehoek CDE is, volgens § 310, $\text{Tang. } \frac{1}{4} p = \frac{a}{b}$. Door deze vergelijking wordt den boog $BCD = p$ bekend.

Volgens het betoogde in § 261, is $CD^2 = 2r \times CE$; dat is, $2r \times a = a^2 + b^2$, en daarom

$$r = \frac{1}{2} a + \frac{b^2}{2a}$$

I

en deze formule leert: hoe men den straal uit de gegevens a en b kan vinden.

In den regthoekigen driehoek AED is, zie § 310, $AE = AD \times \cos. DAC = r \times \cos. \frac{1}{2} p$ en $DE = r \times \sin \frac{1}{2} p$; derhalve inhoud driehoek $ABD = r^2 \times \sin. \frac{1}{2} p \times \cos. \frac{1}{2} p = \frac{1}{2} r^2 \times \sin. p$.

Inhoud Sector BAD is, volgens § 335, gelijk aan $\frac{p \pi}{21600} \times r^2$ (indien namelijk p in minuten gegeven is.)

Van dezen inhoud den inhoud des driehoeks ABD aftrekkende, verkrijgt men voor den inhoud van het segment BCD .

$$I = r^2 \times \left\{ \frac{p \pi}{21600} - \frac{1}{2} \sin. p \right\}$$

Wij hebben dan het volgende stelsel van vergelijkingen, die ligtelijk door Logarithmen kunnen berekend worden.

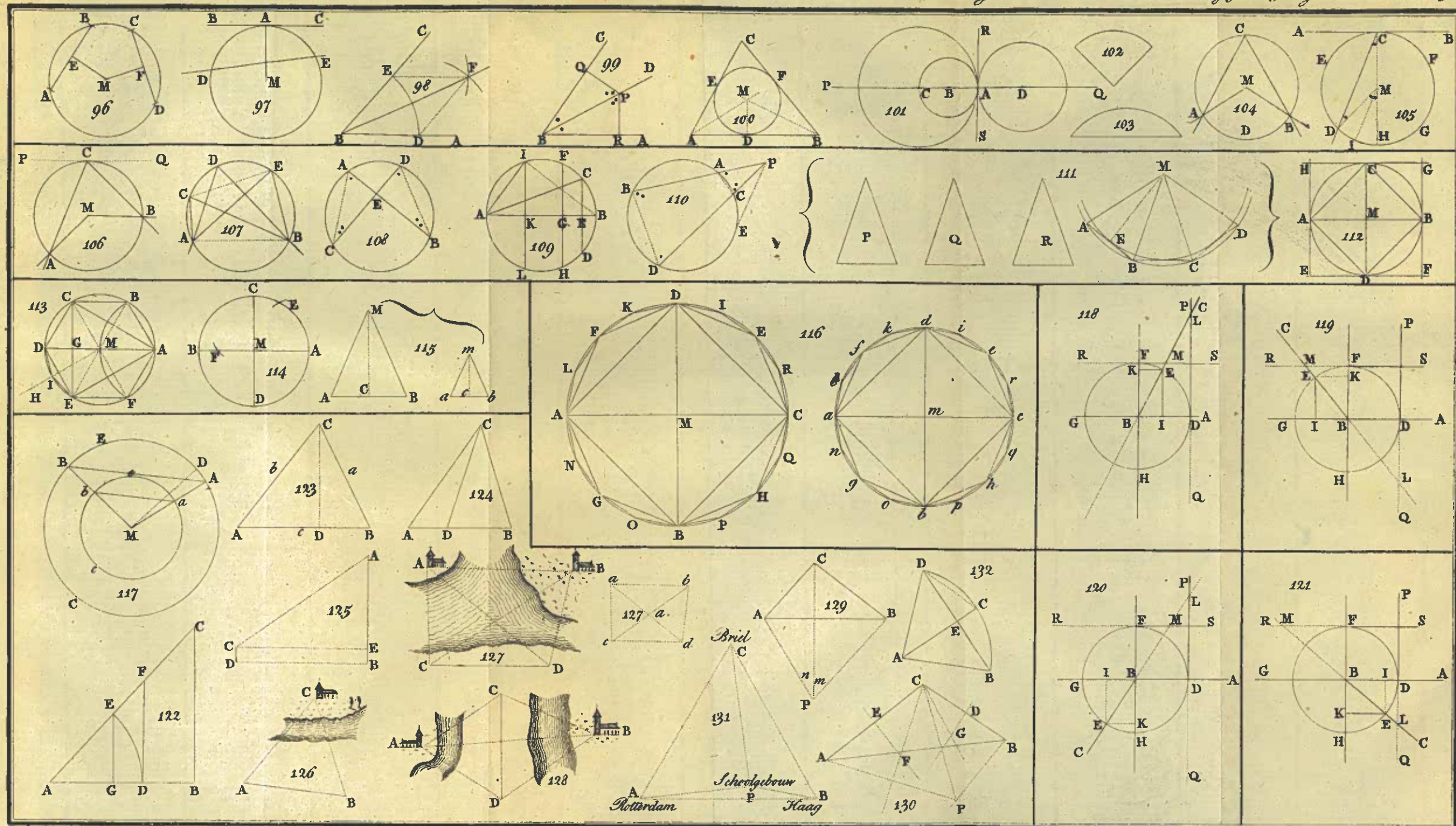
$$1^{\circ}. \quad \text{Tang. } \frac{1}{4} p = \frac{a}{b}$$

$$2^{\circ}. \quad r = \frac{1}{2} a + \frac{b^2}{2a}$$

$$3^{\circ}. \quad I = r^2 \times \left\{ \frac{p \pi}{21600} - \frac{1}{2} \sin. p \right\}$$

Wanneer, in de laatste vergelijking, $p > 180^{\circ}$ wordt; dan verandert het teeken van $\frac{1}{2} \sin. p$ van $-$ in $+$.





ALLEREERSTE GRONDEN
DER
M E E T K U N S T.

II. A F D E E L I N G.

Over de Meetkunst der Ligchamen.

I. H O O F D S T U K.

*Over de ligging en snijding der Regte Lijnen en Platte
Vlakken, in de Ligchamelijke Ruimte.*

§ 337. **A**lvorens tot de Meetkunst der Ligchamen over te gaan, moeten wij de voornaamste zaken, betreffende de onderlinge snijding en ligging der vlakken, in de ruimte, voordragen.

De Lezer, die dit onderwerp grondiger en vollediger wenschte te leeren kennen, bevelen wij de opzettelijke studie van het *X Boek onzer Beginselen*.

§ 338. Als klaarblijkelijke waarheden, nemen wij hier aan:

1°. *Dat twee vlakken elkander, volgens het beloop van eene regte lijn, doorsnijden.*

2°. *Dat door drie punten, in de ruimte verspreid liggende, altijd een vlak gebragt kan worden.*

3°. *Dat men ook een vlak brengen kan door eene regte lijn en door een punt, hetwelk buiten die regte lijn gelegen is.*

4°. *Dat twee lijnen, die elkander doorsnijden, in hetzelfde platte vlak liggen.*

5°. *En dat, eindelijk, twee evenwijdige lijnen in hetzelfde vlak gelogen zijn.*

De waarheid dezer vijf Stellingen kan men, zonder een strikt Meetkundig betoog, met zijn natuurlijk oordeel, duidelijk genoeg inzien.

§ 339. I. BEPALING. *Fig. 133.* Eene regte lijn AB staat loodrecht op een vlak PQ , wanneer deze regte lijn twee regte hoeken maakt, met twee lijnen AC en AD , welke in dit vlak, uit den voet dezer loodlijn AB getrokken zijn; mits de ééne niet het verlengde van de andere zij.

§ 340. Wanneer men een gewigt aan eenen dunnen draad, boven een vat met water, ophangt, (het gewigt zelf onder water zijnde,) en beide het gewigt en het water in volmaakte rust zijn; dan heeft men, in dien toefel, eene lijn, welke volmaakt loodrecht op een vlak staat; de draad, als regte lijn beschouwd, is de loodlijn en het bovenste oppervlak des waters het vlak, op hetwelk die lijn loodrecht staat. De draad is hetgeen de Sterre- en Aardrijkskundigen de *Verticale* of *Loodlijn* noemen, (welke aan den Hemel het *Zenith* of *Toppunt* bepaalt;) terwijl de bovenste oppervlakte van het water, onbepaaldelijk in het ronde uitgestrekt zijnde, het *Horizontale Vlak*, den *Horizon* of *Gezigteinder*, wordt genoemd.

Niet slechts in de Natuur-, Sterre- en Aardrijkskunde; maar ook in de Werkdadige Meetkunst, de Burgelijke- en Vesting-Bouwkunde, is de duidelijke kennis van de verticale lijn en het Horizontale vlak, welk laatste ook wel de *Waterpasvlakte* genoemd wordt, een onontbeerlijk ding; daar men niets zonder dezelve met nauwkeurigheid kan bepalen noch uitvoeren.

§ 341. Volgens deze bepaling, kan men zeer gemakkelijk eene loodlijn op een gegeven vlak oprigten. Laat, *Fig. 134* PQ een gegeven vlak zijn, A eenig punt in hetzelfde; men

trek-

trekke in dit vlak, uit het gegeven punt A , twee lijnen AC en AD , die met elkander eenen rechten hoek maken; neme twee uit hout naauwkeurig vervaardigde regthoekige driehoeken, ACB en ADB , regthoekig zijnde in B , en legge eerst deze twee driehoeken, met ééne hunner regthoekszijden, langs de lijnen AC en AD ; draaije dezelve om deze lijnen, tot dat de regthoekszijden AB en AB aan elkander sluiten; dan zal de lijn AB , volgens welke deze driehoeken aan elkander sluiten, loodrecht op het vlak PQ staan.

§ 342. Men kan (zie *IV. Stell. X B. Beg.*) betoogen: *dat* (*Fig. 133*) *alle lijnen* $Aa, Ab, Ac, Ad, Ae, Af, Ag$, enz. *welke uit den voet der loodlijn* AB *getrokken worden, in het vlak* PQ , *op hetwelk die loodlijn* AB *geplaatst is, met dezelve regte hoeken maken.* Als ook: *dat, wanneer men, zie Fig. 135, uit eenig punt* A , *van eene regte lijn* AB *eene menigte van lijnen trekt, die alle regthoekig op deze lijn* AB *staan, alle die lijnen in één vlak zullen liggen, op hetwelk die lijn* AB *regthoekig staat; zoodat, wanneer men, Fig. 136, een stelsel van twee loodlijnen* PQ *en* AB , *om ééne dezer lijnen (de lijn* PQ) *laat omdraaijen, de lijn* AB , *gedurende deze omwenteling, een vlak zal beschrijven, op hetwelk de lijn* PQ *regthoekig zal staan.*

§ 343. II. BEPALING. *Fig. 137.* Alle vlakken CD , EF en GH , welke door eenige lijn AB gaan, worden gezegd *loodrecht te staan* op het vlak PQ , op hetwelk die lijn AB regthoekig geplaatst is.

Wanneer de lijn AB de verticale lijn en PQ het horizontale vlak is, (zie § 340 hier boven,) dan worden alle de vlakken CD , EF , GH , door die verticale lijn gaande, *Verticale Vlakken* genoemd. Men zegt ook wel: *dat zulke vlakken te lood staan.*

§ 344. Eene lijn kan een zeker vlak ook schuinsch ontmoeten. Om nu, in dit geval, den stand van deze lijn, ten opzichte van dit vlak, te bepalen, gaat men aldus te werk. Laat, *Fig. 138*, PQ een vlak en AB eene lijn zijn, welke dit vlak in het punt A ontmoet; wanneer men dan uit het punt A ,

eene loodlijn AC op dit vlak oprigt, en door dezelve en de lijn AB , een vlak laat gaan, hetwelk het vlak PQ , volgens de lijn AD doorsnijdt; dan wordt de stelling van de lijn AB , met betrekking tot dit vlak, bepaald of gemeten door den hoek BAD , die het complement is van den hoek BAC , welke die lijn met de loodlijn maakt. De hoek BAD is de kleinste der hoeken, welke de lijn AB maakt met de lijnen AR , welke uit het punt van ontmoeting in het vlak PQ worden getrokken. Men noemt de hoek BAD de *Standhoek* van de lijn AB met het vlak PQ .

§ 345. III. BEPALING. Fig. 139 en 140. Wanneer men, uit alle de punten van eene rechte lijn AB , loodlijnen op een vlak PQ laat vallen, (dan kan men bewijzen, dat alle deze loodlijnen in hetzelfde vlak liggen, zie XII. Stell. X. B. Beg.) dan zijn de voeten dezer loodlijnen gelegen in eene rechte lijn CD , die de *Projectie van die lijn AB* genoemd wordt. En laat men, Fig. 140, uit alle de punten van eene kromme lijn ABC , loodlijnen op een vlak PQ vallen; dan zullen de voeten dezer loodlijnen meestal in eene kromme lijn DEF liggen, die insgelijks de *Projectie van die kromme lijn* op dit vlak genoemd wordt; de vlakken PQ noemt men, in beide gevallen, de *Vlakken van projectie*.

§ 346. De projectie van een punt is een punt; van eene rechte lijn eene rechte lijn, en van eene kromme lijn eene kromme lijn. Eene rechte lijn heeft echter op het vlak, op hetwelk zij regthoekig staat, geene projectie; of liever, de projectie is een enkel punt, te weten, de voet van die loodlijn.

§ 347. Men bedient zich in het teekenen van gebouwen, vestingen, schepen, werktuigen, enz. meestal van de projectien van rechte en kromme lijnen. De voornaamste punten en lijnen van eene lichamelijke figuur worden op twee regthoekig op elkander staande vlakken, een *horizontaal* en een *ver-*

ticaal vlak, geprojecteerd; deze projectien, te zamengenomen, geven dan een volledig begrip van het geheel.

§ 348. IV. BEPALING. Fig. 138. De *Standhoek* van eene rechte lijn AB , met betrekking tot een vlak, is de hoek BAD , welke die lijn met hare projectie AD maakt. Verg. § 244, hier boven.

§ 349. V. BEPALING. Eene lijn AB , Fig. 141, loopt evenwijdig aan een vlak; wanneer die lijn, hoe verre zij aan den eenen of aan den anderen kant verlengd worde, dit vlak nergens ontmoet.

§ 350. VI. BEPALING. De *Afstand* van een punt tot een vlak is de loodlijn, welke uit dit punt op dit vlak valt.

§ 351. De projectie van eene lijn, die evenwijdig aan een vlak loopt, op dit vlak, is evenwijdig aan dezelve: en alle punten van die lijn zijn op eenen gelijken afstand van dit vlak gelegen.

§ 352. Uit alles, wat wij tot hier toe gezegd hebben, blijkt: dat eene lijn, ten opzichte van een vlak, drierlei stand kan hebben, de regthoekigen, scheven en evenwijdigen stand.

§ 353. I. STELLING. Fig. 142. Alle lijnen, (AB , CD , EF , enz.), die loodrecht op een vlak PQ staan, zijn onderling evenwijdig.

BETOOG. Twee dezer lijnen, AB en CD , liggen altijd in het zelfde vlak, en omdat zij regthoekig op het vlak PQ staan, zijn zij (zie § 342,) onderling evenwijdig; hetzelfde geldt voor elke andere twee lijnen, AB en EF , AB en GH , AB en IK , CD en EF , enz.

§ 354. Hieruit volgt. 1°. Dat, wanneer, Fig. 143, twee lijnen CD en EF , elk in het bijzonder evenwijdig aan eene derde lijn AB loopen, deze lijnen CD en EF ook evenwijdig zullen zijn. 2°. Dat, wanneer men door twee evenwijdige lijnen AB en

*CD, twee vlakken laat gaan, deze vlakken elkander in het be-
loop eener lijn EF zullen doorsnijden, welke aan deze lijnen AB
en CD evenwijdig zullen zijn.*

§ 355. II. STELLING. *Fig. 144. Wanneer de bee-
nen van twee hoeken (ABC en DEF), welke in on-
derscheidene vlakken liggen, evenwijdig zijn, (AB aan
ED, en BC aan EF); dan zullen deze hoeken gelijk
zijn.*

BETOOG. Trek door de hoekpunten B en E, de lijn BE.
Maak $DE = AB$, en $EF = BC$. Trek de lijnen AD, CF,
AC en DF; dan zijn, § 127, ABED en BCFC parallelogram-
men; derhalve $AD = BE = CF$, en, volgens § 354, is AD
evenwijdig aan CF; daarom AC evenwijdig aan FD; de vier-
hoek ADFC is dan een parallelogram, en diensvolgens $AC =$
 DF ; maar $AB = DE$ en $BC = EF$ zijnde, is, zie § 122,
hoek ABC = hoek DEF.

§ 356. VII. BEPALING. *Fig. 145. Wanneer twee
vlakken PQ en PR elkander doorsnijden; dan wordt
derzelver onderlinge stand gemeten door eenen hoek,
die op de volgende wijze gemaakt wordt. Men neme
in de lijn PS, volgens welke deze vlakken elkander
snijden, een punt A, en trekke in het vlak PR de
lijn AC, en in het vlak PQ de lijn AB, loodregt op
de doorsnede PS; dan zal de hoek ABC de stand-
hoek dezer twee vlakken zijn.*

§ 357. Het blijkt, uit de voorgaande Stelling, dat, waar
men het punt A, in de doorsnede der vlakken, moge nemen,
de hoek BAC dezelfde zal blijven. Ook stemt de voorgaande
bepaling volmaakt overeen met de bepaling van een vlak, dat
loodregt op een ander vlak staat, zie II Bep. § 343. Want,
wanneer de hoek BAC regt is, dan maakt de lijn AC met
de lijnen AB en PS regte hoeken; AC staat dan loodregt op
het vlak PQ en het vlak PR, dat door die loodlijn AC gaat,
wordt,

wordt, volgens de III Bepaling, gezegd regthoekig op het
vlak PQ te staan.

§ 358. VIII. BEPALING. *Fig. 146, Vlakken PQ
en RS, welke, hoeverre zij mogen worden uitgestrekt,
elkander nimmer snijden noch ontmoeten, zijn Evenwij-
dige Vlakken.*

§ 359. *Alle lijnen AB en CD, welke loodregt op één (PQ)
dezer evenwijdige vlakken staan, staan ook loodregt op het
tweede (RS). Evenwijdige vlakken staan overal even ver van
elkander. En het is klaar te zien: dat, wanneer twee evenwij-
dige vlakken PQ en RS, door een derde vlak ACDB gesneden
worden, de lijnen AC en BD, volgens welke deze snijdingen plaats
hebben, evenwijdig zullen zijn.*

II. H O O F D S T U K.

Over de drie- en veelvlaklige Hoeken, en de Bolvormige Driehoeken.

§ 360. Wanneer drie of meer vlakken elkander in één punt doorsnijden, dan ontstaan er drie, vier, vijf, in het algemeen, veelvlaklige hoeken, en door deze verstaat men de onbepaalde ruimten, tusſchen deze ſnijdende vlakken begrepen zijnde. De drievlaklige hoek is, onder de veelvlaklige hoeken, de merkwaardigſte.

§ 361. I. BEPALING. Fig. 147. Een drievlaklige hoek is de onbepaalde lichamelijke ruimte, begrepen tusſchen drie vlakken ABC , ABD en CBD , welke elkander in één punt B , volgens het beloop van de lijnen AB , CB en DB , doorsnijden. Men noemt deze vlakken ABC , ABD en CBD de zijvlakken, de lijnen AB , BC en BD de ribben van den drievlakligen hoek; B dezelfs top- of hoekpunt: de zijvlakken en ribben worden onderſteld, aan den tegenovergeſtelden kant van het hoekpunt, onbepaaldelijk verlengd te zijn.

§ 362. Bij de beſchouwing van eenen drievlakligen hoek, komen zes onderſcheidene dingen in aanmerking: vooreerst de hoeken ABC , ABD en CBD , welke de ribben, twee aan twee genomen, met elkander maken: ten tweede de ſtandhoeken der zijvlakken; dat is, de hoeken abc , def en ghi , welke, volgens § 356 gemaakt worden. Het zijn de hoeken abc , def en ghi , welke, naar het voorschrift van § 356, aan de ribben van den drievlakligen hoek gemaakt worden. Van deze zes hoeken drie gegeven zijnde, kan men altijd de drie overige vinden.

§ 363.

§ 363. II. BEPALING. Een Bol, is een ligchaam, beſloten binnen één gebogen oppervlak, welks punten alle even ver van één punt, binnen denzelven gelegen, het middelpunt, afſtaan.

§ 364. Fig. 148. Een bol kan begrepen worden te ontſtaan, door de omwenteling van eenen cirkel $ACDB$, om ééne van dezelfs middellijnen AB ; de omtrek van dien cirkel beſchrijft alsdan het oppervlak, de cirkel zelf de lichamelijke uitgebreidheid van den bol; het middelpunt M van dien cirkel is dan tevens het middelpunt van dien bol.

§ 365. Wanneer een Bol geſneden wordt door een vlak; dan is die doorsnede altijd een cirkel. Die cirkel is op zijn grootſte, wanneer dit ſnijdend vlak door het middelpunt van den bol gaat; maar, wanneer die cirkel buiten het middelpunt gaat, dan is hij kleiner, naarmate het ſnijdend vlak, verder van het middelpunt afſtaat. De cirkels, welke door het middelpunt gaan, noemt men groote cirkels en deze zijn alle even groot, en de cirkels, welke buiten het middelpunt gaan, noemt men kleine cirkels.

§ 366. Fig. 149. De Meetkunſtenaars gebruiken den bol, om de zijvlakken, benevens derzelver ſtandhoeken, door ééne enkele vlakke figuur, die men Bolvormigen Driehoek noemt, voor te ſtellen. Laet $ABCM$ een drievlaklige hoek zijn, en, in het hoekpunt M van dien drievlakligen hoek, het middelpunt van eenen bol geplaatst worden, welke eenen willekeurigen ſtraal heeft; dan zullen de zijvlakken AMB , AMC en BMC van denzelven het vlak van den bol, volgens de bogen ab , ac en bc , (zijnde gedeelten van omtrekken van groote cirkels,) doorsnijden: deze bogen ab , ac en bc , zijn de maten van de zijvlakken van den drievlakligen hoek $ABCM$, of liever van de hoeken AMB , AMC en BMC , welke dezelfs ribben, twee aan twee genomen, met elkander maken; en, indien men aan de punten a , b en c , op het oppervlak van den bol, raaklijnen aan de bogen ab , ac en bc trekt, dan zullen derzelver hoeken, (omdat die raaklijnen rechthoekig

kig op de stralen staan,) de *standhoeken* van de zijvlakken van den drievlakkigen hoek *ABCM* zijn: eindelijk is het gedeelte van het oppervlak van den bol *abc*, tusschen de zijvlakken van den drievlakkigen hoek begrepen, een *bolvormige driehoek*, die alzoo, (hoe groot of klein de straal van dien bol genomen worde,) de maat van de zijvlakken en standhoeken van den drievlakkigen hoek voorstelt. In het afgetrokkene, kan men dan van eenen bolvormigen driehoek de volgende bepaling geven.

§ 367. III. BEPALING. Een *Bolvormige Driehoek* is een gedeelte van het oppervlak van eenen bol, begrepen, tusschen drie bogen van groote cirkels, die elkander in drie punten op het oppervlak van den bol doorsnijden.

§ 368. De zijden van eenen bolvormigen driehoek zijn *derhalve cirkelbogen*, die altijd minder dan 180° zijn. Men zegt wel: dat deze cirkelbogen met elkander aan de hoekpunten hoeken maken; doch deze hoeken zijn eigenlijk de hoeken, welke door de raaklijnen dezer bogen aan de hoekpunten, op het oppervlak van den bol, gevormd worden. Ten aanzien dezer bolvormige driehoeken, moet men de volgende zaken opmerken, welke in de *Beginfelen der Meetk.* opzettelijk betoogd zijn.

1°. Dat de som van twee zijden van eenen bolvormigen driehoek grooter is dan de derde zijde (dat is, in elken drievlakkigen hoek is de som van twee zijvlakken altijd grooter dan het derde.)

2°. De som van de drie zijden van eenen bolvormigen driehoek (de som van de drie zijvlakken van eenen drievlakkigen hoek) is altijd minder dan 360° .

3°. De som van de hoeken van eenen bolvormigen driehoek (de som van de drie standhoeken van eenen drievlakkigen hoek) is altijd grooter dan twee en kleiner dan zes rechte hoeken.

4°. Dienvolgens kan een bolvormige driehoek drie scherpe hoeken; éenen, twee of drie rechte; éenen, twee of drie stompe hoeken hebben. Men noemt daarom een bolvormige driehoek *regthoekig*.

kig, wanneer hij één of meer rechte hoeken heeft; *scheefhoekig*, wanneer deszelfs hoeken, of alle scherp, of alle stomp, of gedeeltelijk scherp en stomp zijn.

§ 369. IV. BEPALING. Dat gedeelte der Meetkunst, het welk ons leert, hoe men, wanneer van de drie zijden en drie hoeken van eenen bolvormigen driehoek, drie dingen gegeven zijn, de drie overige kan vinden, noemt men *Bolvormige (Sphärische) Driehoeksmeting*.

§ 370. In het *XIII B. der Beginfelen*, is de Bolvormige Driehoeksmeting opzettelijk behandeld. Thans zullen wij slechts die weinige zaken voordragen, welke onvermijdelijk moeten gekend worden.

§ 371. I. STELLING. *Fig. 150, 151 en 152.* In elken bolvormigen regthoekigen Driehoek is.

1°. De Sinus van ééne zijner regthoekszijden gelijk aan de Sinus van de *hypothenuza*, vermenigvuldigd met de Sinus van den *scheven hoek*, welke over die regthoekszijde staat.

10. De Tangens van ééne der regthoekszijden is gelijk aan de Tangens van den tegenoverstaanden *scheven hoek*, vermenigvuldigd met de Sinus van de andere regthoekszijde.

3°. De Cosinus van de *hypothenuza* is gelijk aan het product van de Cosinussen der regthoekszijden.

4°. De Cosinus van ééne der *scheve hoeken* is gelijk aan de Cosinus van de tegenoverstaande regthoekszijde, vermenigvuldigd met de Sinus van den anderen *scheven hoek*.

5°. De Cotangens van ééne der *scheve hoeken* is gelijk aan de Tangens van den anderen *scheven hoek*, vermenigvuldigd met de Cosinus van de *schuinsche zijde*.

6°. De Tangens van ééne der regthoeksijden is gelijk aan de Tangens van de schuinsche zijde, vermenigvuldigd met de Cosinus van den hoek, welke tusschen die regthoekszijde en de schuinsche zijde begrepen is.

Dat is:

$$\begin{array}{ll} 1^\circ. \sin. BC = \sin. AC \times \sin. A & 2^\circ. \cos. A = \cos. BC \times \sin. C \\ 2^\circ. \text{Tang. } BC = \text{Tang. } A \times \sin. AB & 4^\circ. \cot. A = \text{Tang. } C \times \cos. AC \\ 3^\circ. \cos. AC = \cos. AB \times \cos. BC & 6^\circ. \text{Tang. } AB = \text{Tang. } AC \times \cos. A \end{array}$$

BETOOG. 1°. Laat, Fig. 150. ABC de regthoekige bolvormige driehoek zijn, regthoekig in B , en M het middelpunt van den Bol. Trek CD regthoekig op MB en CE regthoekig op AM ; dan is $CD = \sin. BC$; $CE = \sin. AC$; en, DE getrokken hebbende, is EDC een regthoekige driehoek, in welken, zie § 310, $DC = CE \times \sin. E$ is; dat is, $\sin. BC = \sin. AC \times \sin. A$.

2°. Zij nog, Fig. 151, ABC een bolvormige regthoekige driehoek, regthoekig in B ; M het middelpunt van den bol. Trek BD regthoekig op MB en BE regthoekig op AM , en verleenig de punten D en E ; dan is $BD = \text{Tang. } BC$ en $BE = \sin. AB$; en in den regthoekigen driehoek BED hebben wij, zie § 310, $BD = BE \times \text{Tang. } E$, of $\text{Tang. } BC = \text{Tang. } A \times \sin. AB$.

3°. Zij wederom, Fig. 152, ABC een bolvormige regthoekige driehoek, regthoekig in B ; zij M het middelpunt van den bol; trek MF loodregt op het vlak AMB , en MD loodregt op het vlak AMF ; dan snijden de vlakken FMD en FMB het oppervlak van den bol, volgens de bogen FED en BCF , die quadranten of bogen van 90° zijn; en nu zijn de bogen ABD en ACE insgelijks bogen van 90° . De vlakken AMD en AME staan nu ook regthoekig op het vlak DFM , en de bolvormige driehoek CEF is regthoekig; en de boog DE is de maat van den bolvormigen hoek A , en de boog BD de maat van den bolvormigen hoek EFC ; wij hebben derhalve:

EF

$$EF = \text{Compl. } DE = \text{Compl. } A$$

$$CF = \text{Compl. } BC.$$

$$CE = \text{Compl. } AC.$$

$$\text{hoek } CFE = \text{hoog. } BD = \text{Compl. } AB.$$

$$\text{hoek } ECF = \text{hoek } ACB.$$

Nu is, in den regthoekigen driehoek CEF , volgens het eerste gedeelte, $\sin. CE = \sin. CFE \times \sin. CF$; dat is, $\cos. AC = \cos. AB \times \cos. BC$.

4°. in denzelfden driehoek CEF , is $\sin. EF = \sin. CF \times \sin. ECF$; dat is, $\cos. A = \cos. BC \times \sin. C$.

5°. In denzelfden driehoek CEF is, volgens het tweede gedeelte, $\text{Tang. } EF = \sin. CE \times \text{Tang. } C$; dat is, $\cot. A = \text{Tang. } C \times \cos. AC$.

6°. Eindelijk is nog, in denzelfden driehoek CEF , $\text{Tang. } CE = \text{Tang. } F \times \sin. EF$; of $\cot. AC = \cot. AB \times \cos. A$; of wel, $\text{Tang. } AB = \text{Tang. } AC \times \cos. A$.

§ 372. Deze zes betoogde formules zijn toereikend, om, wanneer van eenen regthoekigen bolvormigen driehoek, behalve den regten hoek, twee dingen, (de twee scheve hoeken, of twee zijden, of één scheve hoek, met ééne zijde,) gegeven zijn, de onbekende zijden of hoeken te vinden. De Leerling oefene zich in het berekenen der onderstaande gevallen.

I. VRAAGSTUK. Fig. 153. De vlakken AP en AQ , regthoekig op elkander staande en elkander, volgens de lijn AE , doorsnijdende, onder welken hoek zullen dan de lijnen BC en BD elkander snijden, indien de lijn BC , met deze doorsnede, eenen hoek CBE maakt, van $73^\circ 13'$, en de lijn BD , met dezelve eenen hoek van $63^\circ 27'$? Men vindt hoek $CBD = 82^\circ 35' 3''.64$.

II. VRAAGSTUK. Onder welke hoeken zal men, in dezelfde figuur, twee lijnen BC en BD , met de gemeene doorsnede BE moeten maken, op dat het vlak CBD , met het verticale vlak AP , eenen hoek van $67^\circ 21'$, en met het horizontale vlak AQ , eenen hoek van $78^\circ 17'$ make? Komt $CBE = 77^\circ 17' 18''.4$; $DBE = 66^\circ 50' 24''.8$.

III. VRAAGSTUK. Fig. 153. Indien de hoek EBD een hoek van $49^\circ 17'$ is; hoe zal men dan de lijn BC moeten trekken

ken opdat het vlak CBD , met het vlak AQ , eenen hoek van $37^{\circ}40'$ make? Men vindt hoek $CBD = 55^{\circ}44'5''$.

IV. VRAAGSTUK. De breedte eener plaats op Aarde en de afwijking van de Zon gegeven zijnde, den tijd van den dag, wanneer, en de plaats van den horizon afwaars, de Zon zal opgaan, te vinden?

V. VRAAGSTUK. De lengte van de Zon en de schuinheid van haren weg kennende, hare afwijking en regte klimming te vinden.

VI. VRAAGSTUK. De breedte eener plaats en de afwijking van de Zon kennende, den tijd te vinden, wanneer zij door den verticaal van het Oosten of Westen zal gaan?

§ 373. II. STELLING. Fig. 154. In alle bolvormige driehoeken staan de sinusfen der zijden tot elkander, in dezelfde reden, als de sinusfen der tegenoverstaande hoeken? Dat is:

$$\sin. AC : \sin. BC = \sin. B : \sin. A$$

$$\sin. AC : \sin. AB = \sin. B : \sin. C$$

$$\sin. BC : \sin. AB = \sin. A : \sin. C$$

BETOOG. Laat M het middelpunt van den Bol zijn. Men verbeesde zich een vlak CMD , loodregt staande op het vlak AMB : dit vlak snijdt het oppervlak van den Bol, volgens den boog CD , en die boog CD verdeelt den bolvormigen driehoek ABC , in de twee regthoekige ACD en BCD , in welke, volgens de voorgaande Stelling, $\sin. CD = \sin. AC \times \sin. A = \sin. BC \times \sin. B$ is; waaruit dan volgt de evenredigheid, $\sin. AC : \sin. BC = \sin. B : \sin. A$.

§ 374. Uit dezelfde regthoekige bolvormige driehoeken, (Fig. 154,) zal men, met behulp der formules, in de voorgaande Stelling betoogd, vinden:

$$\text{Tang. } A \times \sin. AD = \text{Tang. } B \times \sin. BD$$

$$\cos. A : \sin. ACD = \cos. B : \sin. BCD$$

$$\cos. AC : \cos. AD = \cos. BC : \cos. BD$$

$$\text{Tang. } AC \times \cos. ACD = \text{Tang. } BC \times \cos. BCD$$

§ 375:

§ 375. III. STELLING. Fig. 154. De Cosinus van elke zijde van eenen bolvormigen driehoek wordt gevonden, wanneer men de Cosinus van den overstaanden hoek, met het product van de Sinusfen der twee andere zijden vermenigvuldigt, en bij dit product het product van de Cosinusfen der twee andere zijden optelt. Dat is:

$$\cos. BC = \cos. A \times \sin. AB \times \sin. AC + \cos. AB \times \cos. AC$$

BETOOG. Men late, uit het hoekpunt van den tophoek C , den loodregten boog CD , op de basis vallen; dan is, volgens de I Stelling, $\cos. AC : \cos. AD = \cos. BC : \cos. BD$; derhalve $\cos. BC \times \cos. AD = \cos. AC \times \cos. BD$. Nu kan men, in plaats van $\cos. BD$, stellen: $\cos. (AB - AD) =$ (zie Form. (16) Bladz. 108) $\cos. AB \times \cos. AD + \sin. AB \times \sin. AD$, en dan verandert de laatst voorgaande vergelijking, door deze substitutie, in de volgende:

$$\cos. BC \times \cos. AD = \cos. AC \times \cos. AB \times \cos. AD + \cos. AC \times \sin. AB \times \sin. AD.$$

Men deele de leden dezer vergelijking door $\cos. AD$, en schrijve, voor $\sin. AD : \cos. AD$, hare waarde van $\text{Tang. } AD$; dan verkrijgt men:

$$\cos. BC = \cos. AC \times \cos. AB + \cos. AC \times \sin. AB \times \text{Tang. } AD$$

maar nu is (I. Stelh.) $\text{Tang. } AD = \frac{\sin. AC}{\cos. AC} \times \cos. A$. Stelt men dan deze waarde van $\text{Tang. } AD$ in de laatste vergelijking; dan verkrijgt men eindelijk:

$$\cos. BC = \cos. A \times \sin. AB \times \sin. AC + \cos. AB \times \cos. AC.$$

§ 376. AANMERKING. De meest gebruikelijke en onontbeerlijkste gevallen der scheefhoekige bolvormige driehoeken zijn deze twee: 1°. Wanneer de drie zijden gegeven zijn, de hoeken te vinden: 2°. Wanneer twee zijden met den ingesloten hoek gegeven zijn, de derde zijde, benevens de twee onbekende hoeken te vinden: deze twee gevallen kunnen met behulp der formule: $\cos. BC = \cos. A \times \sin. AB \times \sin. AC + \cos. AB \times \cos. AC$ gevonden worden; de overige ge-

vallen moeten wij, in deze korte schets, voorbijgaan; den Leerling, welke dit onderwerp grondiger wenscht te leeren kennen, op het XIII. Boek onzer *Beginfelen* wijzende.

§ 377. I. VRAAGSTUK. *De drie zijden van eenen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de hoeken te vinden?*

OPLOSSING. Noemen wij de zijden, welke tegen over de hoeken A , B en C staan, a , b en c ; dan is, volgens de voorgaande Stelling,

$$\cos. a = \cos. A \times \sin. b \times \sin. c + \cos. b \times \cos. c$$

Zondert men in deze vergelijking de waarde van $\cos. A$ af; dan zal men vinden:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \times \cos. c}{\sin. b \times \sin. c}$$

en deze laatste van de vergelijking $1 = 1$ aftrekkende; dan zal men vinden:

$$1 - \cos. A = \frac{\cos. b \times \cos. c + \sin. b \times \sin. c - \cos. a}{\sin. b \times \sin. c}$$

Maar, volgens *form. (13) en (27) Bladz. 109*, is

$$1 - \cos. A = 2 \sin^2. \frac{1}{2} A$$

$\cos. b \times \cos. c + \sin. b \times \sin. c = \cos. (b - c)$ diensvolgens verandert de voorgaande vergelijking in

$$2 \sin^2. \frac{1}{2} A = \frac{\cos. (b - c) - \cos. a}{\sin. b \times \sin. c}$$

Wederom is, volgens *form. (29) Bladz. 109*,

$\cos. (b - c) - \cos. a = 2 \sin. \frac{1}{2} (a + b - c) \times \sin. \frac{1}{2} (a - b + c)$ en diensvolgens, na alles door twee gedeeld te hebben,

$$\sin^2. \frac{1}{2} A = \frac{\sin. \frac{1}{2} (a + b - c) \times \sin. \frac{1}{2} (a - b + c)}{\sin. b \times \sin. c}$$

Stel nu $\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c = s$; dan is $s - b = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} (a - b + c)$ en $s - c = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} (a + b - c)$, en de laatste vergelijking wordt dan:

$$\sin^2. \frac{1}{2} A = \frac{\sin. (s - b) \times \sin. (s - c)}{\sin. b \times \sin. c}$$

en, uit deze vergelijking eindelijk den vierkants-wortel trekkende,

Sin.

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. (s - b) \times \sin. (s - c)}{\sin. b \times \sin. c}}$$

§ 378. Deze formule geeft dezen

REGEL. 1°. *Tel de gegeven zijden des driehoeks bij elkander en neem de helft van deze som.*

2°. *Trek van de helft van deze som af elke zijde, die om den gevraagden hoek staat; dan verkrijgt gij twee verschillen.*

3°. *Tel de Logarithmen van de Sinussen dezer twee verschillen bij elkander.*

4°. *Tel bij elkander de Logarithmen Sinussen der twee zijden, die om den gevraagden hoek staan.*

5°. *Trek deze laatste som van de eerste en neemt de helft van het komende verschil.*

6°. *Beschouw de helft van dit verschil als de Logarithmus Sinus van zekeren hoek, en zoek den hoek, tot dien Logarithmus Sinus behoorende. Het dubbel van dien hoek zal dan de begeerde hoek des driehoeks zijn.*

§ 379. TOEPASSING. Dit geval der Bolvormige Driehoeksmeting komt in de Landmeetkunst te pas, wanneer men eenen waargenomen hoek tot den horizon zal overbrengen. Laat E , *Fig. 155*, de standplaats van eenen Waarnemer, AB en CD twee boven den horizon verhevene voorwerpen zijn, hebbende hunne spitzen of toppunten in B en D . Met vele Werktuigen, als, bij voorbeeld, met den Sextant, kan men, uit het standpunt E , slechts waarnemen den hoek BED , welke deze spitzen met elkander maken, (den hoek, onder welke deze punten, uit het standpunt E , gezien worden.) Om echter, door dergelijke hoekmetingen, de ware plaats der voorwerpen AB en CD op het horizontale vlak (dat hier het vlak van projectie is,) te bepalen, moet men den horizontalen hoek AEC kennen (eenen hoek, die gemaakt wordt door de verticale vlakken, welke door de loodlijn EF en de punten D en B gaan,) dien hoek kan uit den waargenomen hoek BED alleen niet worden opgemaakt; men moet, behalve dezen, nog waarnemen de hoeken AEB en CED , welke de gezigtlijnen EB en ED met het horizontale vlak AEC maken; dat is,

K 2

de

de hoogte, onder welke deze punten gezien worden. Noemen wij den waargenomen hoek $BED = A$; hoek $AEB = H$ en hoek $CED = h$; dan zal men uit de gegevens A , H en h den hoek AEC aldus kunnen vinden.

Verbeelden wij ons, in het standpunt E des Waarnemers, eenen bol, en de lijn EF loodrecht op het horizontale vlak; dan wordt het oppervlak van dien bol, door de vlakken FEA , FEC , BED en AEC gesteden, volgens de bogen FK , FH , IG en KH . De boog IG is de maat van den waargenomen hoek A ; de bogen FK en FH zijn (omdat de hoeken FEA en FEC rechte hoeken zijn,) bogen van 90° . De boog IK is de maat van den hoek H , en de boog GH de maat van den hoek h ; bijgevolg is $IF = 90^\circ - H$ en $FG = 90^\circ - h$. Eindelijk is de boog KH de maat van den hoek $AEC =$ hoek a , en die boog GI of hoek a is gelijk aan den bolvormigen hoek F .

Wij kennen dan, in den bolvormigen driehoek FGI , de drie zijden $IG = A$; $IF = 90^\circ - H$ en $FG = 90^\circ - h$, en men moet, om den hoek $AEC = a$ te vinden, den onbekenden hoek $F = a$ zoeken.

De som der zijden, is gelijk aan $A + 90^\circ - H + 90^\circ - h = 180^\circ + A - H - h$, en de halve som $S = 90^\circ + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}H - \frac{1}{2}h$. Trekt men hier van af $IF = 90^\circ - H$; dan is $S - IF = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}H - \frac{1}{2}h$; en nog eens hier van aftrekkende $FG = 90^\circ - h$; dan is $S - FG = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}h$.

Volgens de betoogde formule § 377, is

$$\sin. \frac{1}{2} F = \sqrt{\frac{\sin. (S - IF) \times \sin. (S - FG)}{\sin. IF \times \sin. FG}}$$

Nu is $\sin. (S - IF) = \sin. \frac{1}{2} (A + H - h)$ en $\sin. (S - FG) = \sin. \frac{1}{2} (A - H + h)$, en $\sin. IF = \sin. (90^\circ - H) = \cos. H$, en $\sin. FG = \sin. (90^\circ - h) = \cos. h$; derhalve

$$\sin. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (A + H - h) \sin. \frac{1}{2} (A - H + h)}{\cos. H \times \cos. h}}$$

VOOR-

VOORBEELD. Gegeven zijnde $A = 73^\circ 11' 30''$; $H = 10^\circ 9' 20''$ en $h = 8^\circ 53' 10''$ dan zal men vinden: $a = 74^\circ 22' 30''$, 76.

§ 380. II. VRAAGSTUK. Van eenen bolvormigen driehoek twee zijden, met den ingesloten hoek, gegeven zijnde, de derde zijde te vinden?

OPLOSSING. Laten de hoek A en de aanliggende zijden b en c gegeven zijn; dan wordt de onbekende zijde a bekend door de formule.

$$\cos. a = \cos. A \times \sin. b \times \sin. c + \cos. b \times \cos. c$$

dan, aangezien deze voor de berekening in Logarithmen niet zeer geschikt is, kan men zich van de volgende bedienen:

$$1) \dots \text{Tang. } M = \text{Cot. } \frac{1}{2} A \times \frac{\sin. \frac{1}{2} (b - c)}{\sin. \frac{1}{2} (b + c)}$$

$$2) \dots \sin. \frac{1}{2} a = \frac{\sin. \frac{1}{2} (b + c) \times \sin. \frac{1}{2} A}{\cos. M}$$

Zie *Beginfelen der Meetkunst* § 1171. En dit stelsel van formules geeft dan dezen regel.

REGEL. 1°. Tel bij de Logarithmus Cotangens van den halven ingesloten hoek den Logarithmus Sinus van het halve verschil der zijden, en trek van deze som de Logarithmus Sinus van de halve som dezer zijden af. Beschouw dit laatste verschil, als de Logarithmus Tangens van zekeren hoek M en zoek in de Tafel de waarde van dien hoek M .

2°. Tel bij de Logarithmus Sinus van de halve som der bekende zijden den Logarithmus Sinus van den halven ingesloten hoek, en trek van deze som de Logarithmus Cosinus van den hoek M , welke door het eerste gedeelte der berekening is gevonden. Het verschil zal zijn de Logarithmus Sinus van de helft van de onbekende zijde.

Ingevalle men de onbekende hoeken zou wenschen te vinden, zou men gebruik kunnen maken van den regel, dat de Sinussen der zijden tot elkander in dezelfde reden staan, als de Sinussen der tegenoverstaande hoeken.

III. H O O F D S T U K.

Over de Veelvakkige Ligchamen, inzonderheid de
Prismas, Parallelopipedums, Piramiden, afgeknotte
Piramiden en Regels tot het vinden van der-
zelver Inhouden.

§ 381. I. BEPALING. *Veelvakkige Ligchamen* zijn lichamelijke uitgebreidheden, begrepen tusfchen vier of meer platte vlakken, die elkander onderling doorsnijden.

§ 382. Gelijk, onder de regtlijnige figuren, de verschillende foorten van driehoeken en parallelogrammen de eenvoudigste zijn, en tot eenen grondslag dienen, om meer zamengestelde regtlijnige (en ook de kromlijnige) figuren door dezelve af te meten, zoo zijn de Prismas, Parallelopipedums (die eigenlijk een bijzonder foort van Prisma zijn,) en Piramiden de eenvoudigste; wij zullen daarom met dezelve beginnen.

§ 383. Een prisma kan begrepen worden, aldus te ontstaan. Laat, Fig. 156, in de vlakke van het papier, eene veelhoekige figuur $ABCDE$ (om het even van hoe veel zijden, eenen driehoek, of vierhoek, enz.) gedacht worden; en boven de vlakke van het papier een vlak PQ , evenwijdig loopende aan dien veelhoek $ABCDE$, met nog eenige lijn R , regt of scheefhoekig op het vlak $ABCDE$ staande; indien men dan door de zijden AB , BC , CD , DE en EA van den aangenomen veelhoek $ABCDE$, vlakken $ABba$, $BCcb$, $CDdc$, $DEed$, $EAAe$ laat gaan, alle (zonder één uitgezonderd) evenwijdig loopende aan deze regte lijn R ; dan zullen deze vlakken het vlak PQ , volgens de lijnen ab , bc , cd , de en ea snijden, en op hetzelfde den veelhoek $abcde$ bepalen: de lig-

chamelijke ruimte nu, begrepen tusfchen de veelhoeken $ABCDE$ en $abcde$ en de vlakken $ABba$, $BCcb$, $CDdc$, $DEed$ en $EAAe$, welke klaarblijkelijk parallelogrammen zijn, is een *Prisma*.

§ 384. II. BEPALING. Een *Prisma* is dan een ligchaam, besloten tusfchen twee gelijke- en gelijkvormige, en tevens aan elkander evenwijdig loopende drie- of veelhoekige figuren, en even zoo vele parallelogrammen als één dezer veelhoeken, zijden of hoeken heeft. Eén dezer veelhoeken noemt men het *grondvlak*, de andere het *bovenvlak*, en de Parallelogrammen de *zijvlakken* van het Prisma. De lijnen, volgens welke de zijvlakken elkander snijden, noemt men de *opstaande ribben*.

§ 385. De Prismas worden onderscheiden in *driehoekige*, *vierhoekige*, *vijshoekige*, enz. naar dat het grondvlak een drie-, vier- of vijfhoek is. Een Prisma is *regthoekig* of *scheefhoekig*, naar dat de zijvlakken, alle zonder onderscheid, regthoekig op het grondvlak, en bijgevolg ook op het bovenvlak staan.

§ 386. Wanneer het grondvlak van een prisma een parallelogram is, dan is zulk een prisma daardoor van alle andere prismas onderscheiden, dat de grond- en bovenvlakken zoo wel parallelogrammen zijn, als de zijvlakken; men geeft, wegens deze bijzonderheid, aan dit prisma den naam van *Parallelopipedum*. De tegenoverstaande zijvlakken zijn, in zulk een prisma, evenwijdig, en elke van dezelve kan tot grondvlak van het prisma worden aangenomen, en, volgens de beschrijving van § 383 en 384, een prisma blijven. Men kan dan zeggen.

§ 387. III. BEPALING. Fig. 157. Een *Parallelopipedum* is een ligchaam, besloten tusfchen zes parallelogrammen, waar van elke twee, die tegen over elkander staan, evenwijdig loopen, en daarenboven gelijk- en gelijkvormig zijn.

§ 388. IV. BEPALING. Fig. 158. Een *parallelo-*
K 4 *pi-*

ipedum is *regthoekig*, wanneer alle deszelfs zijvlakken regthoeken zijn. De drie ribben, welke, in dit geval, één der acht drievlakkige hoeken γ hetzelfde bepalen, worden deszelfs *lengte*, *breedte* en *hoogte* genoemd.

§ 389. V. BEPALING. *Fig. 159.* Een *cubus* is een *parallelopipedum*, welks zijden alle vierkanten zijn. *Alle ribben van een cubus zijn dus gelijk.* Een der ribben noemt men de *zijde* van den cubus. Een cubus wordt gezegd, *op eene lijn beschreven te zijn*, wanneer die lijn eene ribbe van dien cubus is.

§ 390. VI. BEPALING. De *hoogte* van een prisma is de loodlijn, welke uit eenig punt van deszelfs bovenvlak op het grondvlak valt.

§ 391. I. STELLING. *Fig. 160.* Wanneer een prisma gesneden wordt door een vlak, dat evenwijdig loopt aan het grondvlak; dan zal het vlak van doorsnijding, met het grondvlak en het bovenvlak gelijk- en gelijkvormig zijn.

BETOOG. Laat *ABCDE* het grondvlak van het prisma zijn: indien het dan door een vlak *abcde*, evenwijdig aan het grondvlak loopende, gesneden wordt; dan is, zie § 359, *ab* evenwijdig aan *AB*; zoo ook zijn *bc*, *cd*, *de* en *ea*, evenwijdig aan *BC*, *CD*, *DE* en *EA*; voorts zijn, volgens § 355, hoek *ABC* = hoek *abc*, hoek *BCD* = hoek *bcd*, hoek *cde* = hoek *CDE*; hoek *DEA* = hoek *dea*; derhalve (zie § 119) de veelhoek *abcde* gelijk- en gelijkvormig met den veelhoek *ABCDE*.

§ 392. II. STELLING. *Fig. 161.* *Alle prismas, die gelijke grondvlakken (bases) en gelijke hoogte hebben, hebben denzelfden lichamelijken inhoud.*

BETOOG. Laat een prisma met zijn vijfhoekig grondvlak *ABCD*, en een ander prisma met zijn parallelogramvormig grond-

grondvlak *EFG* op het zelfde vlak *XY* geplaatst zijn; zijnde *abcd* en *efg* de bovenvlakken dezer prismas. Wij onderstellen, overeenkomstig de voorwaarde der Stelling, dat de vijfhoek *ABCD* en het parallelogram *EFG* eenen gelijken inhoud hebben.

Laat uit de punten *d* en *g*, genomen in de bovenvlakken dezer prismas, de loodlijnen *dp* en *gq* op het vlak *XY* vallen. (wij hebben de scheve prismas zoo gesteld, dat deze loodlijnen duidelijkshalve buiten dezelve vallen) Dan zal, daar klaarblijkelijk dit vlak *XY* als het verlengde van de grondvlakken der prismas kan aangezien worden, *dp* de hoogte van het eerste en *gq* de hoogte van het tweede prisma zijn, en, daar deze hoogten gelijk ondersteld worden, zal *dp* = *gq* zijn.

Onderstellen wij nu: dat éne dezer hoogten de lijn *dp*, bij voorbeeld, in een zeer groot aantal gelijke deelen verdeeld zij; indien men dan door de punten, in welke deze deelen aan elkander grenzen, vlakken laat gaan, die evenwijdig aan het vlak *XY* loopen; zoo is het klaar, dat vermits *gq* = *dp* is, elk één dezer prismas in een zeer groot, maar evenwel hetzelfde aantal zeer dunne prismas zal verdeeld zijn, die alle gelijke grondvlakken en gelijke dikte of hoogte zullen hebben.

Dit zal altijd plaats hebben, hoe groot of klein het aantal deelen in de lijn *dp* gesteld worde. Stelt men dit aantal deelen zoo groot, dat elk dun prisma, zoo dun of nog dunner zij dan een blad fijn postpapier; dan zal niemand twifelen, dat vooreerst in elk prisma deze deelen (die dunne prismas) zullen gelijk zijn, en dat, wegens de onderstelde gelijkheid der grondvlakken, elk deel van het éne prisma gelijk zal zijn aan elk deel van het andere; daar nu, wegens de gelijke hoogte, beide prisma hetzelfde aantal deelen verkregen hebben, zoo zal de inhoud van het éne prisma klaarblijkelijk gelijk moeten zijn aan dien van het andere.

§ 393. Dewijl het betoogde voor alle foorten van prismas geldt, geldt het ook voor alle foorten van *parallelopipedums*,

welker inhouden. (indien zij gelijke grondvlakken en gelijke hoogten hebben,) gelijk zullen zijn; bijaldien men dan den inhoud van een regthoekig parallelipedum vinden kan; dan zal men den inhoud van elk ander scheef parallelipedum en prisma insgelijks kunnen bepalen.

§ 394. III. STELLING. Fig. 162. Wanneer zekere lijn (M) in de lengte (AB) van een regthoekig parallelipedum p maal, in deszelfs breedte (BC) q maal en in deszelfs hoogte (BD) r maal verhouden is; dan zal de inhoud van den cubus, op deze lijn M beschreven, zoo veelmaal in den inhoud van dit regthoekig parallelipedum begrepen zijn, als door het product dezer verhoudings getallen (p , q en r) wordt voorgesteld.

BETOOEN. Omdat de lijn M in de lijnen AB , BC en BD begrepen is p , q en r maal, zal men de lijn AB in p , BC in q en BD in r gelijke deelen kunnen verdeelen, die alle aan M gelijk zijn. Men verbeelde zich nu door de deelpunten van de lijn BD vlakken, die evenwijdig aan het grondvlak ABC loopen; dan wordt het regthoekig parallelipedum $ABCD$ in r gelijke- en gelijkvormige parallelipedums verdeeld, die, als even zoo vele horizontale lagen op elkander gestapeld, het geheel uitmaken. Men bringe door de deelpunten der ribben AB en BC vlakken, die evenwijdig loopen aan de opstaande zijvlakken BCD en ABD ; dan wordt, door de onderlinge snijding dezer vlakken, elke horizontale laag in zulk een aantal van regthoekige parallelipedums verdeeld, als hetwelk klaarblijkelijk aan het product pq zal gelijk zijn; elk één dezer regthoekige parallelipedums zal, wegens de gelijkheid der deelen M , een cubus zijn; elke horizontale laag bevat dus p maal q gelijke cuben, die de lijn M tot zijden hebben; en dewijl er r zulke lagen in het regthoekig parallelipedum bestaan, zal deszelfs inhoud pqr maal r , dat is, pqr cuben bevatten, die op de lijn M beschreven zijn.

§ 395.

§ 395. Hieruit blijkt, hoe men den inhoud van elk regthoekig parallelipedum kan vergelijken met eenen cubus die op eene gegevene lijn M beschreven is.

REGEL. Men mete hoeveelmaal deze lijn M op de lengte, breedte en hoogte van het regthoekig parallelipedum begrepen is, en vermenigvuldige de getallen, welke die verhoudingen uitdrukken, met elkander; het product zal dan te kennen geven, hoe veelmaal de cubus, op de lijn M beschreven, in dit parallelipedum zal begrepen zijn. Dezen regel drukt men, bij verkorting, uit, door te zeggen: De inhoud van een regthoekig parallelipedum is gelijk aan deszelfs lengte, breedte en hoogte, met elkander vermenigvuldigd.

VOORBEELD. Fig. 161. Laat gegeven zijn, $AB = 7,3$ voeten, $BC = 5,7$ voeten en $BD = 6,2$ voeten? dan zal de inhoud worden $AB \times BC \times BD = 7,3 \times 5,7 \times 6,2 = 257,982$ cubieke voeten.

§ 396. De cubus, op de éénheid van de lengtemaat beschreven, is alzoo de natuurlijke maat van de inhouden der ligchamelijke figuren, (gelijk het vierkant, op dezelve beschreven, de natuurlijke maat van de inhouden der vlakken is.) Zoodat men, in het algemeen, om den inhoud van een ligchaam te bepalen, zekere lijnen of afstanden in de grenzen van dit ligchaam, met zekere aangenomene lengtemaat moet meten, om, volgens algemeene regels, welke uit de bijzondere gesteldheid der figuur volgen, te besluiten, hoeveelmaal de cubus, op die lengtemaat beschreven, in dit ligchaam begrepen zij? Welke afstanden of lijnen in elk bijzonder ligchaam moeten gemeten worden, om uit dezelve tot den inhoud te besluiten, zal het vervolg leeren; doch, als algemeen grondbeginsel, moet men vasthouden: dat de inhouden der lichamen, moeten bepaald worden in cuben beschreven op de éénheid van de maat, waarmede men gemeten heeft. Men verkrijgt die inhouden in cubieke roeden, cubieke voeten, cubieke duimen, cubieke lijnen, cubieke ellen, cubieke meters, enz., naardat men met roeden, voeten, duimen, lijnen, ellen, meters, enz. gemeten heeft.

§ 397. Omdat de lengte, breedte en hoogte van eenen cubus

cubus gelijk zijn, wordt de inhoud van eenen cubus gevonden, door deszelfs zijde tot de derde magt te verheffen. Een cubus, wiens zijden 12 duimen lengte heeft, zal dan gelijk zijn aan $12 \times 12 \times 12 = 12^3 = 1728$ cubieke duimen. Eene cubieke Rijnlandsche Roede, houdt derhalve 1728 cubieke voeten, een cubieke voet 1728 cubieke duimen; eene cubieke duim 1728 cubieke lijnen. Een cubieke Amsterdamsche roede houdt 2197 cubieke voeten, en een cubieke Amsterdamsche voet 1331 cubieke duimen.

§ 398. Men zal dan ook, omgekeerd, vinden, hoe groot de zijde van eenen cubus in lengte éénheden zal moeten genomen worden, opdat deszelfs inhoud een gegeven aantal cubieke éénheden bevatte? Tot dat einde moet men uit het gegeven getal cubieke éénheden, welke die cubus moet bevatten, den cubus-wortel trekken. (Zie de Regels tot het trekken van den cubus-wortel, *Allereerste Grond. der Cijfferk. LII Les*) die wortel zal alsdan de verhouding van de zijde des begeerden cubus, tot de éénheid der lengtemaat voorstellen.

VOORBEELD. Alzoo zal de zijde van eenen cubus, die 13 cubieke duimen zal moeten inhouden, gelijk moeten genomen worden aan $\sqrt[3]{13} = 2,351335$ duimen.

§ 399. Verbeelden wij ons lijnen, die 1, 2, 3, 4, 5, 6, enz. voeten lang zijn, en dat men op deze lijnen cuben hebbe beschreven; dan zullen, wegens het betoogde, deze cuben, 1, 8, 27, 64, 125, 216 cubieke voeten inhouden. De inhouden der cuben staan derhalve tot elkander, in dezelfde reden, als de derde magten der getallen, die de verhouding van derzelver zijden tot elkander uitdrukken. En de inhouden der cuben, op evenredige lijnen beschreven, zijn evenredig.

§ 400. Het product der lijnen AB en BC , Fig. 162 is, zie § 150 de inhoud van den regthoek ABC , zijnde het grondvlak van het regthoekig parallelipedum, dat de ribbe BD tot hoogte heeft. Men kan dan zeggen: dat de inhoud van een regthoekig parallelipedum gelijk is aan deszelfs grondvlak vermenigvuldigd met de hoogte.

§ 401.

§ 401. Dewijl dan alle prismas, die gelijke grondvlakken en gelijke hoogte hebben, gelijk zijn, en dus de prismas van Fig. 161, gelijk zijn aan het parallelipedum van Fig. 162, indien de vijf- en vierhoekige grondvlakken $ABCD$ en EFG (in Fig. 161) gelijk zijn aan den regth. ABC (in Fig. 162) en de hoogten dp en gq (in Fig. 161) gelijk aan de hoogte BD (in Fig. 162,) zoo volgt hier uit, om den inhoud van elk regt- of scheefhoekig, drie- of veelhoekig prisma te vinden, dezen algemeenen regel.

REGEL. Zoek, op de eene of andere wijze, den inhoud van het grondvlak, en bepaal verder de hoogte van het prisma, vermenigvuldig dan den inhoud van het grondvlak met de hoogte; dan verkrijgt gij den inhoud van het prisma.

VOORBEELD. Fig. 163. Laat $ABCD$ een driehoekig scheef prisma zijn. Zij $AC = 8,7$ duimen. Trek uit B de loodlijn BF op AC met deze loodlijn: zij $BF = 6,31$ duim. Trek uit D eene loodlijn DE op het verlengde grondvlak (dit kan men volbrengen, door het prisma op eene vlakke tafel te zetten, en het eene been van eenen zuiveren winkelhaak tegen het punt D te houden, en de lijn DE te meten.) Laat gevonden worden $DE = 13,7$ duimen; dan zal men den inhoud van het prisma aldus vinden.

Inhoud grondvl. $ABC = \frac{1}{2} AC \times BF = \frac{1}{2} \times 8,7 \times 6,31 = 27,4485$ vierkante duimen.

Inhoud prisma $ABCD = \text{Grondvl. } ABC \times DE = 27,4485 \times 13,7 = 376,0445$ cubieke duimen.

§ 402. Het komt dan, bij het meten van alle scheve en rechte prisma, op twee zaken aan. 1°. Op het vinden van den inhoud van het grondvlak, 2°. Op het bepalen van de hoogte, welke hoogte in een regt prisma altijd eene der opstaande ribben is. Het blijkt reeds, uit het vergelijken der Regels van § 152, 233, 332 — 334, hoe verscheiden de manieren zijn, om den inhoud van eenen driehoek te vinden; nog oneindig meer verscheiden zijn de hulpmiddelen, om de inhouden van veelhoekige figuren van een grooter aantal zijden te vinden; de bijzondere omstandigheden moeten leeren, welke de geschik-

schikste wijze zij, om den inhoud van zulk eene veelhoekige figuur te bepalen. Voorbeelden van een en ander, zullen in de mondelijke Lesfen gegeven worden.

§ 403. Als een regel, die in vele gevallen gemakkelijk kan worden toegepast, kan men hier bijvoegen: *dat de inhoud van een scheef prisma gelijk is aan eene der opstaande ribben, vermenigvuldigd met den inhoud van het vlak, hetwelk de ribben van dat prisma regthoekig doorsnijdt*, zie § 420.

§ 404. VII. BEPALING. Fig. 164. Eene *Piramide* is een ligchaam, besloten tusschen een drie of veelhoekig grondvlak en een aantal driehoeken, welke in één punt zamenkomen, welk punt het *toppunt* van de piramide genoemd wordt, dragende deze in het toppunt zamenkomende driehoeken den naam van de *zijvlakken der piramide*. De piramiden zijn *drie-, vier- en veelhoekig*, naar dat hare grondvlakken drie-, vier- of veelhoekig zijn. De *hoogte* van eene piramide is de loodlijn, welke uit het toppunt op het grondvlak valt.

§ 405. Om dit nader op te helderen, zoo laat Fig. 164, *ABCDE* eene veelhoekige figuur zijn, en *P* een punt buiten derzelve vlak gelegen; indien men dan van het punt *P* tot aan alle de hoekpunten, *A, B, C, D* en *E*, dezer veelhoekige figuur, de lijnen *PA, PB, PC, PD* en *PE* trekt; dan ontstaan er de driehoeken *ABP, BCP, CDP, DEP* en *EAP*, en dan is de lichamelijke ruimte, tusschen deze driehoeken en den veelhoek *ABCDE* begrepen, eene piramide. De veelhoek *ABCDE* is het grondvlak, en de driehoeken *ABP, BCP*, enz. de opstaande zijvlakken; *P* het toppunt, *AP, BP*, enz. de opstaande ribben. De loodlijn *PR*, is de hoogte der piramide.

§ 406. V. STELLING, Fig. 165. *Wanneer eene piramide gesneden wordt door een vlak, dat evenwijdig aan haar grondvlak loopt; dan is het vlak van doorsnijing met het grondvlak altijd gelijkvormig.*

B.

BETOOG. Laat *ABCDP* eene vierhoekige piramide zijn, haar toppunt in *P* hebbende: indien dan deze piramide gesneden wordt, door een vlak *abcd*, evenwijdig loopende aan het vlak *ABCD*; dan moet men aantoonen, dat het vlak *abcd* gelijkvormig is, met het vlak *ABCD*.

Om dat de vlakken *ABCD* en *abcd* evenwijdig zijn, zal, zie § 359, *ab* aan *AB*, *bc* aan *BC*, *cd* aan *CD* en *ad* aan *AD* evenwijdig zijn; daarom is, zie § 355, hoek *ABC* = hoek *abc*; hoek *BCD* = hoek *bcd*; hoek *CDE* = hoek *cde* en hoek *DAE* = hoek *dae*.

Wegens de evenwijdigheid der lijnen *ab, bc, cd*, *da* met *AB, BC, CD, DA*, zijn de driehoeken *ABP, BCP, CDP, DAP* met *abP, bcP, cdP, daP* gelijkvormig, en daarom zal men, zie § 190, hebben.

$$AB:ab = PB:Pb$$

$$BC:bc = PB:Pb$$

$$\text{daarom } AB:ab = BC:bc.$$

$$\text{of } AB:BC = ab:bc.$$

Om dezelfde reden, zal *BC:CD = bc:cd*; verder *CD:DE = cd:de*, en *DE:DA = de:da*.

De veelhoeken *ABCD* en *abcd*, zijn derhalve onderling gelijkhoekig, en de zijden, die om de gelijke hoeken staan, zijn evenredig; gevolgelyk zijn zij, zie § 199, gelijkvormig.

§ 407. VI. STELLING, Fig. 166. *De inhoud van piramiden, die gelijke grondvlakken en gelijke hoogten hebben, zijn gelijk.*

BETOOG. Laten driehoek *ABC* en vierhoek *DEFG*, de grondvlakken der twee piramiden zijn, welke hare toppunten in *P* en *Q* hebben. Indien dan de inhoud van driehoek *ABC* gelijk is aan den inhoud van den vierhoek *DEFG* en ook de hoogten, dat is, de loodlijnen *PR* en *QS* gelijk zijn; dan zal men moeten bewijzen, dat de piramiden *ABCP* en *DEFGQ* gelijke inhoud hebben.

10. Wij moeten vooreerst doen zien: *dat, wanneer deze twee piramiden gesneden worden door een vlak, evenwijdig loopende aan*

het

het vlak, op hetwelk de grondvlakken ABC en $DEFG$ staan, de vlakken van doorsnijding abc en $defg$ gelijk van inhoud zullen zijn.

Laat dit vlak van doorsnijding de loodlijnen PR en QS in de punten r en s snijden; dan zal, omdat evenwijdige vlakken overal even verre van elkander afstaan, $Rr = Ss$ en bijgevolg (om dat $PR = QS$ is) ook $Pr = Qs$ zijn.

Trek de lijnen AR , ar , DS en ds ; dan is, zie § 359, AR evenw. aan ar en DS evenw. aan ds . Wij hebben dan in de gelijkvormige driehoeken ARP en arP

$$AP : aP = PR : Pr = QS : Qs$$

en in de gelijkvormige driehoeken DSQ en Dsq

$$DQ : dQ = QS : Qs$$

derhalve zal ook

$$AP : aP = DQ : dQ$$

moeten zijn.

Voorts geven de gelijkvormige driehoeken ABP en abP , als ook de gelijkvormige driehoeken DEQ en deQ , de evenredigheden:

$$AB : ab = AP : aP = DQ : dQ$$

$$DE : de = \dots\dots\dots DQ : dQ$$

derhalve, zal dan ook

$$AB : ab = DE : de$$

$$\text{en } AB^2 : ab^2 = DE^2 : de^2$$

moeten zijn.

Volgens de voorgaande Stelling, zijn de driehoeken ABC en abc , en de vierhoeken $DEFG$ en $defg$ gelijkvormig; derhalve zal men, zie § 206, mogen besluiten:

$$\text{drieh. } ABC : \text{drieh. } abc = AB^2 : ab^2 = DE^2 : de^2$$

$$\text{vierh. } EFGH : \text{vierh. } efg h = \dots\dots DE^2 : de^2$$

derhalve zal ook

$$\text{drieh. } ABC : \text{drieh. } abc = \text{vierh. } DEFG : \text{vierh. } defg$$

moeten zijn. Maar nu is volgens de onderstelling,

$$\text{drieh. } ABC = \text{vierhoek } DEFG; \text{ daarom zal ook drieh. } abc = \text{vierh. } defg \text{ zijn.}$$

2°. Dit bewezen zijnde, zal men gemakkelijk de waarheid van het gestelde inzien. Laat de hoogte PR in een zeer groot

aantal gelijke deelen gedacht worden gedeeld te zijn, en laat door de deelpunten vlakken, evenwijdig aan het vlak, waarop de piramiden staan, getrokken worden; dan zullen beide piramiden in hetzelfde aantal van zeer dunne driehoeken en vierhoeken verdeeld zijn, welke, van onder naar boven, de eerste aan den eersten, de tweede aan den tweeden, zullen gelijk zijn; telt men deze alle bij elkander, dan zal de som van alle de driehoeken, uit welke de piramide $ABCP$ bestaat, gelijk zijn aan de som van alle de vierhoeken, uit welke de piramide $DEFGQ$ is zamengesteld; dat is, deze piramiden zullen eenen gelijken inhoud hebben.

§ 408. VII. STELLING. *Fig. 167. Elk driehoekig prisma kan in drie gelijke (doch ongelijkvormige) driehoekige piramiden verdeeld worden.*

BETOOG. Stel, dat $ABCFDE$ een driehoekig prisma zij. Laat dit ligchaam gefneden worden door een vlak, gaande door de punten A , B en F ; dan wordt het in de driehoekige piramide $ABCF$, de driehoek ABC tot grondvlak en F tot toppunt hebbende en in de vierhoekige piramide (zie n°. 2) $ABDEF$, $ABDE$ tot grondvlak en F tot toppunt hebbende, verdeeld.

Deel deze vierhoekige piramide $ABDEF$ door een vlak, hetwelk door de punten B , E en F gaat; dan wordt zij in twee driehoekige piramiden verdeeld, welke de driehoeken ABE en BDE tot grondvlakken en het punt F tot gemeenschappelijk toppunt hebben.

Het prisma is dan verdeeld in de piramiden $ABCF$, $ABEF$ en $BDEF$; deze piramiden hebben gelijke inhouden.

Want, volgens § 383, is drieh. $ABC =$ drieh. DEF , en het punt F staat zoo ver van het vlak ABC , als het punt B van het vlak DEF ; de piramiden $ABCF$ en $DEFB$ hebben dan gelijke grondvlakken en gelijke hoogten; zij zijn dus gelijk.

Volgens § 383, is $ABDE$ een parallelogram; daarom drieh. $ABE =$ drieh. BDE ; het punt F is voorts het gemeene toppunt der piramiden $ABEF$ en $BDEF$; deze piramiden hebben derhalve gelijke grondvlakken en gelijke hoogten; zij hebben dan ook denzelfden inhoud.

§ 409. Elke der drie piramiden $ABCF$, $ABEF$ en $BDEF$, is derhalve gelijk aan één-derde van het prisma $ABCFDE$.

§ 410. VIII. STELLING. Fig. 168. Wanneer eene piramide ($ABCDEP$) en een prisma ($FGHIhgf$) gelijke grondvlakken ($ABCDE$ en $FGHI$) en gelijke hoogten hebben; dan is de inhoud der piramide gelijk aan één-derde van den inhoud van het prisma.

BETOOG. Trek door de punten B , C , D , E de lijnen Bb , Cc , Dd en Ee , evenwijdig aan AP ; neem $Bb = Cc = Dd = Ee = AP$; en trek de lijnen Pb , bc , cd , de en Pe ; als ook AC , AD , Pd en Pc ; dan verkrijgt men het vijfhoekig prisma $ABCDEedcbP$, hetwelk met de piramide $ABCDEP$ op hetzelfde grondvlak staat, en met hetzelfde dezelfde hoogte heeft. Nu is, zie § 409,

$$\text{Pir. } ABCP = \frac{1}{3} \text{ Prisma } ABCcbP$$

$$\text{Pir. } ACDP = \frac{1}{3} \text{ Prisma } ADCcdP$$

$$\text{Pir. } AEDP = \frac{1}{3} \text{ Prisma } AEDdeP$$

telt men deze bij elkander; dan zal

$$\text{Piram. } ABCDEP = \frac{1}{3} \text{ Prisma } ABCDEedcbP$$

moeten zijn.

Nu heeft, volgens de onderstelling, het prisma $FGHIhgf$, met de piramide $ABCDEP$ en derhalve ook met het prisma $ABCDEedcbP$ dezelfde hoogte; en daarom is

$$\frac{1}{3} \text{ Prism. } ABCDEedcbP = \frac{1}{3} \text{ Prisma } FGHIhgf$$

maar zoo even is bewezen, dat

$$\frac{1}{3} \text{ Prism. } ABCDEedcbP = \text{Piram. } ABCDEP$$

is; derhalve zal ook

$$\text{Piram. } ABCDEP = \frac{1}{3} \text{ Prism. } FGHIhgf$$

zijn.

§ 411. Hieruit volgt: dat de inhoud van eene piramide gelijk zal zijn aan den inhoud van een prisma, hetwelk met deze piramide op hetzelfde grondvlak staat, en welks hoogte gelijk is aan één-derde van de hoogte der piramide. Men zal dan, om den lichamelijken inhoud eener piramide te vinden, den volgende algemeenen Regel kunnen stellen.

R. 2.

REGEL. Zoek, op de ééne of andere wijze, den inhoud van het grondvlak der piramide, in vierkanten van de lengtemaat te bepalen; zoek verder de hoogte der piramide, (welke is de loodlijn, die uit het toppunt op het grondvlak valt,) vermenigvuldig den inhoud van het grondvlak met één-derde van deze hoogte; dan zal het product te kennen geven, hoe veelmaal de cubieke éénheid in den inhoud der piramide begrepen is. Bij verkorting, stelt men dezen Regel aldus voor. De inhoud eener piramide is gelijk aan het grondvlak, vermenigvuldigd met één-derde van de hoogte.

VOORBEELD. Veronderstellen wij, dat men gevonden hebbe, den inhoud van het grondvlak $ABCDE$ der piramide $ABCDEP$, Fig. 168, gelijk aan 193,7 vierkante duimen, en de hoogte gelijk aan 24 duim; dan zal de inhoud $= \frac{1}{3} \times 193,7 \times 24 = 1549,6$ cubieke duimen zijn.

§ 412. Laten P en p twee prismas zijn, welker grondvlakken door G en g en hoogten door H en h worden voorgesteld; dan is, zie § 401, $P = G \times H$ en $p = g \times h$; derhalve

$$P : p = G \times H : g \times h \dots\dots\dots (A)$$

dat wil zeggen: de inhoud der prismas staan tot elkander, in de samengestelde reden van hunne grondvlakken en hoogten.

§ 413. Laat $H = h$ zijn; dan zal men, de termen van de laatste reden der evenredigheid (A) door $H = h$ deelende, verkrijgen:

$$P : p = G : g$$

Dat is: de prismas, die gelijke hoogten hebben, staan tot elkander, in dezelfde reden, als hunne grondvlakken.

§ 414. Is $G = g$; dan zal men, de termen van de laatste reden der evenredigheid door $G = g$ deelende, verkrijgen:

$$P : p = H : h$$

Dat wil zeggen: de inhoud van prismas, die gelijke grondvlakken hebben, staan tot elkander in dezelfde reden, als hunne hoogten.

§ 415. Wanneer eindelijk, in de evenredigheid (A), $P = p$

L. 2

ge-

gesteld wordt; dan zal ook $G \times H = g \times h$ moeten zijn, en dan volgt hieruit:

$$G : g = h : H \text{ omgek. } = H : h$$

waaruit dan blijkt: dat, wanneer twee prismas gelijke inhouden hebben, derzelve grondvlakken tot elkander in de omgekeerde reden staan van hunne hoogten.

§ 416. Het is, aangezien de inhouden der piramiden gelijk zijn aan één-derde van de inhouden der prismas, welke met dezelve gelijke grondvlakken en gelijke hoogten hebben, duidelijk te zien: dat

1°. De piramiden, die gelijke hoogten hebben, tot elkander staan, in dezelfde reden, als hare grondvlakken.

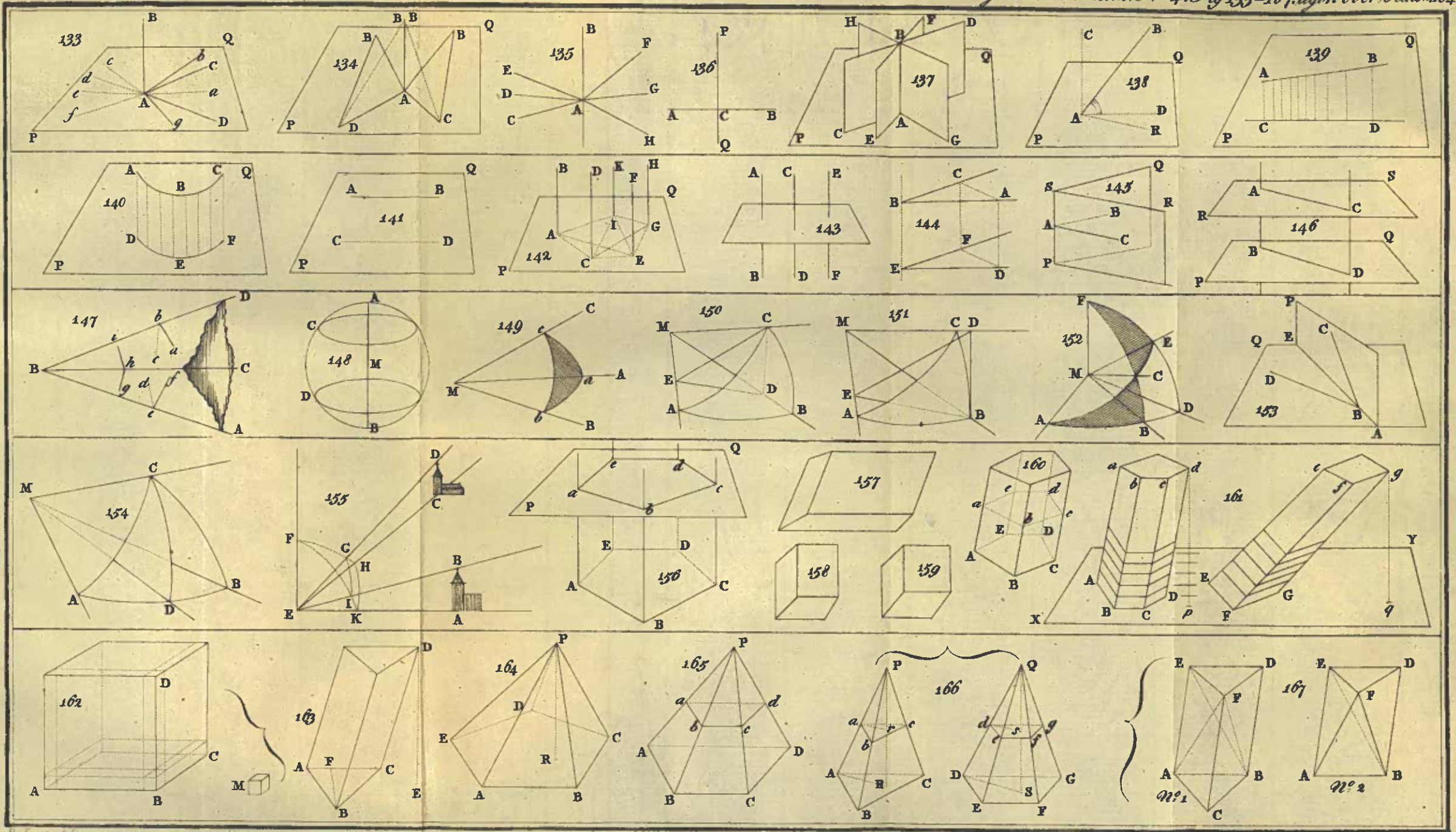
2°. Dat de piramiden, die gelijke grondvlakken hebben, tot elkander staan, in dezelfde reden, als hare hoogten.

3°. Dat, in het algemeen, de inhouden der piramiden in de zamengestelde reden zijn van hare grondvlakken en hoogten.

4°. En eindelijk: dat de grondvlakken van gelijke piramiden in de omgekeerde reden staan van hare hoogten.

§ 417. VIII. BEPALING. Fig. 169. Een afgeknot prisma is een prisma $ABCFED$, hetwelk ontstaat, wanneer men van een gewoon prisma een stuk affnijdt, door een vlak DEF , hetwelk niet evenwijdig loopt aan het grondvlak. De zijvlakken van zulk een afgeknot prisma zijn alle geen parallelogrammen; maar alle, of ten minste sommige, trapeziums; de opstaande ribben zijn ook ongelijk, en het bovenvlak is niet meer gelijk- en gelijkvormig aan het grondvlak.

§ 418. IX. BEPALING. Fig. 170. Men verstaat door het *Profiel* of de *Doorsnede* van een gewoon of afgeknot prisma het vlak PQR , volgens hetwelk dit prisma zoodanig wordt doorgesneden, dat de ribben en zijvlakken op hetzelfde regthoekig staan. In een regt prisma kan het grondvlak voor deszelfs profiel gehouden worden.



§ 419. IX. STELLING. *Fig. 169 en 170. De inhoud van elk afgeknot driehoekig prisma is gelijk aan deszelfs profiel, vermenigvuldigd met één-derde van de som van deszelfs opstaande ribben.*

BETOOG. Laat, *Fig. 169*, het afgeknotte driehoekige prisma regthoekig op deszelfs grondvlak staan, (dat is, de ribben *AD*, *BE* en *CF* regthoekig op het grondvlak,) en laat hetzelfde in de drie piramiden *ABCE*, *ACDE* en *CDEF* verdeeld worden, door de vlakken *ACE* en *DCE*; dan is de som dezer piramiden gelijk aan het afgeknotte prisma.

De piramiden *ABCE* en *ADCE* kunnen beschouwd worden, als hebbende in *C* haar gemeenschappelijke toppunt, en staande op de grondvlakken *ABE* en *ADE*; derhalve is, zie § 407, *Piram. ABCE : Piram. ACDE = drieh. ABE : drieh. AED*; maar, omdat *BE* evenwijdig is aan *AD*, hebben de driehoeken *ABE* en *ADE* gelijke hoogten, en staan derhalve tot elkander, als hunne basen; dat is,

$$\text{drieh. } ABE : \text{drieh. } AED = BE : AD$$

derhalve zal dan ook

$$\text{Piram. } ABCE : \text{Piram. } ACDE = BE : AD$$

moeten zijn.

Op dezelfde wijze, zal blijken: dat

$$\text{Piram. } ACDE : \text{Piram. } CDEF = AD : CF$$

zal zijn, en derhalve ook

$$\text{Piram. } ABCE : \text{Piram. } CDEF = BE : CF$$

Laten nu de termen van de laatste reden der evenredigheid

$$\text{Piram. } ABCE : \text{Piram. } ACDE = BE : AD$$

vermenigvuldigd worden met $\frac{1}{3}$ *drieh. ABC* $= \frac{1}{3}$ *drieh. ABC*; dan zal men verkrijgen:

$$\text{Pir. } ABCE : \text{Pir. } ACDE = \frac{1}{3} \text{ drieh. } ABC \times BE : \frac{1}{3} \text{ drieh. } ABC \times AD$$

maar nu is *Piram. ABCE* $= \frac{1}{3}$ *drieh. ABC* $\times$ *BE*; derhalve zal ook *Piram. ACDE* $= \frac{1}{3}$ *drieh. ABC* $\times$ *AD*.

Door de termen van de tweede reden der evenredigheid

$$\text{Piram. } ACDE : \text{Piram. } CDEF = AD : CF$$

met *drieh. ABC* $=$ *drieh. ABC* te vermenigvuldigen, zal het blij-

ken: dat $\text{piram. } CDFE = \text{drieh. } ABC \times \frac{1}{3} CF$ zal zijn. Tel nu bij elkander

$$\text{Piram. } ABCE = \text{drieh. } ABC \times \frac{1}{3} BE$$

$$\text{Piram. } ACDE = \text{drieh. } ABC \times \frac{1}{3} AD$$

$$\text{Piram. } CDFE = \text{drieh. } ABC \times \frac{1}{3} CF$$

dan zal men verkrijgen:

$$\text{Prism. } ABCFDE = \text{drieh. } ABC \times \frac{1}{3} (BE + CF + AD)$$

Na dit betoogd te hebben, zoo laat Fig. 170 een scheef afgeknut driehoekig prisma voorstellen, welks profiel is de driehoek PQR ; dan zal, volgens het betoogde in het eerste gedeelte,

$$\text{Prisma. } PQRFDE = \text{drieh. } PQR \times \frac{1}{3} (RF + QE + PD)$$

$\text{Prisma. } PQRABC = \text{drieh. } PQR \times \frac{1}{3} (RA + QB + PC)$ zijn, en telt men deze twee vergelijkingen bij elkander, dan zal

$$\text{Afg. Prism. } ABCFDE = \text{drieh. } PQR \times \frac{1}{3} (AF + BE + CD)$$

zijn, hetgeen in het algemeen moest bewezen worden.

§ 420. Om dan den inhoud van een afgeknut driehoekig prisma te meten, heeft men dezen REGEL. Trek (Fig. 170) uit eenig punt (P) van ééne van deszelfs ribben (CD) twee loodlijnen (PQ en PR) in de daar aan zamenkomende zijvlakken ($BCDE$ en $ACDF$), en trek de lijn (QR), welke de uiteinden dezer loodlijnen vereenigt; meet dan de zijden van den driehoek (PQR), welke daaruit ontstaat en het profiel van het afgeknutte prisma is, of twee zijden met den ingesloten hoek, en zoek uit deze gegevens den inhoud dezes profiels. Meet vervolgens de lengte der ribben (AF , BE en CD), en vermenigvuldig den inhoud van het gevonden profiel met één-derde van de som dezer ribben; dan verkrijgt gij den inhoud van het afgeknutte driehoekig prisma.

VOORBEELD. Laat gevonden zijn: inhoud profiel $PQR = 17,39$ vierkante duimen; $AF = 12,7$, $BE = 16,9$ en $CD = 20,7$ duimen; dan zal $AF + BE + CD = 50,3$ duimen zijn, en inhoud $= \frac{1}{3} \times 17,39 \times 50,3 = 291,57233$ cubieke duimen.

§ 421. Deze regel geldt echter niet anders, dan voor driehoekige afgeknutte prisma's. Voor veelhoekige afgeknutte prisma's

kan

kan men wel dezen REGEL geven: dat derzelver inhoud gelijk is aan den inhoud van het profiel, vermenigvuldigd met de lengte der lijn, welke, door het zwaartepunt des profiels, tot aan het grond- en bovenvlak, evenwijdig aan ééne der ribben getrokken wordt; maar zoo wel het betoog als het gebruik dezes regels is voor deze Beginselen te zwaar.

§ 422. In het algemeen, kan men uit dit alles dezen regel afleiden, om den inhoud van een scheef prisma te vinden.

REGEL. De inhoud van een scheef prisma is gelijk aan deszelfs profiel, vermenigvuldigd met ééne der opstaande ribben; zie Beg. Meetk. XIV Stel. XI B.

§ 423. XI. BEPALING, Fig. 171. Eene Afgeknutte Piramide is een ligchaam, hetwelk ontstaat, wanneer men van ééne gewone piramide het topstuk affnijdt, door een vlak, dat evenwijdig loopt aan het grondvlak.

Volgens § 407, is dan het bovenvlak gelijkvormig aan het grondvlak.

§ 424. X. STELLING. Fig. 171. De inhoud eener afgeknutte piramide is gelijk aan de som van het grondvlak, het bovenvlak en een vlak, dat tusschen het grond- en bovenvlak middenevenredig is, vermenigvuldigd met één-derde van de hoogte dezer afgeknutte piramide.

BETOOG. Zij $ABCFDE$ de afgeknutte piramide, $DEFP$ het afgesneden stuk; laat uit P de lijn PGH loodrecht op het grondvlak vallen; dan zijn PH , PG en GH de hoogten der piramiden $ABCP$, $DEFP$ en van de afgeknutte piramide $ABCFDE$. Stel den inhoud van het grondvlak $ABC = G$, van het bovenvlak $DEF = B$, de hoogte $GH = H$, den inhoud van de afgeknutte piramide $= I$; dan zal, aangezien de middenevenredige tusschen G en B door $\sqrt{BG}$ voorgesteld wordt, de zin der stelling op deze formule

$$I = \left\{ G + \sqrt{BG} + B \right\} \times \frac{1}{3} H$$

nederkomen.

Trek de lijnen DG en AH en stel $PG = x$; dan is $PH = H + x$. Stel $AB^2 = p \times$ drieh. ABC , (p een zeker getal zijnde, hetwelk men niet behoeft te kennen,) dan zal $CD^2 = p \times$ drieh. DEF zijn. Men heeft den $AB^2 = pG$ en $DE^2 = pB$ derhalve $AB = \sqrt{p \times G}$ en $DE = \sqrt{p \times B}$.

Verder is, in de gelijkvormige driehoeken ABP en DEP , als ook in PAH en PDG :

$$AB:DE = AP:DP = PH:PG$$

$$AB - DE:DE = PH - PG:PG$$

of wel, voor AB , DE , PH en PG , derzelver waarde stellende,

$$\sqrt{p \times G} - \sqrt{p \times B} : \sqrt{p \times B} = H : x$$

en, deelende de termen van de eerste reden dezer evenredigheid door $\sqrt{p}$; dan zal men verkrijgen:

$$\sqrt{G} - \sqrt{B} : \sqrt{B} = H : x$$

en de vierde evenredige uit deze evenredigheid oplosfende,

$$x = \frac{H \sqrt{B}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}} \dots \dots \dots (\nabla)$$

leerende deze vergelijking: hoe de hoogte van het afgesneden stuk van het grondvlak, het bovenvlak en de hoogte van de afgeknotte piramide afhangt.

Nu hebben wij, volgens § 411,

$$\text{Pir. } ABCP = G \times \frac{1}{3} (H + x) = \frac{1}{3} G x + \frac{1}{3} GH$$

$$\text{Pir. } DEFP = B \times \frac{1}{3} x \dots \dots = \frac{1}{3} B x$$

deze van elkander aftrekkende, zal men voor den inhoud der afgeknotte piramide overhouden:

$$I = \frac{1}{3} (G - B) x + \frac{1}{3} GH$$

stelt men, in deze vergelijking, voor x derzelver waarde uit de bovenstaande formule (∇) ; dan is

$$I = \frac{1}{3} \times (G - B) \times \frac{H \sqrt{B}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}} + \frac{1}{3} GH$$

$$\text{of } I = \frac{1}{3} \times \frac{G - B}{\sqrt{G} - \sqrt{B}} \times H \sqrt{B} + \frac{1}{3} GH$$

$$\text{of } I = \frac{1}{3} \times (\sqrt{G} + \sqrt{B}) \times H \sqrt{B} + \frac{1}{3} GH$$

of eindelijk

$$I = (G + \sqrt{B} G + B) \times \frac{1}{3} H$$

§ 425. Uit deze formule blijkt nu: hoe de inhoud van elke

elke afgeknotte piramide kan gevonden worden; men volgt tot einde dezen regel.

REGEL. 1°. Zoek, op de ééne of andere wijze, den inhoud van het grondvlak; zoek ook, op dezelfde wijze, den inhoud van het bovenvlak; bepaal eindelijk ten naauwkeurigste de hoogte (de afstand tusschen het grondvlak en het bovenvlak.)

2°. Zoek eene middenevenredige tusschen het grondvlak en het bovenvlak; dat is, trek den vierkants-wortel uit het product der de getallen, die te kennen geven, hoe groot de grond- en bovenvlakken, in vergelijking van de vierkante éénheid, zijn.

3°. Tel dit middenevenredige vlak bij het grondvlak en het bovenvlak en vermenigvuldig de komende som met één-derde van de hoogte; dit laatste product zal dan de inhoud der afgeknotte piramide, in cubieke éénheden, voorstellen.

VOORBEELD. Fig. 171. Laat het grondvlak een vierkant zijn, wiens zijde $AB = 18$ duim is, en het bovenvlak bijgevolg ook een vierkant, welks zijde $DE = 8$ duim is, en de hoogte $H = 13$ voet 9 duim $= 165$ duim? Dan zal $G = 18 \times 18 = 324$ vierk. duim; $B = 8 \times 8 = 64$ vierk. duim zijn, en $\sqrt{B \times G} = \sqrt{324 \times 64} = 18 \times 8 = 144$ vierkante duimen.

$G + B + \sqrt{GB} = 324 + 64 + 144 = 532$ vierk. duim. vermenigvuldig deze som met $\frac{1}{3} H = \frac{1}{3} \times 165 = 55$ duim; dan zult gij vinden:

$I = (G + B + \sqrt{GB}) \times \frac{1}{3} H = 532 \times 55 = 29260$ cub. duim, of, deelende dit getal door 1728 cubieke duimen; dan zal de inhoud dezer afgeknotte piramide bevonden worden gelijk te zijn aan 16 cubieke voeten en 1612 cubieke duimen.

§ 426. Sommigen zeggen: dat de inhoud van eene afgeknotte piramide gelijk is aan de som van het grond- en bovenvlak, vermenigvuldigd met de helft van de hoogte; deze regel is valsch: hij zal voor den inhoud 31680 cubieke duimen, en dus 2440 cubieke duimen te veel geven.

§ 427. AANMERKING. Vermits alle veelvlakkige lichamen in prismas, piramiden, of in afgeknotte prismas en piramiden kunnen verdeeld worden, bevatten de voorgaande grondregelen alle de hulpmiddelen, om de inhouden van alle soorten van

veelvakkige lichamen te bepalen. Het komt er, in elk geval, alleen op aan; om de geschikste en genoegzame gegevens te zoeken, om dit doel te bereiken, en hierin moet men zich door nadenken en oefening bekwaam maken.

§ 428. BIJVOEGSEL. Bij scheve prismas en piramiden, kan het moeilijk worden, om de hoogten te bepalen. Wij zullen dus aanwijzen: hoe die hoogte, uit de lengte van ééne der opstaande ribben en de gemetene zijvakken van den drievlakkigen hoek, aan deze ribbe, kan gevonden worden. Zij, Fig. 171, PH de hoogte eener piramide; laten dan van den drievlakkigen hoek A gemeten worden, de hoeken $BAC = a$ hoek $PAC = b$ en hoek $PAB = c$; dan zal een bol, welks middelpunt in A gesteld wordt, den bolvormigen driehoek pqr bepalen, wiens zijden de gemetene hoeken a ; b en c voorstellen, en wiens loodrechte boog rs de maat zal zijn van den hoek PAH . Nu is, zie XIII. Boek Beginf. $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c) = s$ stellende

$$\sin rs = \sin PAH = \frac{2\sqrt{[\sin s \times \sin(s-a) \times \sin(s-b) \times \sin(s-c)]}}{\sin a}$$

In den regthoekigen driehoek AHP is, zie § 310, $PH = AP \times \sin PAH$; indien $AP = R$ en $PH = H$ gesteld wordt; dan zal, R gemeten hebbende, de hoogte der piramide gevonden worden, door de formule:

$$H = \frac{2R \times \sqrt{[\sin s \times \sin(s-a) \times \sin(s-b) \times \sin(s-c)]}}{\sin a}$$

IV. HOOFDSTUK.

Over de Ronde Lichamen, en wel bepaaldelijk, over de Cilinders, Kegels en Bollen.

§ 429. De cilinders en kegels zijn niets anders dan prismas en piramiden, welke een kromlijtig grondvlak hebben.

§ 430. Laat, Fig. 172, $ABCDE$ eene platte kromlijtige figuur en PQ een zeker vlak zijn, evenwijdig loopende aan deze kromlijtnige figuur $ABCDE$; RS eene zekere lijn, eenen schuinen of regthoekigen stand op de vlakken $ABCDE$ of PQ hebbende; bijaldien dan eene regte lijn Aa langs den omtrek van de kromlijtnige figuur, en tevens evenwijdig aan de lijn RS blijvende, bewogen wordt; dan zal deze lijn, den geheel omtrek der kromlijtnige figuur rond geweest zijnde, een gebogen rondachtig oppervlak beschrijven; terwijl diezelfde bewegende lijn, in het vlak PQ , eene kromme lijn $abcde$ als spoor zal afteekenen en achterlaten, welke klaarblijkelijk aan de kromlijtnige figuur $ABCDE$ gelijk- en gelijkvormig zal zijn. De gebogene oppervlakte, welke door de lijn Aa beschreven wordt, wordt een *Cilindervlak* genoemd, en de lichamelijke ruimte, begrepen tusschen het grondvlak $ABCDE$, het bovenvlak $abcde$, en een gedeelte van het cilindervlak, begrepen tusschen dit grond- en bovenvlak, noemt men eenen *Cilinder*. Die cilinder is een *regte cilinder*, wanneer de lijn RS (die men de *rigtlijn van den cilinder* kan noemen,) regthoekig op het grondvlak staat; hij is *scheef*, wanneer die rigtlijn, op het grondvlak, eenen schuinen stand heeft.

Dat de lijn Aa , evenwijdig aan de lijn RS blijvende, bewogen wordt, wil zeggen: dat, indien Aa , Bb , Cc , Dd , enz.

onderscheidene standen van de bewegende lijn Aa voorstellen, alle die lijnen Aa , Bb , Cc , Dd , enz. evenwijdig aan RS zijn. Het blijkt derhalve: dat een cilindervlak de eigenschap heeft, dat in hetzelfde, offchoon het een gebogen vlak is, eene onbepaalde menigte rechte lijnen; doch alle slechts in dezelfde richting, te weten, evenwijdig aan de rigtlijn RS , kunnen getrokken worden.

§ 431. De cilinders worden, gelijk de prismas, in verschillende soorten onderscheiden, hunne benaming van den naam des grondvlakts ontleenende; alzoo heeft men *cirkelvormige*, *parabolische*, *elliptische*, *hyperbolische* cilinders, naar dat het grondvlak een cirkel, eene parabola, eene ellips, eene hyperbola is, enz. De cirkelvormige, en wel de rechte cirkelvormige cilinders, zijn de gemeenste en merkwaardigste.

§ 432. I BEPALING. Fig. 173 De rechte cirkelvormige cilinder kan begrepen worden te ontstaan, door de omwenteling van eenen regthoek $ABCD$, om ééne zijner regthoekszijden BC . De regthoekszijden AB en CD beschrijven cirkels, zijnde het grond- en bovenvlak; de zijde AD het buitenste oppervlak; de lijn BC , om welke de regthoek omwentelt, wordt de *as* van den regten cirkelvormigen cilinder genoemd; zij is tevens zijne hoogte.

§ 433. I. STELLING. Fig. 174. De cilinder (zoo wel rechte als scheve) heeft met het prisma de eigenschappen gemeen. 10. Dat, wanneer de cilinder gesneden wordt door een vlak, evenwijdig aan het grondvlak zijnde, het vlak van doorsnijding aan het grondvlak gelijk- en gelijkvormig zal zijn. 20. Dat de inhoud van elken cilinder gelijk is aan deszelfs grondvlak en hoogte met elkander vermenigvuldigd.

BETOOG. 1°. Het eerste gedeelte van deze Stelling loopt zoo duidelijk in het oog, dat hetzelfde geen strikt betoog behoeft.

2°. Laat, Fig. 174, $ABCDEFGH$ het kromlijnjige grondvlak, en $abcd$ het daaraan gelijke- en gelijkvormige bovenvlak van den

den cilinder zijn. Laat in het kromlijnjige grondvlak $ABCDEFGH$ de regtlijnjige figuur $ABCDEFGH$ beschreven en uit de hoekpunten A , B , C , enz. die in den omtrek van het grondvlak liggen, lijnen Aa , Bb , Cc , enz. evenwijdig aan de rigtlijn worden getrokken; dan zullen deze lijnen alle in het buitenste oppervlak van den cilinder gelegen zijn. Indien men dan de lijnen ab , bc , cd , de , ef , fg , gh en ha trekt; dan is binnen den cilinder een veelhoekig prisma beschreven, hetwelk met denzelfden dezelfde hoogte fl zal hebben, en de inhoud van dit prisma zal, zie § 401, gelijk zijn aan het veelhoekige grondvlak $ABCDEFGH$, vermenigvuldigd met de hoogte fl .

Men ziet duidelijk: dat hoe meer zijden aan de veelhoekige figuur $ABCDEFGH$ gegeven worden, de inhoud van het prisma zoo veel te nader bij aan den inhoud van den cilinder zal komen; terwijl altijd de inhoud van het prisma gelijk zal blijven aan den inhoud van dien veelhoek, vermenigvuldigd met de hoogte fl .

Men kan uit dit alles zien: dat, wanneer de veelhoekige figuur een onnoemlijk aantal zijden heeft, of, wanneer derzelver hoekpunten oneindig dicht bij elkander genomen worden, de inhoud van het prisma aan den inhoud van den cilinder zal gelijk worden; gelijk dan ook de inhoud van het veelhoekige grondvlak des prismas van den inhoud van het grondvlak des cilinders niet meer zal verschillen; weshalve dan ook de inhoud van den cilinder gelijk zal zijn aan den inhoud van deszelfs kromlijnjige grondvlak, vermenigvuldigd met de hoogte.

§ 434. Wanneer men derhalve den inhoud van het kromlijnjige grondvlak kan vinden en de hoogte van den cilinder bepalen, dan zal men alle de gegevens hebben, die noodig zijn, om den inhoud te vinden. De inhouden van kromlijnjige figuren te bepalen, behoort tot de Hoogere Meetkunst. Wij kunnen dien Regel hier niet verder dan tot de cirkelvormige cilinders, en wel de rechte cirkelvormige cilinders, die ook wel in het dagelijksche gebruik het meeste voorkomen, uittrekken. De inhoud van den regten cirkelvormigen cilinder, (Fig. 173) welke door de omwenteling van den regthoek $ABCD$ ontstaat, is, volgens het betoogde, gelijk aan

den inhoud van den cirkel, met AB als straal beschreven, vermenigvuldigd met de hoogte BC . De inhoud van den cirkel, met AB beschreven, is (π het Ludolphiaans getal zijnde, zie § 292,) gelijk aan $\pi \times AB^2$; dit vermenigvuldigd zijnde met BC ; dan is de inhoud, dien wij I stellen, $= \pi \times AB^2 \times BC$, of noemende den straal van het grondvlak $= r$, de hoogte $= h$; dan wordt de inhoud van den regten cirkelvormigen cilinder gevonden door de formule.

$$Inh. = \pi r^2 h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

§ 435. Het buitenste oppervlak van den regten cirkelvormigen cilinder is klaarblijkelijk gelijk aan eenen rechthoek, die den omtrek van het grondvlak tot lengte en de hoogte tot breedte heeft

Nu is, zie § 291, de omtrek van den cirkel, welke r tot straal heeft, $= 2\pi r$; dit met de hoogte vermenigvuldigd, heeft men:

$$\text{buit. opperv. cilind.} = 2\pi r h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Voor de basis en het buitenste oppervlak te zamen genomen

$$2\pi r h + \pi r^2 = \pi r \times (2h + r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en voor grond- bovenvlak en buitenste oppervlak van den cilinder te zamen genomen:

$$2\pi r \times (h + r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Voor eenen schein cirkelvormigen cilinder, kan wel den lichamelijken inhoud, maar niet het buitenste oppervlak, volgens dezen regel bepaald worden.

§ 436. I. VOORBEELD. Hoe groot is de inhoud van eenen regten cirkelvormigen cilinder en deszelfs buitenste oppervlak, wiens hoogte is 18 duimen, en de middellijn van het grondvlak $= 7,37$ duimen?

Hier is $r = \frac{1}{2} \times 7,37 = 3,685$ duimen.

Berekening van den Lichamelijken Inhoud.

$$\text{Log. } r = 0,5664375$$

$$\text{Log. } r^2 = 1,1328750$$

$$\text{Log. } \pi = 0,4971499$$

$$\text{Log. } h = 1,2552725$$

$$\text{Log. } I = 2,8852974$$

$$I = 767,8876, d.$$

Berekening van het buitenste Oppervlak.

$$\text{Log. } r = 0,5664375$$

$$\text{Log. } \pi = 0,4971499$$

$$\text{Log. } h = 1,2552725$$

$$\text{Log. } 2 = 0,3010300$$

$$\text{Log. Opp.} = 2,6198899$$

$$\text{Oppervl.} = 416,7636 \text{ vierk. duim.}$$

§ 437.

§ 437. II. VOORBEELD. Hoe groot moet de straal van het grondvlak en de hoogte van eenen regten cirkelvormigen cilinder genomen worden; op dat hij eenen gegebenen inhoud hebbe, en de middellijn van het grondvlak tot de hoogte in rede zij, als a tot b ?

Stel den straal $= r$; de hoogte $= h$; den inhoud $= I$; dan is $a : b = 2r : h$; derhalve $h = \frac{2br}{a}$; volgens de eerste

formule § 434, is $I = \pi r^2 \times h = \pi r^2 \times \frac{2br}{a} = \frac{2b\pi}{a} \times r^3$.

Lost men uit deze de waarde van r op; dan zal men vinden:

$$r = \sqrt[3]{\frac{aI}{2b\pi}}; \quad \text{en} \quad h = \frac{2b}{a} \times \sqrt[3]{\frac{aI}{2b\pi}}$$

Laat $a = 1$, $b = 2$ en $I = \text{één cubieke decimeter}$ zijn; dan zal men vinden $r = 86,025$ millimeters en $h = 172,050$ millimeters.

§ 438. III. VOORBEELD. Indien het zaortonderscheidelijke gewigt van het duitsche lood $= 11,31$ is; dat wil zeggen, indien het lood $11\frac{31}{100}$ maal zwaarder weegt dan het zuivere gedistilleerde water, en één cubieke decimeter of liter zuiver water het gewigt heeft van ééne kilogramme en één pond Amsterdamsch gewigt gelijk is aan 0,49409 kilogrammes; hoe groot zal men dan de middellijn en hoogte van eenen looden cilinder in millimeters moeten nemen, op dat hij 1 Amsterdamsche ponden wege, en de middellijn tot de hoogte sta, als a tot b ?

Stellende $11,31 = g$, en $0,49409 = n$; dan zal men vinden:

$$r = 100 \sqrt[3]{\frac{n a A}{2 \pi b g}} \quad \text{en} \quad h = \frac{200 b}{a} \sqrt[3]{\frac{n a A}{2 \pi b g}}$$

Deze formules geven r en h in millimeters.

§ 439. Laat, Fig. 175, $ABCD$ eene platte kromlijnige figuur zijn, P een punt boven dezelve; indien men dan eene onbepaalde lijn PA door dit punt P laat gaan, en voorts deze lijn PA zoodanig om het punt P laat draaijen, dat zij altijd langs de kromme lijn $ABCD$ heenschuift; dan wordt er een gebogen oppervlak geboren, aan hetwelk men den naam van *Kegelvlak* geeft, en hetwelk zich, beneden en boven het punt P , in twee

twee tegenovergestelde vlakken, onbepaaldelijk uitstrekt, welke het onderste en bovenste Kegelvlak genoemd worden. De ligchamelijke ruimte nu, welke tusschen de kromlijnige vlakke $ABCD$, die men het grondvlak noemt, en het gedeelte van het benedenste kegelvlak, tusschen het toppunt P en het grondvlak $ABCD$ begrepen is, noemt men *Kegel*. Uit deze beschrijving blijkt: dat alle kegels de eigenschap hebben, dat lijnen, die uit het toppunt tot aan eenig punt van den omtrek van het grondvlak getrokken worden, geheel in de oppervlakte gelegen zijn. In geene andere, dan in de rigting van het toppunt tot den omtrek van het grondvlak, kunnen rechte lijnen in het oppervlak eens kegels liggen.

§ 440. De kegels worden, even als de cilinders, onderscheiden, in cirkelvormige, parabolische, enz. naar dat het grondvlak een cirkel of parabola is. Onder alle deze is de cirkelvormige de voornaamste.

§ 441. II. BEPALING, Fig. 176. Een rechte cirkelvormige kegel kan begrepen worden te ontstaan, door de omwenteling van eenen regthoekigen driehoek ABC , om ééne van deszelfs regthoekszijden BC ; de andere regthoekzijde AB beschrijft alsdan het cirkelvormige grondvlak en de schuinsche zijde AC , welke de opstaande zijde des kegels genoemd wordt, het buitensle oppervlak des kegels, de lijn BC , welke regthoekig op het grondvlak staat en door deszelfs middelpunt gaat, noemt men de *as* van den kegel.

§ 442. II. STELLING. Fig. 177. Elke kegel heeft, met de piramide, de twee volgende eigenschappen gemeen. 1°. Dat, wanneer een kegel gesneden wordt door een vlak, evenwijdig aan het grondvlak loopende, dit vlak van doorsnijding aan het grondvlak gelijkvormig zal zijn. 2°. Dat de ligchamelijke inhoud van eenen kegel gelijk is aan den inhoud van het grondvlak, vermenigvuldigd met één-derde van de hoogte.

BETOOG. 1°. Het eerste gedeelte dézer Stelling is slechts een gevolg van de eigenschap der gelijkvormige figuren, welke in de *V. Stell. VII. Hoofdst. I. Afd.* § 201, betoogd is.

2°. Wanneer men in het kromlijnig grondvlak $ABCDEFGH$ eenen veelhoek beschrijft, en, uit het toppunt des kegels, tot aan de hoekpunten van dien veelhoek lijnen PA , PB , PC , PD , enz. trekt; dan zullen deze lijnen, zie § 439, in het oppervlak van den kegel liggen, en in denzelfden zal als dan eene veelhoekige piramide beschreven zijn, met den kegel het zelfde toppunt P en dus dezelfde hoogte PQ gemeen hebbende; de ligchamelijke inhoud dezer piramide zal, zie § 411, gelijk zijn aan den inhoud van het grondvlak $ABCDEFGH$, vermenigvuldigd met één-derde van de hoogte PQ . Dit zal van alle veelhoekige piramiden gelden, welke in den kegel kunnen beschreven worden; doch, hoe grooter het aantal zijden in het grondvlak, of liever, hoe digter de hoekpunten A , B , C , D , enz. in den omtrek van het kromlijnige grondvlak des kegels genomen wordt, des te minder zal de inhoud van het veelhoekige grondvlak der ingeschrevene veelhoekige piramide van den inhoud van het kromlijnig grondvlak des kegels verschillen, en de ligchamelijke inhoud der piramide zal des te nader bij den ligchamelijken inhoud van den kegel komen; wordt derhalve het aantal zijden des ingeschrevenen veelhoeks zoo groot, dat de hoekpunten in elkander vallen, dan wordt het grondvlak der ingeschrevene piramide gelijk aan den inhoud van het grondvlak des kegels en de inhoud der piramide aan dien des kegels gelijk; daar nu de ligchamelijke inhouden der ingeschrevene piramiden gelijk zijn aan de inhouden hunner veelhoekige grondvlakken, vermenigvuldigd met één-derde van hare hoogten PQ , zoo zal de inhoud des kegels gelijk zijn aan den inhoud van deszelfs kromlijnig grondvlak, vermenigvuldigd met één-derde van de hoogte des kegels.

§ 443. REGEL. Om dan den inhoud van eenen kegel te vinden, moet men, 1°. den inhoud van het grondvlak, en 2°. de hoogte trachten te bepalen en, deze gevonden hebbende, moet

men 3°. de inhoud van het grondvlak met één-derde van de hoogte vermenigvuldigen.

§ 444. Onder alle kegels, zijn de regte cirkelvormige kegels, welke, zie Fig. 176, door de omwenteling van eenen regthoekigen driehoek ABC , om ééne zijner regthoekszijden BC gemaakt wordt, de merkwaardigste. Zij, in die figuur, $AB = r$ de straal van het grondvlak, en $BC = h$ de as of de hoogte: stel den lichamelijken inhoud van den kegel $= I$; dan is, zie § 292. Inhoud van het grondvlak $= \pi r^2$; dien inhoud met één-derde van de hoogte, dat is, met $\frac{1}{3} h$ vermenigvuldigd hebbende; dan verkrijgt men den lichamelijken inhoud

$$I = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \dots \dots \dots (1)$$

§ 445. VOORBEELD. Zij $r = 17,31$ duimen, $h = 37,93$ duimen, hoe veel cubieke duimen zal dan de inhoud bevatten?

$$\text{Log. } r = 1,2382971$$

$$\text{Log. } r^2 = 2,4765942$$

$$\text{Log. } h = 1,5789828$$

$$\text{Log. } \frac{1}{3} \pi = 0,0200286^*$$

$$\text{Log. } I = 4,0756056$$

$$I = 11901,605 \text{ cubieke duimen}$$

$$\text{of } I = 6 \text{ cub. voeten } 1533,605 \text{ cub. duim.}$$

De $\text{Log. } \frac{1}{3} \pi = 0,0200286$ is een standvastige Logarithmus, die voor alle zulke voorbeelden dezelfde is; zoo dat men, om den inhoud van eenen regten cirkelvormigen kegel te berekenen, slechts twee Logarithmen behoeft op te zoeken.

§ 446. II. VOORBEELD. Wanneer, Fig. 176, niet de hoogte, maar wel de opstaande zijde $AC = a$ gegeven is, benevens de straal $AB = r$, te weten $AC = a = 27,3$ duimen en $r = 8,73$ duimen, den inhoud te vinden?

In den regthoekigen driehoek ABC , is $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$, of $h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{(a+r) \times (a-r)}$. Voorts is $I = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, zie voorgaande formule, derhalve:

$$I = \frac{1}{3} \pi r^2 \times \sqrt{(a+r)(a-r)} \quad \dots \dots (2)$$

Vol-

Volgens deze formule is de berekening aldus.

$$a = 27,30 \quad \text{Log. } (a+r) = 1,5566643$$

$$r = 8,73 \quad \text{Log. } (a-r) = 1,2688119$$

$$a+r = 36,03 \quad \text{Log. } (a^2-r^2) = 2,8254762$$

$$a-r = 18,57 \quad \text{Log. } \sqrt{(a^2-r^2)} = 1,4127381$$

$$\text{Log. } r = 0,9410142 \quad \text{Log. } r^2 = 1,8820284^{**}$$

$$\text{Log. } r^2 = 1,8820284^{**} \quad \text{Log. } \frac{1}{3} \pi = 0,0200286$$

$$\text{Log. } I = 3,3147951$$

$$\text{derhalve } I = 2064,4056 \text{ cub. duim.}$$

§ 447. III. VOORBEELD. Hoe moeten de afmetingen van eenen regten kegel genomen worden, die eenen gegebenen Inhoud zal hebben, zoodanig, dat de straal van het grondvlak tot de hoogte in reden zal staan, als het getal p tot het getal q ? Men zal vinden:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3pI}{\pi q}} \quad \text{en} \quad h = \frac{q}{p} \sqrt[3]{\frac{3pI}{\pi q}} \quad \dots \dots (3)$$

Laat gegeven zijn $I = 2567$ cubieke duimen $p = 2$ en $q = 3$? dan is $r = 11,623813$ en $h = 17,435719$ duim.

§ 448. III. STELLING. Fig. 178. Het buitenste oppervlak van eenen regten cirkelvormigen kegel is gelijk aan den omtrek van het grondvlak, vermenigvuldigd met de helft van de opstaande zijde des kegels.

BETROEG. Men verbeelde zich eenen regten cirkelvormigen kegel, voortgebracht door de omwenteling van den driehoek ABC , om ééne van deszelfs regthoekszijden BC , op het vlak van het papier te leggen; dan zal die kegel over dit vlak kunnen omgerold worden, en, bij dit omrollen, zal het toppunt C in hetzelfde punt blijven; terwijl alle de deelen van het buitenste oppervlak des kegels, het ééne na het andere, dit vlak zullen aanraken en de omtrek van het grondvlak zal, na eene geheele omwenteling volbragt te hebben, eenen cirkelhoog EF , welke de opstaande zijde des kegels tot straal heeft, zijn doorgeloopt; zoodat de cirkel-sector $EDFC$

M 2

kan

kan aangemerkt worden, als zijnde het buitenste oppervlak des kegels in een plat vlak ontwonden; nu is de cirkelboog EDF , in lengte gelijk aan den omtrek van het grondvlak des kegels, en de straal EC gelijk aan de opstaande zijde des kegels; derhalve inhoud buitenste oppervlak = inhoud Sector $EDFC = \text{boog } EDF \times \frac{1}{2} CD = \text{omtrek } AGHID \times \frac{1}{2} CD$; dat is, gelijk aan den omtrek van het grondvlak, vermenigvuldigd met de helft van de opstaande zijde.

§ 449. Laat de opstaande zijde des regten cirkelvormigen kegels (als hoven) = a ; de straal van het grondvlak = r zijn; dan is, zie § 290, de omtrek van het grondvlak = $2\pi r$, deze vermenigvuldigd zijnde met de helft van de opstaande zijde = $\frac{1}{2} a$, zoo vindt men voor het buitenste oppervlak des kegels:

$$\text{Buit. Oppervl. Keg.} = \pi r a \quad (4)$$

§ 450. Wanneer de hoogte = h en de straal van het grondvlak = r gegeven zijn; dan is $a = \sqrt{h^2 + r^2}$, en men vindt alsdan, om het buitenste oppervlak te berekenen, de formelen

$$\text{Buit. Oppervl. Keg.} = \pi r \times \sqrt{h^2 + r^2} \quad . . . (5)$$

§ 451. Volgens § 72, is

$$\text{Omt. gek. cirk.} : \text{boog } EDF = 360^\circ : \text{hoek } ECF$$

maar nu is geheelen omtrek = $2 EC \times \pi = 2 a \pi$; en boog $CDF = \text{omtrek } AGHID = 2\pi r$; derhalve

$$2 a \pi : 2\pi r = 360^\circ : \text{hoek } ECF$$

$$\text{hoek } ECF = \frac{r}{a} \times 360^\circ \quad (6)$$

$$\text{hoek } ECF = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \times 360^\circ \quad . . . (7)$$

Zullende, door ééne dezer twee laatste formelen, uit den straal van het grondvlak en de opstaande zijde, of uit den straal van het grondvlak en de hoogte, den hoek van den cirkel-sector, die aan het buitenste oppervlak van den kegel gelijk is, kunnen berekend worden.

§ 452. Men zal ook gemakkelijk vinden: dat het geheele oppervlak des kegels, (het grondvlak daar onder begrepen,) gelijk is aan de volgende uitdrukking:

$$\text{Geh. Oppervl. Keg.} = \pi r \times (a + r) \quad . . . (8)$$

§ 453.

§ 453. III. BEPALING. Fig. 177. Een afgeknotten Keg. is een lighaam, dat ontstaat, wanneer men van eenen kegel het topstuk afsnijdt, door een vlak, dat evenwijdig aan het grondvlak loopt.

§ 454. IV. STELLING. Fig. 177. De inhoud van eenen afgeknotten kegel wordt gevonden, indien men de som van het grondvlak, bovenvlak en een vlak, hetwelk tusschen het grond- en bovenvlak midden evenredig is, vermenigvuldigt met één-derde van de hoogte.

BETOOG. Deze stelling wordt volkomen op dezelfde wijze betoogd als de X Stell. van het voorgaande Hoofdst.

§ 455. Laat den straal van het grondvlak van eenen regten afgeknotten kegel = R , den straal van het bovenvlak = r en de hoogte = h gesteld worden; dan is de inhoud van het grondvlak = πR^2 , de inhoud van het bovenvlak = πr^2 en de inhoud van een vlak, dat midden evenredig tusschen het grondvlak, en het bovenvlak is, gelijk $\sqrt{\pi R^2 \times \pi r^2} = \sqrt{\pi^2 R^2 r^2} = \pi Rr$; de som dezer vlakken is derhalve $\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr = \pi \times (R^2 + Rr + r^2)$; deze met één-derde van de hoogte vermenigvuldigende, verkrijgt men voor den inhoud:

$$I = \frac{1}{3} \pi h \times (R^2 + Rr + r^2) \quad . . . (1)$$

VOORBEELD. Laat gegeven zijn: $R = 8,3$ duim; $r = 3,7$ duim; $h = 20,73$ duimen? dan zal men aldus den inhoud berekenen. $R^2 = (8,3)^2 = 68,89$ vierk. duimen; $r^2 = (3,7)^2 = 13,69$ vierk. duim. en $Rr = 8,3 \times 3,7 = 30,71$ vierk. duim. $h = 20,73$ duim; derhalve

$$R^2 + Rr + r^2 = 113,29 \text{ vierk. duim.};$$

$$\text{Log. } (R^2 + Rr + r^2) = 2,0541916$$

$$\text{Log. } h = 1,3165993$$

$$\text{Log. } \frac{1}{3} \pi = 0,0200286, \text{ zie § 445,}$$

$$\text{Log } I = 3,3908195$$

$$\text{derhalve } I = 2459,345 \text{ cub. duimen.}$$

§ 456. Wanneer, Fig. 178, gegeven is: $BD = R$; $bd = r$ en de opstaande zijde $Dd = a$; dan zal $dM = Bb = h = \sqrt{(Dd^2 - DM^2)} = \sqrt{(a^2 - (R-r)^2)} = \sqrt{(a-R+r)(a+R-r)}$ zijn; en men zal derhalve den inhoud vinden, door de formule:

$$I = \frac{1}{3} \pi (R^2 + Rr + r^2) \times \sqrt{(a+R-r)(a-R+r)}. \quad (3)$$

VOORBEELD. Laat gegeven zijn $R = 17,38$, $r = 9,73$ en $a = 35,72$ duimen? dan zal men vinden: $I = 20678,824$ cubieke duimen.

§ 457. REGEL. Fig. 178. Het buitenste oppervlak van eenen regten afgeknotten Kegel is gelijk aan de som van de omtrekken van het grond en bovenvlak ($AGHD$ en $aghd$) vermenigvuldigd met de helft van de opstaande zijde (Dd). Want, indien men de loodlijnen EW en eV loodrecht op CE stelt, en aan de boogen EDF en edf gelijk maakt; dan is het trapezium $EeVW$ gelijk aan de figuur $edfDE$, gelijk aan het buitenste oppervlak van den afgeknotten regten kegel; maar, volgens § 155, is de inhoud van het trapezium $EeVW$ gelijk aan $(EW + eV) \times \frac{1}{2} Ee$; dat is, gelijk aan $(omt. ADIGH + omt. adihg) \times \frac{1}{2} Ee$.

Stellen wij dan, $BD = R$; $bd = r$ en $Dd = a$; dan zal de inhoud van het buitenste oppervlak gevonden worden, door de formule:

$$Buit. Opp. afg. Keg. = \pi a \times (R + r). \quad (3)$$

§ 458. En het geheele oppervlak van den afgeknotten kegel, het grondvlak, en het bovenvlak daar onder begrepen, zal voorgesteld worden door de formule:

$$Geh. Opp. Afg. Keg. = \pi \times [R^2 + r^2 + a(R+r)]. \quad (4)$$

In de mondelinge Lesfen zullen meer voorbeelden ter berekening worden opgegeven.

§ 459. IV. BEPALING. Fig. 179. Wanneer om eenen cirkel een vierkant $BVFD$ beschreven is, denzelven in de punten A , C , E en G aanrakende, en men die figuur, om eene middellijn AE , die de tegenoverstaande aanrakingspunten vereenigt, laat omwen-

telen; dan beschrijft de reghoek $ABDE$ eenen cilinder, en de halve cirkel $AICE$ eenen bol: die bol wordt dan gezegd in dien cilinder beschreven te zijn. De cilinder heeft een grondvlak, dat gelijk is aan den grooten cirkel van den bol, en de hoogte van dien cilinder is gelijk aan de middellijn van den bol of gelijk aan de middellijn van deszelfs grondvlak.

§ 460. V. STELLING. Fig. 179. De inhoud van eenen bol is gelijk aan twee-derde deelen van den regten cilinder, die om denzelyen beschreven is, of in welken hij, naar de voorgaande Bepaling, past.

BETOOG. Alvorens tot het betoog dezer stelling overte gaan, moeten wij herinneren: dat, wanneer, Fig. 180, met de hypothenusa AC van eenen regthoekigen driehoek, als straal, eenen cirkel wordt beschreven, de inhoud van dien cirkel zal gelijk zijn aan de som van de inhouden der cirkels, welke met de reghoekszijden (AB en BC) als stralen beschreven worden. Dit is klaar, want inhoud cirkel AC is, zie § 292, gelijk aan $\pi AC^2 = \pi (AB^2 + BC^2) = \pi AB^2 + \pi BC^2$; nu is $\pi \times AB^2 =$ inhoud cirkel AB en $\pi \times BC^2 =$ inhoud cirkel BC ; derhalve cirkel $AC =$ cirkel $AB +$ cirkel BC .

Laat de hoekpuntslijn MB worden getrokken; dan beschrijft de gelijkbeenige reghoekige driehoek MBA , die om de reghoekszijde AM omwentelt, den regten kegel, die den cirkel, door AB beschreven, tot grondvlak, en het punt M tot toppunt heeft. Nu zeg ik: dat de cilinder, door den reghoek $BAMC$ beschreven, gelijk is aan den halven bol, door het quadrant $MAIC$ beschreven, te zamen genomen met den kegel, door den reghoekigen driehoek MAB voortgebracht.

Laten, om dit te betoogen, deze drie lichamen ergens bij HL gesneden worden, door een vlak, evenwijdig loopende aan het grond- of bovenvlak des cilinders; dan worden de cilinder $CMAB$, de halve bol MCH , en de kegel MBA gesneden door cirkels, welker stralen zijn LH , LI en LK , en nu

184. ALLEREERSTE GRONDEN DER

is overal, waar deze snijding plaats heeft, de cirkel $LH =$ cirkel $IL +$ cirkel LK .

Want, wegens de gelijkvormige driehoeken MLK en MAB , is $MA : BA = ML : LK$; maar $AM = AB$ zijnde, zoo zal ook $LM = KL$ zijn. In den regthoekigen driehoek MIL , is, volgens het eerste gedeelte des betoogs, $cirk. IM = cirk. LM +$ cirk. IL ; dat is (omdat $IM = AM = AB = HL$ en $LM = KL$ is) $cirk. HL = cirk. IL +$ cirk. KL .

Deze gelijkheid zal overal plaats hebben, waar men het vlak van doorsnijding stellen moge. Uit de betoogde vergelijking volgt onmiddellijk:

$$cirkel. IL = cirk. HL - cirk. KL.$$

Verbeelden wij ons nu de lijn AM in een onnoemlijk groot aantal gelijke deelen verdeeld, en door de deelpunten vlakken, evenwijdig aan het grondvlak, te zijn getrokken; dan zal, wijl voor elk vlak van doorsnijding, $cirk. IL = cirk. HL -$ cirk. KL is, de som van alle de cirkels IL gelijk zijn aan de som van alle de cirkels HL , min de som van alle de cirkels KL ; dat is, de inhoud halven bol $CMAI = inh. cilind. CMAB$ min $inh. kegel MAB$; maar, volgens § 442, is inhoud $keg. MBA = \text{één-derde cilind. } CMAB$; derhalve is $inh. halven bol GMAI = \text{twee-derde cilinder } CMAB$; en hier uit (deze vergelijking verdubbeld) vindt men: dat de inhoud van den geheelen bol gelijk is aan twee-derde van den inhoud des cilinders, door de omwenteling van den regthoek $AEDB$ voortgebragt.

§ 461. Stel den straal van den bol $= R$; dan is de inhoud van den grooten cirkel, dat is, de inhoud van het grondvlak van den cilinder $= \pi R^2$; dit grondvlak vermenigvuldigende met de hoogte des cilinders; dat is, met $2 R$; dan vindt men voor den inhoud des cilinders $2\pi R^3$; hier van twee-derde nemende, zal men eindelijk, voor den inhoud van den bol, vinden:

$$Inh. Bol = 1\frac{2}{3} \pi R^3 \dots (1).$$

§ 462. Dewijl $R = \frac{1}{2} M$ is, zijnde M de middellijn van den bol,) zoo zal $R^3 = \frac{1}{8} M^3$ zijn, en daarom

Inh.

MEETKUNST. II. AFDEEL. IV. HOOFDST. 185

$$Inh. Bol = \frac{1}{8} \pi \times M^3 \dots (2)$$

In Logarithmen worden deze twee formules aldus voorgesteld.

$$Log. Inh. Bol = 3 Log. R + 0,6223866 \dots (1)$$

$$Log. Inh. Bol = 3 Log. M - 0,2810014 \dots (2)$$

VOORBEELD. Zij de middellijn van eenen bol gelijk 24 duim; hoe groot is dan zijn inhoud?

Hier is $M = 24$ duim: volgens de tweede formule, zal men dan de berekening aldus opmaken.

$$Log. M = 1,3802112$$

$$Log. M^3 = 4,1406336$$

$$\text{af } \dots 0,2820014$$

$$Log. Inhoud = 3,8596322$$

$$Inhoud = 7238,2267 \text{ cub. duim.}$$

§ 463. Men heeft dan tot het vinden van den inhoud niets anders noodig, dan de middellijn van den bol te kennen. Zie hier: hoe men, wanneer de bol in natura gegeven is, die middellijn, door eene teekenkunstige bewerking, kan vinden.

Laat $ABCD$ een bol zijn, dien wij onderstellen volkomen zuiver rond te zijn. Neem op het oppervlak een punt P , en beschrijf uit hetzelfde, als aspunt, met eene willekeurige opening des passers, eenen kleinen cirkel DEF ; neem in denzelfden drie punten D , E en F , ten naastenbij in eenen gelijkzijdigen driehoek liggende.

Maak op een vlak eenen driehoek DEF , wiens zijden DE , EF en DF gelijk zijn aan de afstanden der punten D , E en F , op het oppervlak van den Bol, en beschrijf door deze drie punten eenen cirkel; trek in dien cirkel de middellijn DG . Maak op die middellijn DG , als basis, eenen gelijken driehoek DHG , wiens opstaande zijden $DH = GH$ gelijk zijn aan den straal van den cirkel, welke op het oppervlak van den bol uit P beschreven is.

Trek eindelijk DK en GK loodrecht op DE en DH ; dan zal HK de middellijn van den bol zijn.

§ 464. Den inhoud van eenen bol $= I$ bekend stellende; dan zal uit de tweede formule $I = \frac{1}{2} \pi M^3$ volgen:

$$M = \sqrt[3]{\frac{6I}{\pi}} \dots \dots \dots (3)$$

of in Logarithmen werkende

$$\text{Log. } M = \frac{1}{3} \times [\text{Log. } I + 0,2810014] \dots \dots (3)$$

en door deze formule, zal men de middellijn van eenen kogel vinden, die eenen gegeven inhoud moet hebben.

VOORBEELD. Laat $I =$ een cubieken decimeter, of 1000000 cubieke millimeters gegeven zijn, hoe groot moet dan de middellijn van dien bol genomen worden?

$$\begin{array}{r} \text{Log. } I = 6,0000000 \\ \quad 0,2810014 \text{ bijtellen} \\ \hline 6,2810014 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \\ \hline \text{Log. } M = 2,0936671 \end{array}$$

derhalve $M = 124,070085$ millimeters.

§ 465. VRAAGSTUK. Hoe groot zal men, in Rijnlandsche lijnen, de middellijn van eenen looden geweer-kogel moeten nemen, waarvan er n in een pond Delfsch gewigt begrepen zijn; tot deze bepaling aannemende, dat een cubieke decimeter of liter zuiver gedistilleerd water, tot deszelfs grootste digtheid gebragt, ééne kilogramme weegt, dat ééne kilogramme het gewigt hebbe van 2,023921 Amsterdamsche ponden, en dat 95 Amsterdamsche ponden gelijk staan met 100 ponden Antwerpsch, of Delfsch Artillerie-gewigt (*); dat één decimeter de lengte hebbe van 45,8676876 Rijnlandsche lijnen (**) en het lood, waaruit die

(*) Dat 95 Amsterd. ponden gelijk zouden staan met 100 Antwerpsche of Delfsch Artillerie-gewigt, mag wel weinig of niets van de waarheid verschillen; maar het is mij nooit zeker gebleken; de regtstreeksche weg, om zulks te beslissen, zou zijn, om de standaard van het aangenomen Artillerie gewigt, onmiddellijk met de kilograame te vergelijken; want, omdat de reden van het Amsterdamsche gewigt, tot de kilograame volkomen bekend is, zou men hierdoor de reden van het Amsterdamsche tot het Artillerie-gewigt leeren kennen.

(**) Deze gelijkheid is nauwkeurig; zij is door het Gouvernement in

die kogel gegoten wordt, g maal zwaarder zij, dan het zuivere gedistilleerde water, gebragt tot deszelfs grootste digtheid?

OPLOSSING. Omdat 95 Amst. pond $=$ 100 pond. Artillerie gewigt zijn, zoo zal 1 Amst. pond $= \frac{100}{95}$ pond Art. gewigt zijn; derhalve 1 kilogr. $= 2,023921$ Amst. pond $= 2,023921 \times \frac{100}{95} = 2,13044316$ pond Artill. gewigt. Wij stellen korthedshalve, dit getal $= a$, en 45,8676876 lijnen $= b$.

Omdat het lood g maal zwaarder weegt dan het zuiver gedistilleerd water, zoo zal één cubieke decimeter lood, het gewigt van g kilogrammes; dat is, (omdat één kilogr. gelijk is aan a Artill. ponden) het gewigt van $a \times g$ Artill. ponden hebben,

Een decimeter $= b$ rijnl. lijnen zijnde, zoo zal een cubieke decimeter $= b^3$ cubieke rijnl. lijnen bevatten.

Derhalve wegen b^3 cubieke rijnl. lijnen een aantal van ag Artillerie ponden.

Een Artillerie pond lood heeft derhalve, in rijnlandsche maat, ééne uitgebreidheid van $\frac{b^3}{ag}$ cubieke rijnlandsche lijnen; een looden kogel, waarvan er n in een Artill. pond zijn begrepen, zal dan, in rijnl. maat, ééne uitgebreidheid van $\frac{b^3}{nag}$ cubieke rijnl. lijnen hebben.

Deze lichamelijke uitgebreidheid, moet in eenen kogel of bol begrepen worden. Stel de middellijn van dien bol $= x$ rijnl. lijnen; dan is, zie § 462, zijne lichamelijke inhoud $= \frac{1}{2} \pi x^3$ rijnl. cubieke lijnen. Wij hebben derhalve de vergelijking:

$$\frac{1}{2} \pi x^3 = \frac{b^3}{nag}$$

en,

In den jare 1808 aangenomen. In 1807 hebben wijlen de Heer AENAE en ik, bij herhaling, vele proeven genomen, om deze evenredigheid ten nauwkeurigste te bepalen; deze proeven zijn naderhand in tegenwoordigheid van de Heeren VAN BREUGEL en LE FEVRE DE MONTIGNY herhaald, die als ooggetuigen, zich van de juistheid van dezelve overtuigd hebben. Dit strekke tot narigt van degenen, welke van de toewragt dezer zaak een verkeerd begrip hebben.

en, uit deze vergelijking de waarde van x oplofende, zal men vinden:

$$x = b \times \sqrt[3]{\frac{6}{\pi n a g}}$$

Neemt men in aanmerking: dat in deze formule de getallen 6, b en π geheel bekend en zeker zijn, zoo zal men in Logarithmen verkrijgen:

$$\text{Log. } x = 1,7551739 - \frac{\text{Log. } a + \text{Log. } g + \text{Log. } n}{3}$$

VOORBEELD. Laat genomen worden, $a = 2,13044316$; $g = 11,31$ (†) en $n = 18$; dan zal men hebben:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Log. } n = 1,2552725 \\ \text{Log. } a = 0,3284700 \\ \text{Log. } g = 1,0534626 \end{array} \right\} \text{optellen}$$

$$\begin{array}{r} 2,6372051 \\ 3) \quad 0,8790684 \text{ dit af te trekken.} \end{array}$$

van den standvast. Log. 1,7551739,

$$\text{komt Log. } x = 0,8761055$$

derhalve $x = 7,518059$ Nijnen rijnt.

of $x = 7$ Nij 6½ punt. nagenoeg.

Voor andere waarden van a , g en n , geldt dezelfde eenvoudige Logarithmische formule.

§ 466. Keeren wij thans, nog eenige oogenblikken, tot de beschouwing van Fig. 179 te rug. Noemen wij, korthedshalve *cil.* CMLH, den cilinder voortgebragt door de omwenteling van den regthoek CMLH; *keg.* MKL den kegel, die door de omwenteling van den regthoekigen driehoek KLM geboren wordt, en *schijf* CMLI het gedeelte van den bol, begrepen tusschen de cirkels, die door de stralen IL en CM beschreven worden en het gedeelte van het oppervlak van den

(†) Dit voortonderfcheidelijk gewigt verschilt, naarmate van dezelfde dengt en zuiverheid. PRONY stelt voor het gegoten lood, $g = 11,3523$; BYTELWEIN stelt voor het gegoten engelsch lood $g = 11,324$ tot 11,375, en voor het duitsche gegoten lood, $g = 11,31$.

den bol, voortgebragt door de cirkelboog IC, enz.; bijaldien wij dan eerst de som nemen van

$$\text{Cirk. IL} = \text{Cirk. HL} - \text{Cirk. KL}$$

eerst van het middelpunt M tot aan het vlak HL, en daarna van het middelpunt M tot aan het vlak NQ; dan hebben wij:

$$\text{Schijf CMLI} = \text{Cilind. CMLH} - \text{Keg. MLK}$$

$$\text{Schijf CMQO} = \text{Cilind. CMQN} - \text{Keg. MPQ}$$

en deze twee vergelijkingen bij elkander optellende;

$$\text{Schijf LICOQ} = \text{Cilind. LHNQ} - \text{Keg. MLK} - \text{Keg. MPQ}$$

Nu is, uit de voorgaande beginselen,

$$\text{Cilind. LHNQ} = \pi \times \text{CM}^2 \times (\text{LM} + \text{MQ})$$

$$\text{Keg. KLM} = \frac{1}{3} \pi \times \text{LM}^3 = \frac{1}{3} \pi \times \text{LM}^3 - \frac{1}{3} \pi \times \text{LM}^3$$

$$\text{Keg. MPQ} = \frac{1}{3} \pi \times \text{QM}^3 = \frac{1}{3} \pi \times \text{QM}^3 - \frac{1}{3} \pi \times \text{QM}^3$$

derhalve zal men, door substitutie, in plaats van de laatste vergelijking, verkrijgen:

$$\begin{aligned} \text{Schijf LICOQ} = & \pi (\text{LM} + \text{MQ}) \times \text{CM}^2 - \frac{1}{3} \pi (\text{LM}^3 + \text{QM}^3) \\ & + \frac{1}{3} \pi (\text{LM}^3 + \text{QM}^3) \end{aligned}$$

of, omdat, in het algemeen $(x^3 + y^3) : (x + y) = x^2 - xy + y^2$ is,

$$\begin{aligned} \text{Schijf LICOQ} = & \pi \times \text{LQ} \times [\text{CM}^2 - \frac{1}{3} (\text{LM}^2 - \text{LQ} \times \text{MQ} + \text{QM}^2) \\ & + \frac{1}{3} (\text{LM}^2 - \text{LM} \times \text{QM} + \text{QM}^2)] \end{aligned}$$

of anders

$$\begin{aligned} \text{Schijf LICOQ} = & \pi \times \text{LQ} \times [\text{CM}^2 - \frac{1}{3} (\text{LM}^2 + \text{QM}^2) + \\ & \frac{1}{3} (\text{LM}^2 + 2 \text{LM} \times \text{QM} + \text{QM}^2)] \end{aligned}$$

$$\text{Nu is } \text{CM}^2 = \frac{1}{2} \text{IL}^2 + \frac{1}{2} \text{MQ}^2 = \frac{1}{2} \text{IL}^2 + \frac{1}{2} \text{LM}^2 + \frac{1}{2} \text{OQ}^2 + \frac{1}{2} \text{QM}^2$$

en $\text{LM}^2 + 2 \text{LM} \times \text{QM} + \text{QM}^2 = (\text{LM} + \text{QM})^2 = \text{LQ}^2$ derhalve zal de laatste vergelijking veranderen in deze:

$$\text{Schijf LICOQ} = \pi \times \text{LQ} \times [\frac{1}{2} \text{IL}^2 + \frac{1}{2} \text{OQ}^2 + \frac{1}{2} \text{LQ}^2]$$

of wel

$$\text{Schijf LICOQ} = \frac{1}{2} \pi \times \text{LQ} \times \text{IL}^2 + \frac{1}{2} \pi \times \text{LQ} \times \text{OQ}^2 + \frac{1}{2} \pi \times \text{LQ}^3$$

dat is, noemende $\text{QO} = R$; $\text{IL} = r$ en $\text{LQ} = H$

$$\text{Schijf LICOQ} = \frac{1}{2} \pi R^2 H + \frac{1}{2} \pi r^2 H + \frac{1}{2} \pi H^3$$

Hier uit volgt dan dezen

REGEL. De inhoud van eene bolvormige schijf, begrepen tusschen twee evenwijdige cirkels van den bol, (waarvan de ééne het grondvlak en de andere het bovenvlak uitmaakt, en welker afstand de hoogte van die schijf is,) is gelijk aan de helft van de

de som van de inhouden der cilinders, welke het grondvlak en het bovenvlak van deze bolvormige schijf tot grondvlakken, en met dezelfde hoogte hebben, met nog den inhoud van den bol, welke de hoogte van die schijf tot middellijn heeft.

§ 467. Wanneer men in de laatst gevondene vergelijking $r = 0$ stelt, dan verkrijgt men:

Bolv. Segm. $AIL = \frac{1}{2} \pi \times IL^2 \times AL + \frac{1}{2} \pi \times AL^3$
en dit geeft, om den inhoud van een bolvormig segment te bepalen, dezen

REGEL. De inhoud van een bolvormig segment is gelijk aan de helft van den inhoud des cilinders, welke, met dit segment, hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte heeft, te zamen genomen, met den inhoud van den bol, welke tot middellijn de hoogte van dit segment heeft.

§ 468. V. STELLING. Fig. 182. Het oppervlak van eenen bol is gelijk aan viermaal den inhoud van deszelfs grooten cirkel.

BETOOG. Elke bol kan worden aangemerkt, als, bestaande uit een onnoemlijk aantal zeer kleine piramiden $MABED$, $MBCFE$, enz., welke zeer kleine gedeelten van het oppervlak van den bol tot grondvlakken, deszelfs straal (dien wij hier $= r$ stellen,) tot hoogte hebben en alle om het middelpunt, in hetzelfde met hare toppunten te zamen komen, en aan elkander sluiten.

Nu heeft men, volgens § 443,

$$\text{Inh. Pir. } MABED = ABED \times \frac{1}{3} r$$

$$\text{Inh. Pir. } MBCFE = BCFE \times \frac{1}{3} r$$

telt men alle deze piramiden bij elkander; dan zal men vinden: inhoud van den geheelen bol gelijk aan den inhoud van deszelfs geheele oppervlak, vermenigvuldigd met één-derde van den straal.

Stellen wij nu den inhoud van den bol $= I$; den inhoud van het geheele oppervlak $= O$; dan is, volgens het zooveen betoogde $I = O \times \frac{1}{3} r$; maar, volgens § 461, is $I = \frac{4}{3} \pi r^3$; derhalve $O \times \frac{1}{3} r = \frac{4}{3} \pi r^3$ of $O \times r = 4 \pi r^2$
of

of $O = 4 \pi r^2$; maar πr^2 is, zie § 292, gelijk aan den inhoud van den grooten cirkel; derhalve zal het oppervlak van den bol gelijk zijn aan viermaal den inhoud van deszelfs grooten cirkel.

§ 469. Hiernit volgt, om den inhoud van het oppervlak van eenen bol te vinden, deze logarithmische formule:

$$\text{Log. } O = 2 \text{ Log. } r + 1,0992099$$

in welke r de straal van den bol beteekent; of

$$\text{Log. } O = 2 \text{ Log. } M + 0,4971499.$$

§ 470. Laat Fig. 183. ABD een bolvormig segment zijn, voortgebracht door de omwenteling van het cirkelstuk ABC om den straal BM ; dan is, vooreerst de inhoud van den bolvormigen sector $AMDB$, voortgebracht door de omwenteling van den cirkel-sector ABM , gelijk aan het oppervlak van het segment ABD (hetwelk wij $= \Omega$ zullen stellen,) vermenigvuldigd met één-derde van BM ; dat is:

$$\text{Bolv. Sect. } ABDM = \Omega \times \frac{1}{3} BM.$$

De inhoud van dien bolvormigen sector $ABDM$, is ook gelijk aan inhoud segm. ABD + inhoud kegel ACM ; derhalve zal

$$\text{inh. seg. } ABD + \text{inh. keg. } ACM = \Omega \times \frac{1}{3} BM \dots (a)$$

Nu is, zie § 467 en § 443,

$$\text{inh. Segm. } ABD = \frac{1}{2} \pi \times AC^2 \times BC + \frac{1}{2} \pi \times BC^3$$

$$\text{inh. Keg. } ACM = \frac{1}{3} \pi \times AC^2 \times CM$$

deze vergelijkingen optellende, zal vergelijking (a) worden:

$$\frac{1}{2} \pi \times BC \times AC^2 + \frac{1}{3} \pi \times CM \times AC^2 + \frac{1}{2} \pi \times BC^3 = \Omega \times \frac{1}{3} BM$$

vermenigvuldig deze vergelijking met 6; dan wordt zij:

$$3 \pi \times BC \times AC^2 + 2 \pi \times CM \times AC^2 + \pi \times BC^3 = 2 \Omega \times BM$$

of de termen verschikkende.

$$2 \pi \times BC \times AC^2 + 2 \pi \times CM \times AC^2 + \pi \times BC \times AC^2 + \pi \times BC^3 = 2 \Omega \times BM$$

dat is, omdat $BC + CM = BM$ is;

$$2 \pi \times BM \times AC^2 + \pi \times BC \times AB^2 = 2 \Omega \times BM$$

$$2 \pi \times BM (AB^2 - BC^2) + \pi \times BC \times AB^2 = 2 \Omega \times BM$$

$$2 \pi \times BM \times AB^2 - 2 \pi \times BM \times BC^2 + \pi \times BC \times AB^2 = 2 \Omega \times BM \dots (b)$$

* De twee laatste termen van het voorste lid dezer vergelijking vernietigen elkander; want het is uit § 221, blijkbaar, dat

$$BC^2 : AB^2 = BC^2 : 2 BC \times BM$$

zal zijn; vermenigvuldigd men deze evenredigheid met

$$2 \pi \times BM : \pi \times BC = 2 BM : BC$$

welke uit zich zelve eene evenredigheid is, dan verkrijgt men de evenredigheid:

$2 \pi \times BM \times BC^2 : \pi \times BC \times AB^2 = 2 BM \times BC^2 : 2 BM \times BC^2$
en daar de termen van de tweede reden dezer evenredigheid gelijk zijn, zoo zal

$$2 \pi \times BM \times BC^2 = \pi \times BC \times AB^2$$

moeten zijn; zoodat de vergelijking (b) verandert in

$$2 \pi \times BM \times BA^2 = 2 \Omega \times BM$$

en deelt men nu deze vergelijking door $2 BM$; dan zal men verkrijgen:

$$\Omega = \pi \times AB^2$$

dewijl nu $\pi \times AB^2$ gelijk is aan den inhoud van den cirkel, welke met AB als straal beschreven is, zoo leert ons deze formule den volgende merkwaardigen

REGEL. Het oppervlak van een bolvormig segment is gelijk aan den inhoud van den cirkel, welke, uit de pool of het aspunt van het grondvlak van dit segment, met eenen straal, die gelijk is aan den afstand van dit aspunt tot aan eenig punt van den omtrek van het grondvlak van dit segment, beschreven wordt. (De pool B van het segment is namelijk dat punt, hetwelk overal even ver van elk punt van den omtrek van het grondvlak afstaat, het uiteinde van de middellijn van den bol, welke door het middelpunt van het grondvlak gaat, en loodregt op hetzelfde staat.)

§ 471. Omdat, zie § 221, $AB^2 = BN \times BC$ zoo zal

$$\text{Oppervl. segm. } ABD = \pi \times BN \times BC$$

$$\text{Oppervl. segm. } EABDe = \pi \times BN \times BF$$

$$\text{Oppervl. segm. } GEBeg = \pi \times BN \times BH$$

moeten zijn. Trekt men de eerste dezer vergelijkingen van de tweede en ook van de derde af, dan zal men vinden:

Op-

$$\text{Oppervl. schijf } EADe = \pi \times BN \times CF$$

$$\text{Oppervl. schijf. } GADg = \pi \times BN \times CH$$

waaruit blijkt: (REGEL) dat, in denzelfden bol, de oppervlakken der bolvormige segmenten en schijven tot elkander staan, in dezelfde reden, als hunne hoogten.

§ 472. Laat, Fig. 183, den omtrek van onze Aarde verbeelden, B de Noord- en N de Zuidpool, LO de middellijn van den evenachtscirkel; voorts A en E twee plaatsen, op onderscheidene breedten. Stellen wij de breedte van het punt A of den boog $AL = p$, en van het punt E , of den boog $LE = q$; dan is $AM = r$ stellende, $CM = r \times \text{Sin. } p$ en $BC = BM - CM = r - r \text{ Sin. } p$; derhalve $AB^2 = BC \times BN = 2r^2 - 2r^2 \times \text{Sin. } p$ en diensvolgens

$$\text{Oppervl. segm. } ABD = 2 \pi r^2 \times \text{Sin. } p$$

$$\text{Oppervl. segm. } EBE = 2 \pi r^2 \times \text{Sin. } q$$

deze van elkander aftrekkende; dan zal men vinden:

$$\text{Oppervl. Schijf } EADe = 2 \pi r^2 \times (\text{Sin. } p - \text{Sin. } q)$$

dat is, zie form. 27. *Bladz. 109*,

$$\text{Oppervl. Schijf } EADe = 4 \pi r^2 \times \text{Cos. } \frac{1}{2}(p+q) \times \text{Sin. } \frac{1}{2}(p-q)$$

Stel den omtrek van den grooten cirkel van onze Aarde $= \omega = 5400$ duitsche mijlen; dan is $\omega = 2 \pi r$; dus $\omega^2 = 4 \pi^2 r^2$ en $r^2 = \frac{\omega^2}{4 \pi}$; derhalve $4 \pi r^2 = \frac{\omega^2}{\pi}$; de laatste formule verandert dan in:

$$\text{Oppervl. Schijf} = \frac{\omega^2}{\pi} \times \text{Cos. } \frac{1}{2}(p+q) \times \text{Sin. } \frac{1}{2}(p-q)$$

Stellen wij nu, zoo als het wezenlijk is, $\omega = 5400$; dan zal den inhoud van eenen strook der Aarde, gelegen tusschen twee parallellen, behoorende tot de breedte p en q , in vierkante duitsche mijlen, worden voorgesteld door de algemeene formule:

$$\frac{(5400)^2}{\pi} \times \text{Cos. } \frac{1}{2}(p+q) \times \text{Sin. } \frac{1}{2}(p-q)$$

of in Logarithmen door

$$\text{Log. Cos. } \frac{1}{2}(p+q) + \text{Log. Sin. } \frac{1}{2}(p-q) + 6,9676376$$

N

§ 473

§ 473. Laat $q = p - 1^\circ$. gesteld, en één drie-honderd-en-festigste gedeelte van dien strook worden genomen; dan zal $\frac{1}{2}(p + q) = p - 30'$ en $\frac{1}{2}(p - q) = 30'$ zijn en een gedeelte van het oppervlak der Aarde, begrepen tusschen twee parallellen, die éénen graad verschil in breedte hebben, en tusschen twee middagscirkels, die insgelijks éénen graad in lengte verschillen, zal worden voorgesteld door de formule:

$$\text{Log. Cos. } (p - 30') + 2,3521770$$

zijnde in deze p de breedte van de parallel, welke het naast aan de pool gelegen is.

V. H O O F D S T U K.

Over de Gelijkvormigheid der Ligchamelijke Figuren.

§ 474. **W**ie wel begrepen heeft, wat wij, in het VII Hoofdstuk van de I. Afdeling, over de gelijkvormigheid der figuren gezegd hebben, zal in de korte verhandeling, welke wij in dit Hoofdstuk over de gelijkvormige ligchamelijke figuren zullen voordragen, althans niets moeilijks kunnen vinden. De voorwaarden, of liever de kenmerken der gelijkvormigheid van § 182 — § 189, uitvoerig in alle deszelfs deelen verklaard, zijn zoo wel voor de ligchamelijke als vlakke figuren dezelfde. Beschouwen wij, daar de lichamen in veelvlaklige en gebogene onderscheiden worden, kortelijk de gelijkvormigheid van beiden.

§ 475. Laten, Fig. 184, P en Q twee veelvlaklige lichamen zijn, elk door een aantal van tien, volgens hunne ribben aan elkander sluitende, driehoeken bepaald zijnde; dan bestaan er (zoo als men uit de figuur ziet,) in elke figuur een aantal van zeven hoekpunten; nu zullen, naar het algemeene begrip van gelijkvormigheid, deze lichamen P en Q gelijkvormig zijn, wanneer de afstand van twee naar welgevallen genomene hoekpunten (F en G bij voorbeeld) in de figuur P tot den afstand van de overeenkomstige hoekpunten (f en g) in de tweede figuur Q overal, waar men die hoekpunten nemen moge, in dezelfde bestendige reden is. Vereenigt men dus in beide figuur de hoekpunten, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, dan zal de gelijkvormigheid dezer twee figuren de volgende evenredigheden medebrengen: $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea = CE : ce = \text{enz.}$; terwijl, hetgeen van zelf spreekt, de hoekpunten, in beide figuren, op eene symetrische wijze moeten geplaatst zijn.

§ 476. Voor rondachtige lichamen geldt dezelfde bepaling in het algemeen; doch, daar het hier niet noodig is de rondachtige gelijkvormige lichamen, in het algemeen, te beschouwen, zoo zullen wij ons tot de cilinders, kegels en bollen bepalen.

1°. Vooreerst dan zijn, Fig. 185, twee rechte cilinders gelijkvormig, wanneer zij door de omwenteling van gelijkvormige rechthoeken ($ABCD$ en $abcd$) ontstaan. 2°. Even zoo, zijn, Fig. 186, twee rechte kegels gelijkvormig, wanneer zij door de omwenteling van twee gelijkvormige rechthoekige driehoeken (ABC en abc) ontstaan zijn. 3°. Alle bollen zijn gelijkvormige figuren. Men kan hier bijvoegen; dat alle lichamelijke figuren, welke door de omwenteling van gelijkvormige rethoekige figuren, om eveneens geplaatste lijnen, ontstaan, door deze omstandigheid alleen, insgelijks gelijkvormig zijn:

§ 477. Alle deze soorten van gelijkvormige lichamen komen, in algemeene hoofdeigenschappen, met elkander overeen, die wij in de volgende Stellingen zullen voordragen.

§ 478. I. STELLING. Fig. 184. Gelijkvormige veelvlaklige lichamen zijn door hetzelfde aantal eveneens geplaatste gelijkvormige zijvlakken bepaald, en de drie- of veelvlaklige hoeken, aan de eveneens geplaatste hoekpunten staande, zijn gelijk en passen in elkander.

BETOOG. Want, omdat de afstanden der eveneensgeplaatste hoekpunten evenredig zijn, en die afstanden de omtrekken en inhouden den zijvlakken bepalen; zijn die zijvlakken, zie § 189, gelijkvormig. Het tweede gedeelte der Stelling valt van zelf in het oog.

§ 479. II. STELING. Wanneer men, binnen een veelvlaklig of rondachtig ligchaam, een punt aanneemt en, uit dit punt tot aan alle de punten van den omtrek van dit ligchaam, rechte lijnen trekt op deze rechte lijnen, van het hoekpunt af to rekenen, deelen neemt, welke tot die lijnen in dezelfde bestendige reden staan, dan

dan zullen die punten in den omtrek van een ligchaam gelegen zijn, hetwelk aan het eerste gelijkvormig zal zijn.

Dit wordt op dezelfde wijze betoogd, als de *V. Stell. VII. Hoofdst. I. Afd.*

§ 480. III. STELING. Fig. 187 en 184. De inhouden van gelijkvormige veelvlaklige lichamen staan tot elkander in dezelfde reden, als de cuben, welke op derzelver eveneens geplaatste ribben beschreven zijn, en de inhouden van derzelver oppervlakken, als de vierkanten, beschreven op diezelfde ribben.

BETOOG. Fig. 187. Beginnen wij met de gelijkvormige piramiden M en N . Laat uit hunne toppunten de loodlijnen CP en cp op de eveneens geplaatste en gelijkvormige grondvlakken vallen, en trek de lijnen AP en ap ; dan zijn de driehoeken APC en apc gelijkvormig, en daarom

$$PC : pc = AC : ac = AD : ad = AB : ab.$$

Nu hebben wij, zie § 206,

$$\text{Inh. drieh. } ABD : \text{inh. drieh. } abd = AB^2 : ab^2$$

vermenigvuldig deze evenredigheid met

$$\frac{1}{3} PC : \frac{1}{3} pc = AB : ab$$

dan zal men, zie § 411, verkrijgen:

$$\text{Piram. } M : \text{Piram. } N = AB^3 : ab^3.$$

Voorts is, zie § 206, drieh. ABC : drieh. $abc = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2 =$ drieh. ADC : drieh. adc enz., derhalve de som van alle zijvlakken van M tot de som van alle de zijvlakken van N , gelijk $AB^2 : ab^2$.

2°. Wanneer, Fig. 184, de gelijkvormige lichamen P en Q , door uit twee eveneens geplaatste hoekpunten A en a , bij voorbeeld, hoekpuntslijnen te trekken, elk in hetzelfde aantal gelijkvormige piramiden verdeeld worden; dan zullen de inhouden der eveneens geplaatste piramiden, zich tot elkander in dezelfde reden verhouden, als de cuben, op twee eveneens geplaatste ribben beschreven, als, bij voorbeeld, $AB^3 : ab^3$;

dus zullen de sommen dezer piramiden, dat is, de inhouden dezer lichamen tot elkander insgelijks in dezelfde reden staan. In het algemeen, zal dan

$$P : Q = AB^3 : ab^3 = AD^3 : ad^3 = \text{enz.}$$

zijn. Op dezelfde wijze zal het blijken: dat

$$\text{Opperv. } P : \text{Opperv. } Q = AB^2 : ab^2 = AD^2 : ad^2 = \text{enz.}$$

§ 481. IV. STELLING. Fig. 185. De inhouden van gelijkvormige rechte cilinders staan tot elkander, in dezelfde reden, als de cuben, op de stralen of middellijnen hunner grondvlakken, of als de cuben, op hunne assen beschreven: en de oppervlakken van deze cilinders zijn, als de vierkanten dezer middellijnen of assen.

BETOOG. 1°. Volgens § 287, heeft men de evenredigheid:

$$\text{Cirk. } AB : \text{Cirk. } ab = AB^2 : ab^2$$

en omdat, zie § 476, de rechthoeken $ABCD$ en $abcd$ gelijkvormig zijn, zoo is

$$BC : bc = AB : ab$$

vermenigvuldig deze twee evenredigheden met elkander, dan zal men hebben:

$$\text{Cil. } P : \text{Cil. } Q = AB^3 : ab^3$$

Aangezien $AB : ab = BC : bc$ is, zoo zal ook $AB^3 : ab^3 = BC^3 : bc^3$; derhalve zal ook

$$\text{Cil. } P : \text{Cil. } Q = BC^3 : bc^3.$$

2°. Men heeft, volgens § 287,

$$\text{Omtr. Cirk. } AB : \text{Omtr. Cirk. } ab = AB : ab.$$

vermenigvuldig deze evenredigheid met

$$AD : ad = AB : ab$$

dan zal men verkrijgen:

$$\text{Buit. Opp. } P : \text{buit. Opp. } Q = AB^2 : ab^2$$

en omdat $AB : ab = AD : ad$ is, zoo zal ook $AB^2 : ab^2 = AD^2 : ad^2$ zijn; derhalve

$$\text{buit. Opp. } P : \text{buit. Opp. } Q = AD^2 : ad^2.$$

§ 482.

§ 482. V. STELLING. Fig. 186. De inhouden van gelijkvormige kegels staan tot elkander, in dezelfde reden, als de cuben, op de stralen of middellijnen van hunne grondvlakken; of, als de cuben op hunne hoogten of opstaande zijden; en hunne oppervlakken verbonden zich, als de vierkanten, op diezelfde lijnen beschreven.

BETOOG. 1°. Volgens § 287, is

$$\text{Cirk. } AB : \text{Cirk. } ab = AB^2 : ab^2$$

en, omdat de driehoeken ABC en abc gelijkvormig zijn, is

$$\frac{1}{2} BC : \frac{1}{2} bc = AB : ab$$

deze evenredigheden met elkander vermenigvuldigende, zal men verkrijgen:

$$\text{Inh. Keg. } P : \text{Inh. Keg. } Q = AB^3 : ab^3$$

Uit de gelijkvormige driehoeken ABC en abc volgt, $AB : ab = BC : bc = AC : ac$; derhalve $AB^3 : ab^3 = BC^3 : bc^3 = AC^3 : ac^3$; men kan dan stellen:

$$\text{Inh. Keg. } P : \text{Inh. Keg. } Q = BC^3 : bc^3$$

$$\text{Inh. Keg. } P : \text{Inh. Keg. } Q = AC^3 : ac^3$$

2°. Voorts heeft men de evenredigheid

$$\text{Omtr. Cirk. } AB : \text{Omtr. Cirk. } ab = AB : ab$$

vermenigvuldig deze evenredigheid met de evenredigheid

$$\frac{1}{2} AC : \frac{1}{2} ac = AB : ab$$

dan zal men, zie § 448, verkrijgen:

$$\text{Oppervl. Keg. } P : \text{Oppervl. Keg. } Q = AB^2 : ab^2$$

en omdat $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = AC^2 : ac^2$ is, zal

$$\text{Oppervl. Keg. } P : \text{Oppervl. Keg. } Q = BC^2 : bc^2$$

$$\text{Oppervl. Keg. } P : \text{Oppervl. Keg. } Q = AC^2 : ac^2$$

moeten zijn.

§ 483. VI. STELLING. De inhouden der bollen staan tot elkander, in dezelfde reden, als de cuben hunner stralen of middellijnen, en hunne oppervlakken, als de vierkanten, op deze stralen of middellijnen

BETOOG. 1°. Laten de stralen der bollen zijn R en r , hunne middellijnen M en m , en hunne inhouden I en i ; dan is, zie § 461, $I = \frac{4}{3} \pi R^3$ en $i = \frac{4}{3} \pi r^3$; als ook $I = \frac{4}{3} \pi M^3$ en $i = \frac{4}{3} \pi m^3$; derhalve

$$I : i = \frac{4}{3} \pi R^3 : \frac{4}{3} \pi r^3 = R^3 : r^3$$

$$I : i = \frac{4}{3} \pi M^3 : \frac{4}{3} \pi m^3 = M^3 : m^3$$

2°. Stel de oppervlakken der bollen O en o ; dan zal, zie § 468, $O = 4 \pi R^2$ en $o = 4 \pi r^2$ zijn; derhalve

$$O : o = 4 \pi R^2 : 4 \pi r^2 = R^2 : r^2$$

§ 484. VRAAGSTUK. Fig. 184. De ribbe (AB) van eenig veelvlakig ligchaam P gegeven zijnde, de overeenkomstige ribbe (ab) van een aan hetzelfde gelijkvormig zijnde veelvlakig ligchaam Q te vinden, welks inhoud tot den inhoud van het ge-gevene ligchaam zal staan, in dezelfde reden, als het getal q tot het getal p ?

OPLOSSING. Volgens de voorwaarde der vraag, moet

$$P : Q = p : q$$

zijn; maar wij hebben hier boven § 480 gezien, dat

$$P : Q = AB^3 : ab^3$$

derhalve, zal men $AB = R$ en $ab = x$ stellende, hebben:

$$p : q = R^3 : x^3$$

uit deze evenredigheid de vierde evenredige oplofende, zal men vinden:

$$x^3 = \frac{q}{p} \times R^3 \text{ en } x = \frac{R}{p} \times \sqrt[3]{p^3 q}$$

of, wil men, ter berekening van de waarde van x , de Logarithmen gebruiken; dan zal men hebben:

$$\text{Log. } x = \text{Log. } R + \frac{1}{3} \times [\text{Log. } q - \text{Log. } p]$$

~~~~~

III. AF-

## ALLEREERSTE GRONDEN

DER

## MEETKUNST.

### III. AFDEELING.

Over de Werkdadige Meetkunst.

### INLEIDING.

Opgave van het Onderwerp dezer Afdeeling.

~~~~~

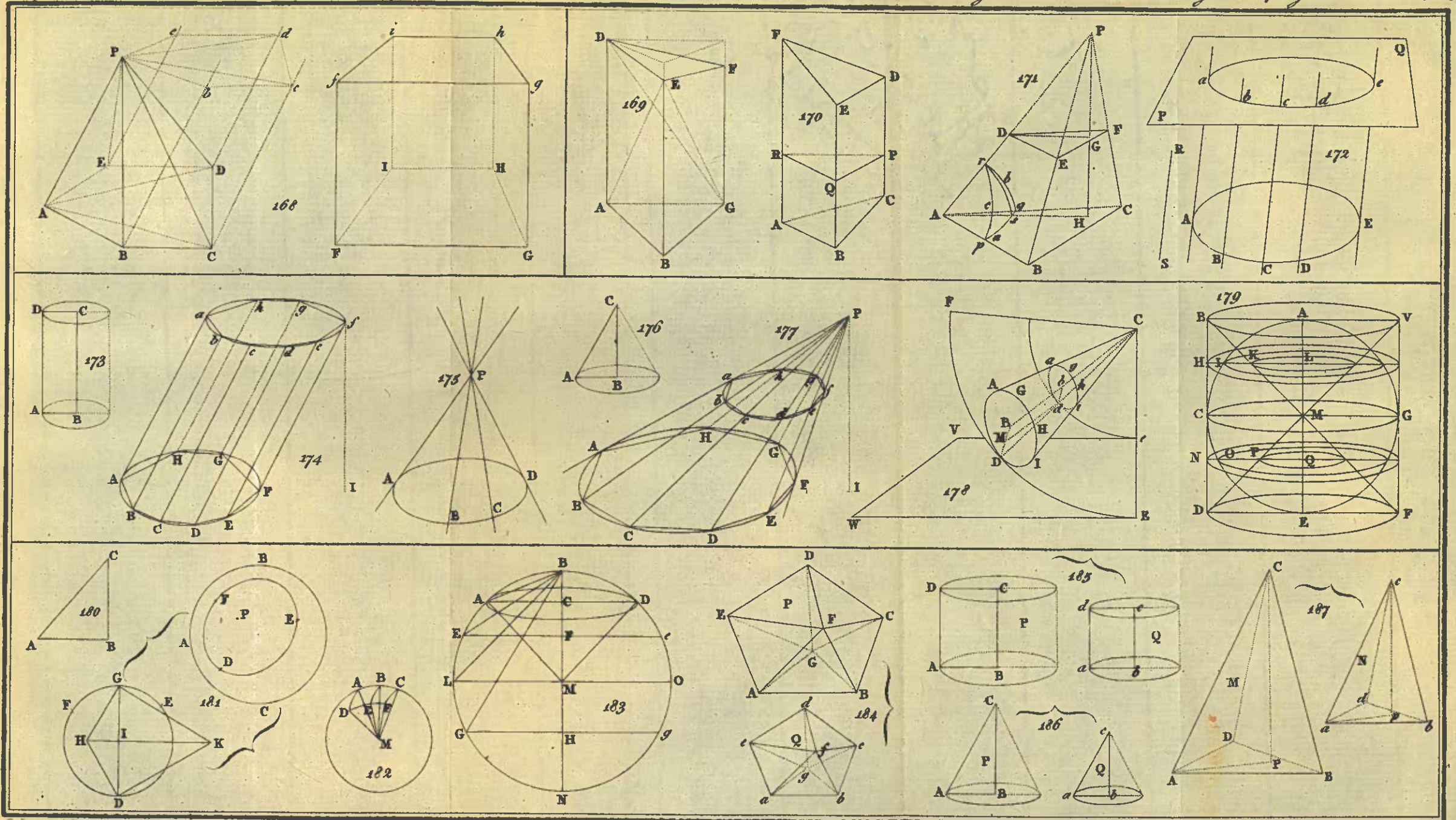
§ 485. In de uitgestrekte beteekenis van het woord, is de *Werkdadige Meetkunst* de toepassing der Meetkundige Leerstellingen op de behoeften van het gemeene leven en op de volmaking der verschillende kunsten, die in de samenleving nut of vermaak aanbrengen; in eene engere beteekenis, is zij de kunst, om eenige grootere of kleinere uitgestrektheid gronds (terrein) in het klein, volgens de Natuur, getrouwelijk en nauwkeurig af te beelden. Bij dit gedeelte der Werkdadige Meetkunst zullen wij ons slechts in deze Afdeeling bepalen; daar wij eene meer uitvoerige en volledige Werkdadige Meetkunst, ingerigt naar de behoefte van den tegenwoordigen tijd, afzonderlijk en als een vervolg onzer Beginfelen, in het vervolg, door den druk hopen algemeen te maken.

§ 486. Eene uitgestrektheid gronds, volgens de Natuur, af te beelden, is hetzelfde, als eene afteekening van eenig voorwerp, van een gezigt, enz. te vervaardigen: deze afteekening zal gelijken, wanneer de regels der gelijkvormigheid, in dezen nauwkeuriglijk zijn in acht genomen. Dit werk schijnt dus van dat eens Teekenaars of Schilders niet te ver-

schillen, en inderdaad zijn ook de gronden dezelfde; doch de middelen van uitvoering verschillen. De Schilder overziet zijn voorwerp uit een aangenomen oogpunt; door oefening heeft hij de bedrevenheid verkregen, om de merkwaardigste punten van hetzelfde, volgens derzelver schijnbare afstanden en rigtingen, in zijn tafereel, evenrediglijk over te brengen; een juist gevoel en een goed oog doen hier alles af; hij kan zijn origineel volmaakt treffen, zonder eenige meetkundige kennis te bezitten. De Meetkunstenaar daarentegen, die eenig gedeelte van het oppervlak der Aarde zal afbeelden, bevindt zich in eene moeilijker omstandigheid: *slechts een zeer klein gedeelte van den grond te gelijk overziende, moet hij de regelen der Meetkunst te hulp nemen, om alle voorwerpen en punten, welke zich, op het terrein bevinden, volgens hunne afstanden en rigtingen, in zijne teekening evenrediglijk over te brengen.*

§ 487. Elk weet, dat onze Aarde eene knolronde gedaante heeft, niet veel van eenen volmaakten bol verschillende, zijnde hare as tot de middellijn van den evenachtcirkel, in reden van 333 tot 334. Groote gedeelten van het oppervlak der Aarde zijn derhalve geene platte, maar gehogene vlakken, en echter stellen onze gewone Aardrijkskundige Kaarten die gedeelten op een plat vlak voor; omdat het niet anders mogelijk is. Deze kaarten zondigen derhalve, daar zij van de natuur afwijken, altijd in het ééne of andere opzigt. Het vereischt dus eene bijzondere oplettendheid en uitgestrekte kennis, om zulke oorspronkelijke Aardrijkskundige Kaarten te vervaardigen. Ook behoort dit werk tot de Hoogere Landmeetkunst, thans algemeen onder den naam van *Geodesie* (een woord uit de Grieksche $\gamma\eta$, aarde of land en $\delta\alpha\iota\omega$, verdeelen zamengesteld) bekend, met welk gedeelte der Werkdadige Meetkunst, wij ons thans niet kunnen ophouden. *Kleinere gedeelten van het oppervlak der Aarde kunnen, zonder merkelijke afwijking van de waarheid, als een plat vlak worden aangemerkt: deze omstandigheid maakt het vervaardigen van de*

af-



afteekening van zulk een klein terrein (immers in vergelijking der Aardrijkskundige Kaarten,) ten uiterste gemakkelijk.

§ 488. De kaarten, welke slechts zeer kleine gedeelten van het oppervlak onzer Aarde voorstellen, worden (van τόπος, plaats, grond.) *Topographische*, (of van χώρος plaats, streek.) *Chorographische* of (van Situs, de ligging,) *Situatie-Kaarten* (*Grond-Kaarten*) genoemd; zij zijn van de *Aardrijkskundige Kaarten*, welke slechts de ligging der voornaamste plaatsen, het beloop der kusten en grenzen, enz., met betrekking tot de vaste punten der Aarde voorstellen, *daarin onderscheiden*, dat zij alle de voorwerpen, die zich op het terrein bevinden, de verschillende gronden, verhevenheden en diepten van hetzelfde, getrouwelijk afbeelden; zij worden naar een grooter of kleiner bestek vervaardigd, dat is, naar eene grootere of kleinere schaal ontworpen, naarmate de topographische kaart, meer of min uitvoerig de gelegenheid van het terrein, in deszelfs natuurlijken samenhang, moet voorstellen.

§ 489. Behalve dat de topographische kaarten de bouwstoffen opleveren, om de aardrijkskundige, (na dat de voornaamste punten, volgens hunne ligging, ten opzichte van de evenachtslijn en den eersten middagscirkel, op dezelve geplaatst zijn,) aan te vullen, hebben zij voor de beoefening der Geologie, de aangelegenheden der Staatskundige Huishoudtiende, de Houtvesterij, Landbouw, enz., een onwaardebaar nut; wijl, zonder dezelve, de geringste zaak met geene nauwkeurigheid overwogen, en in geen geval eenig ontwerp van algemeen belang, met zekerheid op eene voorgestelde uitkomst, kan ondernomen worden. Doch de topographische of situatie-kaarten, zijn den krijgskundigen een niet minder onontbeerlijk hulpmiddel; daar zij hem (gesteld, dat zij met nauwkeurigheid zijn uitgevoerd,) in een kort bestek, het geheele beloop van eenig terrein met alle deszelfs bijzonderheden voor oogen stellen, en hem gelegenheid geven, om, zonder op dit terrein zelve te zijn, te beoordeelen, welke voor- of nadeelen hetzelfde oplevert; welke krijgskundige bewegingen en evolutien, door de gelegenheid van plaats en ge-

gefeldheid van grond uitvoerlijk zijn: enz. met één woord, geen oorlog, in het groot of klein, kan met rijp overleg, zonder de hulp van zulke topographische kaarten gevoerd worden. Om welke redenen dan ook, en omdat van alle plaatsen, waar men zich bevinden kan, geene topographische kaarten voorhanden zijn, de Officiëren, welke bij de Armee staan, door en door behooren bedreven te zijn, in de kunst van topographische kaarten in den kortsten tijd, en met de meeste naauwkeurigheid te vervaardigen; in de kunst eindelijk, om, met de vereischte naauwkeurigheid, zoo wel het terrein te herkennen, als des vijands stelling op hetzelfde op te nemen.

§ 490. Wegens de algemeene noodzakelijkheid van het juiste kennen van eenig terrein en de vele handen, welke men soms noodig kan hebben, om in dezen tot één doel mede te werken, is het de pligt van elk, die tot eenig vak van den Krijgsdienst wordt opgeleid, om, zich in deze kunst bekwaam te maken. Gelukkiglijk wordt hiertoe minder Meetkunstige kennis gevorderd; doch meer oefening, een gezond oordeel, aandacht en oplettenheid. Men kan de gronden dezer Kunst in dit boek bestuderen; doch de bekwaamheid, om deze regels siks en met zelfsvertrouwen uit te voeren, verkrijgt men door geen ander hulpmiddel, dan langs den weg van eene gedurige oefening.

§ 491. Om in deze Afdeeling de onderscheidene zaken, welke, het zij tot de hulpmiddelen, het zij tot de dadelijke uitvoering behooren, met orde en duidelijkheid voor te dragen, zullen wij de volgende hoofdzaken voordragen.

1°. Zullen wij spreken van de thans in gebruik zijnde Maten en Gewigten, en derzelver onderlinge verhouding tot elkander.

2°. Over de thans in gebruik zijnde tiendeelige Schalen, vooral bij het vervaardigen van topographische en andere kaarten.

3°. Over de meest in gebruik zijnde topographische teekeningen.

wijzen, strekkende, om de voorwerpen en de verscheidenheid der gronden, op eene topographische kaart, af te beelden.

4°. Over het dadelijk meten en begrooten der afstanden, op het veld.

5°. Over het meten der hoeken op het veld, en de gronden, waarop de samenstelling en het gebruik van het *Planchet* en de *Boussole* berusten.

6°. Daarna zullen wij het gebruik dezer werktuigen, in het opnemen van Landen en Districten, leeren kennen.

7°. Waarna wij eindelijk, met een woord, over het waterpassen en het opmaken van de profielen der ongelijke gronden zullen spreken.

I. H O O F D S T U K.

Over de Maten en Gewigten, en derzelver verhouding tot elkander.

§ 492. Volgens Koninklijk Besluit, zal eerlang het metrieke Stelsel van Maten en Gewigten worden ingevoerd. (*)

§ 493. In dit Stelsel is de METER de grondslag van alle andere maten en gewigten, en tevens de éénheid der lengten of afstanden (de lengtemaat) hij is het tienmillioenste gedeelte van een één-vierde van den omtrek van eenen middagsirkel onzer Aarde.

§ 494. De veelvouden van den Meter, zijn de *Decameter*, *Hectometer*, *Kilometer* en *Myriameter* zijnde gelijk aan tien, honderd, duizend en tien-duizendmaal den Meter.

§ 495. De onderdeelen van den Meter zijn de *Decimeter*, *Centimeter* en *Millimeter*, zijnde één tiende, één honderdste en één duizendste gedeelte van den Meter.

§ 496. Het vierkant op den Meter is de éénheid van de vlaktematen, bevattende honderd vierkante decimeters tien-duizend vierkante centimeters en één-miljoen vierkante millimeters.

§ 497. Tot groote vlakte-landmaten, gebruikt men het vierkant op den decameter, bevattende honderd vierkante meters;

(*) Eerlang zal worden bekend gemaakt, welke Nederduitsehe benamingen, in plaats van de Griekse, zullen worden ingevoerd; onzeker zijnde wegens deze toekomstige bepalingen, moeten wij ons met de reeds bekende, die de beschaaften en geleerden denkelijk zullen blijven behouden, vergenoegen. De ondervinding zal moeten leeren, of de nieuw in te voeren namen, beter dan de de Griekse, aan het doel zullen beantwoorden.

ters; aan deze Landmaat geeft men den naam van *ARE*; zij is de kleinste; het tienvoud van de *Are* noemt men *Decare*; het honderdvoud *Hectare*, het duizendvoud *Kiliare* het tienduizendvoud *Myriare*.

§ 498. De hoofd lichamelijke of inhoudsmaat is de cubieke meter, aan welke men den naam van *STERE* geeft.

§ 499. De drooge en natte waren worden gemeten met den cubieke decimeter, zijnde één-duizendste gedeelte van den *Stere*, aan denzelven geeft men den naam van *LITER*.

§ 500. Het gewigt van een liter gedistilleerd water, tot deszelfs hoogsten graad van digtheid gebragt, noemt men *kilogramme*, bevattende duizend grammes (zijnde eene gramma het gewigt van eenen cubieken centimeter zuik zuiver gedistilleerd water.)

§ 501. In dit weinige is het geheele Metrieke Stelsel begrepen. Men behoeft slechts de woorden *Meter*, *Are*, *Stere*, *Liter* en *Gramme*, benevens de griekse voorzetsels, *Deca*, *Hecto*, *Kilo* en *Myria* voor de veelvouden, en de Latijnsche *Deci*, *Centi* en *Milli* voor de onderdeelen, en dus in het geheel twaalf woorden te kennen, om dit Stelsel volkomen magtig te worden.

§ 502. Bij den overgang van dit nieuwe Stelsel moet men de verhouding der grondmaten tot dit Stelsel, behoorende, tot de oude Maten kennen. De voornaamste der oude lengtematen zijn de *Rijnlandsche* en *Amsterdamsehe Roeden* en *Voeten*, behalve welke, ook de Geleerde en Krijgsman de *Parijsche* en *Londonsehe voeten* behoort te kennen.

§ 503. Volgens Besluit van den 18 Februarij 1808, is de Rijnlandsche voet = 0,3139465 Meters aangenomen, (*) en dus één Meter = 3,1852560866 Rijnlandsche Voeten, zijnde de Rijnlandsche roede van twaalf voeten = 3,767358 Meters; hier uit volgen de onderstaande Logarithmische formules, strekken

(*) Deze bepaling van de lengte der Rijnlandsche roede en voet verschilt van andere voormaals aangenomen, gelijk ook van die, welke de Duitsehe Schrijvers doorgaans opgeven.

keende, om gemakkelijk Rijnlandfche Roeden en Voeten tot Meters, en omgekeerd, te herleiden:

- A. $\text{Log. Meters} = \text{Log. Rijnl. Roed.} + 0,5760368 \quad 918 (*)$
 B. $\text{Log. Meters} = \text{Log. Rijnl. Voet} + 9,4968556 \quad 457 - 10$
 C. $\text{Log. Rijnl. Roed.} = \text{Log. Meters} + 9,4239631 \quad 082 - 10$
 D. $\text{Log. Rijnl. Voet.} = \text{Log. Meters} + 0,5031443 \quad 543$

§ 504. Een Meter heeft, volgens de naauwkeurigste metingen, de lengte van 3,531909 Amsterdamsche voeten, welke in elf duimen verdeeld zijn, en dertien van welke voeten ééne Amsterdamsche roede uitmaken: hier uit volgen de onderstaande Logarithmische herleidings formules.

- E. $\text{Log. Meters} = \text{Log. Amst. Roed.} + 0,5659337 \quad 969$
 F. $\text{Log. Meters} = \text{Log. Amst. Voet} + 9,4519904 \quad 446 - 10$
 G. $\text{Log. Amst. Roed.} = \text{Log. Meters} + 9,4340662 \quad 031 - 10$
 H. $\text{Log. Amst. Voet.} = \text{Log. Meters} + 0,5480095 \quad 554$

§ 505. De Meter is gelijk aan 3,078444 Franfche voeten, waarvan er zes in ééne toise begrepen zijn. Hieruit de volgende Logarithmische herleidings formules.

- I. $\text{Log. Meters} = \text{Log. Par. Toises} + 0,2898199 \quad 926$
 K. $\text{Log. Meters} = \text{Log. Par. Voet.} + 9,5116687 \quad 423 - 10$
 L. $\text{Log. Par. toises} = \text{Log. Meters.} + 9,7101800 \quad 074 - 10$
 M. $\text{Log. Par. Voet.} = \text{Log. Meters.} + 0,4883312 \quad 577$

§ 506. Volgens de opgave van PRONY, (*Mem. sur le jaugeage des eaux courantes*, pag. 66) en die alle vertrouwen verdient, is de Meter = 39,3827 engelfche duimen; hieruit zijn de volgende Logarithmische herleidings formules afgeleid.

- N. $\text{Log. Meters} = \text{Log. Eng. Voet.} + 0,5161242 \quad 411$
 O. $\text{Log. Eng. Voet.} = \text{Log. Meters} + 9,4838757 \quad 589 - 10$

§ 507. De onde Aardrijkskundige Lengtematen, zijn de zogenaaemde *Duitsche* of *Geographische Mijlen* van 15 in éénen graad,

(*) In vele gevallen zijn slechts de vijf eerste cijfers van de tien-deeligen der Logarithmen genoeg, om de eene in de andere maat over te brengen. Zeven van deze cijfers voldoen altijd; de drie overige zijn er slechts bijgevoegd, ten gevalle van hen, die uit deze formules anderen zouden willen afleiden.

graad, en uren gaans van 20 in éénen graad. De nieuwe zijn de *Myriameter* en *Kilometer*.

De Myriameter (tien-duizend meters) houdt $1\frac{1}{2}$ Geographische Mijlen of 2654,38 Rijnlandfche Roeden.

De Kilometer (duizend meters) houdt 0,135 Duitfche Mijlen of 265,438 Rijnlandfche Roeden.

Hieruit volgt, dat ééne Duitfche mijl de lengte van 1966,3, dus nagenoeg 2000 Rijnlandfche Roeden, en één uur gaans 1475 zulke Roeden bevat.

§ 508. Uit deze, tot dus verre bijgebragte formules, volgen voor de vlaktematen de onderstaande Logarithmische herleidings formules. (Een Rijnlandfche Morgen bevat zeshonderd vierkante Roeden.)

- P. $\text{Log. vk. Met.} = \text{Log. vk. Rijnl. Roed.} + 1,1520737 \quad 836$
 Q. $\text{Log. vk. Met.} = \text{Log. vk. Rijnl. Voet.} + 8,9937112 \quad 915 - 10$
 R. $\text{Log. vk. Rijnl. Roed.} = \text{Log. vk. Met.} + 8,8479262 \quad 164 - 10$
 S. $\text{Log. vk. Rijnl. Voet.} = \text{Log. vk. Met.} + 1,0062887 \quad 085$
 T. $\text{Log. Ares} = \text{Log. vierk. Rijnl. Roed.} + 9,1520737 \quad 836 - 10$
 U. $\text{Log. vierk. Rijnl. Roed.} = \text{Log. Ares} + 0,8479262 \quad 164$
 V. $\text{Log. Rijnl. Morgen} = \text{Log. Hect.} + 0,0697749 \quad 661$
 W. $\text{Log. Hect.} = \text{Log. Rijnl. Morgen} + 9,9302250 \quad 339 - 10$

§ 509. Uit diezelfde Logarithmische formules voor de herleiding der lengtematen, volgen de onderstaande, dienende tot de herleiding der inhoudsmaten. Men herinnere zich, dat ééne schacht (eene bij ons in gebruik zijnde Aarde-maat,) 144 cubieke Rijnlandfche voeten bevat.

- X. $\text{Log. Cub. Met.} = \text{Log. Cub. R. V.} + 8,4905669 \quad 372 - 10$
 Y. $\text{Log. Cub. R. V.} = \text{Log. Cub. Met.} + 1,5094330 \quad 628$
 Z. $\text{Log. Cub. Meters} = \text{Log. Schacht} + 0,6489294 \quad 293$
 AA. $\text{Log. Schacht} = \text{Log. Cub. Meters} + 9,3510705 \quad 707 - 10$
 en voor de kleinere inhoudsmaten, vindt men de Logarithmische formules.
 BB. $\text{Log. Cub. decim.} = \text{Log. Cub. R. dm.} + 8,2530231 \quad 991 - 10$
 CC. $\text{Log. Cub. Rl. dm.} = \text{Log. Cub. decim.} + 1,7469768 \quad 009$
 DD. $\text{Log. Cub. decim.} = \text{Log. Cub. Amst. dm.} + 8,2317932 \quad 784 - 10$
 EE. $\text{Log. Cub. Amst. dm.} = \text{Log. Cub. decim.} + 1,7682067 \quad 216$

§ 510. De kilogramme weegt 2,023921 ponden Amsterdamsch gewigt, en 1,0159135 Mark Hollandsch trooisch; terwijl 95 Amsterdamsche ponden gelijk zijn aan 100 ponden Delfsch Artillerie gewigt; hieruit de volgende Logarithmische herleidings formules:

$$FF. \text{ Log. kilogr.} = \text{Log. Amst. ponden} + 9,6938064 - 10$$

$$FF. \text{ Log. kilogr.} = \text{Log. Mark trooisch} + 9,9931433 - 10$$

$$GG. \text{ Log. kilogr.} = \text{Log. Artiller. ponden} + 9,7615301 - 10$$

$$HH. \text{ Log. Amst. ponden} = \text{Log. kilogram.} + 0,3061936$$

$$II. \text{ Log. Mark trooisch} = \text{Log. kilogram.} + 0,0068567$$

$$KK. \text{ Log. Artill. ponden} = \text{Log. kilogram.} + 0,3284699$$

§ 511. Deze zijn de voornaamste herleidings formules, uit welke nog vele andere kunnen worden afgeleid. Het gebruik van dezelve is zeer eenvoudig. Laat, bij voorbeeld, gevraagd worden: *om een aantal van 1739,37 cubieke Rijnlandsche duimen tot cubieke decimeters te herleiden?* hiertoe gebruikt men de formule BB aldus:

$$\text{Log. Cub. Rijnl. duimen} = 3,2403920$$

$$\text{Standvastige Logar.} = 8,2530232 - 10$$

$$\text{Log. Cubieke decim.} = 1,4934152, \text{ zijnde de}$$

$$\text{Log. van } 31,14692 \text{ cubieke decimeters.}$$

Men zie verder, over het wijsgeerig Stelsel van Maten en Gewigten, onze *Allereerste Gronden der Cijferkunst, de XXXII. Les.*

II. HOOFD-

II. HOOFDSTUK.

Over de thans in gebruik zijnde Tiendeelige Schalen.

§ 512. Bij ons te lande worden, bij het opnemen van een terrein, de afstanden in Rijnlandsche Roeden gemeten en uitgedrukt; ongetwijfeld zal bij de aanstaande invoering van het wijsgeerig Stelsel van Maten en Gewigten, de Rijnlandsche Roede, gelijk in Frankrijk, door den Meter vervangen worden, en zal men, bij het Departement van Oorlog, (gelijk zulks in Frankrijk, bij het topographische Bureau, al voor eenige jaren bepaald en ingevoerd is,) vaststellen, in welke evenredigheden de afstanden der voorwerpen, op de Topographische en Situatie Kaarten, tot de wezenlijke afstanden der afgebeelde voorwerpen op het terrein zelve, zullen moeten genomen worden, hetgene, wegens de zoo noodzakelijke gelijkvormigheid van bestek, welke in alle Topographische Kaarten behoort plaats te hebben, zeer wenschelijk is. Zulk eene bepaling, gegrond op onze Rijnlandsche voetmaat, is ook, op den 9 Januarij 1815, door Zijne Excellentie, den Heer Commisaris Generaal voor het Departement van Oorlog, ten gebruike voor de wapens van de Artillerie, Genie en andere Militaire diensten, in alle tekeningen en plans van vestingen en vestingwerkingen, Militaire Topographie en Geographie, als een algemeen te volgen regelmaat, voorgeschreven, en offchoon, bij de invoering van het algemeene wijsgeerig Stelsel van Maten en Gewigten, deze bepalingen denkelyk naar den aard van het tiendeelig stelsel zullen gewijzigd worden, blijft het, zoo lang deze bepalingen niet veranderd zijn, nuttig, de thans nog bestaande, aan welke zich elk Militair houden moet, hier op te geven. Bij dit Voorschrift, zijn, onder anderen, drie tiendeelige schalen,

len, zie Fig. 188, 189 en 190, tot vaste maatstaven opgeven. (Hoe zulke schalen vervaardigd worden, hebben wij in het VI Hoofdst. den I Afd. § 179, hier boven opgegeven.) De eerste dezer schalen, Fig. 188, stelt de lengte van twee Rijnlandsche duimen, verveelvoudigd, en in honderd gelijke deelen verdeeld, voor; de tweede, Fig. 189, de lengte van éenen duim Rijnl. verveelvoudigd en in honderd gelijke deelen verdeeld, en de derde, Fig. 190, de lengte van éenen halven duim, verveelvoudigd, en honderd deelen verdeeld; de kleinste verdeelingen zijn dus, op de eerste, één vijftigste, op de tweede, één honderdste, en op de derde, één twee-honderdste gedeelte van éenen Rijnlandschen duim.

A. De eerste dezer schalen dient: 1°. om de afstanden der voorwerpen in de teekening, *zeven-honderd-en-twintig maal* kleiner voor te stellen, *wordende elke vijf roeden op het terrein, door éenen duim, in de teekening voorgesteld*, zoo dat elk tiende gedeelte van de twee duimen, de lengte van éene roede in de teekening voorstelt. Deze schaal, op die wijze gebruikt, dient tot het teekenen van plans van enkele fronten van attaque, of kleine fortificatie-werken; van enkele posten, vestingstorens en redouten met hunne environs, loopgraven, batterijen, mijngangen, en stelsels van metselwerken, revetementen, fouterreins; van platte gronden, geschikt voor tracés en berekening van aardenwerken, van kleine legerplaatsen; voor plans en relief van artillerie- en wagenparken, en alle die voorwerpen, waarbij de kleinste voor te stellen gedeelten niet grooter zijn dan één-tiende roede.

2°. Dezelfde eerste schaal, Fig. 188, dient ook, *om eenen afstand van vijftig roeden in de teekening door éenen duim af te beelden; de afstanden zijn dus in de natuur zeven-duizend-en-twee-honderdmaal grooter dan in de teekening*; elk tiende gedeelte van de twee duim stelt dus tien roeden voor. Men gebruikt deze Schaal tot het teekenen van topographische teekeningen, van vestingen met omliggende forten, posten, linien van defensie, circumvallatie- en contravallatie- linien, en belegerings arbeid; van geretrancheerde legerplaatsen en positiën,

mi.

militaire wegen; van de generale topographie van de frontieren en het vijandelijk terrein; van de legerplaatsen van geheele divisien van arm'en en andere voorwerpen, waarbij de kleinste voor te stellen gedeelten niet grooter zijn dan éene roede.

3°. Eindelijk dient ook dezelfde Schaal, *om eenen afstand van vijf-honderd roeden door éenen duim voor te stellen; zijnde dus de afstanden in de Natuur twee-en-zeventig-duizendmaal grooter dan op de teekening*. Men gebruikt deze Schaal tot het teekenen van Militaire Kaarten van onder-directien van de Genie, waarin meerdere vestingen, posten en linien van groote frontieren met de bewegingen der armeen, en andere voorwerpen, waar bij de kleinste voor te stellen gedeelten niet grooter zijn dan tien roeden.

B. De tweede Schaal, Fig. 189, wordt gebruikt: 1°. *wanneer men tien roeden op den duim, en dus de afstanden door één-duizend-vier-honderd-en-veertigste deel van het geheel wil voorstellen*. Deze Schaal wordt gebruikt tot het teekenen van plans van alle vestingen, forten, posten, en linien van defensie met de generale profielen en quoteringen, zonder situatie om dezelve; van de werken van de belegeraars en belegerden van de derde parallel af aan; van kampementen van eene enkele brigade, eskadron, of bataillon sappeurs, met hun park en andere voorwerpen, waar bij de kleinste voor te stellen gedeelten niet grooter zijn dan één-vijfde roede.

2°. Dezelfde Schaal dient ook, *om honderd roeden op den duim af te beelden, en dus de afstanden veertien-duizend-en-vierhonderdmaal kleiner voor te stellen*. De evenredigheid gebruikt men tot het teekenen van Topographische Kaarten van grootere uitgestrektheid, waarop vestingen, aan een geschaakelde posten en linien van defensie, de genomene positie van den vijand, bij het berennen, blokkeren, bombarderen en belegeren, wordt voorgesteld; van legerplaatsen van geheele armeen; van militaire herkenningen en alle zoodanige andere voorwerpen, waar bij de kleinste voor te stellen gedeelten niet grooter zijn dan twee roeden.

3°. Eindelijk bedient men zich van deze Schaal, *om dat-*

zend roeden op den duim, en dus de afstanden honderd-vier-en-veertig-duizendmaal kleiner voor te stellen, wordende deze evenredigheid, gebruikt tot het teekenen van Militaire en Geographische Kaarten van geheele Directien van de Genie; tot het aantekenen van de bewegingen van geheele armeeën, en andere voorwerpen, waar bij de kleinst voor te stellen gedeelten niet grooter zijn dan twintig roeden.

C. De derde Schaal, Fig. 190, wordt ook in drie onderscheidene evenredigheden gebezigd.

1°. Om twintig roeden door éenen duim, en dus de afstanden twee-duizend-acht-honderd-en-tachtigmaal kleiner voor te stellen. Men maakt van deze evenredigheid gebruik tot het teekenen van de plans van alle vestingen, forten, posten, linien, of retranchementen met hunne environs of situatiën, quoterings en inundatiën; de werken van attaque en defensie; van de opening der loopgraven tot aan de derde parallel; tot het teekenen van veldwerken en alle andere voorwerpen, waar bij de kleinst voor te stellen gedeelten niet grooter zijn dan éene halve roede.

2°. Om twee-honderd roeden op den duim, en bijgevolg de afstanden acht-en-twintig-duizend-en-acht-honderdmaal kleiner af te beelden. Deze evenredigheid moet gebruikt worden, tot het teekenen van Topographische Kaarten, waarop de samenhang en verbinding van aan een gesthakelde vestingen en vestingwerken van een geheel frontier, met of zonder de vijandelijke positiën en operatiën daar tegen; de linien van inundatie met hare rigtingen en steunpunten, kanalen en sluizen, daar toe betrekkelijk, en alle andere voorwerpen, waar bij de kleinst voor te stellen gedeelten niet grooter zijn dan vier roeden.

3°. Eindelijk om twee-duizend roeden op éenen duim te brengen, en dus de afstanden twee-honderd-acht-en-tachtigmaal kleiner af te beelden, welke evenredigheid als de kleinste gebruikt wordt, tot het teekenen van Militaire Kaarten van geheele Landen en Staten; tot de netten van driehoeken bij geodesische metingen, en andere voorwerpen, waar bij de kleinst voortestellen gedeelten niet grooter zijn dan veertig roeden.

III. HOOFD-

III. H O O F D S T U K.

Over het Topographisch Teekenen, of de manier, om eenig Terrein met de voorwerpen, die zich op hetzelfde bevinden, zoo na mogelijk, overeenkomstig de Natuur af te beelden.

§ 513. **Z**al eene Topographische Kaart aan haar doel beantwoorden, dat is, een juist begrip van de hoegrootheid, omtrek, ligging en hoedanigheid van den grond voorstellen, in het klein, zoo na mogelijk, de levende Natuur afbeelden; dan moeten alle kunstmiddelen vereenigd worden, om dit doel eenigermate te bereiken. Ik zeg eenigermate; want, alhoewel men, in de laatst afgeloopene vijf-en-twintig jaren, in dit vak groote vorderingen gemaakt heeft, is het er echter nog verre van af, dat men, in allen opzichte, deze kunst tot volmaaktheid gebragt hebbe.

§ 514. De zwarigheden zijn ook niet gering. Een oneffen terrein, met hoogten en diepten, afwisselend van grond en bebouwing, in alle bijzonderheden, en met alles, wat zich op hetzelfde bevindt, op eene platte vlakte voor te stellen, is gewis niet gemakkelijk, vooral, met betrekking tot de naauwkeurige voorstelling van de verhevenheden en diepten der verschillende deelen van den grond, welk laatste vereischte, in Topographische Kaarten, welke tot een krijgskundig gebruik moeten dienen, nogtans het gewigtigste is. Geslepen vernuften en uitmunten teekenaars, hebben, in het bedenken van verschillende hulpmiddelen, hunnen geest uitgeput, zonder een aan elk geheel bevredigend voorschrift van teekenen te hebben daargesteld. De verschillende handelwijzen, welke men bedacht heeft, hier ter plaatse op te geven, gedooft

ons bestek niet; daar wij ons voorstellen, slechts de gebruikelijkste teekenwijzen op te geven, vóór of tegen sommige van welke wij ons niet verklaren: ons oordeel opschortende, tot dat onze kunstenaars, aangaande zulk eene wijze van topographisch teekenen, welke de Natuur zoo na mogelijk zal voorstellen, zullen zijn overeengekomen.

§ 515. Het algemeene grondbeginsel, bij het topographisch teekenen aangenomen, en waarop ook de geheele opmeting berust, bestaat hierin: *dat men zich door eenig punt eene horizontale of waterplasyakke voorstelle, op welke alle hoger of lager gelegene punten* (zie § 346 en § 379) *worden geprojecteerd*: het papier, waarop de kaart geteekend wordt, stelt, dit vlak van projectie voor. Het natuurlijke horizontale vlak, of desnoods een vlak, dat evenwijdig aan hetzelfde loopt, snijdt dan alle voorwerpen, die zich op het terrein bevinden, als gebouwen, torens, molens, enz. volgens een vlak, dat men derzelver horizontale *profiel* of *doorsnede* noemt, en welk profiel (zie plaat VI, n°. 41, 42, 46, 47, 48, en meer andere,) gemakkelijk in teekening kan gebragt worden; indien men de omtrekken van de profielen dezer voorwerpen dadelijk meet. Zoo ook worden groote en kleine Wegen, Rivieren, Kanalen, Zee-kusten en andere voorwerpen, door derzelver horizontale omtrekken in teekening gebragt; terwijl meestal de verhevenheden en diepten van het terrein, door zwaardere of lichtere harzingen, ten naasten bij worden aangewezen; ten aanzien van welke harzingen in het oog wordt gehouden, dat men in de Topographische Kaarten, niet, gelijk in teekeningen en schilderstukken, één vast, maar een veranderlijk oogpunt aanneemt, voor elk bijzonder punt van de kaart, gelegen zijnde in de verticale lijn, (zie § 340) welke door dit punt, loodrecht op het vlak van dezelve gedacht wordt. Overigens worden de onderscheidene soorten van vlakke gronden en andere voorwerpen, door bijzondere teekenwijzen, welke zoo dadelijk zullen worden opgegeven, voorgesteld. Dit laatste is wel het gemakkelijkste; omdat, wanneer men het eenmaal, aangaande deze teekenwijzen, is eens geworden, het,

het, in zeker opzigt, vrij onverschillig is, welke manier men daartoe hebbe uitgekozen.

§ 516. De zesde plaat stelt de voornaamste teekenwijzen van de onderscheidene voorwerpen voor oogen. Zij is in zeventig vakken verdeeld, welke de volgende voorwerpen voorstellen.

- N°. 1. Fijne dennen.
2. Grove dennen.
3. Eiken boomen en eiken-bosch.
4. Beuken.
5. Olmen.
6. Berken.
7. Populieren.
8. Knotwilligen.
9. Waterwilligen.
10. Elzen.
11. Waardhout (aan de uiterwaarden der Rivieren.)
12. Wijngaard.
13. Vruchtboomen.
14. Kreupelhout.
15. Boomkweekerij.
16. Hagen.
17. Geveld-Bosch.
18. Eene Hopgaarde.
19. Een Akkermaats-bosch. (Klein hontgewas, dat bij den akker verkocht wordt.)

Deze boomsoorten worden niet gekleurd; men geeft aan den boom eene ligte schaduw, en indien men de hoogte van denzelven wil afbeelden, dan geschiedt zulks door eene flag-schaduw van de linker naar de rechterhand, gelijk zijnde aan de hoogte van denzelven. Zie N°. 6, 7 en 8. (*)

(*) Hier en daar aanwijzende, hoe sommige voorwerpen gekleurd worden, merken wij aan: dat indien de teekening volkomen goed is uitgevoerd, de kleuren ontbeerd kunnen worden. Zij kunnen slechts dienen, als hulpmiddelen, om op de planchet-stukken (zie verder den tekst) het situeren te bespoedigen.

218 ALLEREERSTE GRONDEN DER

20. Verbeeldt hoog of best weiland.
21. Laag Weiland, (kan hier en daar, waar het dras staat, met eene ligte blaauwe tint worden aangewezen.)
22. Hooge heide.
23. Heide, met drasfe laagten en plasfen. (Deze plasfen kunnen met een ligte blaauw aangewasfchen worden.)
24. Moerasfen. (Deze kunnen tusfchen de gronden met blaauw worden aangewasfchen.)
25. Gorzen en Schorren (Aangeflibt en onbedijkt land.) met krekten. (Bij laag water droog zijnde, kunnen de krekten met eene ligte geele kleur worden aangeduid, en, niet droog wordende, met blaauw.)
26. Broekland (moerasfig Land) Kan met blaauw, naarmate het dras is, doortreep worden.
27. Dras braakland. Met fterker blaauw dan het voorgaande.
28. Drasfe gronden, met poelen en krekten, (onbruikbare gronden) De poelen blaauw en de gronden doortreep met ligter blaauw.
29. Laag veenland. De gronden met ligte geel en de tusfchenruimten met ligte blaauw.
30. Hooge Veengronden. Als boven; maar in plaats van blaauw een ligte tint met Oostindifchen inkt.
31. Geboekweit Veenland. (Veengronden met boekweit bebouwd.)
32. Uitgeboekweit veenland.
33. Vergraven veen. De laagten met blaauw aan te wasfchen, de gronden met geel gestreep.
34. Veen met poelen en ftruiken. De ruimte tusfchen de gronden met blaauw, en de gronden hier en daar met blaauwe en gele ftrepen.
35. Begroeid en vergraven veen. Het uitgegraven met blaauw aan te wasfchen.
36. Bouwland.
37. Tabaksland.
38. Tuinen.
39. Een gehucht. De huizen ligt karmijn en de wegen ligt geel.

MEETKUNST. III. AFDEEL. III. HOOFDST. 219

40. Een kerkhof met eenen muur. De muur rood; is het omringd met eene gracht, dan dezelve geel of blaauw, naar mate zij droog of nat is.
41. Wegen. N°. 1. Kapitale (Chaussée) weg, gedeeltelijk bestraat. Met rood of blaauw aan te wijzen, naar dat hij met gebakken of andere fteenen bestraat is. N°. 2. Verhoogde weg. N°. 3. Straatweg. N°. 4. Knuppelweg, met rijs- en ander houtwerk belegd. N°. 5. Landweg. Geel aan te wasfchen. N°. 6. Gemeene weg. N°. 7. Binnen- of Veldweg. N°. 8. Voepad.
- 42 en 43. Bruggen. N°. 1. Vlotbrug, geel. N°. 2. Houten overdekte brug, geel. N°. 3. Half fteenen en houten brug (steen rood, hout geel.) N°. 4. Steenen Brug, rood. N°. 5. Houten brug, op fteenen pilaren (brug geel, pilaren rood.) N°. 6. Schipbrug, geel. N°. 7. Pontonbrug, geel. N°. 8. Houte ophaalbrug, geel. N°. 9. Gierbrug, geel. N°. 10. Zeilveer. N°. 11. Gewoon veer. N°. 12. Pont, geel. N°. 13. Voetgangersbrug.
44. Trekvaart met eene fluis en brug. (De muren van de fluis rood.)
45. Befchoeide kaai- en palen-hoofd.
46. Steenen kaai (de lijnen met rood.)
47. Gedeelte van eene Stad. De huizen met ligte rood, de grachten met blaauw, de bruggen geel.
48. Gedeelte van een dorp (als boven).
49. Zeedijk. De kruin van den dijk ligt geel.
50. Wierdijk. De fteene glooijing ligt blaauw.
51. Dijk en kadijk.
52. Doorgebroken dijk, met zijne wiel en indijking.
53. Steene glooijing, blaauw.
54. Briksteen-dam en hoofden (Kribwerk met pui bedekt).
55. Rivier met pak-kribwerk en zandplaat. N°. 1. Rivier. N°. 2. Kribwerk. N°. 3. Zandplaat. a. Pijltje, aanwijzende den loop des frooms.
56. Zandplaat aan het zee-ftand.
57. Wiervelden.
58. Slijkplaat, met een Zwin.

59. Stikplaat, met grondlooze slijkplekken.
60. Rietvelden.
61. Kreken, beken en eene verlande beek.
62. Zachte glooiing of afhellende grond.
63. Een berg, met een riviertje en watermolen.
64. Een Dal. N°. 1. Eene wel (ligt blaauw).
65. Rotfen of steile bergen, met den loop eener rivier.
66. Duinen. N°. 1 en 2. Strand bij hoog en laag water.

N°. 3. Ankerplaats. N°. 4. Blinde klip.

67. Sluizen. N°. 1. Eene Schutsluis of Sas. N°. 2. Gewone sluis. N°. 3. Uitwaterende sluis. N°. 4. Windmolten.

De volgende drie vakken, bevatten eenige der gebruikelijkste militaire teekens.

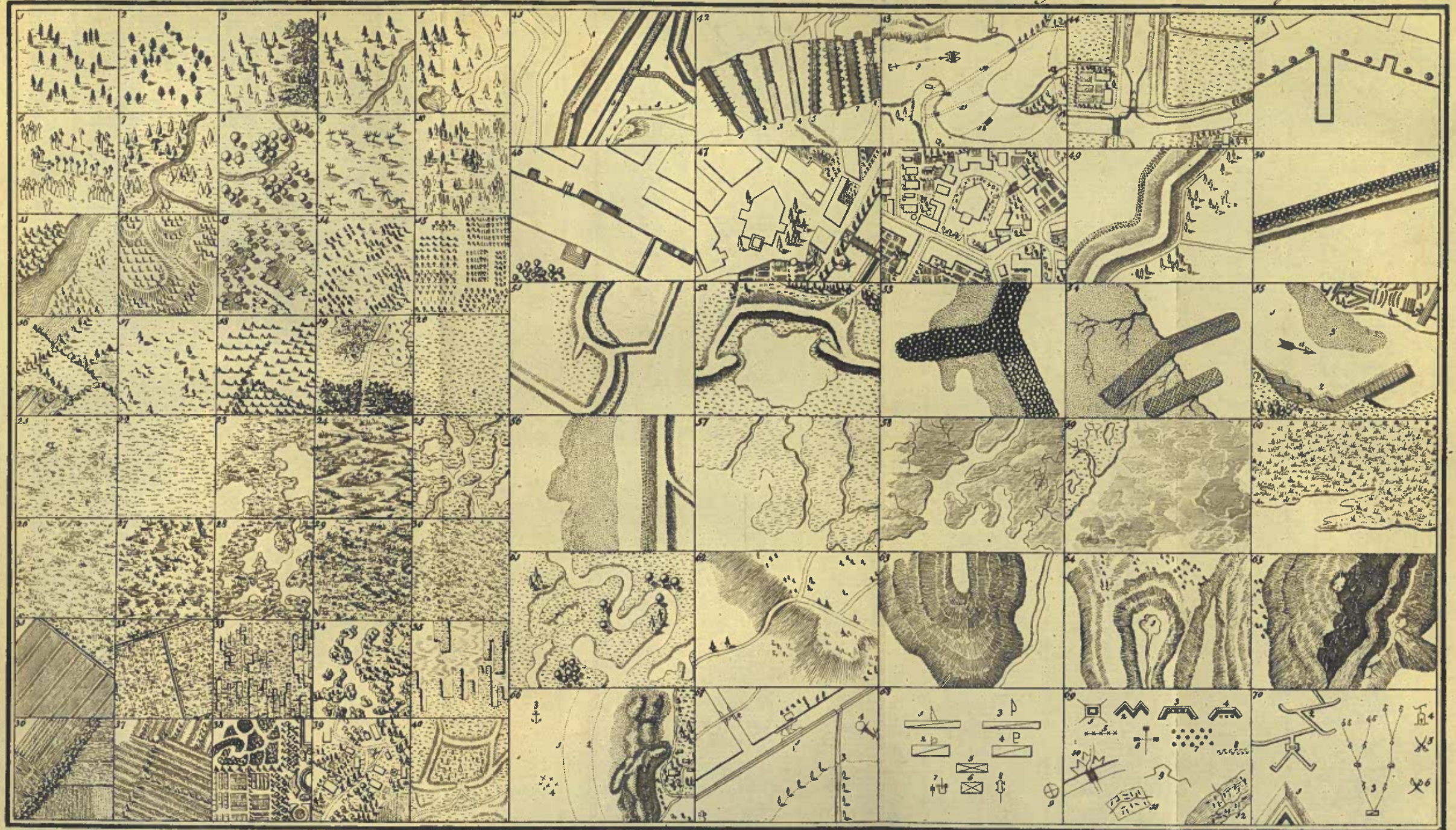
68. Bevat. 1°. Bataillon Infanterie in slagorde. 2°. Escadron Kavallerie, idem. 3°. Infanterie in het kamp. 4°. Kavallerie, idem. 5°. Artillerie. 6°. derzelver trein. 7°. Kanon. 8°. Kruidwagen. 9°. Hoofdkwartier.

69. Vertoont: 1°. Redoute. 2°. Schansfen. 3°. Kanonbatterij. 4°. Mortierbatterij. 5°. Friesche Ruiters. 6°. Mijnen. 7°. Wolfskuiten. 8°. Verhakkingen. 9°. Eene verschanschte linie. 10°. Een bruggethhoofd. 11°. Een verbrand dorp (rood). 12°. Een overfloemd (gehuudeerd) dorp, blaauw.

70. Stelt voor: 1°. Een Vestingwerk. 2°. Loopgraven (geel). 3°. Eene Kavallerie-wacht, of voorpost, met vedetten. 4°. Eene Telegraaf. 5°. Plaats van eenen gewonnen. 6°. van eenen verloren veldslag.

§ 517. De wijze, hoe elk dezer voorwerpen aangelegd en verder opgewerkt wordt, wordt in de Teekenslesfen breedvoerig aangewezen: ook kan men zulks, door geene beschrijvingen, maar wel door dadelijke en aanhoudende oefening, leeren. Men moet zich, (in aanmerking genomen de uitgestrekte nuttigheid, die het in elk vak heeft,) in deze soort van teekenen door en door bekwaam maken; niet slechts om te kunnen kopiëren; maar om dadelijk en met groote vaardigheid, (immers op het veld,) alle deze soorten van teekens uit het hoofd, naar dat het te pas komt, te kunnen
nit.





MEETKUNST. III. AFDEEL. III. HOOFDST. 22F

uitvoeren. Vooral is dit laatste voor den Officier, die bij de Armee staat, een onontbeerlijk talent; hij moet met spoed en naauwkeurigheid kunnen opnemen. De planchet-stukken, behoeven, ten aanzien van de netheid der teekening, zoo fraai niet uitgewerkt te worden; maar zij moeten duidelijk en naauwkeurig zijn, en geschikt, om, des vereischt wordende, uit dezelve eene fraaije en naauwkeurige teekening te kunnen opmaken.

IV. HOOFDSTUK.

Over het dadelijk meten en het begrooten der afstanden op het Veld.

§ 518. Bij het opnemen van een terrein, is voor alle dingen noodig, dat men wete te bepalen, hoe verre de voorwerpen, en van een bepaald standpunt, en van elkander verwijderd zijn; deze afstanden zijn toch de grondstoffen of de gegevens, waardoor men eene welgelijkende afbeelding van eenig terrein verkrijgen kan. Wanneer men echter alle afstanden door dadelijke meting zou moeten bepalen, dan zou dit werk (gesteld dat het in alle gevallen uitvoerbaar ware,) zeer lastig en verdrietig zijn: gelukkig heeft men eigenlijk slechts ééne nauwkeurig gemeten afstand noodig, om uit denzelfden, door middel van hoekmetingen, welke naar welgevalen, uit zoo vele punten, als men verkiest, kunnen vernieuwvuldigd worden, alle andere afstanden te bepalen. Die enkele afstand, welke daartoe dienen moet, noemt men de *Basis*, de *aangenomene Grondlijn*: dezelve kan op het terrein, naar welgevalen, worden aangenomen; doch zij behoort, ten einde den invloed van kleine mislagen, welke in het meten der hoeken kunnen ontstaan, te verminderen, eenigermate aan de uitgestrektheid van het op te nemen terrein, of liever aan de afstanden, welke men uit dezelve zal moeten afleiden, geëvenredigd te zijn.

§ 519. Om zulk eene basis te meten, gebruikt men, in gewone metingen, eene zoogenaamde *Landmeters Ketting*, doorgaans van koper gemaakt, waarvan een gedeelte in Fig. 191 is afgebeeld. Deze ketting heeft doorgaans de lengte van vijf Rijnlandsche Roeden of zestig Rijnlandsche Voeten, (eigenlijk kan zij eene willekeurige lengte hebben,) en is in *Schal-*

men van ééne of twee voeten lengte verdeeld. De uiteinden van dezelve zijn voorzien met ringen, aan welke zij, bij het doen eener lengtemeting, gedragen wordt, en welke ringen door schroeven met de uiterste schalmen vereenigd zijn, dienende, om aan dezelve hare behoorlijke lengte te geven, of, om, indien de lengte door rekking of slijting van de oogen der schalmen, eenige verandering ondergaan heeft, dezelve op hare gewone maat van vijf roeden te herstellen. Bij zulk eene ketting heeft men doorgaans een zeker aantal *houts* of *ijzeren pinnen*, (zie de afbeelding van ééne derzelve in Fig. 192.) waarvan zoo dadelijk het gebruik zal worden aangewezen.

§ 520. Eer men zulk eene ketting begint te gebruiken, moet men zich door eene proef van hare juistheid overtuigen: tot dat einde moet men, op eenen vlakken en gelijken grond, de ketting regt uit, in eene regte lijn, geheel gespannen uitleggen, (Fig. 193) en dezelve in de eindringen met twee der voornoemde pinnen in den grond vast steken: *men mete dan met eene Rijnlandsche Roede, van welke juistheid men verzekerd is, van het midden van de pin AB tot het midden van de pin CD; indien dan de ketting hare juiste lengte heeft, zoo zal die afstand gelijk moeten zijn aan vijf zulke roeden; hieraan iets ontbrekende, wordt, voor gemelde schroeven, de ketting te pas gemaakt.*

§ 521. Om met zulk eene ketting eene basis te meten, zoo verkieze men daar toe, zoo veel mogelijk eenen effen en waterpas liggenden grond: men neme het punt *A*, voor het begin van de basis, en brenge (in derzelver richting) eene baak *P* vooruit, ten einde zich, bij het voorwaards gaan, in dezelfde rigting te kunnen houden, en men stelt in het punt *A* één der voornoemde pinnen. Twee personen, die ik *X* en *T* zal noemen, beginnen met eerst de ketting regt uit te leggen, en zorgen, dat er geene kronkels in de schalmen blijven. *X* houdt het achter, en *T* het vooreinde van dezelve en de ketting op den grond uitgestrekt; de persoon *T*, vooruitgaande, in de rigting naar *P*, sleept de ketting over den grond

grond zoo ver, dat *X* den ring van het achtereinde van de-
zelve om de pin *A* (zoo als in *Fig. 193* gezien wordt,)
staan kan; *T* dan de ketting uitgestrekt hebbende, staat bij *B* eene pin binnen den ring: dit verrigt hebbende, maakt *X* de ketting bij *A* los, en *T* sleept dezelve in dezelfde rig-
ting naar *P* voort, tot dat *X*, bij *B* gekomen zijnde, de
achterring van de ketting om de pin *B* geslagen hebbende,
T bij *C* wederom eene pin in den grond staat. Op deze wijze
voortgaande, zal men, met eene vrij groote naauwkeurig-
heid, bijna in den tijd, dien men noodig heeft, om den
weg af te loopen, eene basis van zulk eene lengte, als men
goedvindt, meten kunnen. De persoon *X* laat de pin bij het
punt *A* staan; maar neemt de volgende pinnen *B*, *C*, *D*, *E*,
enz. weg, naarmate men met de opmeting vordert. *Zoo vele
pinnen als men in den grond zal gestoken hebben, zoo veelmaal
vijs roeden zal de gemetene basis lengte hebben.* Laat *Q* het
uiteinde van de basis zijn, dan stelt men, bij het begin in
A en het einde in *Q*, twee baken, welke als hoekpunten
dienen, om, zoo als naderhand zal geleerd worden, uit de-
zelve de noodige hoeken te meten.

§ 522. Bij metingen van grooter aanbelang, bedient men
zich van naauwkeuriger handelwijzen, welke wij, alleen spre-
kende van die metingen, welke met spoed moeten uitgevoerd
den, met stilzwijgen voorbijgaan. Zelfs is de afstandsmeting
door middel van eene ketting, in de meeste gevallen, die
spoed vereischen, vooral bij de herkenning van een terrein
en in nabijheid van den vijand een al te omslachtig werk;
hier moet men spoed met naauwkeurigheid weten te vereenigen,
en deze hebbelijkheid, kan slechts, door eene aanhoudende oe-
fening, verkregen worden. Ten aanzien nu van het meten van
afstanden, zonder ketting, of eenige andere lengtemaat, ko-
men twee hulpmiddelen in aanmerking: 1°. *het meten van af-
standen door passen; 2°. het bepalen of begrooten der afftan-
den op het oog.*

§ 523. Wat het eerste dezer hulpmiddelen, het meten der
afstanden door passen of schreden, betreft, hetzelfde is in allen

op-

opzigten aan te prijzen; dewijl men ook, buiten de herken-
ningen, in gewone opmetingen, voor kleine bijzondere ge-
deelten van een terrein, ter vermindering van te groote om-
slachtigheden, wel verplicht is tot dat hulpmiddel zijnen toe-
vlugt te nemen. Ook kan men, het in deze wijze van af-
standsmeting, door gestadige oefening en eenen vasten tred, tot
eenen aanmerkelijke graad van naauwkeurigheid brengen. *Men
rekent doorgaans vijf passen, of schreden, op éene Rijnlandsche
Roede: deze passen, stappen of treden, (van oudsher geome-
trische passen genoemd) zijn grooter dan die van een gewoon
mensch, die op zijn gewonen tred voortgaat. Zonder oefe-
ning, zal men derhalve de maat van vijf passen, op éene
Rijnlandsche Roede, niet kunnen volgen. De beste wijze,
om de jonge Lieden aan deze maat te gewinnen, bestaat
hierin: men bakene op eenen vlakken en gelijken grond (zie
Fig. 194) een rechte lijn *AP* af, welke men, door zichtbare mark-
teekenen, van *A* tot *B*, van *B* tot *C*, enz. ten naauwkeurigste,
van Roede tot Roede, verdeelt; men begint hun eerst te ge-
winnen, om éene roede in vijf stappen af te passen, zeggende
van *A* tot *B*, van *B* tot *C*, enz., één, twee, drie, vier,
vijs; zoo dat de 5^e, 10^e, 15^e, 20^e, 25^e pas; juist op de pun-
ten *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, enz. uitkomt. Men daar in eenigen tijd
geoefend hebbende, verdeelt men de lijn van twintig tot twin-
tig Roeden, en oefene hen vervolgens, om deze twintig Roeden in
juist honderd zulke passen af te leggen; daarna neme men groo-
ter afgebakende afstanden van 40, 60, 80, 100 Roeden, enz., welke
zij in 200, 300, 400 en 500 passen moeten leeren afleggen. Op
deze wijze geoefend, zullen zij den vasten tred van vijf pas-
sen op éene roede nagenoeg leeren volgen, en de gewoonte
verkriften, om die pas, zonder merkelijke afdwiking van de
waarheid, zoo dikwijls het noodig is, te kunnen volgen.*

§ 524. Wanneer men zich geoefend heeft, in het meten
van afstanden op den gewonen meetkunstigen (geometrischen)
pas, dan kan men overgaan, om afstanden van voorwerpen,
op het oog, te leeren begrooten. Deze oefening, is moeije-

P

lij-

litte en vereischt niet slechts vele oplettenheid, maar ook de kennis van vele gezigtkundige waarheden, in welker optellingen en bijzonderheden ons kort betrek ons niet toelaat te treden. Als het eenigste en geschikste hulpmiddel, om zich hierin te eenigzins te oefenen, kan men voorschrijven: *dat men uit eene standplaats, alwaar men zich bevindt, den afstand, dien men van een afgelegen voorwerp verwijderd is, door dadelijk afpassen mete, dien bevonden afstand met den afstand van andere verder af of digter bij gelegene voorwerpen vergelijke; deze oefening veelmalen herhaald hebbende, zal men eene zekere mate van bekwaamheid verkrijgen, om zeer nabij, op het bloote beschouwen van een afgelegen voorwerp, deszelfs afstand tot zich te begrooten.* Zij, die het handteekenen eenigen tijd beoefend hebben, verkrijgen daardoor eene hebbelijkheid, om in het klein afstanden met eikander te vergelijken; eenen afstand van twee punten in gelijke deelen te verdeelen, die aan eenen anderen in het oog vallenden kleineren afstand gelijk zijn. Dit is insgelijks een geschikt oefenings hulpmiddel, om over den afstand van twee voorwerpen te leeren oordeelen, en denzelven ten naastenbij te begrooten. *Men stelle, op het vlakke veld, twee bakken, op eenen bekenden afstand, en beschouwe dien afstand uit onderscheidene standpunten, tevens de afstanden, welke men van deze bakken verwijderd is, met denzelven vergelijkende, dan zal men door zulk eene oefening een vast oog verkrijgen, om afstanden van afgelegene voorwerpen eenigzins te begrooten, en met elkander te vergelijken.*

§ 525. Dan, dit alles geldt slechts voor voorwerpen, die niet aanmerkelijk verre van ons verwijderd zijn. Voor groote afstanden, wordt die begrooting moeilijk, of kan ten minste niet met die nauwkeurigheid, als voor kleinere afstanden, verkregen worden. Met één woord, eene langdurige oefening, het dikwijls opnemen van een terrein, het vergelijken van de verkregene afstanden met de schijnbare, een goed oordeel, lust en genegenheid voor het vak, zijn de natuurlijke en zedelijke hulpmiddelen, welke moeten samenwerken, om die uit-

nitmuntende en zeldzame bekwaamheid te verkrijgen, om, als het ware, met eenen opslag van het oog, het geheele terrein te overzien, welke zulk eene onschatbare hoedanigheid in den Krijgsman is. Men voege hierbij, dat men in tijd van vrede zich hierin moet oefenen, om in tijd van oorlog in dit vak behendig en bekwaam te zijn.

V. H O O F D S T U K.

Over het meten der Hoeken. Gronden, waarop de zamenvoeging en het gebruik van de Meettafel en de Boussole berusten.

§ 526. Een ander hulpmiddel, tot het opnemen van een terrein, bestaat in het meten der hoeken, onder welke de voorwerpen, uit aangenomene standpunten, gezien worden. Op het papier, waarop de lijnen, die van het eene op het andere punt gedacht worden, getrokken zijn, geschiedt zulks door middel van eenen transporteur, aan elk bekend, en hoedanig een in Fig. 195 is afgebeeld; doch, op het veld, zijn de lijnen, welke de middelpunten der voorwerpen vereenigen, niet zichtbaar voorgesteld; hier moeten dezelve op eene andere wijze verkregen en zichtbaar gemaakt worden. De optische of gezigtkundige waarheid, dat wij de voorwerpen zien, langs en op het einde eener rechte lijn, die van ons oog tot dit voorwerp getrokken wordt, leert ons verschillende werktuigen dermate in te rigten, dat wij met dezelve gemakkelijk den hoek kunnen meten der lijnen, welke uit ons oog tot twee voorwerpen getrokken worden; dat is, den hoek, onder welken twee voorwerpen, uit het punt, alwaar wij staan, gezien worden.

§ 527. Dat de voorwerpen langs en op het einde eener rechte lijn gezien worden, die van het oog tot het voorwerp gaat, wordt bevestigd, door het kenmerk, waaraan men de zuiverheid van een liniaal beoordeelt, als ook door de wijze, om, op het veld, door middel van baken, rechte lijnen af te bakenen: wanneer twee baken *A* en *B*, Fig. 196 naar welgevallen loodregt in den grond gestoken worden, dan zal het

het oog, in *O* geplaatst, met deze baken in een volmaakt verticaal vlak vallen, wanneer men zich zoodanig plaatst, dat deze twee baken elkander bedekken. Op dit beginsel nu, berust een werktuig, dat onder den naam van *Alidade* of *Vizier-liniaal* bekend is. In Fig. 197 wordt zulk eene soort van liniaal afgebeeld. In dezelve is *AB* een koperen liniaal, aan welker beide einden regthoekig opstaande vizieren *P* en *Q* zijn opgericht, welke in sommige vizier-linialen om twee schapieren *ab* en *cd* kunnen omdraaijen. In deze vizieren zijn draden *ef* gespannen; deze liggen met de kanten *gh* van het vizier-liniaal in een vlak, regthoekig op het vlak van hetzelfde liniaal *AB* staande; zoodat, wanneer het liniaal op eene horizontale vlakke gelegd wordt, deze vizier-draden *ef* (als rechte lijnen beschouwd,) regthoekig op het vlak van den gezigteinder staan, en derhalve als verticale lijnen kunnen aangemerkt worden. In het verlengde dezer draden zijn, bij *O*, kleine ronde openingen gemaakt, welker middelpunten, met het midden van de dikte der vizier-draden, in eene rechte lijn liggen: deze punten noemt men de *Vizier- of Oogpunten*. Veronderstellen wij nu, dat dit vizier-liniaal, op een volmaakt waterpasvlak, zoodanig geplaatst worde, dat, men door één der oogpunten *O* van het vizier *P*, de tegenoverstaande vizier-draad, aan dezelfde zijde van het liniaal liggende, op het midden van een afgelegen voorwerp *R* ziet, (hetgeen men door het vizier-liniaal, wat heen en weder te draaijen, zeer gemakkelijk verkrijgen kan,) dan zal de kant *gh* van het vizier-liniaal, een gedeelte van de rechte lijn voorstellen, welke, van het oog tot het voorwerp *R* kan getrokken worden: en wanneer men nu, met potlood of inkt, eene lijn *gh* langs den kant van het liniaal trekt, dan zal deze lijn, de rigtlijn van het voorwerp *R* verbeelden. Stellen wij het waterpasvlak, in Fig. 198, vast en onwrikbaar; indien men dan het vizier-liniaal op de voorschrevene wijze op twee afgelegene voorwerpen *R* en *S* rigt, en met potlood op dit vlak deze rigtlijnen, *Or* en *Os* trekt; dan zal de hoek *sOr* de hoek zijn, onder welken deze voorwerpen uit het standpunt *O* gezien

zien worden; en men verkrijgt door zulk een vizier-liniaal, als door eene meetkundige constructie, den hoek, onder welken de voorwerpen *R* en *S* gezien worden, zonder daarom dien hoek in getallen van graden en minuten te kennen.

§ 528. Wanneer het onbewegelijke waterpasvlak een tafeltje *ABCD* is, hetwelk op eenen voet op de eene of andere wijze vast en onbewegelijk geplaatst is, dan heeft men den toestel, bekend onder den naam van *Meettafel*, *Mensula*, *Planchet*, welke op onderscheidene wijzen wordt zamengesteld. De vereischten van dit Werktuig zijn de volgende. 1°. *Dat het ligt en gemakkelijk te behandelen zij.* 2°. *Dat het bovenvlak van de meettafel, in eene waterpasfe stelling blijvende, ligtelijk om eene verticale as kan bewogen, en tevens, door eene zachte beweging, het vizier-liniaal, op hetzelfde rustende, op een haar na, kan gesteld worden.* 3°. *Dat het eenige stelling verkregen hebbende, kan worden pal gezet, zonder, om desselfs verticale as, te draaijen.* Hoe alle deze vereischten, op de beste wijze, in de Meettafel kunnen vereenigd worden, zal hierna worden verklaard. Wij merken thans alleen nog aan, dat men zich dikwijls, in plaats van de vizieren op het vizier-liniaal, van eenen acromatischen kijker bedient, welke het voordeel oplevert, dat men, met te grootere naauwkeurigheid, op veraf gelegene voorwerpen vizieren kan; doch, aan den anderen kant, moet zulk een kijker goed gecentreerd, en aan het vizier-liniaal zoodanig aangebragt zijn, dat, hij op zijne as draaijende, de as des kijkers volmaaktelijk in het verticale vlak blijve.

§ 529. Eene stalen naald, door de magneet gestreken, heeft, gelijk algemeen bekend is, de eigenschap van zich bestendiglijk door de magnetische aantrekkingskracht der Aarde, volmaakt in den magnetischen middagsirkel te plaatsen, welke, op sommige plaatsen, met den eigenlijken middagsirkel van die plaats overeenstemt, op andere plaatsen ten Oosten of ten Westen afwijkt; eene afwijking, of *miswijzing van het Kompas*, bij de Zeelieden onder den naam van *Noordoostering* of *Noordwestering* bekend. Offchoon nu deze miswijzing, voor de

de meeste punten der Aarde, verschilt; voor dezelfde plaats, van tijd tot tijd, verandert, zoo wijst toch de magneetnaald, in de onderscheidene punten van eenen kleinen omtrek grounds, en, gedurende eenen zekeren tijd, dezelfde streek van den Horizon. Door deze eigenschap van de magneetnaald, wordt eene horizontale vlakke, op welke zulk eene naald vrij en ongehinderd draait, een geschikt werktuig, om, op het vlakke veld, de streken van den gezigteinder te bepalen, langs welke zich de voorwerpen, uit eenig gegeven standpunt vertoonen, en bijgevolg ook de hoeken, onder welke zij gezien worden. Zij, *Fig. 199*, *ABCD* een waterpas vlak, op welks middelpunt *M* eene magneetnaald draait, en aan hetwelk een vast vizier-liniaal, of kijker *OP*, hebbende het oogpunt in *O*, vast en onwrikbaar vereenigd is, en welk vlak op een voet of statief staande, om eene verticale lijn, door het middelpunt *M* gaande, kan worden omgedraaid; zoodanig, dat het vizier-liniaal naar elk punt van den horizon kan gerigt worden. Laat, uit het middelpunt *M*, eenen cirkel *AN* beschreven, en, na eene middellijn *NZ* getrokken te hebben, welke evenwijdig loopt aan de as van den kijker (*), den omtrek dezes cirkels, (van de regter naar de linkerhand) in 360° verdeeld worden; indien dan dien toestel op zijne verticale as, zoodanig gedraaid wordt, dat de punt der magneetnaald, het *Magnetische Noorden* aanwijzende, op het nulpunt der verdeeling staat; dan zal de vizierlijn *OP* (de as van den kijker anders) naar het Zuiden (námelijk het Zuiden van het miswijzend Kompas) gerigt zijn. Wanneer men nu het vizier of den kijker *OP* op eenig voorwerp rigt; dan zal het magnetisch Noorden, dat is, de noordelijke punt der magneetnaald, emdat, wanneer het vlak *ABCD* wordt omgedraaid, de magneetnaald op hare plaats blijft, het magnetisch Azimuth van

P 4

dis

(*) In vele Boussoles, is deze kijker of dit vizier op zijde geplaatst. Zonder eenige hindernis, kan hij onder de roos of plaat worden aangebragt, waardoor de uitwerking van de uitmiddelpuntigheid, die, in sommige omstandigheden, niet geheel zonder invloed is, wordt weggenomen.

dit punt, dat is, de strek van den gezigteinder aanwijzen, alwaar dit punt, met betrekking, tot den magnetischen middagslijn zal gelogen zijn, wordende dit Azimuth van het Zuiden, door het Westen, Noorden en Oosten, tot het Zuiden, 360° rondgeteld. ()*

Kan

(*) Een en ander, wat hier, in den tekst gezegd wordt, verdient eenige opheldering en herinnering. De middagscirkel van eenige plaats of enig punt der Aarde, is een vlak, hetwelk door de verticale of loodlijn van dit punt, door de as des Hemels, en bijgevolg ook door de polen gaat; dit vlak snijdt den Horizon of de Waterpasvlakte, volgens eene lijn, welke den cirkel, die op het oppervlak der Aarde, door de snijding van dit vlak onstaat, en die de aardche middagscirkel genoemd wordt, aanraakt, en de hoofdstreken van den Horizon, het Noorden en Zuiden, bepaalt; het vlak, dat het vlak van den middagscirkel rechthoekig doorsnijdt, en insgelijks door de loodlijn gaat, bepaalt, in deszelfs doorsnijding met de waterpasvlakte, de streklijn van het Oosten en Westen.

Wanneer ergens een voorwerp of punt in, boven of beneden de waterpasvlakte gelegen is, en men zich een vlak verbeeldt, hetwelk door de loodlijn van de standplaats des Waarnemers, en het middelpunt van dit voorwerp gaat, dan wordt dit vlak het verticale vlak van dit voorwerp of punt genoemd, en de hoek, welken dit verticale vlak met het vlak van den middagscirkel maakt, noemt men het *Azimuth*, (een Arabisch woord) dat eigenlijk *Streek* of *Ligging* beteekent. Dit verticale vlak snijdt de waterpasvlakte, volgens eene rechte lijn, zijnde deze lijn de projectie van de lijn, welke uit het oog des Waarnemers, tot het gezegde voorwerp of punt getrokken wordt, op de waterpasvlakte. De hoek nu, welken deze projectie met de middagslijn maakt, kan het *Azimuth* genoemd worden.

Maar nu is de vraag: *hoe dit Azimuth moet geteld worden?* In het afgetrokkene, is zulks onverschillig, en ten dien aanzien, bestond er te voren eene verscheidenheid, die aanleiding tot verschillende manieren van tellen gegeven heeft, en eene bijzondere oplettenheid noodzakelijk maakte. In de Sterrekunde en Goedseie telt men het *Azimuth* van het Zuiden, door het Westen, Noorden en Oosten, den geheelen cirkel of 360° rond, en daarvoor bestaat eene bijzondere reden. Het is van het Zuiden, dat de sterrekundige dag geteld wordt, in dezelfde richting schijnt zich ook de Hemel om te draaijen; den geheelen cirkel rondtellende, behoeft men geene gevallen en wijzen van tellen te onderscheiden, welke zoo vaak aanleiding tot mislagen geven; omdat der

Kan men het magnetisch azimuth van de voorwerpen, welke in de verte gelegen zijn, door dien toefel zoo gemakkelijk bepalen, dan zal men ook den hoek, welke de verticalen van twee voorwerpen met elkander maken, insgelijks gemakkelijk kunnen waarnemen; want, indien, bij voorbeeld, *Fig. 200, A* en *B* twee voorwerpen zijn en

$$\text{Het Azimuth van } B = 329^{\circ}30'$$

$$\text{Het Azimuth van } A = 251^{\circ}00'$$

is; dan zal de hoek, onder welken deze voorwerpen gezien worden, gelijk zijn aan $329^{\circ}30' - 251^{\circ}00' = 78^{\circ}30'$

§ 530. Aan dezen toefel, behoort op een statief of voet geplaatst, geeft men door de wandeling den naam van *Boussole*, en is van het gewone *Zoemans Kompas*, in het wezen der zaak, niet onderscheiden. Dit werktuig, hetwelk, ten aanzien van het gemak der behandeling en de nauwkeurigheid der waarneming, dezelfde vereischten moet bezitten als de Meettafel, is één der meest in gebruik zijnde werktuigen en wordt, wegens het voordeel, dat het in zekere gevallen boven andere werk-

oplettenheid hierdoor te veel geveerd wordt; en waarom zou men dan de Boussole ook niet naar deze telling inrigten? te meer, daar men in het verhever gedeelte der Aardmeetkunst, ter bevordering der eenvoudigheid, wel gedrongen wordt, om deze wijze van tellen boven elke andere te verkiezen? De Boussole, naar ons voorschrift ingerigt, vordert flechts, in elk geval, ééne wijze van tellen; daar men, naar de oude manier, telkens beoosten en bewesten onderscheiden, in twee onderscheidene rigtingen de graden moet tellen, en alzoo gevaar loopt, om, of verkeerd te tellen, of verkeerd de hoeken over te dragen?

Wanneer de magneetnaald, juist in den middagscirkel ligt, dan wijst zij het ware Noorden en Zuiden, en men heeft een *regtwijzend kompas*; maar ligt die naald buiten den middagscirkel; dan heeft men een *miswijzend kompas*, welks miswijzing gelijk is aan den hoek, welke de naald met de middagslijn maakt; deze miswijzing is *noordoastering* of *noordwestering*, naardat de noordelijke punt van de naald beoosten of bewesten de middagslijn wijst, en wat wij in den tekst de *magnetische middagslijn* genoemd hebben, is de lijn, welke de magneetnaald aanwijst. Het *Magnetisch Azimuth* van enig punt, is de hoek, welke het verticale vlak van dat punt met de magneetnaald maakt.

werktuigen vooruit heeft, zeer aanprezen. In holle wegen, digt bewasfen boschen en andere plaatfen, waar het gezigt zeer belemmerd is, en men slechts zeer kleine afstanden kan overzien, is inderdaad dit werktuig het eenig bruikbare, en wel daarom; omdat men (zoo als wij straks nader zullen verklaren) uit elk standpunt slechts het magnetisch azimuth der punten heeft waar te nemen, om alle waargenomene punten, in derzelver natuurlijke ligging, in teekening te brengen. Wanneer men zich van dit werktuig wil bedienen, moet men, om redenen, die wij straks zullen opgeven, voordien zijn van eenen cirkel of transporteur, welke, in eene omgekeerde rigting als de cirkel op de boussole, in 360° verdeeld is.

§ 531. Het gebruik van dit werktuig, steunt op eene stilzwingende onderstelling, welke wel ten naastenbij, doch niet volkomen waar is; dat namelijk, de middaglijnen van de onderscheidene punten der Aarde, welke in elkanders nabijheid liggen, onderling evenwijdig zijn; want, omdat de middaglijnen der plaatfen, die Oost en West van elander gelegen zijn, groote cirkels van de Aarde zijn, die elkander in de polen ontmoeten, kunnen zij, indien deze plaatzen niet verre van elkander liggen, wel ten naastenbij, doch niet volkomen, voor evenwijdige lijnen gehouden worden.

§ 532. Alles wat wij tot hier toe van het gebruik van de Boussole gezegd hebben, zal, (zie Fig. 201) door de volgende verklaring, in allen opzichte duidelijk worden. Laten A en B , twee standpunten zijn, op eenen gemeenen weg, bij voorbeeld, genomen: laten de lijnen NZ en NZ' , de rigtingen der magneetnaald in de punten A en B verbeelden, anders de magnetische middagscirkels van de punten A en B , welke, voor geringe afstanden, als welke twee zulke standpunten, die altijd digt genoeg bij elkander liggen, kunnen hebben, voor evenwijdig kunnen gehouden worden; zij P een zeker afgelegene punt. Laat de Boussole, in A staande, op dit punt gericht zijnde, voor het magnetisch azimuth 316° en op B gericht zijnde, voor het magnetisch azimuth,

van

van het punt B geven $254^\circ 30'$; verder in B , op hetzelfde punt P gericht zijnde, voor het magnetisch azimuth geven 137° . Laat de afstand van B tot A , op de pas gemeten, en bevonden zijn 535 pasfen of 107 Rijnlandfche Roeden; dan zal men, door eene teekenkunstige bewerking, de ligging der punten A en B , zoowel met betrekking tot den magnetischen middagscirkel en kompas-streken, als, met betrekking tot het punt P , aldus vinden. Laat, Fig. 202, nz in de teekening den magnetischen middagscirkel NZ van Fig. 201 verbeelden; neem op dezelve het punt a , om het standpunt A te verbeelden; leg het middelpunt van den transporteur, verdeeld, op de wijze als in § 530, is voorgeschreven, in a het nulpunt van deszelfs verdeeling op de lijn az , (dat is, altijd naar beneden in de streek van het Zuiden,) en teeken de punten aan den omtrek, die de waargenomene magnetische azimuths van 216° en $254^\circ 30'$ geven, en trek door deze punten de lijnen ap en ab , welke dan de rigting der lijnen AP en AB zullen voorstellen. Neem verder op de schaal $ab = 107$ deelen, elk ééne roede voorstellende; trek door het punt b de lijn $n'z'$ evenwijdig aan nz ; dan zal deze den magnetischen middagscirkel $N'Z'$ voorstellen; den transporteur, als dan op dezelfde wijze met zijn middelpunt in b , het nulpunt op bz' (altijd in de rigting van het Zuiden,) gelegd, het in B waargenomen azimuth van 137° aangeteekend, en de lijn bp getrokken hebbende, dan zal de ligging der punten A , B en P , ten opzichte van elkander, en van den magnetischen middagscirkel, naar de regels der gelijkvormigheid, zijn afgebeeld; want, het is duidelijk te zien: dat de hoeken paz en baz , aan de hoeken PAZ en BAZ , en de hoeken pbz' en abz' , aan de hoeken PBZ' en ABZ' zullen gelijk zijn, en dat derhalve hoek $pab =$ hoek PAB en hoek $abp =$ hoek ABP ; derhalve zullen, zie § 100, de driehoeken abp en ABP gelijkvormig zijn; zoodat even zoo veel deelen van de schaal, als in ap en bp begrepen zijn, ook even zoo veel Roeden in de lijnen AP en BP zullen verhouden zijn.

§ 533.

§ 533. Deze handelwijze steunt, gelijk wij gezegd hebben, op de onderstelling, dat de magnetische middagscirkels *NZ* en *N'Z'* volmaakt evenwijdig loopen. Strikt genomen, wijkt dit van de waarheid af; doch het verschil is voor kleine afstanden zeer gering. Indien *NZ* evenwijdig aan *N'Z'* is, dan moet hoek *NAB* = hoek *ABZ'* zijn. Het azimuth van den *Utrechtschen* Dومتoren uit de Westertoren van *Amsterdam*, beoosten het Noorden, gezien, is, volgens zeer naauwkeurige berekeningen,

152° 41' 20"

en het azimuth van gemelde Westertoren van *Amsterdam*, uit den Dومتoren van *Utrecht*, is ten naauwkeurigste

152° 52' 37"

deze hoeken zonden, indien de middags-cirkels evenwijdig waren, gelijk moeten zijn; doch, daar het onderscheid, op den grooten afstand van 53518 meters, slechts 11'17" bedraagt, zoo zal dit onderscheid, voor zulke kleine afstanden, als welke, bij het gebruik der Boussole in aanmerking komen, zeer gering zijn, en althans op dit ruwe werktuig, noch nagaan kunnen worden, noch in aanmerking komen.

§ 534. De Boussole of Magneetnaald, kan, daar zij bestendig dezelfde streek wijst, met veel voordeel aan de Meettafel of het Planchet worden aangebragt, en wel op tweederlei wijze. 1°. Door de Boussole, gelijk *Fig. 203*, aanwijst, onmiddellijk aan de ééne of andere zijde van de Meettafel, met dezelve te vereenigen, en, in dit geval, kan het volstaan, dat, op de roos van het kompas, slechts de vier hoofdstreken van den gezigteinder zijn aangewezen. Door deze inrigting, zal men ééne zijde van de Meettafel, op elke standplaats, die men verkiest, in den magnetischen middags-cirkel kunnen plaatsen; door dezelve om hare verticale as, zoo lang te draaijen, tot dat de naald volmaakt met de lijn van het Noorden en Zuiden overeenstemme, als wanneer men met de Meettafel, op dezelfde wijze, als met de Boussole, zal kunnen te werk gaan. 2°. Door boven op het vizier-liniaal in een doosje, met een glazen dekfel, eene magneetnaald te plaat-

plaatsen, welke, wanneer het vizier-liniaal in de rigting van den magnetischen middags-cirkel geplaatst is, zich zelve geheel vrij in de rigting van de lijn, die midden door het liniaal gaat, plaatsen zal. Door deze tweede inrigting, zal men, op elke naar wegevalen genomen standplaats, de Meettafel in den magnetischen middags-cirkel kunnen brengen. *Na op de eerste standplaats het vizier-liniaal, met behulp der magneetnaald, in de rigting van den magnetischen middags-cirkel geplaatst te hebben, tekke men, langs dit liniaal, eene lijn, die de rigtlijn van het magnetische Noorden en Zuiden zal afbeelden, en, voor elke nieuwe standplaats, zal moeten dienen, om de Meettafel naauwkeurig in diezelfde rigting te brengen.* Op eene andere standplaats komende, *legge men het vizier-liniaal langs deze eerst geteekende lijn, en draaije de Meettafel op hare verticale as, zoo lang heen en weder, tot dat de magneetnaald in de rigting van hetzelfde blijft staan; als wanneer de Meettafel in dezelfde rigting, als in de eerste standplaats, gebragt zal zijn.*

§ 535. Uit dit alles zal men een duidelijk denkbeeld verkrijgen, hoe, zoo wel de Meettafel, als de Boussole, tot het meten van hoeken, dat is, tot het bepalen van de rigtingen der lijnen, volgens welke, uit elk gekozen standpunt, de afgelegene voorwerpen gezien worden; of teekenkundig, of in graden uitgedrukt, kan gebruikt worden. Maar hoedanige moeten nu de algemeene vereischten dezer werktuigen zijn, welke zoo zeer met eikander overeenstemmen, als zij tot hetzelfde doel, het meten van hoeken, zijn ingerigt? De bedoeling dezer werktuigen leert ons het best derzelver vereischten kennen.

1°. Moeten zij gemakkelijk te verplaatsen en te behandelen zijn, en moet men, met zekerheid, op dezelve kunnen vertrouwen. Zijn deze werktuigen te zwaar en te lomp, dan wordt derzelver verplaatsing moeilijk, de behandeling lastig, derzelver stevigheid (zulk een voornaam vereischte van dezelve makende,) verliest in eene veel grootere reden, dan die van hun-

hunne uitbreidheid; te groot zijnde, worden zij bovendien veel sterker door de beweging der lucht aangedaan.

2°. *Moet het bovenvlak van de Meettafel en de roos der Boussole met den meesten spoed en de grootste volkomenheid, in het waterpasvlak kunnen gebragt worden.* Het geheele doel der opmeting, is immers, om de projectien der punten, welke boven of beneden de waterpasvlakte gelegen zijn, op eene gelijkvormige wijze over te brengen; men moet dus noodzakelijk, in het bepalen der rigtingen, zoo veel te grooter mislagen begaan, naarmate het vlak der werktuigen van het waterpasvlak eene grootere afwijking heeft.

3°. *Moet men de projectien der hooger en lager dan het waterpasvlak liggende punten op hare behoorlijke plaats kunnen brengen.* Daartoe wordt, behalve de zoo even gemelden waterpasvlakken stand van het vlak der werktuigen, vereischt, dat, in het vizier-liniaal der Meettafel of Boussole, het oogpunt met den vizierdraad en den kant van het liniaal, in hetzelfde verticale vlak liggen; of, bijaldien men zich bij deze werktuigen van eenen kijker bedient, moet deze kijker behoorlijk gecentreerd zijn, en deszelfs as bij de omdraaijing bestendig in het verticale vlak blijven. Aan deze vereischten iets ontbrekende, wordt het verticale vlak, door het vizier of den kijker valscheijk voorgesteld, en de projectien der punten, buiten het waterpasvlak liggende, kan niet meer naauwkeurig bepaald worden.

4°. De aandachtige Lezer zal, uit de voorgaande §§ gezien hebben: dat, ten einde de Meettafel en de Boussole, met zekerheid en gemak, te kunnen gebruiken, beide deze werktuigen beweegbaar moeten zijn, om eene lijn, welke naauwkeuriglijk loodregt door het midden van het vlak dezer werktuigen gaat; dat ook, gedurende deze beweging, het werktuig waterpas moet blijven, waaraan natuurlijk zal voldaan worden, wanneer men gezegde as volkomen verticaal plaatsen en in deze stelling, gedurende de omdraaijing des werktuigs, houden kan; dat men verder, het werktuig in eenige stelling gebragt hebbende, hetzelfde in deze stelling onwrikbaar moet kunnen pal zetten, om de rig-

ting.

tingen der overige punten (terwijl het werktuig onbewegelijk vast staat) te kunnen opnemen; waarbij insgelijks, als eene voorname zaak, die zeer veel tot den spoed en de naauwkeurige uitvoering moet bijdragen, het werktuig zoodanig moet zijn ingerigt, dat men, na het reeds ten naastenbij gerigt te hebben, aan hetzelfde eene zachte en gemakkelijke beweging, om deszelfs as kan geven, ten einde het met naauwkeurigheid in eene vereischte stelling te plaatsen. Zonder deze hoedanigheden, werkt men met moeite, en loopt men gevaar, om, met de meeste aandacht zelfs, mislagen te begaan, die al zeer dikwijls te laat ontdekt worden.

§ 536. Deze opgenoemde vereischten heeft men in de onderscheidene inrigtingen, welke tot hiertoe aan de Meettafel en de Boussole gegeven zijn, op eene meer of min volkomene wijze, trachten te vervullen; meestal is men in twee uitersten vervallen: of, men heeft, uit een beginsel van te groote spaarzaamheid, even als of het een wezenlijk verlies ware, voor een goed werktuig meer te besteden, alles wat gemak en naauwkeurigheid konde aanbrengen, veronachtzaamt; of, aan den anderen kant, heeft men, met inzicht, om eene meerdere volkomenheid te bereiken, deze werktuigen te zwaar gemaakt, en alzoo door de moeilijkheid van dezelve te behandelen, datgene verloren, wat men had meenen te winnen; zoodat men, terwijl andere werktuigen, in samenstelling, in gemak van behandelen en naauwkeurigheid, verbeterd zijn, men niet zeggen kan, dat men, in het algemeen genomen, in de laatste jaren veel ter verbetering van de Meettafel en Boussole heeft toegebragt.

§ 537. De vervulling van alle deze opgetelde vereischten, moet in den voet of het statief dezer werktuigen gezocht worden. De voet bestaat, hoe hij verder ingerigt moge zijn, uit twee stukken: 1°. uit eenen driehoek, welks pooten van anderen meestal van ijzeren schoenen voorzien zijn, om denzelfden in den grond vast te planten; 2°. uit eenen toestel, welke boven op dien voet door eene of andere schroef wordt vastgemaakt, en met welke de Meettafel of de Boussole ver-

verder verbonden is. Op de inrigting van dit tweede stuk, komt alles aan. In *Fig. 204*, wordt eene inrigting van hetzelfde, vervaardigd naar het denkbeeld van den *Wel Ed. Hoog Gefr. Heer, Generaal VOET, Kommandant der School en Directeur der Studien*, voorgesteld: hetzelfde bestaat uit drie voorname stukken, welke in elkander vatten. 1°. Uit een stuk, hetwelke door drie schroeven, onmiddellijk met de Meettafel zelfe verbonden is, en van onderen in eenen eenigzins geknotten kegel eindigt. 2°. Uit eenen hollen geknotten kegel, in welken de eerste past, eindigende dit stuk in eenen bol, die in het derde of laatste stuk in eene holte beweegbaar is. 3°. Uit het onderste stuk, dat van onderen, bij wijze van eenen geknotten kegel, is uitgedraaid, met welke holligheid, dit stuk eindelijk op den driehoek geplaatst, en door middel van eene schroef wordt vastgeklemd. Beschouwen wij elk dezer stukken in het bijzonder.

In *Fig. 204*, verbeeldt *ABCD* het eerste of bovenste stuk, uit een stuk gegoten koper vervaardigd, en verder op de draaibank bewerkt. Dit stuk is van binnen, in de gedaante van eenen afgeknotten kegel, door *EFHG* afgebeeldt, hol uitgedraaid; het bovenste gedeelte *AB* is eene ronde plaat, welke, door drie schroeven, waarvan er twee bij *I* en *K* zichtbaar zijn, met de eigenlijke Meettafel vereenigd is. De Meettafel bestaat namelijk uit een vierkant bord van één-en-één half, tot twee voeten lengte en breedte, op welke een papier gespannen wordt, om daar het op te meten terrein af te teekenen.

Het tweede stuk, dat in het eerste sluit, wordt afgebeeldt door *EFHKMLIGE*. Het bovenste gedeelte *EFHG* is een afgeknotten kegel, sluitende in den hollen afgeknotten kegel, van het eerste stuk. Veronderstellen wij, dat dit tweede stuk, volgens de lijn *XT*, onwrikbaar vast en verticaal geplaatst zij; dan zal het bovenste stuk, vereenigd met de Meettafel, om de verticale lijn *XT* kunnen omdraaijen, en, de Meettafel te naastenbij in eenige stelling gebragt hebbende, dan zal met de klem-schroef *AD*, die in het tweede stuk vat, het bovenstuk vast

klemt

klemmen. Het tweede gedeelte *GHKI* is rond en cilindervormig; het eindigt in eenen ronden bol *KMLI*, welke in het derde stuk gevat wordt, op de wijze, welke zoo aanstonds nader zal verklaard worden.

Het derde of onderste stuk is uit drie bijzondere deelen *NOPQ*, *RSTW* en *abUV* zamengesteld, van welke het eerste van onderen en het tweede van boven, in de gedaante van eenen bol, met eenige speelruimte, zijn uitgedraaid; deze twee stukken worden door vier schroeven, waarvan er twee bij *p* en *q* zichtbaar zijn, aan elkander vastgeschroefd; zij bevatten de bol *IKML* van het middelstuk, welke in deze holligheid, als in eene kom draait. Door deze inrigting kan het geheele zamenstel der twee bovenste stukken *ABCD*, *GHKI* en *MLIK*, volgens eene zekere speelruimte, om het middelpunt van den bol *IKML* omdraaijen, door welke inrigting het geheele bovenstel (Meettafel met het eerste en tweede stuk, te zamen vereenigd,) in eene horizontale stelling gebragt wordt, en, in deze stelling gebragt zijnde, door de twee klem-schroeven *BB* en *CC* wordt vastgeklemd.

Het tweede gedeelte van het onderstuk wordt, in *Fig. 205*, afzonderlijk voorgesteld. Het stuk *RSTW* eindigt van onder bij *ab* in eenen cilinder, vattende in een rond plaatje *cd*, hetwelk met het stuk *efgh*, door de schroef *gh*, die er mede vereenigd is, aan het stuk *RSTW* wordt vastgeschroefd. Dit alzoo vereenigde stuk heeft bij *ab* eenen hals, welke in het derde gedeelte *abUV* van het onderstuk, door eenen kraag zoodanig wordt gehouden, dat dit tweede gedeelte van het onderstuk op het derde gedeelte *abUV* om de as *XT* kan omdraaijen.

Het derde gedeelte *abUV* van het onderstuk is, van binnen, bij *lmno*, in de gedaante van eenen afgeknotten kegel, uitgedraaid; door welken dit stuk, en dus de geheele toetel op den driehoek geplaatst, en, door middel van de klem-schroef *DD*, welke van binnen tegen eene veer drukt, op denzelfven wordt vastgeklemd.

Q

Hea

Het tweede gedeelte van het onderstuk bevat bij *cd* eenen schroefdraad, welke in de rondte is ingewerkt, vattende in eene schroef *d*, welke alleen in derzelver doorsnijding te zien is, en in beweging gebragt wordt, door den sleutel *ef*. Een stuk *ghik* klemt deze schroef in gezegden schroefdraad, zijnde dit stuk *ghik* aan het onderste gedeelte, door schroeven *i, k*, vereenigd. Wanneer men deze schroef omdraait, dan verkrijgt het stuk *RSWT* (zie Fig. 204) met alles, wat met hetzelfde verbonden is, eene zachte en langzame beweging om de meergemelde verticale *as xy*.

§ 538. De Meettafel, de Boussole, of eenig ander werktuig, door dezen toestel, op zijnen driehoek geplaatst zijnde, (want dezen toestel kan men voor alle andere werktuigen doen dienen,) wordt de Meettafel, op de volgende wijze, in eene begeerde stelling gebragt, of op zeker punt gerigt.

1°. Stel den driehoek, door dezelve pooten van elkander te verwijderen, of digter bij één te brengen, zoodanig vast op den grond, dat het onderstuk *RSTUVW* (zie Fig. 204) op het oog te oordeelen, zoo na mogelijk verticaal, dat is, regt op en neer sta, en zet de klemmschroef *DD* aan, om zeker te zijn, dat er geene beweging om de *as* van den driehoek kan plaats hebben.

2°. Maak de klemmschroeven *BB* en *CC* eenigzins los, breng dan de Meettafel (dezelve met beide handen houdende, en met het oog in verschillende rigtingen over derzelver bovenvlak vizeerende,) zoo na mogelijk in eene horizontale stelling; zet, deze stelling verkregen hebbende, de klemmschroeven *BB* en *CC* aan. Het middelstuk zal dan met het onderstuk en den driehoek onwrikbaar verbonden zijn.

3°. Maak de schroef *AA* los, en draai de Meettafel op hare verticale *as XT*, tot zoo lang dezelve nagenoeg hare begeerde stelling verkregen hebbe, en zet daarna de klemmschroef *AA* aan, als wanneer alles pal en onbewegelijk zal staan.

4°. Om eindelijk de Meettafel in haren juisten stand te brengen, zoo draaije men den sleutel van de schroef *ef* een weinig heen en weder, tot dat de Meettafel volmaaktelijk in de begeerde stelling gebragt zal zijn.

§ 539.

§ 539. Het eerste gedeelte van den voorgescrevenen regel is volstrekt noodzakelijk; want, bijaldien het onderste gedeelte van den toestel niet nagenoeg verticaal staat, dan zal de Meettafel, door de zachte beweging, welke haar in den juisten stand moet brengen, noodzakelijk van het horizontale vlak moeten afwijken.

§ 540. Het zou overbodig zijn, om verder, in deze korte schets, andere inrigtingen, van tijd tot tijd, aan den voet der Meettafel gegeven, te verklaren; daar het genoeg is, de gronden te hebben opgegeven, welke ons, bij alle die verschillende wijzen van zamenstellen, noodzakelijk moeten besturen; de overige bijzonderheden moeten door het gebruik en de dagelijkse oefening verder geleerd worden.

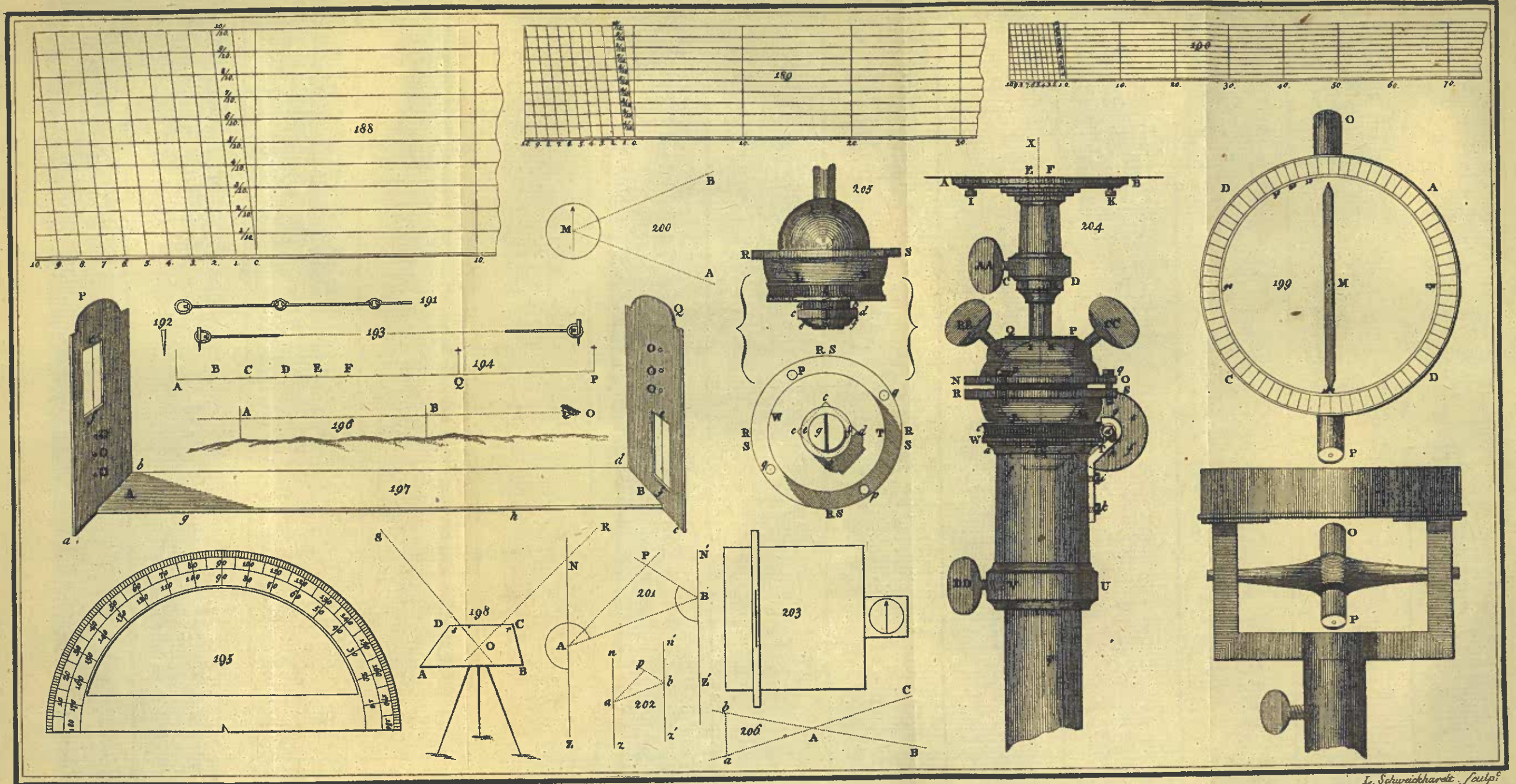
§ 541. Wij kunnen van dit Hoofdstuk niet afstappen, zonder nog met een enkel woord gewag te maken van het meten der hoeken op het veld, zonder eenig ander werktuig, dan piketten of baken, en van het begrooten der hoeken op het oog. Laten in de verte twee voorwerpen, Fig. 206 gelegen zijn, en stel, dat men den hoek, onder welken deze voorwerpen uit eenig punt *A* gezien worden, wenscht te leeren kennen? Stel dan in het punt *A* eene baak; ga in de rigting van *BA* achteruit, en stel in deze rooijing eene baak *b*; ga verder in de rooijing van *AC* insgelijks achteruit, en stel in dezelve eene baak *c*; meet, op de pas, de lijnen *bA*, *cA* en *bc*; teeken, volgens eenige schaal, den driehoek *bAc*, en meet met eenen transporteur den hoek *bAc*, welke dan de begeerde hoek *BAC* zal zijn. Indien men *bA* en *cA*, beide gelijk neemt aan honderd pasfen; dan zal de afstand *bc*, de koorde van den hoek *BAC* zijn, en men zal dan, op eene schaal der koorden, hoedanig eene men voor zich kan vervaardigen, dadelijk den hoek *BAC* vinden; dan, men maakt van deze handwijze geen gebruik, dan in noodzakelijkheid, en wanneer men den hoek slechts ten naastenbij behoeft te kennen.

§ 542. Noodzakelijker is het, zich in het begrooten der hoeken te oefenen. Tot dat einde, moet men met één of

344 ALLEREERSTE GRONDEN DER

ander werktuig vele hoeken, onder welke afgelegene voorwerpen gezien worden, meten, en deze gemetene hoeken met de schijnbare afftanden, naauwkeurig en dikwijls vergelijken, waardoor men eene hebbelijkheid zal verkrijgen, om ten naastenbij eenen hoek te begrooten: vooral is het noodig, zich in het bepalen van rechte hoeken en loodlijnen op het oog te oefenen; omtrent al hetwelk geene bijzondere voorschriften kunnen gegeven worden. Eigen oefening en gedurige onderzinding alleen kunnen ons, in dit alles, den hoogst mogelijken graad van bekwaamheid doen verkrijgen.





VI. HOOFDSTUK.

Aanwijzing van het Gebruik van de Meettafel (Planchet) in het teekenkunstig bepalen van de onderlinge afstanden en ligging der voorwerpen, die op eenig terrein voorkomen, en over het verder situeren van hetzelfde.

§ 543. I. VRAAGSTUK. Fig. 207. *Veronderstellende, dat eene Meettafel met geene Boussole of Magneetnaald voorzien is, de hocken, onder welke, uit eenig gegeven standpunt A , de voorwerpen P , Q , R , S , enz. van een terrein gezien worden, op dezelve af te teekenen?*

OPLOSSING. 1°. Stel de Meettafel, met deszelfs middelpunt, in het geëvene standpunt A , zoo volkomen mogelijk in het horizontale of waterpasse vlak, en zet dezelve in deze stelling, door middel van de klemmschroeven, onbewegelijk pal.

2°. Laat A het middelpunt van de Meettafel zijn, liggende in de doorsnijding van hare hoekpuntslijnen; leg dan den kant van het vizierliniaal op het punt A , en wend hetzelfde om dit punt A , tot zoo lang het voorwerp P , door den vizierdraad, volmaaktelijk bedekt of wel in het midden doorgesneden wordt, (vergelijk § 527) en trek dan met potlood of inks van het punt A naar het voorwerp P de lijn Ap .

3°. Laat de Meettafel in deze eerste stelling onveranderlijk staan, en rigt verder het vizierliniaal op de andere voorwerpen Q , R , S , T , enz., zorgende dat deszelfs kant, altijd door het punt A ga, en trek op dezelfde wijze de lijnen Aq , Ar , As , At ; dan zullen de afgeteekende hoeken $p.Aq$, $q.Ar$, $r.As$, $s.At$ de hoeken zijn, onder welke de voorwerpen P , Q , R , S , T , uit het punt A , gezien worden.

§ 544. I. AANMERKING. Bij deze bewerking, moet men zorg dragen, van niet tegen de pooten van den driehoek te stooten, noch op de Meettafel te leunen of ze aan te raken: men moet, het vizierliniaal verplaatsende, hetzelfde niet over de Tafel schuiven; maar telkens met beide handen opligten, en dit zoolang herhalen, tot men hetzelfde door het punt *A*, in de begeerde rigting, gebragt hebbe. Deze voorzorg is daarom noodig; omdat men tegen de Meettafel gestooten hebbende, of op dezelve leunende, niet zeker meer is, dat zij volmaakt in dezelfde stelling is blijven staan, en, die omgange onzeker zijnde, is men ook niet zeker, dat de hoeken naauwkeurig zijn overgebragt; wijl, bij de minste standsverandering van de Meettafel, de hoeken grooter of kleiner dan zij waarlijk zijn, zouden worden afgeteekend.

§ 545. II. AANMERKING. De lijnen, welke men langs den kant van het vizierliniaal afteekent, om de rigtingen der voorwerpen te bepalen, moeten zuiver regt gemaakt, en zoo dun mogelijk getrokken worden; indien zij slechts even zichtbaar zijn, is het voldoende; ja zelfs, strikt genomen, nog niet naauwkeurig genoeg; omdat eene lijn die zichtbaar is, nog altijd eene zekere breedte heeft, en daarom geene meerkunstige lijn voorstelt. Vooral moeten alle lijnen even fijn, en op eene gelijke dikte geteekend worden, daar men, zulks niet in acht nemende, de punten van doorsnijding, waarop het voornamelijk aankomt, niet naauwkeurig genoeg bepalen kan.

§ 546. III. AANMERKING. De hoeken *pAq*, *qAr*, enz. verkrijgt men, op deze wijze, in derzelver natuurlijke grootte, zonder de waarde dezer hoeken in graden en onderdeelen van dezelve te kennen: men kan, des verkiezende, deze hoeken met eenen transporteur meten. Op sommige Engelsche Meettafels, die ik gezien heb, is de rand *xyz* in graden verdeeld, door welke inrigting, de hoeken, die de voorwerpen met elkander maken, dadelijk kunnen gelezen worden.

§ 547. IV. AANMERKING. Door de hoeken, die de voorwerpen met elkander maken, verstaat men de hoeken, onder welke de verticale vlakken, die door het standpunt en de

middelpunten der voorwerpen gaan, elkander doorsnijden; die verticale vlakken snijden elkander in de loodlijn van het standpunt, en die verticale vlakken worden door de vizierdraden van het vizierliniaal voorgesteld; indien dus het bovenvlak van de Meettafel niet volmaakt horizontaal staat, zullen ook die vizierdraden niet verticaal geplaatst zijn, en men zal de standhoeken der verticale vlakken niet naauwkeurig kunnen afteekenen. De lijnen *Ap*, *Aq*, *Ar*, *As*, *At*, zijn de lijnen, volgens welke gezegde vlakken het waterpasvlak doorsnijden.

§ 548. V. AANMERKING. De voorwerpen, die men uit het standpunt *A* beschouwt, zijn geene meetkunstige punten; het zijn voorwerpen, die eene zekere uitgebreidheid hebben; als torens, gebouwen, huizen, boomen, en andere voorwerpen meer, die men, als eenen regelmatigigen omtrek hebbende, beschouwt: de verticale lijn, welke men zich, door het midden dezer voorwerpen, denkt, wordt doorgaans gehouden, als gelegen zijnde in het midden van de verticale projectie van dezelve, op het vlak, dat loodregt door de gezigtlijn gaat; men brengt daarom de vizierdraden op het midden der voorwerpen, of op de spitsen der torens; men houdt dan deze draden voor het verticale vlak, hetwelk door het midden der voorwerpen gaat, en de lijnen *Ap*, *Aq*, enz. zijn dan de projectien der gezigtlijnen, welke, uit het oog des Waarnemers, tot het midden dezer voorwerpen gaan, op het vlak van den gezigteinder.

§ 549. VI. AANMERKING. Men zal elk ander punt, op het vlak van de Meettafel, behalve het punt *A*, voor het hoekpunt kunnen aannemen, uit hetwelk men de rigtingen der voorwerpen bepaalt; maar dan verkrijgt men, strikt genomen, niet meer de eigenlijke hoeken, onder welke die voorwerpen, uit het standpunt van het terrein, dat eigenlijk het middelpunt van de Meettafel is, gezien worden. Laat, om dit onderscheid te beoordeelen, in *Fig. 208*, *A* het middelpunt van de Meettafel zijn, *P* en *Q* twee afgelegene voorwerpen, en laat het punt *B* voor het middelpunt van het vizierliniaal zijn gekozen; en de hoek *PBQ* zijn afgeteekend; dan zal men

den hoek verkregen hebben, onder welken die voorwerpen uit B gezien worden, in plaats van den hoek, onder welken zij zich uit het standpunt A vertoonen. Stellen wij, ten einde na te gaan, hoe groot dit verschil zij, den waargenomen hoek $PBQ = O$; de afstanden $BQ = D$ en $BP = G$; den hoek $PBA = \gamma$ en $AB = r$. Stellen wij verder den hoek $PAQ = O + x$, zijnde de verbetering, welke bij den waargenomen hoek O moet opgeteld of afgetrokken worden, ten einde den hoek PAQ te verkrijgen; dan is, in den driehoek APR , vooreerst de hoek $PAQ = \text{hoek } PRQ - \text{hoek } P$; of $O + x = \text{hoek } PRQ - P$; derhalve $x = -O + PRQ - P$; maar, in den driehoek BRQ , is $PRQ = O + Q$; derhalve

$$x = -O + O + Q - P = Q - P$$

De verbetering is dan gelijk aan den zeer kleinen hoek Q , verminderd met den zeer kleinen hoek P .

In den driehoek ABQ is $AQ : AB = \text{Sin. } ABQ : \text{Sin. } Q$, of, omdat BQ van AQ niet merkelyk onderscheiden is, $BQ : AB = \text{Sin. } ABQ : \text{Sin. } Q$; of $D : r = \text{Sin. } (O + \gamma) : \text{Sin. } Q$; derhalve zal $\text{Sin. } Q = \frac{r \times \text{Sin. } (O + \gamma)}{D}$ zijn.

In den driehoek ABP , is wederom $AP : AB = \text{Sin. } ABP : \text{Sin. } P$; dat is, (omdat AP en BP niet merkelyk verschillen,) $BP : AP = \text{Sin. } ABP : \text{Sin. } P$; of $G : r = \text{Sin. } \gamma : \text{Sin. } P$; derhalve zal $\text{Sin. } P = \frac{r \times \text{Sin. } \gamma}{G}$ zijn.

Aangezien nu de hoeken P en Q zeer klein zijn, kan men, in plaats van de Sinussen dezer hoeken, de hoeken zelve nemen; en deze zal men in secunden van graden verkrijgen, indien men de Sinussen dezer hoeken, door de Sinus van ééne secunde vermenigvuldigt; dus is $Q = \frac{\text{Sin. } Q}{\text{Sin. } 1''}$, $P = \frac{\text{Sin. } P}{\text{Sin. } 1''}$; bijgevolg wordt de formule, waardoor de verbetering kan berekend worden:

$$x = Q - P = \frac{r \times \text{Sin. } (O + \gamma)}{D \times \text{Sin. } 1''} - \frac{r \times \text{Sin. } \gamma}{G \times \text{Sin. } 1''}$$

In deze formule moeten r , D , G , O en γ , gegeven zijn, om de verbetering te vinden; moetende, om van deze

formule, in alle gevallen, gebruik te kunnen maken, de hoeken O en γ , van de regter- naar de linkerband, den geheelen cirkel rond geteld worden, de eerste van de lijn BQ , en de tweede van de lijn BP .

Het blijkt uit deze formule, dat, in het algemeen, de verbetering x zoo veel te kleiner zal zijn, naarmate de uitmiddelpuntigheid r kleiner, en de afstanden G en D grooter zijn; dat de verbetering, zoo veel te grooter, en alles gelijk staande op zijn grootste zal zijn, wanneer

$$G \times \text{Cos. } (O + \gamma) = D \times \text{Cos. } \gamma$$

is. In de Meettafels van de grootste afmetingen, kan r op zijn grootste gelijk 1,5 voeten zijn: stel nu, $D = 300$ en $G = 450$ voeten, dan is $\frac{r}{D} = \frac{1}{200}$ en $\frac{r}{G} = \frac{1}{300}$; derhalve

$\frac{r}{D \text{ Sin. } 1''} = 1031''$, en $\frac{r}{G \text{ Sin. } 1''} = 687''$. Laat nu, $\text{Sin. } (O + \gamma) = +1$ en $\text{Sin. } \gamma = -1$ zijn, dan zal de aan te brengen verbetering zijn $1031'' + 687'' = 1718'' = 28'38''$: doch in de meeste gevallen, zal deze verbetering zeer veel maal minder zijn.

Mèn is, zoo als straks blijken zal, in de verplichting, om, in de onderscheidene standpunten, het vizierliniaal buiten het middelpunt te leggen. Men begaat alzoo, dus te werk gaande, altijd eenen kleinen mislag; doch deze kan gedeeltelyk worden voorgekomen; indien men de standpunten, in welke men de Meettafel plaatst, niet te dicht bij elkander neemt; dit doende kan men veilig verwachten, dat de kleine berleidingen tot het middelpunt, elkander, op het geheel, zoo goed als zullen vernietigen. Geheel kan men het voorkomen, wanneer men in elk standpunt, het middelpunt van de Meettafel, als middelpunt van het vizierliniaal aanneemt, en voorts de rigtlijnen evenwijdiglyk tot het eigenlijke punt der teekening overbrengt. Stellen wij, dat uit hoofde van de samenstelling der geheele opmeting, (Fig. 207) het eigenlijke standpunt A van het terrein op de teekening voorgesteld wordt door het punt B ; dan zal men, na de rigtlijnen Ap , Aq , Ar , As en At bepaald te heb-

hebben, door het punt B lijnen, evenwijdig aan Ap , Aq , Ar , As en At trekken, en dan zal, in elk standpunt, de uitwerking der uitmiddelpuntigheid worden vernietigd; doch ik twijfel zeer, of deze voorzorg wel eene grootere naauwkeurigheid in het geheel zou brengen, en ik zou dus niet raden, in andere gevallen van deze naauwkeurige handelwijze gebruik te maken, dan, wanneer de voorwerpen, welke op de Meettafel worden overgebracht, zeer nabij liggen, of wanneer men verplicht is, de standpunten zeer dicht bij elkander te nemen; een en ander zal straks nog eene meerdere duidelijkheid verkrijgen.

§ 550. II. VRAAGSTUK. *Fig. 207. Wanneer de Meettafel met eene magneetnaald voorzien is, het magnetisch azimuth, der afgelegene voorwerpen, benevens de hoeken, onder welke zij, uit een gegeven standpunt, gezien worden, op dezelve over te brengen of af te teekenen?*

OPLOSSING. Men gaat op twee onderscheidene wijzen te werk, naarmate de magneetnaald met de Meettafel of met het vizierliniaal vereenigd is. Zie boven, § 534.

1°. Wanneer de magneetnaalde, gelijk in *Fig. 209*, met de Meettafel verbonden is. Stel dan de Meettafel eerst horizontaal en draai dezelve op hare verticale as, tot dat de magneetnaald in de lijn van het Noorden en Zuiden blijve staan; breng als dan, volgens het eerste Vraagstuk, de rigtingen der afgelegene voorwerpen AP , AQ , AR , AS , AT , uit het middelpunt, over; en trek, door het punt A , de lijn NZ evenwijdig aan den magnetischen middagscirkel; dan zal het magnetisch azimuth der punten P , Q , R , S , T , ten opzichte van het standpunt A , bepaald zijn, en de teekening zal tevens de hoeken voorstellen, onder welke gezegde voorwerpen, uit het standpunt A , gezien worden.

2°. Is de magneetnaald niet met de Meettafel, maar wel met het vizierliniaal vereenigd, (hetgeen meestal het geval is,) dan kan men, op tweederlei wijze, te werk gaan. 1°. Men verkieze, zie *Fig. 209*, op de Meettafel eene lijn nz , om den magnetischen middagscirkel af te beelden, en legge

het

het vizierliniaal langs deze lijn; draaije de Meettafel om hare verticale as, tot dat de magneetnaald in de rigting van het liniaal blijft staan; men zette dan de Meettafel in deze stelling, pal, en bringe, uit het punt A , naar het voorschrift van het I Vraagstuk, de lijnen Ap , Aq , enz., in welke rigtingen de voorwerpen gezien worden, over. 2°. Of men stelle de Meettafel, in eene willekeurige stelling, pal; legge op dezelve het vizierliniaal in de rigting van den magnetischen middagscirkel, en trekke langs dezelve, met potlood of inkt, eene rechte lijn, welke dan de magnetische middaglijn zal voorstellen; wordende, voor het overige, de hoeken, onder welke de voorwerpen gezien worden, op dezelfde wijze, als boven, overgebracht. Het spreekt van zelf, dat, bij elke manier van bewerken, de Meettafel, zoo volmaakt mogelijk, waterpas moet gesteld zijn.

§ 551. III. VRAAGSTUK. *Fig. 210. De onderlinge ligging van eenige ontoegankelijke voorwerpen, P , Q , R , enz., met betrekking tot twee begankelijke standpunten A en B , uit welke die voorwerpen kunnen gezien worden, met behulp van de Meettafel, zonder magneetnaald, te bepalen?*

OPLOSSING. 1°. Begin met, in één der begankelijke standpunten A , de Meettafel te plaatsen, en plaats in het tweede standpunt B eene regt opstaande baak.

2°. Verkiez, na de Meettafel waterpas en pal gezet te hebben, het punt a , om het standpunt A af te beelden. Leg den kant van het vizierliniaal door het punt a , en rigt hetzelfde op de vooruitstaande baak B , en trek daarna de onbepaalde lijn ab .

3°. Bepaal, (de Meettafel op hare plaats latende,) volgens het eerste Werkstuk, de richtlijnen aP , aQ , aR , volgens welke de voorwerpen, P , Q en R , gezien worden.

4°. Dit gedaan hebbende, zoo laat, het zij door eene ketting of op den pas, de afstand van de standpunten A en B , dat is, de lijn AB gemeten worden; zij die afstand gelijk aan 120 Rijl. Roeden, bij voorbeeld,

5°. Breng

5°. Breng de Meettafel in het standpunt *B* over, en plaats in het standpunt *A*, alwaar zij gestaan heeft, eene baak, en neem *ab* gelijk aan 120 deelen op de schaal, die men gekozen heeft, om de afstanden voor te stellen.

6°. Na de Meettafel waterpas gesteld te hebben, zoo leg het vizierliniaal met deszelfs kant, langs de lijn *ab*, en draai dezelve (het liniaal in rust latende,) zoo lang om hare verticale *as*, tot dat de baak, die men in het eerste standpunt *A* geplaatst heeft, door den vizierdraad bedekt wordt, en, die stelling verkregen hebbende, zoo stel de Meettafel, in deze stelling, onbewegelijk pal.

7°. Neem dan verder het vizierliniaal op, en het punt *B* tot standpunt nemende, breng het dan achterevolgens in de rigtingen der lijnen *bP*, *bQ*, *bR*, altijd door het punt *b*, en trek de lijnen *bp*, *bq* en *br*, welke de lijnen *ap*, *aq*, *ar* in de punten *p*, *q* zullen doorsnijden. De figuur *abrpq* zal dan, wegens de onderlinge gelijkhoekigheid der driehoeken *abp*, *abq*, *abr*, met *ABP*, *ABQ*, *ABR*, aan *ABRPQ* gelijkvormig zijn. Indien men nu, door middel van de schaal, op welke de 120 deelen voor de standlijn *ab* genomen zijn, met eenen passer afmeet, hoe veel deelen van dezelve in de lijnen *ap*, *aq*, *ar*, *bp*, *bq*, *br*, *pq*, *pr*, *qr* begrepen zijn; dan zal hierdoor bekend worden, hoe veel Rijnlandsche Roeden deze punten of voorwerpen op het veld van elkander verwijderd zijn.

§ 552. I AANMERKING. Wij hebben in de oplossing van dit Vraagstuk stilzwijgend ondersteld, dat noch de Meettafel noch het vizierliniaal van eene magneetnaald voorzien is; waaruit dan blijkt: dat men, zonder dezelve, in het bepalen van de onderlinge afstanden der voorwerpen, zeer wel kan te regt komen. Indien er echter eene magneetnaald aan het vizierliniaal gebragt is, dan zal men tevens, de ligging der opgenomene punten, op de wijze, als in het tweede Vraagstuk is voorgeschreven, met betrekking tot de magnetische middaglijn kunnen bepalen; terwijl men bovendien in de magneetnaald een proefmiddel zal vinden, om te beoordeelen, of de Meettafel in het tweede standpunt, op dezelfde wijze, als in het eerste,

geplaatst is; want, veronderstel, dat men, in het eerste standpunt, de magnetische middaglijn op de Meettafel getrokken hebbe; dan zal, (na dat men, in het tweede standpunt, het vizierliniaal langs de lijn *ab* gelegd, en de Meettafel in deze stelling zal bevestigd hebben,) het vizierliniaal, langs de eerst getrokken magnetische middaglijn gelegd hebbende, de magneetnaald volmaaktelijk in de rigting dezer lijn moeten blijven stilstaan. Ook zal men, des verkiezende, de Meettafel in hare tweede en volgende stellingen kunnen brengen, door het vizierliniaal langs de magnetische middaglijn te leggen, en de tafel, om hare verticale *as*, zoo lang om te draaijen, tot dat de magneetnaald in de rigting dezer lijn blijft staan.

§ 553. II. AANMERKING. Niets is derhalve eenvoudiger dan het gebruik van de Meettafel, om de onderlinge ligging der punten van eenig gegeven terrein te bepalen; maar niets is ook tevens noodzakelijker dan oplettendheid in het behandelen van dit Werktuig, en het vermenigvuldigen, gedurende de opmeting, van die proeven, die dierzelfer naauwkeurigheid kunnen verzekeren. Verstrooiing van gedachten, geeft aanleiding, dat men tegen de eenvoudigste regels, zonder dat men het bemerkt, zondigt, en niemand met een los hoofd, zal, hoe eenvoudig ook het opmeten zij, met zelfsvertrouwen, op zijnen verrigten arbeid staat kunnen maken.

§ 554. III. AANMERKING. Indien men de mislagen, welke, door de uitmiddelpuntigheid der afgebeelde standpunten *a* en *b*, op de Meettafel genomen, of in het vervolg verkregen, ontstaan kunnen, zou wenschen te vermijden, dan zou men gebruik kunnen maken van de handwijze, welke wij in § 543 hebben voorgeschreven, en, in elk standpunt, het middelpunt der Meettafel, voor het wezenlijke standpunt aannemen, en voorts na het punt *a*, voor de afbeelding van het eerste standpunt gekozen te hebben, door het trekken van evenwijdige lijnen, de figuur *abrpq* verkrijgen, welke, verondersteld, dat deze evenwijdige lijnen, alle met juistheid zijn getrokken, eene figuur zouden voortbrengen, die geheel bevrijd zou zijn van de uitwerking der uitmiddelpuntigheid; doch, deze handelwijze heeft het

nadeel, dat men telkens de menigte van lijnen, die op deze wijze door het middelpunt moeten getrokken worden, (om verwarring voor te komen) met elastieke gom moet uitvegen, waardoor het papier veel lijden moet; ten ware men aan het vizierliniaal eene juiste parallellinaal voegde, door welke de rigtlijnen oogenblikkelijk tot de afgebeelde standpunten zouden kunnen overgebracht worden; doch op zulk eene parallellinaal zou, indien het niet zeer zuiver gemaakt was, weinig kunnen vertrouwd worden, en veelligt zouden de fouten, door de onzuiverheid van dit liniaal, veel grooter worden, dan die, welke uit de werking der uitmiddelpuntigheid ontstaan kunnen. In allen gevalle, is het de verstandigste partij, dat men de afstanden der standpunten zoo groot neme, als de gelegenheid zulks toelaat.

§ 555. IV. VRAAGSTUK. *De voornaamste punten van een gegeven terrein van eenige uitgestrektheid, met behulp van de Meettafel, in derzelver onderlinge ligging, te bepalen?*

OPLOSSING. Men ga, dit terrein eerst, indien daartoe gelegenheid is, herkennen, en make een overslag, welke punten van hetzelfde het geschikste voorkomen, om tot standpunten der waarneming genomen te worden; heeft men daartoe geene gelegenheid, dan moet men zich vergenoegen, met dadelijk de opmeting aan eenigen hoek van hetzelfde te beginnen. Men kieze de standpunten op eenen behoorlijken afstand; niet te dicht bij elkander, om de uitwerking van de uitmiddelpuntigheid van het vizierliniaal, zoo veel mogelijk, te vermijden; en niet te ver, om de baken, die men in deze standpunten moet plaatsen, uit de naastbijgelegene, duidelijk genoeg te kunnen zien.

Tot deze standpunten kan men kiezen, punten, die op de voornaamste hoofdwegen en mindere wegen gelegen zijn; de hoeken, waar deze wegen van rigting veranderen, de plaatsen, waar zij elkander ontmoeten, of doorsnijden; voorts de voornaamste punten van den omtrek, van het voorgestelde terrein, de uit- en inspringende hoeken, welke die omtrek oplevert.

La-

Laten, in Fig. 211. *A, B, C, D, E, F, G, I, K, L*, en *M* de gegeven standpunten zijn; stel dat men, van het ééne tot het andere standpunt, kan gaan, in de rigtingen der gestippelde lijnen *AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IK, KL, LM*, enz.; dat ten minste uit elk punt (*D*) de twee naastgelegene punten (*C* en *E*) kunnen gezien worden; dat verder de punten *a, b, c, d, e, f, g, h*, enz. die met een sterretje geteekend zijn, merkwaardige punten van dit terrein uitmaken, als torens, moiens, gebouwen, huizen en andere voorwerpen meer; dan zal men, in het opmeten van den omtrek en de voornaamste punten van dit terrein, aldus te werk gaan.

1°. Begin met de Meettafel in het eerste punt *A* te plaatsen; breng, naar het voorschrift van het III Vraagstuk, op de tafel de rigting der lijn *AB* over, benevens de rigtingen der lijnen, langs welke de voorwerpen van het terrein, die uit die punten zichtbaar zijn, gezien worden; meet ook op het terrein den afstand der standpunten *A* en *B*, en breng, volgens de schaal, dezen afstand in de teekening over. Men vergeet niet, om, wanneer de Meettafel in het tweede standpunt *B* staat, de rigting der tweede standlijn *BC* op dezelve over te brengen; na dat men alvorens eene baak in het punt *C* heeft doen plaatsen.

2°. Na dat de Meettafel in de standpunten *A* en *B* geweest is, en men de rigtlijnen van alle, uit deze standpunten zichtbare, voorwerpen heeft overgebracht, bringe men de Meettafel (na alvorens in *B* en *D* eene baak geplaatst te hebben,) in het derde standpunt *C* over; men mete tevens den afstand *BC*, en bringe, volgens dezelfde schaal, dien afstand in de teekening op de lijn, die de rigting van *BC* voorstelt; men ligge na de Tafel horizontaal geplaatst te hebben, het vizierliniaal langs de lijn, welke de rigting van den afstand *BC* op de teekening voorstelt, en draaije de Tafel op hare verticale as, zoo lang, dat het vizier in de rigting van de lijn *BC* gelegen is. De tafel pal gezet hebbende, bringe men, uit het punt *C*, alle de rigtlijnen, onder welke de voorwerpen, die uit hetzelfde zichtbaar zijn, gezien worden, en ook bijzonderlijk de rigting van de lijn *CD*.

2°. Die

3°. Diezelfde bewerking moet in alle de overige standpunten *D, E, F, G, H, I, enz.*, worden herhaald; hierbij onder het oog houdende, *dat de afstanden van het naastvoorgaande tot het naastvolgende, of met de ketting of op den pas moeten gemeten worden; dat men, wanneer de Meettafel in een volgend standpunt wordt overgebracht, het vizierliniaal telkens moet gelegd worden op de lijn, welke de rigting van dit standpunt tot het naastvoorgaande aanduidt; en daarna, dit liniaal op deszelfs plaats latende, de Tafel om haar verticale as zoo moet gedraaid worden, dat het vizierliniaal de rigting dezer lijn aanwijst.*

4°. Wanneer men, naar dit voorschrift, het geheele terrein is rond geweest, dan zal men eene Meetkunstige figuur verkregen hebben, welke, indien men met naauwkeurigheid is te werk gegaan, de juiste en gelijkvormige afteekening zal opleveren van de betrekkelijke ligging van alle de punten niet alleen, welke op dit terrein gevonden worden; maar ook van die standpunten, uit welke men derzelver rigtingen zal waargenomen hebben.

§ 556. I. AANMERKING. Uit deze schets zal men een tamelijk goed begrip kunnen verkrijgen; hoe de ruwen omtrek van een terrein, met alle de voorname punten, die zich op hetzelfde bevinden, met eene voldoende naauwkeurigheid, in teekening overgebracht of gesitueerd kunnen worden. De verscheidenheid van de wijze, langs welke, op hetzelfde terrein, dien arbeid kan begonnen en voortgezet worden, is zoo onbepaald groot, dat dienaangaande geene bijzondere keuze kan vallen: indien slechts de standpunten zoo doelmatig genomen zijn, dat men, door geen te kleine afstanden, het aantal der standpunten buiten noodzakelijkheid te veel vermeerdert, is elke manier, om dit werk te beginnen, voor te zetten en te voleinden, even goed als elke andere; zijnde de naauwkeurigheid in de uitvoering de eenige wezenlijke zaak, waarop alles aankomt.

§ 557. II. AANMERKING. De ruwen omtrek van een terrein op deze wijze opmetende, weet men bijna, in elk nieuw stand-

punt, eene nieuwe gelegenheid aan, om de naauwkeurigheid van den reeds verrigten arbeid te beproeven; deze proef bestaat hierin: *dat de rigtlijnen, welke uit onderscheidene standpunten tot het zelfde punt van het terrein loopen, elkander, in de teekening, natuurlijk moeten doorsnijden.* Bij aldien men dan uit de standpunten *A* en *B* de rigtlijnen, welke uit die punten tot de voorwerpen *a, b, c*, gaan, in de teekening gebragt heeft; dan zullen de rigtlijnen, welke uit andere nabijgelegene standpunten tot die zelfde voorwerpen gaan, ook elkander in de teekening volmaakt moeten doorsnijden, en, indien men het geheele terrein heeft afgeloopen, en in de punten *I* en *K*, bij voorbeeld, de rigtlijnen, welke tot diezelfde punten loopen, in de teekening nog die zelfde punten doorsnijden, dan mag men zich van de naauwkeurigheid des geheels genoegzaam verzekerd houden. Men ziet dan, uit dit alles, dat men in elk standpunt veelvuldige gelegenheid heeft, om de naauwkeurigheid van zijnen arbeid te beproeven, en *wanneer men eenige aanmerkelijke afwijking bespeurde, zou het beter zijn, den arbeid te hervatten, dan voort te gaan; dewijl eene afwijking, in het aansluiten der punten, een sprekend bewijs is, dat men, of in het meten der afstanden, of in het stellen van de tafel, of in het rigten van het vizierliniaal, mislagen moet begaan hebben.*

§ 558. III. AANMERKING. Wij hebben in onze oplossing voorgeschreven, *om, van standpunt tot standpunt gaande, de afstanden dezer standpunten met eene ketting, of op den pas, te meten;* doch dit werk, dat in sommige gevallen lastig kan worden, is niet volstrekt noodzakelijk; men zou zelfs in gevallen kunnen komen, dat dit meten van afstanden volstrekt onmogelijk zoude zijn. *Eigenlijk is slechts eene standlijn (AB bij voorbeeld) voldoende, om alle de andere te vinden: maar dan moeten de standpunten op die wijze worden uitgekozen, dat zij, drie aan drie genomen zijnde, twee van dezelfde altijd uit het derde kunnen gezien worden.*

Stellen wij, in *Figuur 211*, dat de driehoeken *ABI, BCI, CDI, HDI, GDE, GEF, CFM, MHG, HML, KLH, HIK*

R

en

AIK zulke aan elkander sluitende driehoeken zijn; dan zal men slechts ééne standlijn AB, met naauwkeurigheid behoeven te meten, om de onderlinge afstanden der overige standpunten te bepalen. Na deze standlijn op de Meettafel te hebben overgebracht, brengt men, uit de punten A en B, naar het I Vraagstuk de rigtingen van het punt I, en der andere zichtbare voorwerpen over; daarna gaat men in het punt I en, na de Meettafel in hetzelfde geplaatst te hebben, rigt men dezelve op de punten A en B, en brengt de rigtingen der punten C, D, H en K over, benevens de rigtingen van zoo vele andere voorwerpen, als uit dit punt kunnen gezien worden; men gaat daarna over in de volgende standpunten, naar aanwijzing van de aaneenschakeling der driehoeken, en brenge alzoo de punten A, B, C, D, enz. G, H, I, K, L en M in de teekening over, benevens alle de voorwerpen welke men uit die verschillende standpunten op het terrein ontdekt heeft. Dan, men gevoelt van zelf: dat deze handelwijze slechts dan kan worden in het werk gesteld, wanneer men de gelegenheid gehad heeft, om het terrein vooraf te herkennen, en op zijn gemak de bekwaamste standpunten uit te kiezen. En dan zou het altijd nog beter zijn, de hoeken der driehoeken met eenen Sextant (*) waar te nemen; de zijden der driehoeken te berekenen, en dezelve vooraf op de Meettafel over te brengen, als wanneer men zeker zou zijn, dat de afstanden der standpunten beter en naauwkeuriger zouden zijn overgebracht, dan, wanneer dezelve op de Meettafel teekeningstijg bepaald worden; dewijl geen werktuig zoo volkomen is, dat niet de uitkomsten der berekeningen kan evenaren. Ja zelfs, wanneer een vrij groot of uitgebreid terrein zou moeten worden opgenomen, dan zou de voorzigtigheid zelfs gebieden, om de gekozene standpunten door dadelijke hoekmeting met den

Sextant

(*) Men kan dit Werktuig leeren kennen uit een stuk, bij den Uitgever dezes, onder den titel van *Beschrijving van de Inrigting, en het gebruik van den Sextant van HADLEY*, onlangs in het licht gegeven.

Sextant en berekening der driehoeken te bepalen (*) De standpunten op deze wijze op de Meettafel overgebracht zijnde, dan zou men voor geen verloop der ware rigtingen behoeven te schramen; terwijl een kleine mislag in het bepalen van de ware plaats van eenig voorwerp ontstaan, op het vervolg van de opmeting geenen verderen invloed zou kunnen hebben.

§ 559. VI. VRAAGSTUK. Fig. 212. Veronderstellende, dat men, door middel van den Sextant, de ligging van een groot aantal uitgekozene standpunten, op eenig terrein, bepaald hebbe, dit terrein, door middel van de Meettafel, verder op te meten en te situeren?

OPLOSSING. Wij onderstellen, dat het terrein te groot zij, om op een enkel planchesstuk (zoo noemen wij de grootte van het stuk papier, dat op de Meettafel geplakt wordt, om op hetzelfde het terrein te situeren,) gebracht te kunnen worden.

Laten er, bij eene voorafgaande herkenning van het terrein, een aantal van acht en twintig standpunten zijn gekozen, welke in de figuur door de Arabische cijfers 1, 2, 3 enz. 27, 28 zijn aangewezen, uitmakende een aantal van zeven en dertig driehoeken, in de figuur door de Romeinsche cijfers I, II, III, enz. XXXVI, XXXVII aangeduid: laten met den Sextant alle de hoeken dezer driehoeken onmiddellijk worden gemeten; hetgeen geschiedt, door, in deze gekozene standpunten, baken te stellen. In het vereenigen dezer standpunten,

R 2

moet

(*) Ik heb door de ondervinding van vele jaren voorgelicht, de dringendste redenen, om, tot de uitvoering van soortgelijke hoekmetingen, den Sextant, als het naauwkeurigste en gemakkelijkste Werktuig, aan te prijzen. Elders heb ik de voordeelen van dit voortreffelijke Werktuig breedvoerig aangewezen. Nimmer behoorde men zich van een Astrolabium, of Theodoliet te bedienen; wijl deze werktuigen moeilijk te behandelen, zwaar om te verplaatsen zijn en de naauwkeurigheid van een goed Sextant, hoe zorgvuldig en kostbaar zij gemaakt zijn, niet kunnen overtreffen. Vooroordeel kan alleen dit Werktuig doen verachten; wie 'er de proef van neemt, zal spoedig overtuigd worden.

moeten zulke driehoeken gekozen worden, welker hoeken niet te scherp noch te stomp zijn; omdat als dan eene kleine fout in het meten der hoeken, eene aanmerkelijker fout op het berekenen der zijden moet veroorzaken. Indien het mogelijk is, moeten de hoeken tusſchen de vijfzig en zeventig graden vallen, en althans niet veel kleiner dan dertig en niet veel grooter dan honderd-en-vijftig graden zijn.

Dit verrigt hebbende, mete verder eene zijde van éénen dezer driehoeken; ſtel bij voorbeeld, de lijn AB , zijnde eene gemeenſchappelijke zijde van de driehoeken N° . XVI en XVIII; dan zal men door het eerſte geval van de berekening der Scheefhoekige Driehoeken, de zijden van alle deze driehoeken ten naauwkeurigſte kunnen berekenen.

Wanneer de zijden der gezegde driehoeken, door berekening bekend zijn geworden, zoo teekent men dezelve naar de ſchaal, die men bij de verdere opmeting gebruiken zal, en men zal dan de Fig. 212 verkrijgen; of, nog beter en naauwkeuriger. Men verbeelde zich twee loodlijnen XY en XZ , in het vlak van dit driehoekennet aangenomen. Men neme, dat het hoekpunt acht (8) en het hoekpunt zes (6) gegebene afſtanden tot deze lijnen XY en XZ hebben, of lever, dat de lijn 6—8 met deze loodlijnen twee hoeken make, die men naar welgevallen kan aannemen, mits één dezer hoeken het complement van den anderen zij; dan zal men de afſtanden der hoekpunten van alle die driehoeken tot deze twee aſen, door het berekenen van rechthoekige driehoeken, vinden; en, wanneer men van een uitgeſtrekt terrein een goed en zamenhangend geheel verlangt te verkrijgen, dan gebiedt de voorzigtigheid, dat men zich de moeite geve, de coördinaten dezer hoekpunten (dat is derzelver afſtanden tot de aangenomene aſen XY en XZ) te berekenen; omdat men vooreerst, deze afſtanden kennende, de hoekpunten der driehoeken op de teekening met zoo veel te grooter naauwkeurigheid zal kunnen opdragen, en vooral, omdat een kleine miſſlag, welke bij het opdragen van één dezer punten mogt inſluispen, op de naauwkeurige plaatsing der overige punten geenen invloed meer hebben kan; daar integendeel, wan-

neer de punten, door het overdragen der driehoeken, bepaald worden, elke onnaauwkeurigheid noodzakelijk zijnen invloed op het bepalen van alle de overige hoekpunten dezer driehoeken zal blijven behouden. (*)

Voor al is deze laaſte handelwijze dan aan te prijzen, wanneer men onderscheidene planchetſtukken, tot het opnemen van eenig groot terrein, noodig heeft. Laat een planchetſtuk de grootte hebben van het vierkant $XVIIU$; dan zal men het geheele oppervlak van het terrein, in het vereiſchte aantal planchetſtukken, ten naastenbij de grootte van de Meettafel hebbende, kunnen verdeelen, die aan dit vierkant gelijk zijn, (de figuur ſtelt twaalf zulke planchetſtukken voor,) en men zal dan de punten, die op elk planchetſtuk vallen, met de uiterſte naauwkeurigheid, tevens met de zijden der driehoeken kunnen overbrengen, en zeker zijn, dat deze punten op elk planchetſtuk op hare ware plaats zullen ſtaan.

Men drage, bij het opnemen der hoofdpunten van een terrein, door middel van den Sextant, zorg, dat men de baken, welke men in deze punten geplaatst had, late ſtaan, of, bijaldien dit niet zijn kan, dat men de plaatſen, alwaar deze baken geſtaan hebben, zorgvuldig opmerke; om, bij het verder ſituieren van het terrein, het planchet volkomen in het ſtandpunt, alwaar het ſtaan moet, te plaatſen, en de baken wederom in de nabijgelegene ſtandpunten te kunnen herſtellen.

Veronderſtellen wij nu: dat men met het planchetſtuk $XVIIU$ begint, op hetwelk de ſtandpunten (6), (7) en (8) met derzelver rigtingen gevonden worden, zoo plaatſe men in deze punten (6), (7), (8) en in de nabijgelegene punten (4), (5), (10) en (9) baken; dan zal men de baak, die

R 3 in

(*) In de Geodeſie neemt men ééne der lijnen of aſen XY en XZ de ééne XZ , bij voorbeeld, voor de middaglijn van het punt X en de andere voor den parallelcirkel van datzelfde punt der Aarde: de aſtand van één hoekpunt van één der driehoeken (of van eenig punt van het terrein) tot de lijn XZ , wordt dan de aſtand tot de Middaglijn genoemd, en de aſtand van dat zelfde punt, tot de lijn XY , de aſtand tot de parallel.

In het punt (8) staat wegnemen, en de Meettafel in derzelver plaats stellen: voorts op één der punten (6), (7) of (9) rigten, als wanneer het te gelijk op de twee andere punten zal gerigt zijn, en men zal dan, de handelwijze, welke in het voorgaande Vraagstuk verklaard is, volgende, alle voorwerpen, welke op dat gedeelte van het terrein, door het planchetstuk *XVWU* voorgesteld, naauwkeurig, in teekening kunnen overbrengen, en alzoo, van planchetstuk tot planchetstuk voortgaande, alle de bijzonderheden van het geheele terrein bepalen.

Ten aanzien nu van het verder situeren, dat is, van het overbrengen der bijzonderheden, moet men in aanmerking nemen, dat alle groote en kleine wegen, alle rivieren, beken, kanalen, meren, waterplasfen, en de eilandjes, die zich in dezelve mogten bevinden; hoogten, diepten, grootere of kleine boschen, alle houtgewas, bebouwde en onbebouwde gronden, heiden, enz.; alle voorwerpen, die zich op het terrein bevinden; als molens, huizen, gehuchten, dorpen en steden, op hetzelfde, volgens hunne evenredige grootte en juiste betrekkelijke ligging, in de teekening moeten worden voorgesteld, en wel op zulk eene manier, als wij in het *III Hoofdstuk* dezer *Afdeeling* hebben voorgeschreven; doch, om zulks, ten aanzien van het meetkundige gedeelte, met naauwkeurigheid te kunnen uitvoeren; moet men het beloop der wegen, rivieren, beken, kanalen, enz., in derzelver bogten en kronkelingen, naauwkeurig volgen; de omtrekken der meren, waterplasfen, heuvels en hoogten, naauwkeurig voorstellen; de bijzonder merkwaardige voorwerpen, op hunne ware plaats brengen; doch dit alles is, wanneer men de voorname standpunten, reeds op de planchetstukken gebragt heeft, een minder moeilijk, dan wel langwijlig werk; de naauwkeurige uitvoering vereischt slechts den noodigen tijd, om dezelve, stukswijze te volbrengen.

Om de hoofd- en kleinere wegen, voetpaden, bruggen, enz. op te nemen, volgt men ongeveer deze handelwijze. Laat, *Fig. 213*, *ABCDEFGHI*, een voorname hoofdweg zijn, op welke andere, het zij hoofd-, het zij mindere wegen, *P*, *Q*, *R*, *S*,

S, uitloopen: hoe krom er kronkelend die weg möge loopen, kunnen toch altijd kleinere of grootere deelen van denzelfen, gelijk, bij voorbeeld, *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FH*, als regt worden aangemerkt. Men verkieze dan de punten der krommingen en alle plaatsen, waar bijwegen op den hoofdweg uitkomen, als mindere standpunten van het terrein, en bringe, naar het voorschrift van het *IV Vraagstuk*, uit deze standpunten *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *H*, de rigtingen der reeklijnen *AB* uit *A*; *BA*, *BP* en *BC* uit *B*; *CB* en *CD* uit *C*; *DC*, *DQ* en *DE* uit *D*; *ED* en *EF* uit *E*; *FE*, *FG*, *FH* uit *F*, en *HF*, *HE* en *HI* uit *H* over; telkens, het zij met de ketting, of op den pas, de afstanden van *A* tot *B*, van *B* tot *C*, van *C* tot *D*, van *D* tot *E*, van *E* tot *F*, van *F* tot *H* metende, en in elk standpunt beproevende, of, uit hetzelfde, de Meettafel overeenstemt met de voorname nabijgelegene hoofdpunten, die reeds te voren, op de teekening waren overgebragt; omdat, bij zulke kleine afstanden, als de mindere standpunten van elkander kunnen verwijderd zijn, er ligtelijk een klein verloop zou kunnen plaats hebben.

Om den loop van eenen stroom, eene rivier of beek op de Meettafel over te brengen, volgt men een dergelijke handelwijze. De oevers der Rivieren, loopen meestal kronkelend, en echter kunnen kleine gedeelten van dezelve, als regtlopende lijnen worden aangemerkt. Stellen wij, dat de rechteroever van de Rivier, in *Fig. 214* afgebeeld, in derzelver beloop, uitgestrektheid en betrekkelijke ligging, tot de overige deelen en voorwerpen van het terrein, zullen worden overgebragt; onderstellen wij, dat reeds de betrekkelijke ligging, der punten *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, op de Meettafel behoorlijk zij voorgesteld; dan zal men, op de oever dezer Rivier, de baken 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, enz., zoodanig plaatsen, dat de gedeelten van dien oever, tusschen deze baken begrepen, nagenoeg regte lijnen zijn; men zal zich, met de Meettafel, in de gezegde punten *A*, *B*, *C*, *D*, enz. begeven, dezelve in de rigting der lijnen *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FG*, enz. waterpas en pal stellen, en, volgens

het III Vraagstuk, de plaats der baken 1, 2, 3, 4, 5, 6, enz. op de teekening brengen; deze punten door regte lijnen vereenigen; of, zoo de gedcelten, hier en daar, van eene regte lijn mogten afwijken, die afwijking, op het oog genomen, afteekenen.

Of, bijaldien men den oever zelve volgen kan; dan zal men met de Meettafel, van baak tot baak, gaan, en handelen, zoo als bij het opnemen van den weg, in Fig. 213, is aange-
wezen.

Ook kan men, zie Fig. 214, dikwijls nog eenen anderen weg inslaan. Stel, dat men langs den linker oever der rivier in eene regte lijn *ax* kan voortgaan, en dat men het punt *a*, benevens de rigting dezer lijn *ax*, met andere punten *A*, *B*, *C*, enz., in verband kunne brengen; dan neme men, na alvorens deze lijn *ax*, met het punt *a* op de Meettafel te hebben overgebracht, op deze lijn *ax*, de punten *b*, *c*, *d*, *e*, *f* enz. op gelijke, of ten naastenbij even grootte afstanden, en denke door deze punten, de loodlijnen *ag*, *bh*, *ci*, *dk*, *el*, *fm*, enz. tot aan den oever, welker lengte, of met de ketting, of op den pas gemeten, en op de Meettafel worden overgebracht, als wanneer men de punten *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, *m*, aan den linker oever der Rivier gelegen, verkrijgen zal, welke voorts op het oog, volgens den omtrek en het beloop van de gedeelten van den oever, tuschen dezelve begrepen, zullen worden bijgeteckend.

De omtrek van eene zeekust, van een meer, eene waterplas, enz. wordt op dezelfde wijze bepaald, en, om een eiland, hetwelk in zulk een water gelegen is, in deszelfs ware grootte en ligging over te brengen; zoo stel, Fig. 215, dat eenige punten, bij voorbeeld, *A*, *B* en *C*, op het terrein reeds bepaald en op de tafel zijn overgebracht. Stel dan, op dit eiland, eene baak *P*, en laat uit de punten *A*, *B* en *C*, de plaats dezer baak, op de Meettafel bepaald worden, dan is reeds de stelling van een enkel punt, op dit eiland bekend; ga dan met de Meettafel op dit eiland over, na alvorens in de standpunten *A*, *B* en *C*, baken geplaatst te hebben; stel de Meettafel in het punt *C*, en rigt dezelve op de baken *A*, *B* en *C*, of op ééne van dezelve, dan zal men op dit eiland zoo vele andere
pun-

punten, als men goedvindt, uit dit punt *P* kunnen overdragen, en den omtrek van hetzelfde bepalen. Is het eiland van eene aanmerkelijke grootte, dan kan men meer dan eene baak, op hetzelfde uitzetten, waardoor dan uit de punten *A*, *B* en *C* meer punten van hetzelfde zullen bepaald, en het verder opnemen van den omtrek van dit eiland zal kunnen bevorderd worden.

Even zoo als men de omtrekken van de oevers van Rivieren, Zeekusten en Meeren overbrengt, even zoo zal men ook de omtrekken van boschen en ander houtgewas, de omtrekken van bergen en heuvels, enz., op het terrein voorkomende, bepalen. In alle deze gevallen, zal men, uit vaste punten, reeds op het terrein bepaald zijnde, andere punten, in den omtrek gelegen, overbrengen, en uit deze laatste gezegde omtrekken, naar gelang der omstandigheden, welke het terrein zelve aanbiedt, die omtrekken verder bepalen en naauwkeuriglijk in teekening kunnen brengen.

Gegraven kanalen, vaarten en slooten, welke doorgaans (vooral hier te Lande) in regte lijnen voortgaan, zijn gemakkelijker te bepalen; derzelver uiteinden en rigtingen overgebracht zijnde, zullen zij in allen opzichte bepaald zijn.

Dorpen, gehuchten, enz. worden in den loop van het werk, van zelve bepaald, indien men de wegen volgt, die naar dezelve geleiden.

Alle voorwerpen, welker omtrek groot genoeg is, om eene duidelijke figuur in de teekening op te leveren, worden in evenredigheid van derzelver omtrek, naar de maatstaf der aangenomene Schaal overgebracht; zijnde die omtrekken niet anders, dan de horizontale doorsnede van die voorwerpen, welke, in derzelver juiste figuur afgebeeld, en op hare ware plaats moeten gebragt worden.

§ 560. I. AANMERKING. Wij achten het overtollig, om in nog verdere bijzonderheden te treden: hetgeen wij reeds gezegd hebben, is voldoende, om den Leerling op den weg te helpen: de verscheidenheid is hier zoo groot, de verschillende op te nemen gronden, in natuur en gelegenheid zoo

verscheiden, dat, indien wij de bijzonderheden wilden opgeven en aanwijzen, van welke hulpmiddelen men zich, zoo ter verkorting van den arbeid, als ter verzekering van de juistheid der opmeting, bedienen kan, wij over dit onderwerp alleen gemakkelijk een zeer uitgebreid Hoofdstuk zouden kunnen schrijven; dan, eene grondige kennis der beschouwende Meetkunst, eene gedurige oefening op het veld, de voorlichting van een kundig Geleider, die op de plaats zelve de gelegenheden aanwijst, en de geschikte handgrepen doet opmerken, zal meer afdoen, dan eene uitvoerige opgave van alle die bijzonderheden, welke (hoe nuttig deze anders, op zich zelve genomen, zou kunnen zijn,) het kort bestek, dat wij ons hebben moeten voorschrijven, ons gebiedt, achterwege te laten.

§ 561. II. AANMERKING. De handelwijzen, in de oplossing van de twee laatst voorgaande Vraagstukken voorgedragen, onderstellen, dat het terrein geene aanmerkelijke groote uitgebreidheid heeft. Een uitgestrekt gewest zou, op deze wijze, niet meer naauwkeurig kunnen opgemeten worden; en dit is zeer natuurlijk; want, omdat onze Aarde geen plat vlak, maar nagenoeg het oppervlak van eenen grooten bol is, zal men, bij eene groote uitgestrektheid, de onderstelling van een plat vlak aannemende, (en dit doet men volgens ons voorschrift wezenlijk,) zoo veel te meer van de waarheid afwijken, naarmate het terrein uitgestrekter is; hier is het punt van aandraking, tusschen het gewone Landmeten en de Geodesie, welke laatste de ware gedaante en afmeting onzer Aarde, benevens de Sterrekunde, tot grondslag van hare bepalingen, aanneemt, en zich met twee dingen bemoeit: 1°. om de ware Aardrijkskundige ligging van de voornaamste hoofdpunten van een geheel Rijk met juistheid te bepalen, en naar eene aangenomen projectie in eene kaart voor te stellen; 2°. om, wanneer deze voornamen hoofdpunten bepaald zijn, de afzonderlijk opgemeten stukken van kleine gedeelten dezes Lands, naar de regels dezer aangenomen projectie, met die hoofdpunten te verbinden.

§ 562.

§ 562. III. AANMERKING. In Fig. 212, hebben wij ook stilzweigend ondersteld, dat er op het terrein, geene merkwaardige en verhevene punten of voorwerpen bestonden, die van zelve als voornamen baken kunnen dienen, om de ligging van de overige punten, door middel van dezelve te bepalen; dit is toch echter zelden het geval; in een bewoond en bebouwd land, worden hooge voorwerpen genoeg gevonden, die als zulke voornamen baken kunnen dienen, en van deze kan men altijd een uitmuntend gebruik maken, om zoo veele standpunten op het terrein te bepalen, als men goedvindt.

Zijn geene afftanden dezer punten bekend, zoo mete men met naauwkeurigheid eene grondlijn, en bepaal, door hoekmetingen aan de eindpunten van dezelve, de noodige hoeken, om naar het voorschrift van § 327, XI Hoofds. I Afdeel. Bladz. 122 en 123, den afstand van twee, of meer zulke voorwerpen te vinden. Door, uit deze twee of meer bepaalde voorwerpen, verdere hoekmetingen in het werk te stellen, zal men, door het berekenen van eenige driehoeken, op het terrein een groot aantal punten bepaald hebben, en bijaldien men dan gebruik maakt van de handelwijzen, welke in het XI Hoofdst. I Afd. § 330 en 331. Bladz. 124—127 zijn voorgescreven, zullen deze wederom kunnen dienen, om het aantal der reeds bekende standpunten, naar welgevallen te vermenigvuldigen.

Inzonderheid zal men hier te Lande, gebruik kunnen maken van den uitmuntenden schakel van groote driehoeken, door zijne Excellentie, den Generaal KRAYENHOFF, het geheele Land door, van Duinkerken tot Jever in Oostvriesland, voortgezet, met welker behulp men, zonder het meten van eene nieuwe basis, naar aanleiding van hetgeen in de even aangehaalde plaats geleerd is, zoo vele punten van het terrein zal kunnen bepalen, als men goedvindt, (*) of tot zijn oogmerk dienstig oordeelt.

§ 563.

(*) Zie Précis Historique des opérations géodésiques et astronomiques faites en Hollande pour servir de base à la topographie de cet état, exécutées par le Lieutenant Général KRAYENHOFF, Gouverneur d'Amsterdam, etc. 1815. A la Haye de l'Imprimerie générale de l'Etat.

§ 563. IV. AANMERKING. Men kan van de twee Vraagstukken, welker oplossing in § 330 en 331 voorkomt, op de Meettafel, eene teekenkunstige oplossing uitvoeren, (zie de aangehaalde plaats,) dan, dewijl alle constructien, welke van het trekken van meerdere lijnen afhangen, in de handen van minbedrevenen, een gevaarlijk ding is, is zulk eene handelwijze niet, dan in de uiterste noodzakelijkheid aan te raden; maar is de Meettafel of het vizierliniaal van eene magneetnaald voorzien; dan kan men van dezelve een uitmuntend gebruik maken, om eene groote menigte afzonderlijke en met elkander in geen verband staande punten te bepalen en op de Meettafel over te brengen.

1°. Onderstellen wij, dat, Fig. 216, A en B twee punten zijn, bij, bij voorbeeld, twee torens, of twee andere voorwerpen, of ook twee hooge baken, welke uit veele punten van het terrein zichtbaar zijn; dat, op ééne of andere wijze, den afstand dezer punten naauwkeurig genoeg is bekend geworden; dat men al verder de rigting van den afstand AB , met de magnetische middaglijn NZ kenne; en dat eindelijk de afteekening dezer punten A en B , benevens de magnetische middaglijn op de Meettafel, in de punten a en b , en in de lijn nz , zijn voorgesteld; zoo dat de hoek $nab =$ hoek NAB zij; dan zal men op eene ligte wijze, uit elk standpunt P , kunnen bepalen, hoe ver men van deze punten A en B verwijderd is, en bijgevolg ook de betrekkelijke ligging van dat punt P , ten opzichte van de punten A en B . Men stelle de Meettafel in het punt P ; rigte dezelve in de magnetische middaglijn, brenge daarna het vizierliniaal eerst door het punt a , in de rigting van het voorwerp A , en trekke de lijn ap , daarna door het punt b , in de rigting van het voorwerp B , en trekke de lijn bp ; dan zal het punt p , alwaar deze lijnen elkander snijden, de afteekening van het standpunt P zijn; want, omdat NZ evenwijdig aan nz is, en hoek $NAB =$ hoek nab , zoo zal AB evenwijdig zijn aan ab , en daarom zijn de driehoeken pAB en pab gelijkvormig. Men zal, op deze wijze, zoo, vele punten P beneden en

boven de lijn AB , uit welke de voorwerpen A en B zichtbaar zijn, kunnen bepalen, als men goedvindt; doch de hoeken van den driehoek ABP , moeten om redenen, boven aangevoerd, niet te scherp, noch te stomp zijn.

2°. Wanneer meer dan twee punten op het terrein reeds bepaald, en ten opzichte van de magnetische middaglijn, in de juiste rigting op de Meettafel heeft overgebracht; dan zal men niet slechts het aantal der enkele standpunten kunnen vermeerderen; maar zich bovendien, in elk nieuw standpunt, van de juiste ligging der alzoo bepaalde punten kunnen overtuigen. Laat, bij voorbeeld, de betrekkelijke ligging van drie punten A , B , C , op de Meettafel, door de punten a , b en c zijn afgebeeld, als mede derzelver ligging met betrekking tot de magnetische middaglijn; zij P het standpunt, uit hetwelk deze drie punten A , B en C zichtbaar zijn; wanneer men dan dit punt op de voorgeschrevene wijze uit A en B bepaald, en op de Meettafel in p heeft overgebracht, dan zal, indien dit punt p naauwkeurig bepaald is, het vizierliniaal, op de punten c en C gelegd zijnde, juist in de reoijng van het punt C moeten liggen.

3°. Veronderstellen wij, Fig. 216, dat A en B twee punten binnen eene vesting zijn, welker afstand uit eene platte grond van dezelve opgemaakt, voor naauwkeurig genoeg kan gehouden worden; dan zal men, met behulp der magneetnaald, de rigting van de lijn, die deze punten vereenigt, met de magnetische middaglijn, en voorts zoo vele afzonderlijke punten van het terrein kunnen bepalen, als men goedvindt. Nemen wij tot dat einde op het terrein, twee baken R en S , en brengen wij de Meettafel eerst in R en dan in S over, op dezelve de hoeken ARB , BRS , BSA en ASR overbrengende, en den afstand rs op de Meettafel, naar welgevallen aannemende; dan worden, door de snijding der lijnen, de punten a en b bepaald, en de figuur $rsba$, zal aan de figuur $RSBA$ gelijkvormig zijn; neem dan op de lijn ab eene lijn ab' , welke gelijk is, aan zoo vele deelen op de schaal, als de afstand AB roeden bedraagt; trek verder de lijnen $b'r'$, $b's'$ en $r's'$ evenwijdig

aan br , bs en rs ; dan zullen de punten a , b' , r' en s' op de Meettafel, de betrekkelijke ligging der punten A , B , R en S voorstellen, en de onderlinge afstanden dezer punten zullen bekend zijn; indien men nu, uit één der punten R of S , de rigting van de magnetische middaglijn op de Meettafel heeft overgebracht, dan zal men, (gelijk boven aangewezen is,) uit elk nieuw standpunt (op de punten A en B rigtende,) de ware ligging van dit punt, met betrekking tot de punten A en B , kunnen bepalen.

§ 564. VII. VRAAGSTUK. Een terrein opgenomen hebbende, hetzelfde overeenkomstig de ware middaglijn te oriënteren?

OPLOSSING. Dit Vraagstuk bedoelt eigenlijk het bepalen van het Azimuth, of van den hoek, welke de lijn, die door twee bekende punten gaat, met de ware middaglijn maakt, hetwelk, indien het met de uiterste naauwkeurigheid zal bepaald worden, in de uitvoering zeer moeilijk is. Het behoort meer tot de Geodesie: ook kan de handelwijze, welke wij zullen voorschrijven, niet meer dan een nabij opleveren; dat echter naar den aard der zake genoegzaam zal zijn.

Men late, *Fig. 217*, uit gegoten koper een stuk vervaardigen, bestaande uit eenen driehoekigen voet ABC en een driehoekige prismatische stijl DE , welke onder eenen hoek van 45° in een plat rondachtig stuk EFG is omgebogen, in het welk eene kleine ronde opening gemaakt is, welker middelpunt met het hoekpunt A van den voet, in eene regte lijn AG , die loodrecht op het ondervlak van de driehoekige basis staat, gelegen is; aan deze lijn AG kan men de hoogte van drie of vier duimen geven. Men zal nu met dien toestel, op eene zeer eenvoudige wijze, de lijn van het ware Zuiden en Noorden kunnen bepalen.

Breng, *Fig. 218*, de Meettafel in een der standpunten a , over en rigt dezelve op een ver afgelegen voorwerp B , welke ligging insgelijks in teekening is overgebracht, (dat is, breng de lijn ab in de rigting van aB). Beschrijf uit het punt a , eenige cirkels van verschillende stralen; zorg vooral, dat de Meettafel wel gerigt, en volkomen horizontaal zij en blijve.

Zet

Zet den toestel, in *Fig. 217* beschreven, met het punt A in a , en de zijde BC van den voet nagenoeg tegen het Zuiden; neem vóór- en namiddag, op de omtrekken dezer cirkels, de punten waar, alwaar het midden van het zonnelicht, door de opening G komende, in den omtrek van dien cirkel valt.

Laten, in *Fig. 218*, p en q die punten voor den buitensten cirkel zijn; deel dan den hoek paq midden door, dan zal de lijn ar (zijnde hoek $par =$ hoek qar ,) de ware middaglijn zijn. De binnenste cirkels dienen, om dezelfde waarneming, op denzelfden dag, meermalen te herhalen, ten einde zich te overtuigen, of zij, zoo als het behoort, dezelfde middaglijn opleveren.



VII. HOOFDSTUK.

*Over het Gebruik der Boussole, in het
opnemen van een terrein.*



§ 565. **W**ie het voorgaande Hoofdstuk wel bestudeerd, en volkomen verstaan heeft, wat wij, in het *V. Hoofdstuk* dezer *Afdeeling*, van § 529 — § 533, van de *Boussole* gezegd hebben, zal reeds vooruit kunnen nagaan, hoe dit werktuig tot het opnemen van een terrein moet gebruikt worden. Men gebruikt dit voortreffelijke werktuig, in die gevallen, waar de Meettafel moeilijk te behandelen zou zijn; als in holle wegen, in een digt bewasfen terrein, bij militaire herkenningen, en in alle die gevallen, waar geene strikte naauwkeurigheid vereischt wordt, offchoon anders dit werktuig, door eene bekwame hand gebruikt, zoo als ik mij zelve menigmaal overtuigd heb, eene naauwkeurigheid oplevert, die buiten alle verwachting gaat.

§ 566 Wanneer men met de Boussole gaat meten, kan men zich gevoegelijk van een klein planchet of teekentafeltje bedienen, hetwelk op een enkele poot in den grond gezet wordt, om op hetzelfde de standpunten en derzelver onderlinge rigtingen, staande de opmeting, op te dragen. Men make vooraf eenige vierkante stukken papier, in den vorm als in *Fig. 212* te zien is, in gereedheid, en trekke op dezelve, op eenen afstand van eenen halven of vierde duim van elkander, evenwijdige lijnen, dienende om de streken van het magnetisch Noorden en Zuiden aan te duiden, en op het oog zoo veel te gemakkelijker en spoediger het nulpunt van den transporteur in de streek van het Zuiden aan te leggen; deze in voor-
raad

raad vervvaardigde en genummerde stukken, maakt men één voor één, naar mate men dezelve noodig heeft, met mondelijng op het tafeltje vast. Het is bovendien elk aan te raden, zich van een klein aanteekenboekje te voorzien, ten einde, bij elk nieuw standpunt, de magnetische azimuths van de voorwerpen en standpunten, die uit hetzelfde gezien worden, benevens de afstanden van deze standpunten tot elkander, op te teekenen: dit is eene zeer geringe moeite, en, door deze voorzorg, stelt men zich in de gelegenheid, om, wanneer er eenig verloop ontdekt wordt, terstond te kunnen nagaan, of dit verloop welligt aan het verkeerd opdragen der punten moet toegeschreven worden. (*)

§ 567. I. VRAAGSTUK. *Fig. 219. Een begangbaar terrein, met de Boussole, op te meten en te situeren?*

OPLOSSING. Ik onderstel twee personen, die ik *P* en *Q* zal noemen. *P* blijft altijd bij de Boussole, om dezelve te rigten, en de streken der voorwerpen en standpunten waar te nemen; *Q* gaat zoo ver vooruit, als hij *P* nog zien kan, en dient tot baak. Indien men het werk wil bespoedigen; dan kan men aan *P* nog eene hulp toevoegen, die de waargenomene magnetische azimuths, en de afstanden der standpunten, staande de waarneming, op het planchet overbrengt.

Men begint, met zich in eenig standpunt van het terrein te plaatsen, in N°. 1. (wij zullen, de op elkander volgende standpunten, door de getallen 1, 2, 3, 4, 5 enz. aanwijzen.)

P zet de Boussole horizontaal; *Q* gaat een eindwegs vooruit, en plaatst zich in N°. 2; blijft op die plaats staan, tot dat de waarneming in het standpunt N°. 1. is afgelopen, en *P* bij hem gekomen zal zijn; *P* rigt het vizier, of den kijker der Boussole, op *Q*, die in N°. 2 als baak dient, als ook op de andere voorwerpen, die uit N°. 1 zichtbaar zijn; neemt, wanneer de naald volmaakt stil staat, de azimuths dezer pun-

S ten

(*) Het zal wel geheel overtollig zijn, te herinneren, dat men, met de Boussole of magneetnaald werkende, alle ijzer en staal van zich afleggen, en deze zelfstandigheden uit de nabijheid van dit Werktuig moet verwijderen.

ten waar, brengt dezelve op het planchet over, en gaat, dit verrigt hebbende, in eene regte lijn op *Q*, af, past den afstand van 1 tot 2, brengt denzelven in de rigting van de lijn 1—2 op het planchet over; en plaatst eindelijk de Boussole juist in het standpunt N°. 2.

Daarna gaat *Q* weder vooruit, en plaatst zich in het derde standpunt N°. 3. *P* rigt de Boussole op het punt N°. 3, of op *Q*, en voorts op alle voorwerpen, welke uit dit tweede standpunt N°. 2 zichtbaar zijn, en brengt op het planchet de gevondene azimuths dezer punten, uit het punt N°. 2 over, en reeds zullen dan de punten (*A* en *D*), die uit beide standpunten waren waargenomen geworden, in dèrzelver betrekkelijke ligging en ware afstanden tot elkander, in de teekening zijn voorgesteld.

De waarneming in het standpunt N°. 2 afgeloopen zijnde, gaat *P* van het standpunt N°. 2, tot het standpunt N°. 3, en past dien afstand, welken hij in de teekening van 2 tot 3 overbrengt; *Q* begeeft zich naar het standpunt N°. 4. In N°. 3 neemt *P* wederom het azimuth, van de lijn 3—4, en van alle andere zichtbare punten waar en brengt dezelve op de teekening over enz.

Aldus, van standpunt tot standpunt voortgaande, zal men het geheele terrein, in alle rigtingen afgeloopen hebbende, niet slechts den omtrek van den afgeloopen weg; maar ook bovendien de ligging van alle waargenomene punten afgeteekend en op eene gelijkvormige wijze hebben overgebracht.

§ 568. Wanneer men eene aantekening wil houden van de gedane waarnemingen, dan kan men zulks gevoegelijk op deze wijze, inrigten.

Standpunten.	Azimuth of streken der naastvolgende standpunten en andere zichtbare voorwerpen.
N°. 1. 379 passen.	Op N°. 2. 253°30' Op <i>A</i> , de toren van het Dorp <i>D</i> 197°00 Op <i>D</i> , de toren van het Dorp <i>E</i> 324°00
N°. 2. 345. passen.	Op N°. 3 301°00 Op <i>A</i> de toren van het Dorp <i>D</i> — Op <i>B</i> de toren van de Stad <i>H</i> — Op <i>C</i> de molen <i>V</i> — Op <i>D</i> de toren van het Dorp <i>E</i> —
N°. 3. 412 passen.	
N°. 4. 522.	enz. enz.

Wordende, in de eerste kolom dezer Tafel, het getal passen van standpunt tot standpunt en in de tweede de waargenomene azimuths, et de benaming der waargenomene voorwerpen regelmatig opgeteekend.

§ 569. I. AANMERKING. Indien er gelegenheid is, moet men de afstanden der standpunten zoo groot nemen, als mogelijk is; omdat het werk alsdan spoediger afloopt, en de invloed der kleine mislagen, uit de ruwe verdeling van het Werktuig ontstaande, natuurlijk minder wordt.

§ 570. II. AANMERKING. Ten aanzien der afgelegene voorwerpen, moet men alleen vertrouwen op die snijdingen, welke onder geen te scherpe hoeken plaats hebben. Al kon men, bij voorbeeld, de punten *B* en *C* uit N°. 1 en 2 beide waarnemen, zou het onvoorzigtig zijn, die punten door de snijdingen der

der rigtlijnen, uit N°. 1 en 2 gaande, te bepalen; omdat die rigtlijnen elkander onder te scherpe hoeken doorsnijden.

§ 571. III. AANMERKING. Wanneer men, op de voorgeschrevene wijze, met de Boussole een terrein opneemt, moet men altijd trachten, om bij den afloop van het werk op hetzelfde punt N°. 1 terug te komen; indien er dan geen verloop plaats heeft, dan kan men het daar voor houden, dat het terrein met eene volmaakte nauwkeurigheid is opgenomen.

§ 572. IV. AANMERKING. Deze verklaarde handelwijze is de eenige bruikbare, om een digt bewasfen bosch op te nemen; ook kan zij tevens dienen, om de omtrekken van de oevers der Rivieren, Beken, omtrekken van waters, Bosfchen, enz. op te nemen.

§ 573. II. VRAAGSTUK. Fig. 220. Eenige punten op het terrein gegeven zijnde, door middel van de Boussole, meer andere punten op hetzelfde te vinden?

OPLOSSING. Nemen wij, dat de afstand der punten *A* en *B*, benevens de rigting van de lijn *AB*, met betrekking tot den magnetischen middagcirkel *NZ* of *N'Z'*, bekend zijn; indien men dan uit het punt *C*, de azimuths der punten *A* en *C* waarneemt, dan zal, wegens de evenwijdigheid der magnetische middagseirkels, *NZ*, *N'Z'* en *N''Z''*, het azimuth van *A*, gezien uit *C*, genomen uit het Zuiden, gelijk zijn aan het azimuth van *C* gezien uit *A*, genomen uit het Noorden, of hoek *ACZ'* = hoek *CAN*; en het azimuth van *B*, gezien uit *C*, en gerekend van het Zuiden, gelijk aan het azimuth van *C* uit *B* waargenomen, en gerekend van het Noorden. Zij uit *C*

het azimuth van *A* = $153^{\circ}30'$

het azimuth van *B* = $225^{\circ}00'$

indien dan in de teekening, de lijn *ab* gelijk genomen wordt aan zoo vele deelen, als *AB* Roeden lang is, en hoek *nab* = *NAB*; dan zal men, den transporteur, met zijn middelpunt in de punten *a* en *b* (maar nu met het nulpunt niet in het Zuiden; maar in het Noorden) aangelegd hebbende, in *a*, den boog $153^{\circ}30'$, en in *b* den hoek $225^{\circ}00'$ overbrengende, de lijnen *ac*

en

en *bc* verkrijgen, welke doorsnijding de betrekkelijke ligging van het punt *C* zal doen bekend worden.

Indien wel de afstand van de punten *A* en *B*, maar niet de rigting van *AB*, met betrekking tot de magnetische middagslijn gegeven is, dan zal men twee punten *C* en *D* op het terrein aannemen, en uit dezelve met de Boussole, de rigtingen *AC*, *BC*, *DC* uit *C* en *CD*, *AD*, *BD* uit *B* bepalen, waardoor dan, op de wijze, als in § 563 is aangewezen, de ligging der punten *A*, *B*, *C* en *D*, met betrekking tot het magnetisch Noorden en Zuiden zal bekend worden.

Indien ook *AB* (Fig. 220) niet gegeven was, dan zou men door de lijn *CD* te meten, en, uit *C* en *D*, dezelfde waarnemingen in het werk te stellen, insgelijks de betrekkelijke ligging der punten *A*, *B*, *C* en *D* vinden.

Men ziet uit dit alles: dat, wanneer twee of meer punten, door derzelver onderlinge afstanden en rigtingen, met de magnetische middagslijn gegeven zijn, men door eene enkele waarneming, uit eenig op het terrein gekozen punt, de ware ligging van dit punt zal kunnen vinden, en in de teekening gelijkvormig overbrengen.

§ 574. AANMERKING. Deze handelwijze, vereenigd met die, welke in het voorgaande Vraagstuk § 567 beschreven is, zal eene verscheidenheid van hulpmiddelen en gegevens opleveren, om, met spoed, gemak en nauwkeurigheid, eenig terrein met de Boussole, in alle deszelfs bijzonderheden op te nemen; voor het overige komen hierbij alle die dingen in aanmerking, waarvan wij, in het voorgaande Hoofdstuk, uitvoerig genoeg gesproken hebben.

VIII. H O O F D S T U K.

Over het Waterpassen en het bepalen van de verticale doorsnijdingen van een terrein. (*)

§ 575. **W**aterpassen is te bepalen, hoe veel de onderscheidene punten van een terrein hooger of lager dan een vast aangenomen punt gelegen zijn; ten einde een klaar denkbeeld te verkrijgen van de verhevenheden en diepten van hetzelfde.

Om deze bepaling volkomen te verstaan, moet men weten, dat het oppervlak van een stilstaand water, (voor eene kleine uitgestrektheid, van een plat vlak, dat men het horizontale vlak noemt, niet afwijkende,) volmaaktelijk, wegens de werking der zwaartekracht, de gedaante onzer Aarde aanneemt, Dat derzelver vaste deelen, ten opzichte van elkander, hooger en lager liggen, moet daaraan worden toegeschreven, dat het geene vloeistoffen zijn, die, aan de werking der zwaartekracht gehoorzamende, eene volmaakt effene vlakte kunnen aannemen. Dit oppervlak van een stilstaand water noemen wij, in onderscheiding van het horizontale vlak, het waterpasvlak; het laatste is een gebogen, het eerste een plat vlak. Het horizontale vlak raakt het waterpasvlak in één enkel punt; het horizontale vlak is voor elk ander standpunt een ander vlak, de waterpasvlakte is, voor de geheele uitgestrektheid der Aarde

(*) Daar wij een stukje over het Waterpassen voor de drukpers hebben in gereedheid gebragt, in hetwelk dit onderwerp geheel opzettelijk behandeld is, zullen wij ons vergenoegen met in dit Hoofdstuk eene oppervlakkige staets van hetzelfde te geven.

de, één en hetzelfde gebogen vlak, namelijk het oppervlak van de Aarde zelf. Indien beide deze vlakken door een verticaal vlak gesneden worden, is de doorsnijding, met het horizontale vlak, eene regte, en, met de waterpasvlakte, eene kromme lijn, (zijnde, wegens de knolronde gedaante der Aarde, eene ellips,) deze regte lijn noemt men de *horizontale*, en de kromme de *waterpaslijn*. Bij de waterpassing van een geheel land, neemt men het middelbare waterpas der zee tot een punt van vergelijking; hier te Lande het Amsterdamsche peil; doch, bij het opnemen van een klein terrein, kan men elk punt tot punt van vergelijking aannemen, en naderhand met het middelbare waterpas der zee, of het Amsterdamsche peil, vergelijken. Men denke door dit punt een gebogen oppervlak, evenwijdig aan het middelbare waterpas der zee loopende; dan heeft men de bijzondere waterpasvlakte voor dit punt van vergelijking; het waterpassen is nu, te bepalen, hoe veel elk punt van het terrein hooger of lager dan dit aangenomen waterpasvlak gelegen is.

§ 576. Om dit werk, naar behooren in en orde, te kunnen volbrengen, moet men zich verbeelden, dat het terrein door verschillende verticale vlakken zij doorgesneden. Laat *figuur 221* zulk eene verticale doorsnijding (zulk een verticaal profiel) voorstellen, in welke de lijn *AB* de waterpaslijn *aceg* de doorsnijding van het oppervlak des terreins met het verticale vlak voorstelt; men verbeelde zich uit de punten *a, c, e, g*, enz. de *ab, cd, ef, gh* op de waterpaslijn vallende; dan zullen deze lijnen de hoogten der punten *a, c, e, g*, enz. boven de waterpaslijn voorstellen, en, wanneer men nu in staat is, om, voor de voornaamste punten, die hoogten en de afstanden der loodlijnen; dat is, de lijnen *Ab, bd, df, fh*, enz. te bepalen; dan zal men eene vrij naauwkeurige afteekening van den omtrek van dit profiel verkrijgen; en bepaalt men, van afstand tot afstand, zulke profielen, dezelve evenwijdig aan elkan- der nemende, en voorts evenwijdige profielen regthoekig door de eerste gaande; dan zal men in staat zijn, om eene gelijkvormige configuratie van het oppervlak van het terrein, in gips,

of andere zelfstandigheden te vervaardigen. Het opnemen van een terrein, leert dan de punten en horizontale doorsnijdingen der voorwerpen op het waterpasvlak projecteren, het waterpassen daarentegen den afstand door punten of voorwerpen tot het waterpasvlak bepalen: *deze twee werkzaamheden moeten dus eigenlijk genomen zamengaan, om van een terrein, in allen opzigt, eene juiste en naauwkeurige afbeelding te verkrijgen.*

§ 576. Het waterpassen wordt ook nog met een ander oogmerk uitgevoerd, om namelijk het verval der stroomende Rivieren, op bepaalde afstanden, te leeren kennen; dan, in dit opzigt spreken wij thans van de waterpassing niet; daar eene waterpassing met dit oogmerk uitgevoerd, dien graad van naauwkeurigheid vordert, welken ons kort bestek niet gedooft, hier in alle hare bijzonderheden, voor te dragen.

§ 578. Uit het reeds verklaarde volgt: dat, *wanneer men eene vizier-lijn, evenwijdig aan het horizontale vlak kan brengen, het waterpassen een zeer eenvoudig ding zal worden.* Want veronderstellen wij, dat, in Fig. 222, *APBQCRD* een oneffen terrein zij; dat een werktuig, dragende eene volkomene horizontale vizierlijn, achtervolgens in de punten *A, B, C, D, enz.* geplaatst worde; dat verder in de punten *P, Q, R, S, enz.* (tusschen deze eerste standpunten,) regt opstaande bakken zijn opgerigt, welke, van onder naar boven, in Rijnlandsche voeten en duimen verdeeld zijn; indien men dan op deze bakken de horizontale punten *a, b, c, d, e. enz.* bepalen kan; dan zal men hier uit kunnen opmaken, hoe veel voeten en duimen het punt *P* lager dan het punt *Q*, en het punt *Q* hooger dan het punt *R* gelegen is; want *QC* van *Pb* aftrekkende, zal het verschil de verheffing van het punt *Q* boven het punt *P* geven, *enz.*

§ 579. *Het komt er slechts op aan, om, door een werktuig, (dat men Waterpas noemt,) eene horizontale vizierlijn te kunnen voorstellen.* Om van andere voorheen in gebruik zijnde, min volkomen, waterpassen niet te gewagen; merken wij alleen aan: *dat alle thans in gebruik zijnde Waterpassen, zoo van RAMSDEN, als van LENOIR, eigenlijk in niets anders bestaan, dan*

dan in eenen wel gecentreerden kijker AB, Fig. 223, welks as, door middel van eenen daartoe ingerigten toestel, die op een driehoek geplaatst wordt, in eene horizontale rigting wordt gebracht; zulks geschiedt, in het waterpas van RAMSDEN, door middel van eene glazen buis DE, welke, tot op weinig na, met alcohol gevuld en gevat is in eene koperen buis; zijnde de buis, door middel van twee schroeven, aan de buis van den kijker zoodanig aangebracht, dat, wanneer de luchtbel van de glazen buis in het midden staat, de as van den kijker volmaakt horizontaal ligt. Deze kijker wordt met zijn geregeld waterpas op eenen toestel gelegd, welke zoodanig is ingerigt, dat die kijker, met zijne as, horizontaal kan geplaatst worden, en voorts om eene verticale as, in het vlak van den horizon worden bewogen, ten einde de waterpaslijn op elk voorwerp te kunnen rigten. In het *diaphragma* van dien kijker zijn twee fijne kruisdraden gespannen, welker doorsnijding met het oogpunt in de as, en dus, indien de kijker geregeld en horizontaal gesteld is, in de horizontale lijn zal gelegen zijn. *De kijker is wel gecentreerd, wanneer hij, op zijnen toestel geplaatst, en, in zijn drager, om zijne as omgedraaid wordende, de snijding der kruisdraden bestendig op hetzelfde punt gerigt blijft.*

§ 580. Om de horizontale as van den kijker op de bakken te kunnen overbrengen, is aan elke baak een vierkant bord gevoegd, hetwelk in eenen looper kan op en neder geschoven, en, voorts, wanneer het op zijn behoorlijke plaats gebracht is, door eene schroef van achteren kan vast geklemd worden. Dit bord is van voren in vier vakken verdeeld, waar van er twee rood en twee wit geschilderd zijn. Indien de horizontale draad van den kijker met de lijn *AB* invalt, dan staat dit bord op zijne plaats, en door middel van eenen *Nonius* kan men lezen, hoe hoog de lijn *AB*, in duimen en tiendeeligen van dezelve, boven het voetpunt van de baak geplaatst is; of liever, in welk punt de horizontale lijn van den kijker de baak zal doorsnijden. (*)

§ 5

§ 581

(*) Op de bij ons in gebruik zijnde bakken voor de waterpassingen, zijn dezelve, van onder op, in voeten, duimen en lijnen verdeeld. Het

§ 581. Wanneer men op alle omstandigheden wil letten, die invloed op de nauwkeurigheid eener waterpassing kunnen hebben; dan moet men in aanmerking nemen, dat de vizierlijn de naaste baak niet snijdt, in een punt, dat op dezelfde hoogte boven het waterpasvlak als de as van den kijker ligt. Laat, in Fig. 225., de boog AB een gedeelte zijn van eenen grooten cirkel der Aarde, (de Aarde gemakshalve voor eenen ronden bol aannemende.) Laat het middelpunt van den kijker in A , en eene baak BC in B geplaatst zijn; indien dan deze baak regt over eind staat, dan zal haar verlengde naar beneden, door het middelpunt der Aarde gaan; de horizontale vizierlijn AC zal den boog AB in het punt A aanraken, en de baak in C ontmoeten; daar nu de punten A en B , op dezelfde hoogte liggen, zal het punt C zoo vele duimen hooger dan het punt A liggen, als in BC begrepen zijn: dit verschil, hoe gering voor kleine afstanden, (AB) wordt voor grootere afstanden des te aanmerkelijker, daar deze verschillen ten naastenbij in reden van de vierkanten der afstanden AB toenemen. De boog AB is, in deelen van den straal, gelijk aan $\frac{AB}{AM}$; nu is de $\text{Sec. } x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + \text{enz.}$; derhalve is de secans van den hoek AMC , of boog AB , gelijk aan de reeks:

$$1 + \frac{AB^2}{2AM^2} + \frac{5AB^4}{24AM^4} + \text{enz.}$$

vermenigvuldigt men deze secans met AM ; dan vindt men voor de lijn CM , de vergelijking:

$$MC = AM + \frac{AB^2}{2AM} + \frac{5}{24} \times \frac{AB^4}{AM^3} + \text{enz.}$$

trekt men hier van af MB gelijk aan AM ; dan houdt men voor de herleiding der horizontale lijn, tot het waterpasvlak de vergelijking:

BC

is in het afgetrokken wel onverschillig, hoe deze verdeelingen genomen worden; doch het zou, zoo wel voor het opteekenen als voor het berekenen, vrij wat gemakkelijker zijn, de verdeelingen in duimen, tiende en honderste deelen van dezelve te nemen; hierdoor zou de berekening tot tiendeeligen gebracht worden, hetgeen het werk verlicht en bespoedigen zou.

$$BC = \frac{AM^2}{2AM} + \frac{1}{24} \times \frac{AB^4}{AM^3} + \text{enz.}$$

over, in welke, wegens de kleinheid der affanden, in vergelijking van de middellijn der Aarde, de tweede term $\frac{1}{24} \times \frac{AB^4}{AM^3}$ en alle volgende termen, uit de reeks, $\text{Sec. } x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \text{enz.}$, volgende, kunnen verwaarloosd worden; zoo dat men eigenlijk, om de herleiding te vinden, het vierkant van den afstand van het waterpas tot de baak door den straal der Aarde moet deelen. Stellen wij de reductie tot het waterpasvlak, in Rijnlandfche lijnen $= x$; den afstand van de baak tot het waterpas $= a$; de middelbare middellijn der Aarde $= m$; dan zal men deze reductie, in Rijnlandfche lijnen, kunnen berekenen, door de formule:

$$x = 1728 \times \frac{a^2}{m}$$

in welke m eene standvastige grootheid is.

De omtrek van de middagscirkel der Aarde is gelijk aan 40000000 meters; deze meters worden, door formule (C) *Bladz. 208*, aldus tot Rijnlandfche roeden herleid:

$$\text{Log. } 40000000 = 7,0602059991$$

$$\text{Log. } C \dots = 9,4239631082 - 10 \text{ optellen.}$$

$$\text{Log. Rijnl. Roed.} = 6,4841691073$$

$$\text{Log. } x = 0,4971498727 \text{ afstreken.}$$

$$\text{Log. } m = 5,9870192346$$

$$m = 970553 \text{ Rijnl. Roed.}$$

Hierdoor wordt onze herleidings formule:

$$\text{Log. } x = 2 \text{ Log. } a + 7,2505245 - 10$$

door welke, in één oogenblik, de herleiding in Rijnlandfche lijnen zal gevonden worden. Zij, bij voorbeeld, $a = 200$ Rijnl. Roeden; dan is

$$\text{Log. } a = 2,3010300$$

$$7,2505245 - 10$$

$$\text{Log. } x = 9,5515545 - 10$$

$$x = 0,356 \text{ Rijnl. lijnen.}$$

Voor

Voor grootere afstanden, wordt die herleiding grooter; voor 400, 600, 800, 1000 Roeden enz. zal dezelve worden 1.424; 3.294; 5.696; 8.900 *Rijnl. lijnen* enz. Uit dit alles blijkt: dat, wanneer men de afstanden niet zeer groot neemt, en zorg draagt, dat het waterpas genoegzaam, (immers zoo na mogelijk,) in het midden der baken staat, deze herleiding, in eene waterpasling, welke ter bepaling van het profiel van een terrein dienen zal, kan verwaarloosd worden. Wij zullen dan hier bij niet verder blijven stil staan; gelijk wij ook van de uitwerking der straalbuiging, hier niet zullen spreken; te meer, daar wij in ons werk over de Waterpaslingen voornemens zijn, alle deze zaken omstandiger te verklaren.

§ 582. VRAAGSTUK. Fig. 222. Een gegeven terrein, in de doorsnijding van een verticaal vlak, te waterpassen?

OPLOSSING. Men kieze eenig punt *O*, voor het eerste standpunt of punt van vergelijking, en voorts eenige andere in eene rechte lijn liggende punten *P*, *Q*, *R*, enz. tot volgende standpunten der baken; men neme deze standpunten op plaatsen, waar de helling van het terrein eenigzins schijnt te veranderen, of bij aldien het regelmatig opklimt of afdaalt, of genoegzaam horizontaal schijnt te liggen, op bijna gelijke afstanden.

Ongeveer, in het midden, tusschen deze standpunten, *O*, *P*, *Q*, *R*, enz. neme men de punten *A*, *B*, *C*, *D*, enz. om in dezelve het waterpas te stellen.

Men heeft eigenlijk, om het werk te bespoedigen, twee baken nodig; ééne van welke achteruit staat in *O*, en ééne vooruit in *P*, die wij de baken N^o. 1 en 2 zullen noemen; bij elk dezer baken wordt ten minste één persoon vereischt, om de borden, naar dat het noodig is, op of neer te schuiven, en de bevondene hoogte in het register, waarvan straks zal gesproken worden, op te teekenen. De baak N^o. 1, komt in het 1^e, 3^e, 5^e, 7^e, 9^e enz. standpunt, en de baak N^o. 2, in het 2^e, 4^e, 6^e, 8^e, 10^e enz. standpunt te staan, en zulks moet, om het werk in orde en regelmatig af te doen, ook zorgvuldig worden in acht genomen.

Een

Een derde persoon wordt vereischt, om bij het waterpas te blijven, hetzelfde te regelen en op de baken te rigten. Er moeten op elke standplaats van het waterpas, twee slagen, (twee waarnemingen gedaan worden,) ééne, (uit *A*,) op de baak (*O* in het standpunt N^o. 1,) die achter uit staat, en eene andere uit het zelfde punt *A*, op de baak, (*P* in het standpunt N^o. 2,) die vooruit staat. In elk nieuw standpunt van het waterpas, moet dezelfde bewerking herhaald worden, en de personen, welke bij de baken geplaatst zijn, hebben ook niets anders te doen, dan telkens hetzelfde werk te herhalen.

Na dat de baken, N^o. 1 en 2, op hare aangewezenen standplaatsen *O* en *P* gesteld, en de Waarnemer zijn waterpas in *A* geplaatst heeft, begint deze hetzelfde te regelen, en zijne vizierlijn in eene horizontale rigting te brengen. Dit gedaan hebbende, rigt hij den kijker naar de baak *O* achteruit, en geeft, door afgesprokene teekens, of, door middel van eenen roeper, te kennen, of het wijzerbord hooger of lager moet geschoven worden, tot zoo lang het op zijne vereischte hoogte staat, als wanneer hij, door een teeken, te kennen geeft, dat het naar behooren staat, in welk geval de persoon, welke bij die baak geplaatst is, de bevondene hoogte opteekent, en met zijne baak zich naar het standpunt N^o. 3 begeeft.

De Waarnemer keert daarna den kijker om, denzelven rigtende naar het standpunt of de baak N^o. 2; en laat het bord op deze tweede baak zoo lang op of nederschuiven, tot dat het op zijne ware hoogte gebragt is; als wanneer hij, door een teken, te kennen geeft, dat het bord goed gesteld is, en de waargenomene hoogte kan opgeteekend worden; waarna de persoon, die bij deze baak N^o. 2. geplaatst is, die baak, zonder dezelve te verzetten, met het bord naar het derde standpunt omkeert.

De Waarnemer neemt alsdan het waterpas op, en plaatst zich ongeveer in het midden tusschen het tweede en derde standpunt; terwijl intusschen de baak N^o. 1. in het derde standpunt is geplaatst geworden. Hier wordt hetzelfde werk

als

als in het eerste standpunt van het waterpas herhaald. Men gaat alzoo van standpunt tot standpunt voort, tot dat de geheele linie op het terrein is gewaterpast geworden.

De waarnemer moet zorgen: 1°. dat zijn waterpas wel geregeld, 2°. dat het, gedurende de waarneming, niet verplaatst worde, en 3°. dat het, om deszelfs verticale as draaijende, de as des kijkers haren horizontalen stand blijve behouden; dit laatste is vooral noodzakelijk; omdat anders, wanneer men zulks mogt verzuimen, de as des kijkers, bij de tweede waarneming, door het horizontaal stellen, natuurlijk iets dalen of rijzen zou, het welk eene onnaauwkeurigheid in de waterpassing zou moeten veroorzaken.

De personen, welke bij de baken geplaatst zijn, moeten zorgen, dat zij dezelve, gedurende de waarneming, regt ophouden; dat zij de klem Schroef van het bord vastzetten, zoodra het teekenen gegeven is, dat het bord op zijne ware hoogte staat, en dat zij eindelijk vooral hunne bevondene hoogten naauwkeurig opteekenen; gebrek aan deze voorzorgen kan veroorzaken, dat men eene geheele waterpassing van vooraf aan moet beginnen; wijl men, bij eene waterpassing, niet ligtelijk kan ontdekken, in welk standpunt de mislag hebbe plaats gehad.

In het opteekenen der bevondene hoogten, moet men ook eenige regelmatigheid in acht nemen; omdat men anders, bij het opmaken van het geheel der uitkomst, ligtelijk de getallen met elkander zou kunnen verwarren. Men kan, om, in de aantekeningen, met orde en gemak, te werk te gaan, dezelve houden in daartoe opzettelijk gemaakte registers, waarvan op de volgende *Bladzijden* 287 en 288 modellen worden opgegeven.

Het Model, N°. 1, bevat het Register van aantekening te houden door de persoon, welke bij de eerste baak geplaatst is, en van het Register N°. 2, te houden door den persoon, die de baak N°. 2. behandelt; zijnde dit laatste van het eerste, in niets dan in de Nummers van de eerste kolom, onderscheiden. De eerste kolom wijst de Nummers der standpunten, die voor de eerste baak de onevene getallen 1, 3, 5, enz. zijn, welke inderdaad de punten op het terrein aanwijzen,

Zie vervolg, *Bladz.* 289.

N°. 1. MODEL,
van het aantekenings Register, voor de hoogten, der horizontale lijnen, genomen op de Baak N°. 1.

Nummert der Standpunten.	Waargenomenne hoogten, in geheel en tiendeeligen van Rijnl. duimen.	Afstand tot de naaste baak in Rijnl. Roeden.
1	a. — v. 45,17	117
3	a. 36,92 v. 40,83	143
5	a. 39,32 v. 45,37	113
7	a. 41,81 v. 43,27	109
9	a. 59,33 v. 50,72	138
11	a. v.	
13	a. v.	
15	a. v.	
17	a. v.	
19	a. v.	
21	a. v.	

N°. 2. MODEL,
van het aantekenings Register, voor de hoogten, der horizontale lijnen, genomen op de Baak N°. 2.

Nummers der Standpunten.	Waargenomenne hoogten in geheel en tiendeeligen van Rijnl. duimen.	Afstand tot de naaste baak in Rijnl. Roeden.
2	a. 31,25 v. 47,32	96
4	a. 63,50 v. 25,83	129
6	a. 67,12 v. 23,79	115
8	a. 28,24 v. 78,82	137
10	a. 46,21 v. 18,13	115
12	a. v.	
14	a. v.	
16	a. v.	
18	a. v.	
20	a. v.	
22	a. v.	

N°. 3.

N^o. 3. MODEL van het Register eener Waterpassing, met de herleiding van de standpunten der baken, zoo tot het naastvoorgaande, als tot het eerste, standpunt.

N.B. + beteekent *hooger* en — *lager*.

Nommers van de standpunten der Baken.	Waargenomen hoogten in ge-heelen en tien-deeligen van R. Duimen.	Hoogten der standpunten, ten opzichte van het eerste standpunt.	Afstanden der op el-kander vol-gende baken in R. Roed.
1 v. 2 a.	H 45,17 31,25	1 * + 0,00 K	1 tot 2
Hoogte N ^o . 2	+ 13,92	+ 13,92	117
2 v. 3 a.	H 47,32 36,92	2 * + 13,92 K	2 — 3
Hoogte N ^o . 3	+ 10,40	+ 10,40	96
3 v. 4 a.	H 40,83 63,50	3 * + 24,32 K	3 — 4
Hoogte N ^o . 4	— 22,67	— 22,67	143
4 v. 5 a.	25,83 39,32	4 * + 1,65 K	4 — 5
Hoogte N ^o . 5	— 13,49	— 13,49	129
5 v. 6 a.	45,37 67,12	5 * — 11,84 K	5 — 6
Hoogte N ^o . 6	— 21,75	— 21,75	113
6 v. 7 a.	23,79 41,81	6 — 33,59 K	6 — 7
Hoogte N ^o . 7	— 18,02	— 18,02	115
7 v. 8 a.	43,27 28,24	7 — 51,61 K	7 — 8
Hoogte N ^o . 8	+ 15,03	+ 15,03	109
8 v. 9 a.	73,82 59,33	8 — 36,58 K	8 — 9
Hoogte N ^o . 9	+ 14,49	+ 14,49	137

zen,

zen, welker hoogere of lagere ligging, ten opzichte van elkander en van het eerste standpunt, moeten vergeleken worden; de tweede kolom, bevat de waargenomen hoogten van de horizontale vizierlijn van het waterpas aan elke baak. Bij elke baak moeten, behalve bij de eerste standplaats van de eerste baak, twee hoogten worden opgeteekend; de eerste, wanneer het waterpas achter staat, en de tweede, wanneer het vooruit geplaatst is. Deze standplaatsen van het waterpas worden aangeduid door de letters *a* en *v*; (*achteruit* en *vooruit*) zoodat elk Waarneemer in zijn register zijne bevondene hoogten, in de tweede kolom, slechts achter elkander behoeft op te teekenen, zonder gevaar te loopen, dat hierin eenige verwarring, zal kunnen ontstaan. De derde kolom dient, om den afstand van elke baak tot de naastvolgende aan te teekenen. Elk, die zijne laatste opteekening heeft te boek gesteld, neemt zijne baak op, past de afstand tot de naastvolgende baak, die inmiddels blijft staan, en begeeft zich naar zijne volgende standplaats.

Wanneer de geheele waterpassing in eene linie is afgeloopen, dan brengt men alles over in een algemeen Register, waar van de inrigting voorgefeld wordt in het Model N^o. 3. Dit register, op hetwelk tevens de herleidingen van de verschillende standpunten van het terrein tot het eerste standpunt van hetzelfde worden uitgewerkt, bestaat uit vier kolommen. In de eerste kolom, vindt men de Nommers van de standpunten der baken, ingerigt, zoo als men uit het model duidelijk genoeg zien kan; in de tweede kolom worden uit de twee voorgaande Registers de bevondene hoogten van de horizontale lijnen van het waterpas ingeschreven. De derde kolom bevat de herleidingen van elk standpunt tot het eerste.

Om nu deze herleidingen tot het volgende standpunt te bewerkstelligen, moet men in de tweede kolom de getallen, die in de vakken *H* staan, van elkander afrekken, het onderste van het bovenste, (de *a* van de *v*.) Kan die afrekking geschieden (is anders het onderste getal *a* kleiner dan het bovenste getal *v*, gelijk in de twee eerste vakken *H*; dan is het volgende standpunt van het terrein zoo veel hooger dan het

T

on

onmiddellijk voorgaande gelegen, als het verschil duimen bedraagt; aldus ligt (zie de Tafel) het tweede standpunt 13.92 duimen hooger, dan het eerste, en het derde standpunt 10.40 duimen hooger dan het tweede, enz.; dit hooger liggen, wordt aangewezen door het teeken +. Maar is, in zulk een vak *H*, het onderste getal grooter dan het bovenste, dan moet men het bovenste getal van het onderste aftrekken, en voor het verschil, het teeken — stellen; hetgeen dan te kennen geeft, dat het volgende standpunt zoo vele duimen lager ligt, dan het naastvoorgaande. Alzoo ligt het vierde standpunt 22.67 duimen lager dan het derde standpunt, en het vijfde 13.49 duimen lager dan het vierde, enz.

Wanneer men de hoogte van elk standpunt tot eerste wil herleiden, moet men de hoogte van het eerste standpunt, natuurlijk als nul aanmerken. Men schrijve dan, in het eerste vak *K*, van de derde kolom, bij *, die hoogte 0.00 duimen, en bringe daar onder de hoogte N°. 2 gelijk 13.92 duimen, men telde deze getallen bij elkander; dan zal men, in het tweede vak *K*, bij *, de hoogte van het tweede standpunt + 13.92 duimen vinden. Hier onder de hoogte van het derde standpunt, welke is + 10.40 duimen gesteld, en bij de voorgaande opgeteld hebbende; dan zal men, voor ligging van het derde standpunt, boven het eerste + 24.32 duimen vinden. Alzoo voortgaande, telt men de getallen, die in elk vak komen, bij elkander, als wanneer men nevens de nummers 1, 2, 3, 4, 5, enz. zal vinden staan, de getallen van duimen, welke de standpunten, door die nummers aangewezen, hooger of lager zullen liggen, dan het eerste standpunt. Op deze wijze zal het blijken, dat het zevende standpunt 51.61 duimen lager ligt dan het eerste.

Wanneer het werk op deze wijze wordt ingerigt, dan is alles gemakkelijk, eenvoudig en met een opslag van het oog te overzien, en dit is van geen gering belang, wanneer men uitgestrekte waterpassingen uit te voeren heeft.

§ 582. Om uit eene waterpassing, het profiel van eenig terrein in teekening voor te stellen, zoo trekke men *Fig. 222*, eene

eene onbepaalde rechte lijn *OX*, die men voor de waterpaslijn aanneemt, en bringe op dezelve, de afstanden der standpunten over; nemende $OP = 117$; $PQ = 96$; $QR = 143$ enz. deelen van eene Schaal, die Rijnlandfche Roeden voorstellen, men trekke voorts door de punten *O*, *P*, enz. loodlijnen, en men neme op dezelve, naar eene grootere schaal, die Rijnlandfche Duimen voorstelt, de bevondene hoogten of laagten, van de lijn *OX*, naar boven of naar beneden, dan zullen de punten van het terrein door de uiteinden dezer loodlijnen worden afgebeeld.

§ 584. Het gebeurt dikwijls, dat men het profiel van een schielijk opklimmend terrein, van een heuvel of berg, moet bepalen (zie *Fig. 226*.) In dit geval is het waterpas van RAMSDEN, of LENOIR, minder geschikt, omdat de afstanden te kort moeten genomen worden, en het ook moeilijk te plaatsen is. Tot het verrigten van zulk eene waterpassing gaat met op de volgende wijze te werk.

Men voorzie zich in de eerste plaats, van twee of meer bakken *Aa*, *Bb*, *Cc*, enz. van onder naar boven in Rijnlandfche duimen verdeeld zijnde, en voorts van eenen regel (in de figuur door *BG*, *CG*, *Dc*, *Ed*, *Fe*, afgebeeld,) waaraan men de lengte van 12 tot 20 voeten geven kan, en welke zoo stevig gemaakt is, dat hij niet merklijk door zijne zwaarte doorbuigt, deze regel is, van *B* naar *G*, in voeten en duimen verdeeld, en in het midden bij *ab* voorzien is, van een gewoon timmermans waterpas. Men stelde bij het begin van het opklimmend terrein, bij *A*, eene baak *Aa* zoo na mogelijk regt overeind, men bringe de waterpasregel (denzelve horizontaal in de hand houdende) zoo verre vooruit, als zijne lengte zulks toelaat; men bringe dezelve, door middel van het paslood *ab*, zoo naauwkeurig mogelijk waterpas, en tevens de baak *Aa* regt op houdende, teekene men de hoogte *Aa* en den afstand *Ba* op. Dit gedaan hebbende, stelde men in het standpunt *B* de baak *Bb*, en bringe op dezelfde wijze als voren, den regel in de horizontale stelling *Cb*, wederom aanteekenende de hoogte *Bb* en den afstand *Cb*. Op deze

292 ALLERE. GROND. DER MEETK. III AFD. VIII HOOFD.

deze wijze voortgaande, zal men, van standpunt tot standpunt voortgaande, bij voorbeeld, de volgende waarnemingen verkrijgen.

<i>Hoogten.</i>	<i>Afstanden.</i>
<i>Aa</i> = 137,3 dm.	<i>Ba</i> = 12,7 voeten.
<i>Bb</i> = 96,8 —	<i>Cb</i> = 15,8 —
<i>Cc</i> = 107,3 —	<i>Dc</i> = 11,9 —
<i>Dd</i> = 92,8 —	<i>Ed</i> = 14,9 —
<i>Ee</i> = 132,9 —	<i>Fe</i> = 15,1 —
<i>enz.</i>	<i>enz.</i>
<i>enz.</i>	<i>enz.</i>

Wanneer het terrein altijd opklimt, dan behoeft men slechts de getallen, in de eerste kolom staande, op te tellen; doch, wanneer het afdaalt, af te trekken, om de hoogte van elk standpunt tot het eerste te herleiden; de getallen in de tweede kolom worden altijd opgeteld. Alzoo zal het punt *F* boven het punt *A*, ter hoogte van 567,1 duimen, of 47 voeten 3,1 duim, terwijl de afstand van *A* tot *F* tot den horizon overgebracht zal zijn 70,4 voeten.

