

ven, niet te doe.
Stelsel geboren w

2. VOORBEELD
caliters en 4 lit.

3. Hoe veel be
meter?

4. Ecne hoeve
mes, is ingekog
logramme te sta

5. Maar ind
heeft, daaraan

de kilogramme

6. Een akker

granen opgelev

kend, opgelevera

7. Een schilde

meter 0,83 Franc

van eene schut

hoog is?

(12) Helder dit

E

ALLEREERSTE GRONDEN

DER

CIJFERKUNST,

TWEEDE DEEL,

BEVATTENDE DE LEER DER EVENREDIGHEDEN, DER
REKEN- EN MEETKUNSTIGE REEKSEN; DE VERKLA-
RING VAN DE EIGENSCHAPPEN EN HET GEBRUIK
DER LOGARITHMEN; BENEVENS HET TREKKEN
VAN DE QUADRAATS- EN CUBUS-WORTE-
LEN, IN HEELE EN GEBROKENE GETAL-
LEN, EN TIENDEELIGE BREUKEN,

Alles toegepast op voorbeelden, getrokken uit het
dagelijksch leven, den Koophandel, de Kunsten en
Wetenschappen, en bijzonderlijk ingerigt naar de
behoefte van den tegenwoordigen tijd;

OPGESTELD,

TEN GEBRUIKE DER SCHOLEN EN COLLEGIEN,

DOOR

JACOB DE GELDER,

*Profesfor voor de hoogere Wiskunde, als mede voor de
Astronomische, Hydraulische, Physische, hoogere
Mechanische en Geodetische Wetenschappen, aan
de Artillerie- en Genie-School, te Delft.*

Te AMSTERDAM en IN DEN HAAG,

BIJ DE GEBROEDERS VAN CLEEF,

1814.

I N H O U D

V A N H E T

T W E E D E D E E L.

VII HOOFDDEEL.	Over de Evenredigheden, in het algemeen.	bladz. 1.
XXXV Les.	Inleiding tot de leer der Evenredigheden, bevattende de verklaring van eenige zaken, woorden en teekens.	ibid.
XXXVI Les.	Over de Meetkundige Redens en Evenredigheden, in het algemeen.	12.
XXXVII Les.	Over de Evenredigheid der Getallen, derzelver algemeene eigenschappen, en bijzonderlijk over de gewone of regte Evenredigheid.	22.
	I Hoofdeigenschap.	24.
	II Verplaatzing van de termen eener evenredigheid.	27.
	III Evenredigheden, welke uit eene gefelde Evenredigheid, door vermenigvuldiging of deeling van sommige van derzelver termen, afgeleid worden.	28.
	IV Evenredigheden, welke uit de sommen of verschillen van sommige termen eener evenredigheid ontstaan.	30.
	V Evenredigheden, welke uit twee of meer evenredigheden gemaakt worden.	32.
XXXVIII Les.	Verdere toepassing van de verklaarde eigenschappen der Evenredigheden, behelzende de verklaring van den REGEL VAN DRIEN.	33.
XXXIX Les.	Vervolg van den Regel van Drien, bestaande in de beschouwing van alle zijne bijzondere gevallen.	43.

	I Regel van Drien in geheele getallen.	ibid.
	II Regel van Drien in gebrokene getallen.	52.
XL LES.	Vervolg der voorgaande Les. Nadere beschouwing van den Regel van Drien,	56.
XLI LES.	Over de aaneengeschakelde Evenredigheden, en derzelver gebruik, in de zooge-	
	naamde Gezelschaps-Rekening.	62.
XLII LES.	Over de omgekeerde Evenredigheden, en den omgekeerden Regel van Drien;	67.
XLIII LES.	Over de zamengestelde Evenredigheden.	73.
XLIV LES.	Toepassing der zamengestelde Evenredigheden.	82.
XLV LES.	Over de verdere eigenschappen der Evenredigheden, derzelver toepassing, en inzonderheid over den zoogenaamden KETING-REGEL.	99.
VIII HOOFDDEEL.	Verdere toepassing van het voorgaande.	111.
XLVI LES.	Over de Percent-Rekening.	ibid.
	Intrest-Rekening.	ibid.
	Rabat-Rekening.	117.
	Korting voor promptte betaling.	118.
XLVII LES.	Over het berekenen van Winst en Verlies in den Handel.	119.
XLVIII LES.	Over het berekenen van de middelbare waarde der vermengde Koopwaren.	124.
XLIX LES.	Over het gehalte van het Goud en Zilver.	127.
L LES.	Oplossing van eenige algemeene Vraagstukken.	136.
IX HOOFDDEEL.	Over het trekken van den Quadraats- en Cubus wortel.	143.
LI LES.	Over het trekken van den Quadraats-wortel.	ibid.
LII LES.	Over het trekken van den Cubus-wortel.	155.
X HOOFDDEEL.	Over de Reken- en Meetkundige Reeksen en de Logarithmen.	162.
LIII LES.	Over de Rekenkundige Reeksen.	ibid.
LIV LES.	Over de Meetkundige Reeksen.	167.
LV LES.	Over de Logarithmen en derzelver Eigenschappen.	173.
LVI LES.	Verklaring van de inrigting der Logarithmen-tafelen.	177.
LVII LES.	Over het gebruik der Logarithmen.	183.
	ALLER-	

C I J F E R K U N S T ,

T W E E D E D E E L .

Over de Evenredigheden, de Reeksen en de Logarithmen.

VII HOOFDDEEL. Over de Evenredigheden, in het algemeen.

XXXV LES. Inleiding tot de leer der Evenredigheden, bevattende de verklaring van eenige zaken, woorden en teekens.

461. De vier grondbewerkingen der Cijferkunst worden, gelijk reeds in het eerste Deel gebleken is, door bijzondere teekens uitgedrukt.

1°. Optellen, tot een geheel vereenigen, wordt door het teeken + uitgedrukt. (1) Aldus zegt $3+4+5$ de som der getallen 3, 4 en 5.

2°. Afrekken, verminderen met, wordt uitgedrukt door het teken - (2). Aldus wordt $17-12$ gelezen: 17 met 12 verminderd, of 12 van 17 afgetrokken.

3°. Vermenigvuldigen of multipliceren, wordt uitgedrukt door het teeken $\times$ (3). Aldus wordt 3×5 gelezen: het getal drie vijfmaal genomen, of drie vermenigvuldigd met vijf.

4°. Om uittedrukken, dat een getal door een ander gedeeld wordt, schrijft men (even als in een gebroken,) het

(1) Wat is het teeken van de Additie?

(2) Wat is het teeken van de Subtractie?

(3) Wat is het teeken van de Multiplicatie?

dividendum boven en den deeler onder. (4) Aldus beteekent $\frac{27}{3}$, het getal 27 gedeeld door 3; het getal 27 gemeten door 3; een derde gedeelte van 27; of ook wel, wanneer men het als een gebroken beschouwt, *zeven-en-twintig derde deelen*. (5) Ook drukt men eene divisie uit door eerst het deeltal en daarna den deeler te schrijven, en tusschen beiden twee punten (:). (6) Aldus is $27:3$ hetzelfde als $\frac{27}{3}$ enz. (7)

462. Deze teekens kunnen, op oneindig vele wijzen, met getallen, worden zamengesteld. (8)

a) $7 + 13 + 11 - 17 \dots$ wordt gelezen: de som der getallen 7, 13 en 11 verminderd met 17.

b) $3 \times 6 + 9 - 3 \times 2 \dots$ wordt gelezen: het product der getallen 3 en 6 opgeteld met 9, en deze som verminderd met het product der getallen 2 en 3.

c) $3 \times 5 \times 6 \times 7 - 7 \times 9 \dots$ wordt gelezen: het product der getallen 3, 5, 6 en 7 verminderd met het product der getallen 7 en 9.

d) $\frac{13 + 11 + 7 - 11}{5} + \frac{18}{9}$ wordt gelezen: de som van twee quotiënten, waar het eerste bestaat uit de som der getallen 13, 11 en 7 verminderd met 11, dit verschil gedeeld door 5 en het tweede het quotient van 18 gedeeld door 9.

463. Zulke zamenstellingen van getallen en teekens noemt men *zamengestelde uitdrukkingen*. (9) Deze zamengestelde uitdrukkingen stellen altijd een geheel of gebroken getal voor, en hebben altijd eene zekere waarde. (10) Men vindt deze waarde, door de getallen, welke in deze uitdrukking voorkomen, naar aanwijzing van de teekens, waarmede zij aan elkander verbonden zijn, optellen, afzetrekken, te vermenigvuldigen of te deelen. (11)

In het voorbeeld a, zeg ik 7 en 13 maakt 20; 20 en 11 maakt 31; 31

- (4) Hoe wordt een Divisie uitgedrukt?
 (5) Geef een voorbeeld?
 (6) Wordt de Divisie ook nog anders uitgedrukt?
 (7) Geef een voorbeeld?
 (8) Kan men deze teekens ook zamenstellen? Geef hiervan voorbeelden?
 (9) Wat naam geeft men aan de zamenstellingen van zulke getallen en teekens?
 (10) Wat merkt men in zulke zamengestelde uitdrukkingen op?
 (11) Hoe vindt men de waarde van zulk eene uitdrukking?

min 17 geeft 14. Het getal 14 is derhalve de waarde van de uitdrukking in a.

In het voorbeeld b, zeg ik 3 maal 6 is 18; 18 en 9 geeft 27; 27 verminderd met 3 maal 2 of 6 blijft 21. Het getal 21 is dan de waarde van de uitdrukking in b.

In het voorbeeld c, zeg ik 3 maal 5 is 15; 15 maal 6 is 90; 90 maal 7 is 630; 630 verminderd met 7 maal 9 of met 63 blijft 567. Het getal 567 is dan de waarde van de uitdrukking in c.

In het voorbeeld d, zeg ik 13 en 11 maakt 24; 24 en 7 maakt 31; 31 min 11 blijft 20; 20 gedeeld door 5, komt 4 voor het quotient; bij dit quotient 4 moet het quotient van 18, gedeeld door 9, opgeteld worden; dit quotient is 2; derhalve is 4 opgeteld met 2, dat is 6, de waarde van de uitdrukking in d.

464. Zulke bewerkingen of uitrekeningen noemt men de *uitdrukking tot hare waarde te brengen*, en hierdoor brengt men haar altijd tot een enkel getal, en gevolgelijk tot de eenvoudigste gedaante. (12)

465. Om uitdrukkingen, dat twee dingen even groot zijn, of dat twee uitdrukkingen dezelfde waarde hebben, gebruikt men het teeken $=$, dat gelezen wordt *gelijk* of *zoo veel waard als*. (13) Aldus wordt $21 \text{ Francs} = 10 \text{ Guldens}$ gelezen *21 Francs zijn zoo veel waard als 10 guldens*; en wanneer men geschreven vindt $7 + 3 + 16 - 2 = 4 \times 6$, wil zulks zeggen: *dat de som der getallen 7, 3 en 16 met 2 verminderd, zoo veel waard is als het product der getallen 4 en 6*. (14)

466. Uitdrukkingen of grootheden, welke door het teeken $=$ aan elkander verbonden zijn, noemt men eene *vergelijking*. (15) Aldus is $7 + 3 + 16 - 2 = 4 \times 6$ eene vergelijking. (16) De uitdrukkingen, welke in eene vergelijking door het teeken $=$ aan elkander verbonden zijn, noemt men de *leden dezer vergelijking*. *Wat voor het teeken $=$ staat het voorste lid, en wat achter hetzelfde staat het achterste*. (16) Alle enkele getallen, producten of breuken, welke in eene dezer leden door de teekens $+$ of $-$ aan elkander verbonden zijn, noemt men de *termen van dit lid*. (17)

467. Eene gestelde vergelijking is waar, indien de waarde van elk der leden hetzelfde getal geeft. Zij is valsch

- (12) Wat doet men eigenlijk, wanneer men zulk eene uitdrukking tot hare waarde brengt?
 (13) Door welk teeken wordt de gelijkheid van twee dingen uitgedrukt?
 (14) Geef een voorbeeld van het gebruik van het teeken gelijk?
 (15) Wat verstaat men door eene vergelijking?
 (16) Wat verstaat men door de leden eener vergelijking?
 (17) Wat verstaat men door de termen van de leden eener vergelijking?

wanneer zulks geen plaats heeft. (18) Aldus is $3 \times 4 + 7 = 3 \times 6 + 1$ eene ware, maar $3 \times 5 + 1 = 20 - 3 \times 3$ eene valsche of onware vergelijking. (19)

468. De vergelijkingen hebben vele fraaie eigenschappen, waaronder de volgende de voornaamste zijn.

469. I EIGENSCHAP. *Wanneer men elk van de leden eener vergelijking met hetzelfde getal vermeerderd of vermindert, dan verkrijgt men eene nieuwe vergelijking.* (20)

Bij voorbeeld, wanneer men bij de beide leden van de vergelijking

$$7 + 18 - 3 - 1 = 4 \times 5 + 1$$

optelt het getal 17, dan zal

$$7 + 18 - 3 - 1 + 17 = 4 \times 5 + 1 + 17$$

eene nieuwe vergelijking zijn; en wanneer men van elk lid aftrekt het getal 8, dan zal

$$7 + 18 - 3 - 1 - 8 = 4 \times 5 + 1 - 8$$

insgelijks eene nieuwe vergelijking zijn. (21)

De reden hiervan is klaar; want men doet hier niet anders dan twee gelijke grootheden met hetzelfde getal of dezelfde grootheid te vermeerderen of te verminderen, en de sommen of verschillen zijn klaarblijkelijk gelijk. (22)

470. II EIGENSCHAP. *Wanneer men de overeenkomstige leden van twee of meer vergelijkingen bij elkander optelt of van elkander aftrekt, dan maken de sommen of verschillen de leden eener nieuwe vergelijking.* (23)

Men stelde onder elkander de vergelijkingen

$$7 \times 3 + 5 - 9 = 3 \times 4 + 5$$

$$7 + 3 = 20 \times \frac{1}{2}$$

Indien men dan de leden dezer vergelijkingen bij elkander optelt of van elkander aftrekt, zal men de vergelijkingen

$$7 \times 3 + 5 - 9 + 7 + 3 = 3 \times 4 + 5 + 20 \times \frac{1}{2}$$

$$7 \times 3 + 5 - 9 - 7 - 3 = 3 \times 4 + 5 - 20 \times \frac{1}{2}$$

verkrijgen; waarvan de waarheid uit het voorgaande blijkt. (24)

(18) Wanneer is eene vergelijking waar?

(19) Wanneer is zij valsch?

(20) Welke is de eerste eigenschap der vergelijkingen?

(21) Helder deze door voorbeelden op?

(22) Op welke gronden steunt dese eerste eigenschap?

(23) Welke is de tweede eigenschap?

(24) Verklaar dezelve door voorbeelden?

471. III EIGENSCHAP. *Wanneer men beide leden eener vergelijking met hetzelfde getal vermenigvuldigt of door hetzelfde getal divideert; dan maken de producten of quotienten eene nieuwe vergelijking.* (25)

Stellen wij de vergelijking

$$18 + 6 - 9 = 8 + 7$$

vermenigvuldigen wij alle de termen dezer vergelijking met 2; dan zal men vinden:

$$36 + 12 - 18 = 16 + 14$$

of divideeren wij derzelver termen door 3; dan zal men hebben:

$$6 + 2 - 3 = 2\frac{2}{3} + 2\frac{2}{3}$$

hetwelk eene nieuwe vergelijking geeft. (26)

Men merke wel op, dat alle de termen van elk lid met den aangenomen factor gemultipliceerd of met den aangenomen factor moeten gedeeld worden. (27)

De reden nu van deze eigenschap is klaar; want de leden eener vergelijking zijn gelijke grootheden, welke slechts onder verschillende gedaanten zijn voorgesteld, en nu zijn de gelijknamige veelvouden en de gelijknamige evenmatige deelen van gelijke grootheden altijd gelijk. (28)

472. IV EIGENSCHAP. *Wanneer men de overeenkomstige leden van twee of meer vergelijkingen met elkander vermenigvuldigt of door elkander deelt, dan maken de producten of quotienten eene nieuwe vergelijking.* (29)

Zulks is uit de voorgaande eigenschap blijkbaar.

473. Men redeneert dikwijls over bekende en onbekende getallen, zonder dat men, in dit redeneren, met de eigenlijke waarde dezer getallen te doen heeft. (30) In dit geval, is het nuttig, dat men de bekende getallen door a , b , c , d enz., de eerste letters en de onbekende door de laatste letters van het alphabeth uitdrukke, (31) en dan worden deze bekende en onbekende getallen, door de teekens van additie, subtractie, multiplicatie en divisie aan elkander ver-

(25) Welke is de derde eigenschap?

(26) Helder die eigenschap door voorbeelden op?

(27) Wat behoort men, bij de toepassing van die eigenschap, onder het oog te houden?

(28) Op welke gronden steunt deze eigenschap?

(29) Welke is de vierde eigenschap der vergelijkingen?

(30) Op welk eene wijze redeneert men somtijds over de getallen?

(31) Op welk eene wijze drukt men de getallen uit, wanneer men op derzelver waarde niet let?

bonden. Men verkrijgt dan uitdrukkingen of vergelijkingen, die den naam van *stelkundige uitdrukkingen of vergelijkingen* dragen. (32) Dit alles zal door volgende voorbeelden klaarder en verstaanbarer worden.

474. Wanneer men twee getallen denkt, dan kan men zich het product dezer twee getallen voorstellen en zeggen: het product dezer getallen door een van dezelve gedeeld zijnde, geeft het quotient het andere getal, gelijk zulks uit de gronden bekend is. Doch men kan dit alles, zonder zoo veel woorden te gebruiken, korter in teekens uitdrukken; men noeme de twee gedachte getallen a en b ; hun product p ; dan wordt het geen zoo even in woorden gezegd was, in teekens, aldus voorgesteld:

$$a \times b = p; a = \frac{p}{b} \text{ en } b = \frac{p}{a}$$

en zulks heet, het geen men denkt, redeneert en besluit, in stelkundige teekens, te schrijven of uitdrukken. (33)

475. Op zulk eene wijze, kan alles, wat men zich voorstelt en denkt, alle gevolgen die men, uit eene gestelde betrekking, tusschen getallen en getallen scheidt, in zulke korte en alles omvattende teekens, worden uitgedrukt, indien maar niet de bijzondere waarde, der gedachte of voorgestelde getallen, op de gevolgtrekkingen eenigen invloed hebben. Alzoo zal de uitdrukking

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n} = \frac{a:n}{b:n}$$

zeggen: de waarde van een gebroken verandert niet, wanneer men derzelfs teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigt of deelt. — De uitdrukking

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

zal zeggen: het product van twee gebroken is gelijk aan het product van derzelver tellers, gedeeld door derzelver noemers; en

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

zal zeggen: het quotient van twee breuken wordt gevonden, wanneer men het deeltal met het omgekeerde van den deeler vermenigvuldigt. (34)

476. Wanneer men zich aan de beteekenis en het gebruik van zulke teekens gewend heeft, dan kan men gemakkelijk

(32) Wat naam geeft men aan de uitdrukkingen, in welke de getallen op eene algemeene wijze zijn voorgesteld?

(33) Geef een voorbeeld van die wijze van uitdrukken?

(34) Geef nog meer voorbeelden?

de regels ontdekken, waardoor men onbekende getallen vinden kan. (35)

Bij voorbeeld: *Ik denk een zeker getal, wanneer ik dit getal met eenig getal a vermenigvuldig, verkrijg ik een getal b ; welk is nu de regel, om dit gedachte getal te vinden?* Ik stel dit gedachte getal gelijk aan x ; dan is

$$a \times x = b; \text{ derhalve } x = \frac{b}{a}.$$

Ik moet derhalve mijn product divideeren door den vermenigvuldiger, om het gedachte getal te vinden. Ik zou dit nu ook wel, zonder deze teekens, door redenering, hebben kunnen vinden; maar, wanneer de bekende en onbekende getallen, op eene meer zamengestelde wijze, van elkander afhangen, zou het onbekende getal, zonder deze onderlinge en dikwijls zeer zamengestelde afhankelijkheid, door zulke zichtbare en juiste teekens uitdrukken, door de redenering alleen, zoo gemakkelijk niet gevonden worden; omdat onze voorstellingskracht zoo zwak is, dat zij, zonder de hulp van zichtbare teekens, den samenhang der redenering, welke tot het onbekende brengen moet, niet met zekerheid zou kunnen volgen. Bij voorbeeld, wanneer men zich voorstelt *een zeker getal a in twee deelen zoodanig te verdeelen, dat de helft van het grootste deel gelijk zij aan tweemaal het kleinste deel*; dan zal men, door redenering, zoo gemakkelijk niet vinden, hoe de deelen van dit getal, door berekening, gevonden worden: maar gebruikt men de boven verklaarde teekens, dan zal dit zeer gemakkelijk gaan. Men stelde het grootste deel $= x$; dan is het kleinste deel $= a - x$, en nu moet

$$\frac{1}{2} x = 2 \times (a - x)$$

zijn; vermenigvuldigt men de leden dezer vergelijking met twee, dan heeft men:

$$x = 4(a - x) = 4a - 4x$$

en telt men bij beide leden dezer vergelijking $4x$, dan heeft men:

$$5x = 4a$$

en eindelijk beide leden dezer laatste vergelijking door vijf deelen de x :

$$x = \frac{4}{5} a \text{ het grootste}$$

$$a - x = a - \frac{4}{5} a = \frac{1}{5} a \text{ het kleinste deel;}$$

en nu ziet men: dat, om de vraag op te lossen, het grootste deel van het gegeven getal gelijk aan vier-vijfde van hetzelfde, en het kleinste gelijk aan een-vijfde van hetzelfde moet genomen worden. (36)

477. *De kunst, om over de getallen en derzelver oneindig vele samenstellingen en betrekkingen, welke daaruit geboren*

(35) Wat voordeel zal het geven, indien men zich met deze teekens gemeenzaam maakt?

(36) Wijst dit voordeel een weinig uitvoeriger aan?

A. 4.

worden, door middel van zulke teekens, te oordeelen en te redeneren, noemt men STELKUNST of ALGEBRA; (37) zij is van de Cijferkunst daarin onderscheiden, dat zij, in elk voorkomend geval, leert: hoe de gegebene getallen moeten behandeld worden, om uit de gegebene betrekking tusschen de bekende en de onbekenden, de onbekende te vinden; de Algebra vindt derhalve de regels en de Cijferkunst past dezelve toe. (38)

478. Het oogmerk is niet, om in dit tweede deel der Cijferkunst, de Stelkunst of Algebra te leeren; maar, daar wij de leer der Evenredigheden en de menigvuldige toepassingen, welke van dezelve afhangen, grondig en volledig wenschen te verklaren, en zulks, zonder eenig begrip van den aard en het gebruik der stekkundige teekens verkregen te hebben, niet, dan op eene zeer omslagtige wijze, geschieden kan; hebben wij dit weinige, hetwelk tot dit einde voldoende is, laten voorafgaan. Men make zich bovendien nog met de volgende dingen gemeenzaam.

479. Het product van twee getallen a en b , dat door $a \times b$ wordt uitgedrukt, kan ook geschreven worden ab , door het teeken $\times$, dat hier niet volstrekt noodig is, weg te laten. Op deze wijze is $abcd$ het gedurig product der getallen a , b , c en d ; $ab + cd$ beteekent het product aër getallen a en b opgeteld met het product der getallen c en d . (39)

480. Wanneer een bepaald met een onbepaald getal vermenigvuldigd wordt, kan men insgelijks het teeken $\times$ weglaten, en zulk een bepaald getal of bepaalde factor wordt dan gemeenelijk *coëfficiënt* genoemd. Bij voorbeeld, $3a$ is hetzelfde als $3 \times a$ en beteekent driemaal het getal a ; $17ab$ beteekent 17 maal het product der getallen a en b ; $\frac{3}{4}abc$ beteekent drie-vierde deelen van het product der getallen a , b en c . (40)

481. Wanneer de som of het verschil van twee of meer bepaalde of onbepaalde getallen met een ander getal moet vermenigvuldigd worden, moet men, om dubbelzinnigheid

voortekomen, de som of het verschil dezer getallen tusschen twee haakjes stellen. (41)

$$(4 + 5 + 6) \times 8 \dots\dots$$

beteekent de som der getallen 4, 5 en 6, vermenigvuldigd met 8; beteekent hetzelfde als 120.

$$(13 - 9 - 2 + 1) \times 13 \dots$$

beteekent de som der getallen 13 en 1, verminderd met de som der getallen 9 en 2, en dit verschil vermenigvuldigd met 13; beteekent hetzelfde als 39.

$$(3 + 6) \times (8 + 9) \dots\dots$$

beteekent de som der getallen 3 en 6, te vermenigvuldigen met de som der getallen 8 en 9, beteekent 9 maal 17, dat is 153.

$$(a + b) \times c \dots\dots\dots$$

beteekent de som der getallen a en b , vermenigvuldigd met c .

$$(a - b) \times (c + d) \dots\dots$$

beteekent het verschil der getallen a en b , vermenigvuldigd met de som der getallen c en d .

$$\frac{ab}{c} \times (p + q - r) \dots\dots$$

beteekent het quotiënt, dat men verkrijgt, wanneer men het product der getallen a en b door c deelt, te vermenigvuldigen met de som der getallen p en q verminderd met het getal r .

482. Wanneer men de factoren van een gedurig product $abcdefg$ gelijk neemt, dan ontstaat 'er een gedurig product van gelijke factoren, en men geeft aan zulk product den naam van magt. (42) Men onderscheidt de magten in tweede, derde, vierde en volgende magten. (43) Aldus is aa of $a \times a$ de tweede magt van a ; aaa de derde magt van a ; $aaaa$ de vierde magt van a ; $aaaaa$ de vijfde magt van a , enz. (44). Omdat, in de Meekunst, de inhoud van een vierkant gevonden wordt, wanneer men de zijde met zichzelf multiplceert of die zijde tot de tweede magt brengt, beteekent tweede-magt van een getal hetzelfde als vierkant van een getal, (45) en omdat men den inhoud van eenen cubus

(37) Wat is de Algebra of Stelkunst?

(38) Wat is het onderscheid tusschen de Algebra en Cijferkunst?

(39) Hoe wordt het product van twee getallen, in leetters uitgedrukt, geschreven?

(40) Hoe gaat men daarin te werk, indien 'er bepaalde getallen in het product voorkomen?

(41) Hoe maakt men het, indien de som of verschil van twee of meer getallen met een ander getal moet vermenigvuldigd worden?

(42) Wat is eene magt van een getal?

(43) Hoe onderscheidt men de magten?

(44) Geef hiervan voorbeelden?

(45) Wat is het kwadraat of vierkant van een getal?

vindt; wanneer men de lengte, breedte en hoogte (die in den cubus even groot zijn,) met elkander vermenigvuldigt, zoo beteekent derde-magt van een getal hetzelfde als de cubus van dat getal. (46)

483. Het getal a , dat in de wording eener magt onophoudelijk met zich zelve gemultipliceerd wordt, noemt men wortel van die magt. (47) Omdat het te lastig is, in de uitdrukking eener magt, (gelijk in $aaaaaa$, dat is in de zevende magt van a) den wortel bij herhaling te schrijven, zoo schrijft men den wortel slechts eens, en men stelt boven aan het hoofd van dien wortel het getal, dat te kennen geeft hoe veelmaal die wortel herhaald wordt, en men noemt alsdan dit getal den exponent van die magt. (48)

Alzoo is

a^2 of aa de tweede magt van a .

a^3 of aaa de derde magt van a .

a^4 of $aaaa$ de vierde magt van a .

a^5 of $aaaaa$ de vijfde magt van a .

a^{12} de twaalfde magt van a .

a^{100} de honderdste magt van a .

484. De waarde van de magt van een getal te berekenen, is dit getal tot die magt te verheffen, en dit geschiedt door eenvoudig multipliceren. (49). Bij voorbeeld, om de tweede en de volgende magten van het getal 3 te vinden, werkt men aldus: $a^2 = 3 \times 3 = 9$ de tweede magt van a ; $a^3 = 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$ de derde magt van a ; $a^4 = 81$; $a^5 = 243$; $a^6 = 729$; $a^7 = 2187$; $a^8 = 6561$; $a^9 = 19683$; $a^{10} = 59049$, enz. (50)

485. Wanneer men de magt van een getal kent, kan men, ook omgekeerd, begeren te weten, uit welk getal, of uit welken wortel, die magt ontstaan zij? (51) Men noemt de handelwijze, waardoor men dit getal of dien wortel vindt, in het algemeen de worteltrekking. (52). Is het gewone getal eene tweede magt, dat is, een quadrat of vierkant

getal, noemt men die bewerking de *quadraats, vierkants of tweede-magts-worteltrekking*; is het gegeven getal een cubus of derde magt, de *cubus of derde-magts-worteltrekking*; is de gegeven magt eene tiende magt, de *tiende-magts-worteltrekking*, enz. (53)

486. Deze worteltrekkingen zullen naderhand geleerd worden. Voor het tegenwoordige is het genoeg te zeggen: dat, in het algemeen, de wortel eener magt, door het teeken $\sqrt{}$, wordt voorgesteld, en de soort van de magt door den exponent van de gegeven magt bij dit teeken te voegen. (54) Aldus is

$\sqrt[2]{a}$, of eenvoudig $\sqrt{a}$, de vierkants-wortel of tweede-magts-wortel uit a .

$\sqrt[3]{a}$ de cubus of derde-magts-wortel uit a .

$\sqrt[4]{a}$ de vierde-magts-wortel uit a .

$\sqrt[5]{a}$ de vijfde-magts wortel uit a .

$\sqrt[16]{a}$ de zestiende-magts-wortel uit a . (55)

487. Zijnde de tweede-magts-wortel uit een getal een getal a , dat tot de tweede magt verheven zijnde, het getal a voortbrengt: en de cubus-wortel uit a een getal, welks derde magt het getal a geeft, enz. (56)

488. Wanneer de som of het verschil van twee of meer getallen tot eenige magt verheven, of uit die som of dat verschil eenige magts-wortel moet getrokken worden, stelt men die som of dit verschil tuschen twee haakjes, en men brengt den exponent der magt of het wortelteeken buiten deze haakjes. (57)

(53) Dragen die worteltrekkingen ook onderscheidene benamingen?

(54) Hoe wordt de bewerking der worteltrekking of de wortel uit een getal uitgedrukt?

(55) Geef hier van voorbeelden?

(56) Omschrijf nader, wat men door den quadraats- of cubus-wortel verstaat?

(57) Op welk eene wijze drukt men uit, dat de som of het verschil van twee of meer grootheden tot eene magt verheven, of daaruit eenige magts-wortel moet getrokken worden?

(46) Wat is de cubus van een getal?

(47) Wat is de wortel van eene magt?

(48) Wat verstaat men door de exponent van eene magt?

(49) Hoe wordt een getal tot eenige magt verheven?

(50) Geef hier van een voorbeeld?

(51) Welk omgekeerd vraagstuk volgt uit de magts verheffing?

(52) Hoe noemt men de handelwijze, door welke de wortel van eenige magt gevonden wordt?

$(a + b - c)^2$	beteekent de tweede magt of het vierkant van het getal , dat men verkrijgt, indien men van de som der getallen a en b het getal c afrekt.
$(a^2 + b^2)^c$	beteekent de z .de magt van de som der vierkanten van de getallen a en b .
$\sqrt[3]{(x^3 - y^3)}$	berekent de cubus-wortel uit het verschil van de cuben , of van de derde magten der getallen x en y . (58)

XXXVI LES. Over de Meetkundige Reden en Evenredigheden, in het algemeen.

NB. *Der de Leerling tot het lezen van deze Les overgaat, behoort bij vooraf de IX Les opzettelijk te herhalen.*

489. De Wiskundigen onderscheiden drieërlei foorten van Evenredigheden of Proportien: 1°. de *Arithmetische* of *Rekenkundige*: 2°. de *Geometrische* of *Meetkundige* en 3°. de *Harmonische*. (1) De Rekenkundige, welke van weinig belang zijn, zullen wij, in eene bijlage tot dit deel, leeren kennen; van de Harmonische hebben wij in onze *Wiskundige Les*en gesproken; wij verklaren hier alleen de Meetkundige reden en evenredigheid. (2) In het vervolg, zal het woord *REDEN meetkundige reden*, en het woord *EVENREDIGHEID* eene *meetkundige evenredigheid* beteekenen. (3)

490. Eene *Evenredigheid* of *Proportie* bestaat uit de *gelijkheid van twee redens*. (4)

491. 'Er kan geene reden dan tusschen twee *gelijkslachtige* grootheden bestaan. (5)

492. Twee *gelijkslachtige* grootheden zijn *gelijk* of *ongelijk*; dat is, *even groot*, of eene van dezelve is *grooter* dan de andere. (6)

493. Wanneer twee *gelijkslachtige* grootheden *gelijk* zijn, dan bestaat 'er eene rede van *gelijkheid* tusschen dezelve, en

(58) Geef voorbeelden van deze schrijfwijze?

(1) Hoe velerlei soort van Evenredigheden zijn 'er?

(2) Welke soort van Evenredigheid wordt hier behandeld?

(3) Wat verstaat wij in het vervolg door de woorden *reden* en *evenredigheid*?

(4) Wat verstaat men door een *Evenredigheid*?

(5) Tusschen welke grootheden kan alleen eene reden bestaan?

(6) Welke gevallen kunnen 'er plaats hebben, indien men twee *gelijkslachtige* grootheden met elkander vergelijkt?

men zegt: de *eerste* grootheid staat tot de *tweede* gelijk *een tot één*. (7)

494. Wanneer de grootheden *ongelijk* zijn, dan wordt de reden dezer grootheden door twee getallen bepaald, welke uitdrukken, hoe veelmaal de gemeene maat van deze twee grootheden op elk van dezelve begrepen is. (8)

A _____

B _____

M _____

495. 'Er zijn bij voorbeeld, twee lengten of afstanden A en B: ik stel dat deze eene gemeene maat M hebben; dat wil zeggen, dat 'er eene derde grootheid beta, welke een evenmatig deel van A en tevens een evenmatig deel van B zij: (zie art. 105.) wanneer dan de gemeene maat M in A 47 maal, en in B 18 maal begrepen is, dan wordt de reden der afstanden, A en B, door de getallen 47 en 18 voorgesteld, en men zegt: de afstand A verhoudt zich tot den afstand B, gelijk 47 zich tot 18 verhoudt. (9)

496. Zulk eene reden wordt aldus geschreven:

$$A : B = 47 : 18$$

en gelezen, zoo als in het voorgaande artikel gezegd is. (10)

497. Wanneer men, op deze wijze, twee *gelijkslachtige* grootheden met elkander vergelijkt, pleegt men deze grootheden zelve de *termen der reden* te noemen, en het gebruik heeft gewild: dat, in het opnoemen of uitspreken van eene reden, de grootheid, die men het eerst noemt, zou genoemd worden de *eerste* of de *voorgaande term*, en de grootheid, die men het laatst noemt, de *tweede* of *volgende term der reden*. (11) De eerste term der reden is alzoo de grootheid die men vergelijkt, en de tweede term de grootheid, waarmede de eerste vergeleken wordt. (12)

498. Tot het bepalen van eene rede wordt derhalve vereischt, dat men de gemeene maat der voorgestelde grootheden vinden kan, en dat men, deze gevonden hebbende, beale, hoe veelmaal de gemeene maat op elke dezer grootheden be-

(7) Hoe kan men de gelijkheid van twee grootheden anders uitdrukken?

(8) Hoe wordt de reden van twee ongelijke *gelijkslachtige* grootheden bepaald?

(9) Helder zulks door een voorbeeld op?

(10) Hoe wordt zulk eene reden uitgedrukt?

(11) Wat verstaat men door de termen van eene reden?

(12) Welke is dan eigenlijk in eene reden de voorgaande term, en welke de volgende?

grepen zij. (13) Elke twee grootheden hebben nu geene gemeene maat, (zulks wordt in den eersten Cursus der *Wiskundige Lesfen* bewezen,) en, in dit geval, kan de reden of de betrekking der twee voorgestelde grootheden niet precies in getal bepaald worden. (14) Dit geval wordt, op de aangehaalde plaats en in het tweede Boek van de *Beginfelen der Meetkunst*, opzettelijk behandeld. Hier onderstellen wij: dat de grootheden, welke men met elkander vergelijkt, eene gemeene maat hebben, en dat gevolgelyk derzelver betrekking al tijd door twee getallen kan worden uitgedrukt. (15)

499. Wanneer de reden of de betrekking van twee grootheden, op de voorgescrevene wijze, door twee getallen is uitgedrukt, dan zal men, door middel dezer getallen, kunnen bepalen, door welk geheel of gebroken getal, de eerste grootheid in éénheden van de tweede kan worden uitgedrukt. (16) Wanneer men, gelijk in het voorbeeld van *art.* 495, gevonden heeft, dat A tot B zich verhoudt, als het getal 47 tot het getal 18; dan zal daaruit volgen: dat, wanneer men A met B meet, eene grootheid, die 47 deelen, elk gelijk M bevat, gemeten wordt met eene andere, die 18 deelen M bevat: men zal nu, die getallen 47 en 18 kennde, niet meer A met B dadelijk behoeven te meten; maar het zal genoeg zijn, het getal 47 met het getal 18 te meten, dat is, (om dat divideren hetzelfde is, als twee getallen met elkander te meten,) 47 door 18 moeten divideren, en daar dit quotient $3\frac{1}{2}$ is, zoo zal men daaruit besluiten: dat A gelijk is aan drie maal B met nog elf maal één achtiende deel van B; en bijaldien nu B een voet, eene el of een meter ware, dan zou men de uitkomst van die meting, in den gewonen stijl, aldus uitdrukken: A is $3\frac{1}{2}$ voet, of $3\frac{1}{2}$ el of $3\frac{1}{2}$ meters lang. (17)

500. Hier op steunt de schrijfwijze

$$A : B = 47 : 18$$

welke, vermits: het teeken van divisie is, en divideren ei-

- 3) Wat wordt dan tot de bepaling van eene rede vereischt?
- 14) Hebben alle grootheden eene gemeene maat?
- 5) Wat onderteilen wij hier en in het vervolg?
- 6) Wat zal men door de twee getallen, die uitdrukken hoe veelmaal gemeene maat van twee grootheden op elk van dezelfde begrepen is, kunnen bepalen?
- 7) Helder dik door een voorbeeld op?

gelijk meten beteekent, gelezen kan worden: de grootheid A gemeten door de grootheid B, is hetzelfde als het getal 47 door het getal 18 te meten. (18)

501. Hier uit volgt dan: dat, in de gewone dagelijksche spreekwijzen, in welke de hoeveelheid van iets door een getal van maat, gewigt, geldwaarde, enz. wordt uitgedrukt, altijd de reden of de betrekking van twee grootheden wordt voorgesteld. (19)

Bij voorbeeld, wanneer men zegt: 17 ellen, drukt men daar door uit eene lengte, welke tot de lengte van een el staat als 17 tot 1. De uitdrukking $47\frac{1}{2}$ pond stelt voor een gewigt, hetwelk tot het gewigt van één pond staat als $47\frac{1}{2}$ tot één, enz. (20)

502. Hoewel de betrekking van twee grootheden A en B gevonden wordt, indien men eene gemeene maat M tusschen dezelve vinden kan, en deze handelwijze de eigenlijke, naauwkeurige en regtstreeksche is, zoo wordt zij nogtans moeilijk en veronderstelt, in derzelver uitoefening, kundigheden van andere wetenschappen, welke hier niet mogen aangenomen worden. Men volgt dan in de Zamenleving eenen gemakkelijker weg: men meet alle grootheden van dezelfde foort met de aangenomene Maten en Gewigten, welke tot het meten dezer grootheden bestemd zijn. (21) De getallen derhalve, welke uitdrukken, hoeveelmaal de maat of het gewigt in elke dezer grootheden begrepen is, drukken dan de verhouding dezer twee grootheden uit, en wanneer men dan die twee getallen door elkander divideert, vindt men de reden dezer grootheden, dat is, de eerste grootheid uitgedrukt in éénheden van de tweede. (22)

503. Er zijn twee lengten A en B; de eerste heeft de lengte van 113 meters, de tweede die van 25 meters, dan is $A:B = 113:25$ en A bevat $4\frac{1}{2}$ maal B.

Er zijn twee gewigten P en Q; het eerste weegt 137 kilogrammes, het tweede 20 kilogrammes, dan is $P:Q = 137:20$ en P bevat $6\frac{1}{2}$ maal Q.

Er zijn twee hoeveelheden vogts R en S; de eerste houdt 57 liters en de tweede 213 liters, dan is $R:S = 57:213$ en $R = \frac{1}{4}S$. (23)

(18) Wat volgt hier uit?

(19) Wat volgt hieruit al verder?

(20) Helder dit door een voorbeeld op?

(21) Welk eene handelwijze volgt men doorgaans in de gemeene zamenleving, om de reden van twee grootheden te bepalen?

(22) En hoe bepaalt men dan door die twee gevonden getallen de reden?

(23) Geef hiervan eenige voorbeelden?

504. Wij hebben art. 139. gezien, *dat het quotient eener divisie niet verandert, wanneer men deeler en deeltal beide met hetzelfde getal vermenigvuldigt of deelt.* Hieruit volgt dan: *dat, wanneer de betrekking van twee grootheden A en B door twee getallen a en b wordt voorgesteld, de betrekking van diezelfde grootheden A en B, op oneindig vele wijzen, door twee andere getallen kan voorgesteld worden, wanneer men de getallen a en b beide met een zelve getal n vermenigvuldigt of deelt.* (24)

505. Indien . bij voorbeeld, $A : B = 318 : 102$ is, zal ook, door deze getallen met 2, 3, 4, 5, 6, enz. te vermenigvuldigen of te deelen,

$$\begin{array}{l|l} A : B = 636 : 204 & A : B = 159 : 51 \\ A : B = 954 : 306 & A : B = 106 : 34 \\ A : B = 1272 : 408 & A : B = 79\frac{1}{2} : 25\frac{1}{2} \\ A : B = 1590 : 510 & A : B = 63\frac{3}{4} : 20\frac{3}{4} \\ \text{enz.} & \text{enz.} \end{array} \quad (25)$$

506. Hieruit volgt dan: *dat de reden van twee grootheden, ook door twee gebrokene of gemengde getallen kan worden uitgedrukt, en dat, wanneer de reden van twee grootheden door gebrokene of gemengde getallen is uitgedrukt, die reden, door twee geheele getallen, kan worden voorgesteld, indien men beide deze gemengde of gebrokene getallen met het kleinste gemeene veelvoud van de noemers der breuken vermenigvuldigt; omdat men daardoor voor de producten altijd geheele getallen verkrijgt.* (26)

507. De volgende voorbeelden zullen dit nader ophelderen.

$$\begin{array}{l|l} \text{Uit } A : B = \frac{3}{4} : \frac{7}{12} \text{ volgt } A : B = 33 : 28 \\ C : D = \frac{11}{12} : \frac{7}{12} & C : D = 33 : 14 \\ E : F = 17 : 2\frac{1}{2} & E : F = 51 : 8 \\ G : H = 31\frac{1}{2} : 11\frac{1}{2} & G : H = 75 : 26 \\ P : Q = 113\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2} & P : Q = 4101 : 272 \end{array}$$

In het eerste voorbeeld multipliseert men de gebrokens $\frac{3}{4}$ en $\frac{7}{12}$ elk met 44, en men verkrijgt voor de producten 33 en 28, waaruit men besluit, dat $A : B = 33 : 28$ staat. In het tweede voorbeeld multipliseert men met 36; in het derde met 8, in het vierde met 24, in het vijfde met 56. (27)

(24) Kan de reden van twee grootheden, slechts op ééne wijze, door getal worden voorgesteld?

(25) Geef hiervan voorbeelden?

(26) Hoe vindt men de reden van twee grootheden, die door gebrokene zijn uitgedrukt, in geheele getallen?

(27) Helder dit door voorbeelden op?

507. Wanneer de reden van twee grootheden door twee getallen is uitgedrukt, is die uitdrukking nog niet altijd de eenvoudigste: zulks heeft alleen dan plaats, wanneer die twee getallen geen gemeenen deeler hebben: men moet derhalve onderzoeken, of de twee geheele getallen, welke de reden van twee grootheden uitdrukken, geen gemeenen deeler hebben? en hebben zij dien, dan moeten die getallen door dien gemeenen deeler gedeeld worden, en dan eerst stellen de quotienten de reden dezer grootheden op de eenvoudigste wijze voor. (28)

VOORBEELDEN. Onderzoek of de volgende redens, door eenvoudiger getallen, kunnen worden voorgesteld?

$$\begin{array}{l} A : B = 1785 : 530 \\ C : D = 8346 : 3000 \\ E : F = 93737 : 9186 \end{array}$$

508. Het blijkt uit dit alles: *dat, wanneer twee grootheden onderling meetbaar zijn, (en dit wordt hier altijd ondersteld,) de reden dezer twee grootheden, het zij door een geheel, het zij door een gebroken of gemengd wordt uitgedrukt, naar dat de volgende term dezer reden een evenmatig of onevenmatig deel van den voorgaanden is.* (29)

509. Tusschen alle twee gelijkslachtige grootheden bestaat eene reden, en die reden wordt, gelijk gebleken is, bekend, wanneer men weet, hoe veelmaal de grootste gemeene maat dezer grootheden op elke van dezelve begrepen is: maar hieruit volgt niet: *dat de getallen, waardoor twee gelijkslachtige grootheden zijn uitgedrukt, altijd de reden van die twee grootheden bepalen:* (30) zulks doen zij alleen in het geval, *dat die grootheden in dezelfde eenheden zijn uitgedrukt.* Aldus staan 37 gl. tot 20 guld. gelijk 37 tot 20, en de reden van 37 gl. tot 20 gl. is derhalve $1\frac{17}{20}$. (31) Maar, wanneer ik mij voorstel 37 goud-gulden en 19 gulden, dan stel ik mij wel twee gelijkslachtige grootheden voor; maar om de reden van deze twee grootheden te bepalen, moet ik de reden tusschen een goud-gulden en eenen gulden kennen, en, door middel van die betrekking, de twee voorgestelde geldwaarden tot dezelfde maat brengen, en dan eerst verkrijg ik de getallen, welke de reden van 37 goud-gl. tot 19 gulden bepalen. (32) Ik weet, dat een goud-gulden houdt 28 stuivers, en een gulden 20 stuivers; of dat een goud-gulden houdt 14 dubbeltjes, en een gulden 10 dubbeltjes; of dat een goud gulden houdt 7 vier-

(28) Hoe wordt de reden van twee grootheden op de eenvoudigste wijze uitgedrukt?

(29) Welk een gevolg trekt gij uit alles, wat tot hiertoe verklaard is?

(30) Bepalen de getallen, waarin twee gelijkslachtige grootheden zijn uitgedrukt, altijd de reden van deze grootheden?

(31) In welk geval bepalen die getallen de reden?

(32) In welk geval doen zij zulks niet, en wat wordt dan vereischt, om die reden te bepalen?

stuivers stukken, en een gulden 5 vierstuivers stukken; 37 goud gulden houden dan 7×37 of 259 vierstuivers stukken, en 20 gulden houden 5×20 of 100 vierstuivers stukken, en ik besluit daaruit, dat

$$37 \text{ goudgl.} : 20 \text{ guld.} = 259 : 100$$

en dat, bij gevolg, de reden of de verhouding van 37 goud gl. tot 20 guld. door $2\frac{2}{3}$ wordt uitgedrukt. (33)

VOORBEELDEN tot oefening.

1. Welk is de reden van 317 fl. 18 st. 12 penn. tot 17 gulden?
2. Welke is de reden van 173 Zeeuwsf. Rijksd. tot 100 zeshalven?
3. Welke is de reden van $1\frac{1}{2}$ gulden tot $\frac{3}{4}$ schelling?
4. Welke is de reden van $\frac{1}{2}$ ducaat tot $1\frac{1}{2}$ maal een halve schelling?
5. Welke is de reden van de vlakke-inhouden van twee landen, A en B, waarvan het eerste A lang is 17, 3 decameters en breed 15 decameters; en het tweede B lang is 30, 37 decameters en breed 25, 7 decameters?

6. Welke is de reden van de inhouden van twee regenbakken P en Q, waarvan de eerste P lang, breed en hoog is 4, 3 en 4, 5 meters, en de tweede Q lang, breed en hoog is 38, 17, 38 en 9, 5 meters?

510. Eene beschouwing van veel belang is de volgende. Wanneer twee grootheden A en B tot elkander staan in reden, als een getal a tot een getal b; dan zal de eerste grootheid A, zoo veelmaal genomen, als 'er éénheden in b zijn, gelijk zijn aan de tweede grootheid B, zoo veelmaal genomen, als 'er éénheden in a zijn. (34)

Betoog. De grootheid A kan niet tot de grootheid B staan, als het getal a tot het getal b, indien niet de grootheden A en B eene gemeene maat M hebben, welke in A begrepen is a en in B begrepen is b malen: dit zoo zijnde, dan is $A = a \times M$ en $B = b \times M$; en derhalve $b \times A = a \times b \times M$ en $a \times B = a \times b \times M$ en diensvolgens $b \times A = a \times B$. (34)

511. Men kan, omgekeerd, uit de vergelijking $a \times B = b \times A$ besluiten: dat $A : B = a : b$ is. (36)

Betoog. Want indien niet $A : B = a : b$ is, zoo zal $A : B = a : p$ zijn; (zijnde p een getal grooter of kleiner dan b) maar dan zal $p \times A = a \times B$ zijn; doch, volgens de onderstelling, is $b \times A = a \times B$; derhalve zou $p \times A = b \times A$ moeten zijn, en dit is niet mogelijk, indien niet $p = b$ is; derhalve staat $A : B = a : b$. (37)

512. Uit dit bewezene volgt: dat men uit de volgende vergelijkingen besluiten mag: (38)

Uit 5 Goud gl. = 7 Guld.	G. guld. : Gl. = 7 : 5
5 Z. Rijksd. = 13 Guld.	Z. Rijksd. : Gl. = 13 : 5
5 Ducatonen = 3 Ducaten.	Ducaat : Ducaten = 5 : 3
44 Rh. voet. = 3,767358 met	Rh. voet. : Meter = 3,767358 : 1
$5\frac{1}{2} P = 7\frac{1}{2} Q$	P : Q = $7\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}$
	of P : Q = $\frac{15}{7} : \frac{7}{5}$
	of P : Q = 44 : 21

513. Wanneer men zich nu een duidelijk begrip van eene reden gemaakt heeft, en dit zamengestelde begrip in alle deszelfs deelen heeft leeren kennen: zal men, daar (gelijk art. 490. gezegd is) eene evenredigheid in de gelijkheid van twee redens bestaat, het begrip van evenredigheid of proportie zich in alle deszelfs klaarheid kunnen voortellen.

514. Twee grootheden A en B zijn evenredig met twee andere grootheden P en Q, wanneer de reden der twee eerste, door dezelfde getallen, als die der twee laatste wordt voorgesteld. (39).

515. Daar de getallen, welke de reden van twee grootheden uitdrukken, eigenlijk de getallen zijn, welke te kennen geven, hoeveelmaal de gemeene maat van twee grootheden op elke van dezelve begrepen is; zullen twee grootheden A en B evenredig zijn met twee grootheden P en Q, wanneer de gemeene maat van A en B op A en B respectievelijk zoo veelmaal begrepen is, als de gemeene maat van P en Q op P en Q. (40)

516. Zulk eene evenredigheid wordt in teekens aldus geschreven:

$$A : B = P : Q \quad (41)$$

en gewoonlijk gelezen: de grootheid A staat tot de grootheid B, gelijk de grootheid P tot de grootheid Q. (42)

517. Men kan de evenredigheid $A : B = P : Q$ nog op eene van de volgende wijzen lezen:

1°. De reden van A tot B is dezelfde, als de reden van P tot Q.

2°. A heeft tot B zulk eene reden als P tot Q.

(38) Maak eene toepassing van deze grondstellingen?

(39) Wanneer zijn twee grootheden evenredig met twee anderen?

(40) Hoe kan men de evenredigheid anders omschrijven?

(41) Hoe wordt zulk eene evenredigheid geschreven?

(42) En hoe gewoonlijk nog anders gelezen?

(33) Helder dit door een voorbeeld op?

(34) Welk een gevolg trekt gij uit de uitgedrukte reden van twee grootheden?

(35) Hoe bewijst gij dit?

(36) Wat is het omgekeerde van deze grondstelling?

(37) Hoe bewijst gij dit?

3°. De verhouding van B op A is dezelfde, als de verhouding van Q op P.

4°. A bevat zoo vele eenheden of maten B, als P eenheden of maten Q.

5°. Zoo groot A is, in vergelijking van B, zoo groot is P, in vergelijking van Q.

6°. Of A is zoo groot in vergelijking van B, als P in vergelijking van Q. (43)

518. Wanneer men over eene evenredigheid redeneert, gebruikt men eenige kunsttermen, welke men zich vast in het geheugen moet prenten. In eene evenredigheid, $A : B = P : Q$, noemt men

1°. A en B de termen van de eerste reden.

2°. P en Q de termen van de tweede reden.

3°. A de voorgaande term van de eerste reden, en P de voorgaande term van de tweede reden.

4°. B de volgende term van de eerste reden, en Q de volgende term van de tweede reden.

5°. De eerste en derde termen, dat is A en P, noemt men de voorgaande termen der evenredigheid.

6°. De tweede en vierde termen, dat is B en Q, noemt men de volgende termen der evenredigheid.

7°. A en Q, of de eerste en vierde termen, de uiterste termen.

8°. B en P, dat is de tweede en derde termen, de middelste. (44)

519. De termen van eene reden moeten (zie art. 491.) gelijkslachtige grootheden zijn; dus bestaat 'er geene evenredigheid

$$A : B = P : Q$$

indien niet 1°. A gelijkslachtig met B en 2°. P gelijkslachtig met Q is; maar de termen van de eerste reden (namelijk A en B) kunnen met de termen van de laatste reden (namelijk P en Q) ongelijkslachtig zijn; want, tot het wezen van de evenredigheid wordt slechts vereischt, dat de getallen, welke de reden

van A tot B uitdrukken, dezelfde zijn als die, welke de reden van P tot Q voorstellen. (45)

520. *Nadere Opheldering.* Indien men dus heeft twee affanden A en B, welke tot gemeene maat hebben den affand P.

Twee vlakken C en D, welke tot gemeene maat hebben de vlakke Q.

Twee lichamelijke inhouden E en F, welke tot gemeene maat hebben den lichamelijken inhoud R.

Twee gewigten G en H, welke tot gemeene maat hebben S.

Twee krachten I en K, welke tot gemeene maat hebben de kracht T.

Twee geldwaarden L en M, welke tot gemeene maat hebben de geldwaarde U.

Bijaldien dan P op A en B; Q op C en D; R op E en F; S op G en H; T op I en K; U op L en M, elk op zich zelve en afzonderlijk, begrepen is 113 en 60 malen, of algemeen a en b malen; dan zal men mogen stellen:

$A : B = C : D$	$C : D = G : H$
$A : B = E : F$	$C : D = I : K$
$A : B = G : H$	$C : D = L : M$
$A : B = I : K$	$E : F = G : H$
$A : B = L : M$	$E : F = I : K$
$C : D = E : F$	$E : F = L : M$
.	enz. (46)

521. Men onderscheidt de evenredigheden der grootheden van de evenredigheid der getallen: (47) en zulks geschiedt met reden; omdat men, in vele gevallen, gelijk in de Meetkunst, Evenwichtsleer, en andere toegepaste wiskundige Wetenschappen, zonder de getallen te kennen, die de reden der grootheden uitdrukken, tot het bestaan der evenredigheden besluiten kan; daar in tegendeel, wanneer eene evenredigheid, in getallen gegeven is, de waarheid of valsheid van die evenredigheid uit die getallen zelve blijkt. (48)

522. Voor het overige is de evenredigheid der getallen van die der grootheden, in het wezen der zaak, niet onderscheiden. (49) Want vier getallen 7, 12, 21 en 36 zijn evenredig, wanneer de reden van 7 tot 12 dezelfde is, als die van 21 tot 36; en dit vindt men, wanneer men 7 met 12 en 21 met 36 divideert of meer, en daar beide redens $\frac{7}{12}$ zijn, zegt

(45) Kunnen de termen van de eerste reden ongelijkslachtig zijn met de termen van de tweede reden?

(46) Toon mij, door eenige voorbeelden, dat de termen van de eerste reden met die van de tweede ongelijkslachtig kunnen zijn?

(47) Hoe onderscheidt men de Evenredigheden?

(48) Waarom stelt men dit onderscheid?

(49) Maar is dan eene evenredigheid in getallen van eene evenredigheid in grootheden onderscheiden?

(43) Hoe kan men eene evenredigheid nog anders lezen?

(44) Welke zijn de gebruikelijke kunsttermen, bij de beschouwing van eene Evenredigheid, gebruikelijk?

men $7:12=21:36$. (50) Alleenlijk denkt men hier de getallen in het afgetrokken, mits de éénheden van de termen der eerste reden dezelfde zijn, en die van de tweede reden insgelijks dezelfde. (51)

523. In het tweede Boek der Meetkunst, beschouwen wij de evenredigheden der grootheden algemeen, zelfs ook in het geval der onmeetbaarheid; doch hier gaan wij over, om de evenredigheden der getallen te overwegen en dezelve eigenschappen op het dagelijks gebruik toe te passen.

XXXVII LES. Over de Evenredigheid der Getallen, derzelver algemeene eigenschappen, en bijzonderlijk over de gewone of regte Evenredigheid.

524. Het zij men de Evenredigheden in grootheden of in getallen beschouwt, onderscheidt men a) de gewone of regte Evenredigheden, die wij eenvoudig Evenredigheden zullen noemen; b) de aaneengeschakelde evenredigheden; c) de omgekeerde evenredigheden; d) de zamengeselde. De eerste soort van evenredigheid is de grondslag der drie andere soorten. (1)

525. Om zich te verzekeren, dat vier getallen a, b, c en d eene evenredigheid maken; moet men het eerste getal door het tweede, en het derde door het vierde deelen, en indien dan deze quotiënten gelijk zijn, zijn de getallen a, b, c en d evenredig. (2)

Ware evenredigheden.	Valsche evenredigheden.
$7:13=21:39$	$7:18=14:35$
$3\frac{1}{2}:11\frac{1}{2}=10:34\frac{1}{2}$	$9:4\frac{1}{2}=100:51$. . (3)

526. Men kan van de evenredigheid der getallen, behalve de bepaling van art. 522, nog deze andere bepaling geven, vier getallen zijn evenredig wanneer de grootste gemeene deeler van de twee eerste op elk van dezelve zoo veel maal begrepen is, als de grootste gemeene deeler van de twee laatste op elk van de twee laatste, (4) en deze bepaling stemt dan met die van art. 514 en de uitlegging van deze, in art. 515 en 516 voorkomende, overeen.

Bij voorbeeld, in $7:13=21:39$ is de grootste gemeene deeler van 7 en 13 de éénheid en van 21 en 39 het getal 3. Nu is, enz. (6)

De reden hier van is: Stel dat $a:b=c:d$ eene evenredigheid zij, laat p de grootste gemeene deeler van a en b , en q de grootste gemeene deeler van c en d zijn; laat $\frac{a}{p}=A$, $\frac{b}{p}=B$ en $\frac{c}{q}=C$, $\frac{d}{q}=D$ zijn, dan is $a=p \times A$; $b=p \times B$; $c=q \times C$, $d=q \times D$. Men kan dan in plaats van $a:b=c:d$ schrijven

$$pA:pB=qC:qD$$

maar dan moet ook $\frac{pA}{pB}=\frac{qC}{qD}$ zijn; indien men de breuken verkleint, is $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$; maar, daar deze breuken onverkleinbaar zijn, kunnen zij niet gelijk zijn, ten zij $A=C$ en $B=D$ zij. (6)

527. Wanneer er eene evenredigheid, $a:b=c:d$, in getallen bestaat, dan zal, indien men de derde term c door den eersten a deelt, het quotient altijd een zeker geheel of gebroken getal p zijn; en wanneer men nu de termen van de eerste reden met dit getal p vermenigvuldigt, zullen de producten pa en pb zijn; nu is $\frac{pa}{pb}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; maar $pa=c$ zijnde, is $pb=d$.

Hier uit volgt: dat er geene evenredigheid in getallen bestaat, of er bestaat tevens een geheel of gebroken getal, zodanig, dat wanneer men de termen van deze eerste reden met dit geheel of gebroken vermenigvuldigt, de producten aan de termen van de tweede reden gelijk worden. (7)

528. Alle evenredigheden, het zij in geheelen, het zij in gebrokene getallen, kunnen derhalve, wanneer men drie getallen a, b en n aanneemt, door

$$a:b=an:bn$$

worden uitgedrukt. (8) Om derhalve eene evenredigheid in getallen te maken, neme men twee getallen a en b , naar welgevallen, voor de termen van de eerste reden; deze getallen vermenigvuldige men met een derde geheel of gebro-

(50) Geef reden dat dit onderscheid niet bestaat?

(51) Hoe moet men zich nogtans eene evenredigheid in getallen voorstellen?

(1) Hoe veel soorten van evenredigheden moeten wij hier overwegen?

(2) Waar aan herkent men dat vier getallen evenredig zijn?

(3) Geef voorbeelden?

(4) Kan men van de evenredigheid der getallen nog eene andere bepaling geven?

(5) Helder het gebruik van die bepaling door een voorbeeld op?

(6) Bewijs mij de gronden van die bepaling?

(7) Wat merkt gij in eene evenredigheid op?

(8) Op welke eene wijze kan eene evenredigheid in getallen algemeen worden uitgedrukt?

ken getal n ; dan verkrijgt men de termen van de tweede redden.

Gegeven zijn de getallen	a	b	n	$a : b$	$na : ba$
3	3	5	6	3 : 5	18 : 30
7	7	13	16	7 : 13	112 : 208
19	19	3	8	19 : 3	152 : 24
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$	7	$\frac{1}{2} : \frac{1}{11}$	$4\frac{3}{22} : 10\frac{3}{22}$

Men ziet dus, dat eene evenredigheid in getallen door drie getallen a , b en n bepaald wordt. (9)

529. Daar nu, welke geheele of gebrokene getallen men voor a , b en n stellen moge, de getallen a , b , an en bn altijd eene evenredigheid maken, en bij gevolg alle evenredigheden in deze algemeene, $a : b = an : bn$, begrepen zijn. zoo zal alles, wat van de algemeene evenredigheid $a : b = an : bn$ waar is, tevens waar zijn van alle evenredigheden, welke men, in geheele of gebrokene getallen stellen, kan. (10)

Eigenschappen van de Evenredigheden der Getallen.

I. De Hoofdeigenschap.

530. Men noemt eigenschap van een ding, dat geene, wat aan dit ding bijzonder eigen is, in andere dingen niet gevonden wordt, en waardoor hetzelfde van alle andere dingen onderscheiden wordt. (11)

531. I EIGENSCHAP. In elke evenredigheid is het product der uiterste termen gelijk aan het product der middelsten. (12)

Opheldering. Stellen wij de evenredigheden

3 : 5	=	18 : 30	dan is	3 × 30	=	5 × 18	=	90
7 : 13	=	112 : 208		7 × 208	=	13 × 112	=	1456
19 : 3	=	152 : 24		19 × 24	=	3 × 152	=	456
$\frac{1}{2} : \frac{1}{11}$	=	$4\frac{3}{22} : 10\frac{3}{22}$		$\frac{1}{2} \times 10\frac{3}{22}$	=	$4\frac{3}{22} \times \frac{1}{11}$	=	7
$\frac{1}{2} : \frac{1}{11}$	=	$4\frac{3}{22} : 10\frac{3}{22}$		$\frac{1}{2} \times \frac{1}{11}$	=	$4\frac{3}{22} \times \frac{1}{11}$	=	$\frac{1}{11}$ (13)

Betoog. Alle mogelijke evenredigheden in getallen zijn begrepen in deze algemeene evenredigheid:

$$a : b = an : bn.$$

(9) Wat volgt hier uit?

(10) Wat volgt al meer hier uit?

(11) Wat verstaat men door de eigenschap van een ding?

(12) Welke is de eerste of hoofdeigenschap der evenredigheden?

(13) Helder die eigenschap door eenige voorbeelden op?

In deze is het product der uiterste termen het product van het getal a , vermenigvuldigd met bn ; (dat is, het product n en b) het product der uiterste termen bestaat dan uit het product der getallen a , b en n : maar het product der middelste termen is insgelijks het product der getallen a , b en n ; derhalve is, in alle mogelijke evenredigheden, het product der uiterste termen gelijk aan het product der middelsten. (14)

Ander Betoog. Laat $a : b = c : d$ eene evenredigheid zijn; dan moet $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ zijn. Vermenigvuldig beide leden dezer vergelijking met b ,

dan is $a = \frac{bc}{d}$; want $\frac{a}{b} \times b = a$, en $\frac{c}{d} \times b = \frac{bc}{d}$. Vermenig-

vuldig beide leden van de vergelijking $a = \frac{bc}{d}$ met d , dan verkrijgt men $ad = bc$, dat moest bewezen worden. (15)

532. Wanneer vier getallen niet in evenredigheid zijn, dan houdt ook die vergelijking op te bestaan. (16)

Valsche evenredigheden.

$$3 : 6 = 7 : 13$$

$$9\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$$

Valsche vergelijkingen.

$$3 \times 13 \text{ niet } = 6 \times 7$$

$$9\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \text{ niet } = 4 \times \frac{1}{2}$$

Naders Betoog. Wanneer $a : b$ niet is $= c : d$; dan is d of te groot of te klein. Stel dat $d + e$ het ware getal zij, dan is, in waarheid, $a : b = c : d + e$, en, volgens het bewezene, $a \times (d + e) = bc$, dat is, $ad + ae = bc$ en bc grooter dan ad . Ware $d - c$ het ware getal dat met a , b en c eene evenredigheid maakte, zou $a : b = c : d - c$ zijn en $a \times (d - c) = bc$ of $ad - ac = bc$ zijn; bc zou alzoo grooter dan ad zijn; uit al hetwelk dan blijkt, dat, wanneer $a : b = c : d$ valsch of onwaar is, ook ad niet $= bc$ zal zijn, en dat de gelijkheid van de producten der uiterste en middelste termen eener evenredigheid eene wezenlijke eigenschap van dezelve is, omdat zij alleen op dezelve past. (17)

533. Wanneer dan, omgekeerd, een product van twee getallen, a en b , gelijk is aan een product van twee andere getallen, c en d , dat is $ab = cd$, zal men uit deze gelijke producten onderscheidene evenredigheden kunnen maken. (18) Indien men, tot dat einde, een factor van het eerste product tot eenen factor van het tweede product stelt, gelijk de andere factor van het tweede product tot den anderen fac-

(14) Hoe bewijst gij deze eigenschap?

(15) Kunt gij deze eigenschap ook nog anders bewijzen?

(16) Zou die eigenschap ook niet gevonden worden in getallen, die geene evenredigheid maken?

(17) Zoudt gij wel bewijzen kunnen, dat deze eigenschap aan de evenredigheden alleen eigen is?

(18) Wat volgt, omgekeerd, uit deze hoofdeigenschap?

II. DEEL.

B

tor van het eerste. (19) En men kan alzoo uit twee gelijke producten acht onderscheidene evenredigheden opstellen:

$$1^o. \text{ uit } 6 \times 4 = 3 \times 8$$

$$6 : 3 = 8 : 4$$

$$6 : 8 = 3 : 4$$

$$4 : 3 = 8 : 6$$

$$4 : 8 = 3 : 6$$

$$3 : 4 = 6 : 8$$

$$3 : 6 = 4 : 8$$

$$8 : 4 = 6 : 3$$

$$8 : 6 = 4 : 3$$

$$2^o. \text{ uit } a b = c d$$

$$a : c = d : b$$

$$a : d = c : b$$

$$b : c = d : a$$

$$b : d = c : a$$

$$c : a = b : d$$

$$c : b = a : d$$

$$d : a = b : c$$

$$d : b = a : c$$

welke (omdat in alle deze het product der uiterste termen gelijk aan het product der middelste is,) evenredigheden zijn. (20)

534. Men noemt de vierde of laatste term d van eene evenredigheid, $a : b = c : d$, de vierde evenredige tot de drie voorgaande. (21)

535. Men kan tot elke drie, naar welgevallen gegevene geheele of gebrokene getallen a , b , c , eene vierde evenredige vinden.

Men drukke deze vierde evenredige, welke geheel onbekend is, door de letter x uit: dan moet

$$a : b = c : x$$

zijn: maar indien deze vier getallen eene evenredigheid maken; dan moet het product der uiterste termen gelijk aan het product der middelsten zijn; derhalve is $a \times x = b \times c$. Ik weet dus: dat a maal het onbekende getal gelijk is aan het product der bekende getallen b en c ; indien ik dus dit product $b c$ door a deel, dan heb ik $x = \frac{b \times c}{a}$, en ik leer hieruit:

dat, om tot drie getallen a , b en c eene vierde evenredige te vinden, het product der twee laatste getallen door het eerste moet gedeeld worden. (22)

VOORBEELDEN. 1^o. Gegeven 6, 7 en 13; dan is

$$6 : 7 = 13 : x \text{ derhalve } x = \frac{7 \times 13}{6} = 15\frac{1}{2}$$

2^o. Gegeven $3\frac{1}{2}$, 7, $11\frac{1}{2}$; dan is

$$3\frac{1}{2} : 7 = 11\frac{1}{2} : x; \text{ derhalve } x = \frac{7 \times 11\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}} = 22\frac{1}{2}$$

3^o. Gegeven zijn $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}$ en $\frac{11}{4}$; dan is

$$\frac{1}{2} : \frac{7}{8} = \frac{11}{4} : x; \text{ derhalve } x = \frac{\frac{7}{8} \times \frac{11}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{8} \times \frac{11}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{77}{16}$$

ih (19) Hoe maakt men uit twee gelijke producten eene evenredigheid?

(20) Hoe vele, en welke evenredigheden kunnen uit twee gelijke producten gemaakt worden?

(21) Wat verstaat men door eene vierde evenredige?

(22) Hoe vindt men tot drie gegeven getallen eene vierde evenredige?

536. Welk een der vier termen van eene evenredigheid mogte zijn verloren geraakt, zou men denzelven door de toepassing der hoofdeigenschap wedervinden. (23)

Stel, ik had de evenredigheid $35 : 28 = 40 : 32$.

Indien de eerste term 35 was verloren geraakt, zou ik, om denzelven wedervinden, dien verloren term gelijk x stellen, en dan zou $x : 28 =$

$$40 : 32, \text{ en } x = \frac{28 \times 40}{32} = 35 \text{ moeten zijn.}$$

Was de term 28 verloren geraakt, dan zou men stellen: $35 : x = 40 : 32$. Was de vierde term 40 verloren geraakt, dan zou men stellen: $35 : 28 = x : 32$.

En, om den vierden term 32 wedervinden, zou men stellen: $35 : 28 = 40 : x$; en men zou, in alle deze gevallen, den verloren term, even, als in het eerste geval, door de gelijkheid van de producten der uiterste en middelste termen, wedervinden. (24)

II. Verplaatsing van de termen eener Evenredigheid.

537. II EIGENSCHAP. In elke evenredigheid, kan men de redens verplaatsen; dat is, de eerste reden in plaats van de tweede, en de tweede in plaats van de eerste stellen. (25)

Bij voorbeeld:

$$\text{uit } 7 : 16 = 21 : 48 \quad \text{uit } a : b = a n : b n$$

$$\text{volgt } 21 : 48 = 7 : 16 \quad \text{volgt } a n : b n = a : b$$

Betoog. De reden hiervan is klaar; want, daar eene evenredigheid in de gelijkheid van twee redens bestaat, wordt die gelijkheid, door de verplaatsing der redens, niet verbroken. (26)

538. III EIGENSCHAP. Men kan, in elke evenredigheid, beide de redens omkeeren; dat is, in elke reden, den voorgaanden term in plaats van den volgende stellen, en omgekeerd. (27)

Bij voorbeeld:

$$\text{uit } 7 : 16 = 21 : 48 \quad \text{uit } a : b = a n : b n$$

$$\text{volgt } 16 : 7 = 48 : 21 \quad \text{volgt } b : a = b n : a n$$

Betoog. Dit is uit zichzelf klaarlijk; want, indien ik twee getallen b en a elk met n vermenigvuldig, verkrijg ik twee producten $b n$ en $a n$, welke (zie art. 528.) met b en a eene evenredigheid maken. (28)

539. IV EIGENSCHAP. In elke evenredigheid, staat de

(23) Wat merkt gij nog verder aan?

(24) Helder dit door voorbeelden op?

(25) Welke is de tweede eigenschap der evenredigheden?

(26) Hoe bewijst gij deze?

(27) Welke is de derde eigenschap der evenredigheden?

(28) Hoe bewijst gij deze eigenschap?

eerste term tot den derden, gelijk de tweede tot den vierden term. (29)

Bij voorbeeld:

$$\begin{array}{l|l} \text{uit } 7 : 16 = 21 : 48 & \text{uit } a : b = an : bn \\ \text{volgt } 7 : 21 = 16 : 48 & \text{volgt } a : an = b : bn \end{array}$$

Betoog. De nieuwe evenredigheid $a : an = b : bn$, welke uit de gehele volgt, voldoet aan het vereischte eener evenredigheid; want men

$$\text{heeft } \frac{a}{an} = \frac{b}{bn} = \frac{1}{n}. \quad (30)$$

540. Men kan derhalve, op drie onderscheidene wijzen, de termen van eene evenredigheid verplaatsen: 1^o. door de redens te verplaatsen, 2^o. door beide redens om te keeren, en 3^o. door de reden te verwisselen, waardoor men verstaat: de eerste tot den derden term, gelijk de tweede tot den vierden te stellen. En het is van veel belang, zich met deze verplaatsingen gemeenzaam te maken. (31)

III. Evenredigheden, welke uit eene gestelde Evenredigheid, door vermenigvuldiging of deeling van sommige van derzelver termen afgeleid worden.

541. V EIGENSCHAP. Wanneer men van eene Evenredigheid, of de termen van de eerste reden, of de termen van de tweede reden, of de beide voorgaande of de beide volgende, met hetzelfde geheel of gebrokene getal vermenigvuldigt, of deelt, dan zullen de producten of quotienten met de overblijvende termen der Evenredigheid eene nieuwe Evenredigheid maken. (32)

Opheldering.

Zij de evenredigheid	Zij de algemeene evenredigheid
72 : 84 = 36 : 42	$a : b = c : d$
en 3 een zeker getal, dan zal	en n een zeker getal, dan zal
1) 216 : 252 = 36 : 43	$an : bn = c : d$
2) 72 : 84 = 108 : 126	$a : b = cn : dn$
3) 216 : 84 = 108 : 42	$an : b = cn : d$
4) 72 : 252 = 36 : 126	$a : bn = c : dn$

$$\begin{array}{l|l} 5) \quad 24 : 48 = 36 : 42 & \frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d \\ 6) \quad 72 : 84 = 12 : 14 & a : b = \frac{c}{n} : \frac{d}{n} \\ 7) \quad 24 : 84 = 12 : 42 & \frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d \\ 8) \quad 72 : 28 = 36 : 14 & a : \frac{b}{n} = c : \frac{d}{n} \quad (33) \end{array}$$

Betoog. Want (volgens art. 504) de reden van twee getallen, a en b verandert niet, wanneer men beide deze getallen a en b met een zelfde getal n vermenigvuldigt of deelt: de halve bestaan de 1e, 2e, 3e en 6e evenredigheden; en, omdat (IV Eigenschap) $a : c = b : d$ is, zullen, om dezelve reden, de 2e, 4e, 7e en 8e evenredigheden bestaan. (34) Bovendien zijn ook, in alle de afgeleide evenredigheden, de producten der uiterste termen gelijk aan die der middelsten (35)

542. VI EIGENSCHAP. Wanneer men éenen der uiterste termen van eene evenredigheid met een zeker getal vermenigvuldigt of deelt, en den anderen uitersten met datzelfde getal deelt of vermenigvuldigt, dan zal het product en quotient met de middelste termen evenredig zijn: en hetzelfde zal ook voor de middelste termen plaats hebben. (36)

Opheldering.

Zij de evenredigheid	Zij de evenredigheid
72 : 84 = 36 : 42	$a : b = c : d$
en 6 een zeker getal; dan zal	en n een zeker getal; dan zal
432 : 84 = 36 : 7	$an : b = c : \frac{d}{n}$
12 : 84 = 36 : 252	$\frac{a}{n} : b = c : dn$
72 : 14 = 216 : 42	$a : bn = \frac{c}{n} : d$
72 : 504 = 6 : 42	$a : \frac{b}{n} = cn : d \quad (37)$

Betoog. Want, in alle deze nieuwe evenredigheden, is het product der uiterste termen gelijk aan het product der middelsten. (38)

- (33) Verklaar deze nader?
 (34) Hoe bewijst gij dezelve?
 (35) Kan men dezelve ook nog anders bewijzen?
 (36) Welke is de zesde eigenschap?
 (37) Verklaar dezelve nader?
 (38) Hoe bewijst men dezelve?

- (29) Welke is de vierde eigenschap der evenredigheden?
 (30) Hoe bewijst gij deze?
 (31) Tel nu op, op hoe vele wijzen, de termen van eene evenredigheid kunnen verplaatst worden?
 (32) Welke is de vijfde eigenschap?

IV. Evenredigheden, welke uit de sommen of verschillen van sommige termen eener evenredigheid ontstaan.

543. VII EIGENSCHAP. In elke evenredigheid, is de som van de termen der eerste reden tot de som van de termen der tweede reden, gelijk de voorgaande term van de eerste reden tot den voorgaanden term van de tweede reden, of gelijk de volgende term van de eerste reden tot den volgende term van de tweede reden. (39)

Opheldering.

Zij	$21 : 15 = 7 : 5$	Zij	$a : b = an : bn$
dan is		dan is	
$21 \div 15 = 7 \div 5$	$= 21 : 7$	$a \div b = an \div bn$	$= a : an$
$21 \div 15 = 7 \div 5$	$= 15 : 5$	$a \div b = an \div bn$	$= b : bn$

(40)

Betoog. Aangezien $a + b : a + b = a : a$, en wederom, $a + b : a + b = b : b$ is, zoo zal, volgens de V Eigenschap, indien men de volgende termen dezer evenredigheden met n vermenigvuldigt, $a + b : an + bn = a : an$ en $a + b : an + bn = b : bn$ moeten zijn. (41)

544. VIII EIGENSCHAP. In elke evenredigheid, is het verschil van de termen der eerste reden tot het verschil van de termen der tweede reden, gelijk de voorgaande term van de eerste reden tot den voorgaanden term van de tweede reden, of gelijk de volgende term van de eerste reden tot den volgende term van de tweede reden. (42)

Opheldering.

Zij	$21 : 15 = 7 : 5$	Zij	$a : b = an : bn$
dan is		dan is	
$21 - 15 = 7 - 5$	$= 21 : 7$	$a - b : an - bn = a : an$	
$21 - 15 = 7 - 5$	$= 15 : 5$	$a - b : an - bn = b : bn$	(43)

Betoog. Want, men kan stellen $a - b : a - b = a : a$, en wederom $a - b : a - b = b : b$. Men vermenigvuldigt de volgende termen dezer evenredigheden met n ; dan verkrijgt men de twee gestelde evenredigheden. (44)

545. IX EIGENSCHAP. In elke evenredigheid, staat de som der termen van de eerste reden tot het verschil der ter-

men van die zelfde reden, gelijk de som der termen van de tweede reden tot derzelver verschil. (45)

Betoog. Want, stelt men $a : b = c : d$, dan is $a + b : c + d = a : c$, zie VII Eigenschap, en $a - b : c - d = a : c$, zie VIII Eigenschap; derhalve $a + b : c + d = a - b : c - d$; dat is, door verwisseling der redens, $a + b : a - b = c + d : c - d$. (46)

546. X EIGENSCHAP. In elke evenredigheid, is de som der voorgaande tot de som der volgende termen, gelijk een voorgaande tot zijnen volgende term. (47)

Opheldering.

Zij	$21 : 15 = 7 : 5$	Zij	$a : b = c : d$
dan zal		dan zal	
$21 \div 7 = 15 \div 5$	$= 21 : 15$	$a \div c : b \div d = a : b$	
$21 \div 7 = 15 \div 5$	$= 7 : 5$	$a \div c : b \div d = c : d$	(48)

Betoog. Want, indien, in het algemeen, $a : b = c : d$ is; dan is ook $a : c = b : d$; en, volgens de VII Eigenschap, $a + c : b + d = a : b = c : d$. (49)

547. XI EIGENSCHAP. Ook is, in elke evenredigheid, het verschil der voorgaande termen tot het verschil der volgende termen, gelijk een voorgaande tot eenen volgende term. (50)

Opheldering.

Zij	$21 : 15 = 7 : 5$	Zij	$a : b = c : d$
dan zal		dan zal	
$21 - 7 = 15 - 5$	$= 21 : 15$	$a - c : b - d = a : b$	
$21 - 7 = 15 - 5$	$= 7 : 5$	$a - c : b - d = c : d$	(51)

Betoog. Want, indien $a : b = c : d$ is, dan is $a : c = b : d$ en $a - c : b - d = a : b = c : d$. (52)

548. XII EIGENSCHAP. In elke evenredigheid, is de som der voorgaande termen tot derzelver verschil, gelijk de som der volgende termen tot derzelver verschil. (53)

Betoog. Want, uit $a : b = c : d$, volgt: $a + c : b + d = a : b$ en $a - c : b - d = a : b$; derhalve is ook $a + c : b + d = a - c : b - d$, en eindelijk, door verwisseling der redens, $a + c : a - c = b + d : b - d$. (54)

(45) Welke is de negende eigenschap?

(46) Hoe bewijst men dezelve?

(47) Welke is de tiende eigenschap?

(48) Geef eene verklaring van dezelve?

(49) Hoe bewijst men dezelve?

(50) Welke is de elfde eigenschap?

(51) Verklaar dezelve?

(52) Bewijs dezelve?

(53) Welke is de elfde eigenschap?

(54) Hoe bewijst men dezelve?

(39) Welke is de zevende eigenschap?

(40) Verklaar dezelve?

(41) Bewijs dezelve?

(42) Welke is de achtste eigenschap?

(43) Verklaar dezelve nader?

(44) Hoe bewijst gij deze eigenschap?

V. *Evenredigheden, welke uit twee of meer Evenredigheden gemaakt worden.*

549. XIII EIGENSCHAP. *Wanneer men de overeenkomstige termen van twee of meer evenredigheden met elkander vermenigvuldigt, dan maken de producten eene nieuwe evenredigheid. (55)*

Opheldering. Zijn gesteld de drie evenredigheden in n°. 1, 2 en 3; indien men dan de overeenkomstige termen van 1 en 2 met elkander vermenigvuldigt, dan verkrijgt men de evenredigheid n°. 4, en de overeenkomstige termen van de drie gegeven evenredigheden met elkander vermenigvuldigd zijnde, verkrijgt men de evenredigheid n°. 5 (56)

Betoog. Uit de twee eerste evenredigheden volgen de vergelijkingen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ en $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$; indien men deze vergelijkingen met elkander vermenigvuldigt, verkrijgt men: $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$, en derhalve $ae:bf = cg:dh$. Op dezelfde wijze blijkt het, dat $ae:bf = cg:dh$ is (57)

550. XIV EIGENSCHAP. *Wanneer men de overeenkomstige termen van twee evenredigheden door elkander deelt, dan zullen de quotiënten eene nieuwe evenredigheid maken. (58)*

Opheldering. Wanneer men stelt

$$\begin{array}{l} \text{en} \quad \frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h} \\ \text{dan zal} \quad \frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h} \text{ zijn. (59)} \end{array}$$

Betoog. Uit de twee gestelde evenredigheden volgt: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ en $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$; men deele nu de eerste vergelijking door de tweede; dan is $\frac{a}{b} \times \frac{f}{e} = \frac{c}{d} \times \frac{h}{g}$; maar deze vergelijking is dezelfde als $\frac{a}{e} = \frac{ch}{dg}$

- (55) Welke is de dertiende eigenschap?
(56) Verklaar dezelve?
(57) Bewijs deze eigenschap?
(58) Welke is de veertiende eigenschap?
(59) Verklaar dezelve?

deeld door $\frac{b}{f} = \frac{c}{g}$ gedeeld door $\frac{d}{h}$; dat is $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$. (60)

551. XV EIGENSCHAP. *De quadraten, de cuben en de hoogere magten van de termen eener evenredigheid zijn evenredig. (61)*

Opheldering. Indien $a : b = c : d$ is, dan zal

$$\begin{array}{l} a^2 : b^2 = c^2 : d^2 \\ a^3 : b^3 = c^3 : d^3 \end{array}$$

en dit volgt onmiddellijk uit de XIII Eigenschap. (62)

552. XVI EIGENSCHAP. *De quadraats- en cubus-wortelen uit de termen eener evenredigheid zijn evenredig. (63)*

Opheldering. Indien $a : b = c : d$ is; dan zal

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$$

$$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}$$

en dit volgt wederom uit de XIV Eigenschap. (64)

XXXVIII I.E.S. *Verdere toepassing van de verklaarde eigenschappen der Evenredigheden, behelzende de verklaring van DEN REGEL VAN DRIEEN.*

553. Wat eene vierde evenredige tot drie gegeven getallen is, is reeds art. 534. gezegd, en hoe dezelve gevonden wordt, is aldaar geleerd en door eenige voorbeelden opgehelderd. Het zoeken eener vierde evenredige tot drie getallen wordt gewoonlijk *Regel van Drieën* genoemd; (1) eene benaming, hoe zeer zij door het gebruik gevestigd is, nogtans het denkbeeld op eene onnaauwkeurige wijze uitdrukt. (2) Omdat men, in onnoemlijk vele gevallen, uit drie getallen, een vierde getal vinden kan, zonder dat dit vierde getal daarom eene vierde evenredige is. (3) Want, wanneer a , b en c drie getallen zijn, en men stelt

(60) Bewijs dezelve?

(61) Wat zegt de vijftiende eigenschap?

(62) Hoe bewijst men deze?

(63) Wat zegt de zestiende eigenschap?

(64) Hoe bewijst men deze?

(1) Hoe noemt men het zoeken van eene evenredige?

(2) Is deze benaming naauwkeurig?

(3) Waarom niet?

$$x = \frac{a+b}{c}; x = abc; x = (a+b)c; x = (a^2 + b^2) \times c^2$$

en duizenden anderen, dan vindt men ook uit drie getallen een vierde getal x , terwijl in geen dezer gestelde gevallen x eene vierde evenredige tot de drie gegeven a, b en c is. (4)

554. In onnoemlijk vele gevallen van het dagelijksche leven, in den Handel, in de Handwerken, Kunsten en Wetenschappen komt het uitrekenen van eene vierde evenredige, welke wij, om ons aan het gebruik te onderwerpen, *regel van Drieën* zullen blijven noemen, te pas: het is om die reden, dat men dien regel *gouden of gulden regel* genoemd heeft. (5) De reden hiervan is klaar, omdat in den zamenhang der dingen, en in de wijze, op welke in de Natuur onderscheidene soorten van grootheden aan elkander verbonden zijn, overal, het zij op de eene of op de andere wijze, evenredigheden gevonden worden. (6)

555. Hoe zeer nu de oplossing van eene vierde evenredige, in zich zelve, zeer eenvoudig is, en den eerstbeginnenden geene zwaarigheid veroorzaken kan, wordt nogtans de toepassing van dit algemeene vraagstuk *hierin* meer of min moeilijk, dat men den aard der zaak, op welke men de berekening wil toepassen, grondig kennen moet, om te beoordeelen: 1^o. of 'er *wezenlijk eene evenredigheid tusschen de gegeven en gevraagde grootheden besta*, en 2^o. *zoo deze bestaat, op welk eene wijze zij als dan in dezelve aanwezig is*. (7)

556. Dit alles verdient door de beschouwing van eenige algemeene en tevens eenvoudige zaken te worden opgehelderd.

1^o. In de gemeene samenleving en in den handel, in het groot en klein, ruilt men onophoudelijk het eene ding tegen het andere: men komt overeen, om, voor eene zekere hoeveelheid van eenige, waar, eene zekere hoeveelheid van eenige andere waar te geven of te ontvangen. (8) De respectieve hoeveelheden dezer waren, te geven en te ontvangen, worden onderling, door het oogenblikkelijk belang der han-

(4) Zijn 'er dan meer gevallen, in welke men uit drie getallen een vierde getal zoekt?

(5) Heeft men ook aan den regel van Drieën wel een anderen naam gegeven?

(6) Wat is wel de reden van die benaming?

(7) Op welke dingen behoort men bij de oplossing van eenen regel van Drieën, in de eerste plaats, te letten?

(8) Wat is ruilen?

deldrijvende personen bepaald; maar zoodra die overeenkomst de onderlinge evenredigheid der hoeveelheden heeft vastgesteld, dan bestaat 'er tusschen alle andere hoeveelheden dezer dingen eene bepaalde evenredigheid. (9) Wanneer men dus voor 23 ellen linnen 16 pond koffij geven wil, dan zal men voor 2, 3, 4, 5, 6 en n maal 23 ellen linnen, ook 2, 3, 4, 5, 6 en n maal 16 pond koffij geven, en men zal zeggen: *de hoeveelheid van het te verruilen linnen is evenredig aan de hoeveelheid van de te ruilen koffij*, zoodat

$$23 \text{ el} : n \text{ maal } 23 \text{ el} = 16 \text{ pond} : n \text{ maal } 16 \text{ pond}$$

zal zijn. (10)

557. 2^o. Toen 'er nog geene muntspecien, geen geld bekend was, verruilden de menschen, op deze wijze, de dingen, die zij te veel hadden, voor andere dingen, die zij behoefden: maar deze ruiling moest altijd onnaauwkeurig zijn. (11) De invoering van het geld heeft die ruiling gemakkelijk gemaakt, en aan naauwkeuriger regels verbonden. (12) *Het geld is niets anders dan eene maatstaf, waarmede de waarde van alle dingen, het zij van de eerste en meest noodzakelijke behoeften, het zij van weelde, de waarde van dienst en arbeid, het loon van bedieners, ambachts- en werklieden, vergelikt wordt.* (13) *Cajus verbindt zich tot het verrigten van zekeren arbeid, en ontvangt, naar evenredigheid van de gedeelten van zijn volbragt werk, een bedongen loon, dat hem in klinkende munt betaald wordt; daar voor koopt hij, zoo wel de eerste en noodzakelijke behoeften des levens, als andere dingen die hij wenschte te bezitten, en welke hij zelf niet vervaardigen kan, volgens prijzen, welke de oogenblikkelijke omstandigheden voor die verschillende artikels bepalen, (14) en zoo verkrijgt hij, in den staat der beschaving, duizende dingen van behoefte, gemak, smaak en weelde, welke hij, met nog grooter lichaamskrachten en sterker zielsvermogens, in den onbeschaafden staat, zou moeten ontberen.* (15) *De hoeveelheden der meer of min noodzakelijke behoeften, worden door de maten en gewigten bepaald, en deze hoeveelheden zijn altijd evenredig aan de hoeveelheid muntstukken, welke men daar voor betaalt, (16) en dit is hei geen men den prijs der behoeften en koopwaren noemt, (17) welke naar de omstandigheden des tijds, naar derzelver overvloed of schaarscheit, naar de hoogere of lagere waarde van het geld, bepaald*

(9) Wat merkt men bij het verruilen der dingen op?

(10) Geef hier een voorbeeld van?

(11) Had in vroeger tijd de ruiling gene ongemakken?

(12) Is 'er naderhand iets ingevoerd, dat die ruiling gemakkelijker gemaakt heeft?

(13) Wat is het geld?

(14) Verklaar het nut van het geld nader?

(15) Is het geld in het gemeen ook voor de samenleving nuttig?

(16) Door welk middel wordt de hoeveelheid der waar met het geld in evenredigheid gebracht.

(17) Hoe noemt men die onderlinge overeenkomst tusschen eene hoeveelheid waar en het geld?

wordt. (18) Want eigenlijk is er geen andere vergelijking tussehen een stuk goud of zilver en een hoop koren te vinden, dan de waarde, welke de samenloopende omstandigheden der gemeene samenleving aan die dingen van tijd tot tijd geeft. (19)

558. 3°. Mer geld handelt men in het groot en klein: het betaalt de geringste diensten, het zamelt de geringste producten van den armsten landman op, het zamelt, gelijk een zeilsteen het geringste ijzerdeeltje, elk geringe werkzaamheid, elke klein ding, dat slechts eenige waarde hebben kan, ten algemeene gebruike op: het is het algemeene beweeggrad, hetwelk, elk op de hoop, om hetzelfde te verkrijgen, en dus zijnen welstand te vergrooten, in werking houdt, en daar het alzoo aller handen werk ten algemeenen voordeele verdeenigt, brengt het, door den minsten arbeid, den grootsten rijkdom aan. (20) Wie hetzelfde in grooteren overvloed bezit, geeft daar van een zeker gedeelte ter leen of ten gebruike, het zij aan den landbouwer, het zij aan den fabrikant, het zij aan den koopman, en verhuurt, om zoo te spreken, een gedeelte van zijn geld, om daarmede te bouwen, ruwe waren in te koopen, manufacturen te vervaardigen, groote hoeveelheden van waren in te koopen, deze in het klein te debiteren, enz. (21) en geniet, bij een vast beding, voor dit gebruik een zekere huur, die men *interest* noemt, en ten honderd voor eenen zekeren tijd, bij voorbeeld één jaar, bepaald wordt. (22) en hier is wederom eene evenredigheid: te weten de verhuurde sommen of kapitalen zijn evenredig aan de huren, dat is, de percenten welke men daar voor in het jaar bedongen heeft. (23)

559. In alle de menigvuldige dingen, welke in dit algemeene onderrigt begrepen zijn, heeft men met evenredigheden, te doen, en wanneer men, naar een zeker gemaakt beding, iets berekenen moet, moet eene vierde evenredige, dat is, een regel van drieën, opgelost worden. (24) Dan, er zijn nog onnoemelijk veel andere dingen, waarin evenredigheden voorkomen: en welke niet altijd, zonder andere kundigheden verkregen te hebben, kunnen opgemerkt en beoordeeld worden. (25)

560. 4°. Twee plaatsen zijn zoo veel verder van elkander ver-

(18) Verandert ook somtijds de waarde der koopwaren, en om welke reden?

(19) Bestaat 'er dan geene volstrekte gelijkheid tussehen eene zekere waar en een som gelds?

(20) Tel meer voordeelen van het geld op?

(21) Wat doet men al meer met het geld?

(22) Wat is interest?

(23) Welk een overeenkomst bestaat 'er tussehen kapitaal en interest?

(24) Wat komt nu in al de boven opgenoemde gevallen te pas?

(25) Zijn 'er nog meer zaken waarin het begrip van evenredigheid ligt opgelost?

wijderd, als een voetganger, die bestendig, met denzelfden tred, voortgaat, langer tijd onder weg blijft. De afstanden zijn derhalve, in dit geval, evenredig aan de tijden, vereischt wordende, om die afstanden door te loopen. (26)

561. 5°. De krachten van verkleden zijn evenredig aan de hoeveelheid werks, hetwelk zij, in denzelfden gegeven tijd, kunnen vervaardigen. (27)

562. 6°. De hoeveelheid van bouwstof, nodig om zeker werk te volbrengen, is evenredig aan de grootte van dit werk. (28)

563. 7°. De betrekkelijke bevolking van een land is evenredig aan het getal menschen het welk, door elkander gerekend, op eene vierkante mijl of vierkante myriameter wonen. (29)

564. 8°. De vruchtbaarheid van eenen grond is evenredig aan het geen eene bepaalde uiegestrektheid van dien grond, in eenen bepaalden of gegeven tijd, oplevert. (30)

565. 9°. Het getal der menschen, welke 's jaarlijks geboren worden en sterven is, blijkens de gedane waarnemingen, evenredig aan de gehele bevolking. (31)

566. In alle deze opgenoemde gevallen, kan men, bij een weinig oplettend nadenken, de gronden en de waarheid dezer evenredigheden gevoelen: doch overal waar waarschijnlijk evenredigheden bestaan, kan zulks wel vermoed, maar zoo gemakkelijk niet bewezen worden. (32) De Meet- en Werktuigkunde leert ons zulke evenredigheden in grooten getale kennen, als daar is, bij voorbeeld, dat de omtrekken der cirkels evenredig zijn aan hunne middellijnen, en de inhouds dezer cirkels evenredig aan de vierkanten, op die middellijnen beschreven, enz. en, om in deze en soortgelijke gevallen, de evenredigheden te beoordeelen en toetepasten, moet men met den aard der zaken zelve bekend zijn. (33)

667. De zoo even verklaarde zaken moeten veel lichts over de toepassing van de evenredigheden verspreiden. Stellen wij, om ter zake te komen, eenige voorbeelden.

1 VOORBEELD. Stel dat men voor 25 gulden 36 pond van zekere waar kan koopen, hoe veel gulden zullen dan 3718 ponden van die zelfde waar tegen die zelfde prijs bedragen?

Hier zijn de hoeveelheden der waren evenredig aan de prijzen of geldwaarden, welke voor elke hoeveelheid moeten betaald worden; wanneer men dan het gevraagde getal guldens $= x$ stelt, dan is

(26) Waarvan hangt de evenredigheid van de afstanden der plaatsen af?

(27) Waarmede staan de krachten der werklieden in evenredigheid?

(28) Waarmede kan de hoeveelheid van bouwstoffen in evenredigheid staan?

(29) Waaraan is de betrekkelijke bevolking van een land evenredig?

(30) Waaraan de vruchtbaarheid van eenen grond?

(31) Waaraan het getal menschen, die 's jaarlijks sterven?

(32) Kan men overal, waar evenredigheid bestaat, die evenredigheid zoo gemakkelijk ontdekken?

(33) Geef eens voorbeelden, waar dit zoo gemakkelijk niet gaat?

$$36 \text{ fl.} : 3718 \text{ fl.} = 25 \text{ gl.} : x \text{ gl.}$$

2 VOORBEELD. Wanneer ik voor 5 gulden kan kopen 9 ellen van zekere stof, hoe veel ellen van die zelfde stof zal ik dan, tegen dien zelfden prijs, voor 100 gulden kunnen kopen?

Op dezelfde gronden blijkt het, dat men stellen zal:

$$5 \text{ gl.} : 100 \text{ gl.} = 9 \text{ el.} : x \text{ el.}$$

3 VOORBEELD. Iemand heeft eene hoeveelheid van zekere koopwaar gekocht, wegende 3719 pond, en daarvoor met onkosten betaald 1267½ gulden; hoe veel kost hem het pond?

Om dezelfde reden als boven zal deze vraag aldus gesteld worden:

$$3719 \text{ pond} : 1 \text{ pond} = 1267\frac{1}{2} \text{ gl.} : x \text{ gl.}$$

4 VOORBEELD. Stel dat men met 100 gl. kapitaal in één jaar 4 gulden winnen kan, hoe veel zal men dan winnen met 6725 gulden in denzelfden tijd?

Omdat de winsten, in dezelfde tijden, tegen dezelfde voorwaarden, aan de kapitalen evenredig zijn, heeft men de evenredigheid:

$$100 \text{ kap.} : 6725 \text{ kap.} = 4 \text{ winst.} : x \text{ winst.}$$

5 VOORBEELD. Indien ik met een zeker kapitaal in een jaar 1312 gl. kan winnen, hoe veel tijd zal 'er dan moeten verlopen, eer dat dit zelfde kapitaal, onder dezelfde omstandigheden, 8750 guld. zal opgebracht hebben?

Wanneer men slechts een oogenblik op deze vraag nadenkt, ziet men, dat de winsten evenredig zijn aan de tijden: men stelde derhalve

$$1312 \text{ winst.} : 8750 \text{ winst.} = 1 \text{ jaar.} : x \text{ jaren.}$$

6 VOORBEELD. Een fabrikteur heeft 's wekelijks aan arbeidslonen 176 gulden te betalen, hoe lang zal eene som van 3815 gulden, die hij nog in kas heeft, deze uitgave kunnen bestrijden?

De tijd, zoo lang die som strekken kan, is klaarblijkelijk aan die som evenredig: men stelde derhalve

$$176 \text{ gl.} : 3815 \text{ gl.} = 1 \text{ week.} : x \text{ weken.}$$

568. Het kan hem, die eenigermate schrander is, geen moeite kosten, om uit de opgegevene vraag de evenredigheid op te stellen: doch om niets achter te laten, dat den eerstbeginnenden helpen kan, zoo volge men dezen

REGEL. Noem het gevraagde getal x : stel dit onbekende getal tot den achtersten term der evenredigheid of tot den volgenden term der tweede reden) zoek in de vraag het getal, dat hier mede gelijknamig is, en stel dit getal tot den voorgaanden term van de tweede reden, dat is tot den derden term der evenredigheid: stel daarna de twee andere getallen, welke in de vraag voorkomen, tot de termen der eerste reden, zoodanig, dat de voorgaande tot den voorgaanden, en de volgende tot den volgenden behoort, en dan is de evenredigheid wel-

geordend opgesteld. (34) Vergelijk de voorgaande voorbeelden.

569. Wanneer uit het vraagstuk de evenredigheid welgeordend is opgesteld, dan heeft men niets verder te doen, dan de vierde evenredige, volgens art. 535 te bepalen: alzoo zal in het voorbeeld n°. 1.

$$x = \frac{3718 \times 25}{36} = 2581 \frac{1}{3} \text{ gl.}$$

in het voorbeeld n°. 2.

$$x = \frac{100 \times 9}{5} = 180 \text{ gl.}$$

zijn. En men zal vinden in n°. 3, $x = 6 \frac{1}{2}$ stuivers; in n°. 4, $x = 269 \text{ gl.}$; in n°. 5, $x = 6$ jaar 8 maand, 8½ dag; in n°. 6, $x = 21 \frac{1}{2}$ weken.

570. Eer wij verder gaan, moeten wij eene zwarigheid uit den weg ruimen, die den eerstbeginnenden verlegen zou kunnen maken. Wij hebben art. 29. gezegd, dat in eene multiplicatie het vermenigvuldigtal alleen een benoemd getal kan zijn, nogtans wordt, in het eerste voorbeeld, 25 guld. met 3718 pond vermenigvuldigd: strijdt dit niet, vraagt men, met dit gestelde beginsel? (35) Doch dit is eene verkeerde opvatting: de termen van de eerste reden bestaan uit twee gewigten, welke tot elkander staan als de getallen 36 en 3718; zoo ook bestaan de termen van de laatste reden uit twee geldwaarden, welke zich tot elkander verhouden als 25 tot x : men heeft dus wel, om zeker te zijn, dat alles wel en naar behoren gesteld is, benoemde getallen geschreven; maar in den grond onbenoemde getallen gedacht, tot welke men eene vierde evenredige zoeken moet, aan welke vierde evenredige, nadat men dezelve gevonden heeft, de naam van den derden term der evenredigheid gegeven wordt (36).

571. I. GEWIGTIGE AANMERKING. Wij hebben gezien, dat de termen van elke reden eener evenredigheid gelijksoortige grootheden moeten zijn, en dat wanneer deze evenredigheid in getallen is uitgedrukt, de termen van elke reden tot dezelve éénheid moeten herleid worden. In vele vraagstukken, tot eenen regel van Drieën behorende, is deze zoo noodzakelijke voorwaarde niet vervuld, en men zou dus een valsch besluit maken, indien men de gegevene getallen, zoo als zij daar staan, met het onbekende, als in evenredigheid staande, wilde beschouwen. Eer men, in zulke gevallen, tot de oplossing der vierde evenredige mag overgaan, moeten

(34) Welk eenen regel kan men volgen om eenen regel van Drieën op te tellen?

(35) Doet 'er zich in de oplossing van den regel van Drieën niet eene zwarigheid op?

(36) Hoe wordt dezelve opgelost?

eerst de ongelijknamige termen van dezelve reden tot gelijknamige gebragt worden, tot welk einde de betrekking der verschillende éénheden moet gekend worden. (37) Zie hier voorbeelden.

1. VOORBEELD. Voor 3 ducaten keeps men 47 el, hoe veel dan voor 716 goud-guldens?

Wanneer men stelt

$$3 \text{ Ducaten} : 716 \text{ goud gl.} = 47 \text{ el} : x \text{ el}$$

dan stel ik in de daad, voor zoo ver ik de grootheden beschouw, wel eene evenredigheid; maar wanneer ik mij de getallen in het afgetrokken voorstel, namelijk

$$3 : 716 = 47 : x$$

dan druk ik niet meer de evenredigheid der grootheden uit, en ik zou, door tot 3, 716 en 47 eene vierde evenredige te zoeken, eene valsche gevolgtrekking maken, omdat een Ducat eene geheel andere éénheid dan een goudgulden zijnde, de getallen 3 en 716 niet de reden voorstellen, welke 'er tuschen 3 Ducaten en 716 goud-guldens bestaat. Ik moet derhalve de zelfde evenredigheid tot eene evenredigheid in getallen maken, door de 3 Ducaten en 716 goud-guldens tot dezelfde éénheden, tot stuivers bij voorbeeld te herleiden: een Ducat bevat 15 en een goudgulden 4 stukken van 7 stuivers:

$$\begin{array}{r} 3 \text{ Ducaten} : 716 \text{ Goud-gl.} = 47 \text{ el} : x \text{ el} \\ 15 \dots\dots 4 \end{array}$$

$$45 : 2864 = 47 : x.$$

Ik kan dus in plaats van 3 Ducaten schrijven 45 zevenstuivers stukken, en in plaats van 716 goud gl. schrijven 2864 zevenstuivers stukken, en ik verkrijg alzoo in getallen de evenredigheid $45 : 2864 = 47 : x$ en

$$x = \frac{2864 \times 47}{45} = 2991\frac{1}{3}. \quad (38)$$

Hier toe behoort ook het geval, wanneer eenige termen van de evenredigheid uit geheel en deelen en minderdeelen bestaan.

2. VOORBEELD. Indien 3 pond kosten 7 gulden 11 fluy. 4 penn. hoe veel kosten dan 137 pond?

De evenredigheid is:

$$3 \text{ pond} : 137 \text{ pond} = 7 \text{ Gl. 11 fluy. 4 penn.} : x \text{ Gl.}$$

Wanneer men nu de derde term tot penningen herleidt, dan moet de vierde term ook in penningen zijn uitgedrukt, en men verkrijgt dan:

$$3 \text{ pond} : 137 \text{ pond} = 420 \text{ penn.} : x \text{ penn.} \quad (39)$$

(37) Wat van 'er gewigtigs in de oplossing van den Regel van Drieën opmerken?

(38) Hoe verklaart gij het eerste voorbeeld?

(39) Verklaar het tweede voorbeeld?

3. VOORBEELD. Hoe veel kosten 39 pond 11 oncen tot 3 Gulden 17 fluy. 8 penn. het pond?

De evenredigheid is hier:

$$1 \text{ pond} : 39 \text{ pond 11 onc.} = 3 \text{ Gl. 17 fluy. 8 penn.} : x \text{ Gl.}$$

Wanneer men de tweede term dezer evenredigheid tot oncen maakt, dan moet ook de eerste term in oncen worden uitgedrukt, en dan wordt de evenredigheid:

$$16 \text{ onc.} : 635 \text{ onc.} = 3 \text{ Gl. 17 fluy. 8 penn.} : x \text{ Gl.}$$

en maakt men den derden term tot penningen; dan wordt de vierde of onbekende term ook in penningen uitgedrukt, en men heeft dan:

$$16 \text{ onc.} : 635 \text{ onc.} = 1240 \text{ penn.} : x \text{ penn.} \quad (40)$$

572. Het is dan, op deze wijze, dat de evenredigheden, welke termen uit geheel en deelen en minderdeelen zijn zamengesteld, tot eene evenredigheid in geheele getallen gebragt worden, welke vierde evenredige daarna, als naar gewoonte, wordt opgelost. Men vindt in het tweede voorbeeld:

$$x = \frac{2420 \times 137}{8} = 110513\frac{1}{2} \text{ penn.} = 345 \text{ gl. 7 fluy. 1}\frac{1}{2} \text{ penn.}$$

$$x = \frac{1240 \times 635}{16} = \frac{155 \times 635}{2} = 49212\frac{1}{2} \text{ penn.} = 153 \text{ gl. 15 fl. 12}\frac{1}{2} \text{ penn.}$$

Men deelt, namelijk in het laatste voorbeeld, den teller en noemer der breuk $\frac{1240 \times 635}{16}$ door 8, dan verkrijgt men in plaats van dezelve $x =$

$$\frac{155 \times 635}{2}.$$

573. II GEWIGTIGE AANMERKING. Wanneer de termen van eene evenredigheid uit gebrokene of gemengde getallen bestaan, dan kan men, door de toepassing van de V Eigenschap, art. 541. deze evenredigheid tot eene evenredigheid in geheele getallen brengen, zonder dat de achterste of onbekende term van waarde verandert. (41)

1. Voorbeeld. Zij de evenredigheid

$$1 \text{ el} : 7\frac{1}{2} \text{ el} = 7 \text{ gl.} : x \text{ gl.}$$

wanneer ik de termen van de eerste reden elk met 3 vermenigvuldig, dan zijn de producten met de overblijvende termen evenredig, en men verkrijgt derhalve:

$$3 : 23 = 7 : x$$

welke eene evenredigheid in geheele getallen is. (42)

(40) Verklaar het derde voorbeeld?

(41) Hoe gaat men te werk, wanneer de termen der evenredigheid met breuken zijn aangedaan?

(42) Verklaar het eerste voorbeeld?

2. *Voorbeeld.* Zij gegeven de evenredigheid

$$3 \text{ pond} : 113\frac{1}{2} \text{ pond} = 5\frac{1}{2} \text{ gl.} : x \text{ gl.}$$

Wanneer men de termen van de eerste reden elk met vier vermenigvuldigt, dan heeft men:

$$12 : 455 = 5\frac{1}{2} \text{ gl.} : x \text{ gl.}$$

en de voorgaande termen elk met acht vermenigvuldigende, dan wordt de evenredigheid:

$$96 : 455 = 47 : x$$

in welke de onbekende term dezelfde waarde behouden heeft, als in de eersigstelde evenredigheid. (43)

3. *Voorbeeld.* Zij nog gegeven de evenredigheid

$$5\frac{1}{2} \text{ el} : 117\frac{1}{2} \text{ ell.} = 17\frac{1}{2} \text{ gl.} : x$$

Wanneer men de termen van de eerste reden met 12, het kleinste gemeene veelvoud van 4 en 6, vermenigvuldigt, dan verkrijgt men:

$$39 : 1434 = 17\frac{1}{2} \text{ gl.} : x \text{ gl.}$$

en multipliceert men de voorgaande termen met 16, dan verkrijgt men:

$$624 : 1434 = 283 : x$$

in welke de waarde van x dezelfde gebleven is. (44)

574. *Het blijkt dan: dat alle evenredigheden, welker termen uit geheelen, deelen en minderdeelen zijn zamengesteld, of welker termen gebrokene of gemengde getallen zijn, tot eene evenredigheid in geheele getallen kunnen gebragt worden, zonder dat de onbekende term in waarde verandert.* (45)

575. III GEWIGTIGE AANMERKING. *Maar wanneer eenige evenredigheid tot zulk eene evenredigheid in geheele getallen gebragt is, dan kan men dezelve somtijds eenvoudiger maken, of tot kleiner geheele getallen brengen, indien, of de termen van de eerste reden, of de voorgaande termen der evenredigheid, eenen gemeenen deeler hebben, en men deze termen door dien gemeenen deeler deelt.* (46)

Voorbeeld. Indien gegeven is de evenredigheid

$$35 \text{ pond} : 791 \text{ pond} = 25 \text{ gl.} : x \text{ gl.}$$

de termen van de eerste reden hebben het getal *zeven* tot gemeenen deeler, indien ik deze derhalve door *zeven* deel, heb ik:

$$5 : 113 = 25 : x$$

(43) Verklaar het tweede voorbeeld?

(44) Verklaar het derde voorbeeld?

(45) Welk gevolg trekt gij uit al het voorgaande?

(46) Wat moet men nog ten aanzien van eene evenredigheid, die tot geheele getallen gebragt is, in acht nemen?

de voorgaande termen dezer nieuwe evenredigheid hebben het getal *vijf* tot gemeenen deeler; indien ik door dien gemeenen deeler deel, dan wordt de evenredigheid:

$$1 : 113 = 5 : x$$

welke nu in de eenvoudigste geheele getallen is voorgesteld, zonder dat de onbekende term x in waarde veranderd is. (47)

De oplossing van de vierde evenredige in de eersigstelde evenredigheid geeft $x = \frac{791 \times 25}{35} = 565 \text{ gl.}$ en de oplossing van de vierde evenredige in de herleide evenredigheid geeft $x = 113 \times 5 = 565 \text{ gl.}$ De laatste bewerking veel eenvoudiger dan de eerste zijnde, blijkt hieruit: dat men, zoo veel het mogelijk is, de termen eener gestelde of verkregene evenredigheid in geheele getallen moet verkleinen. (48)

XXXIX LES. *Vervolg van den Regel van Drieën, behaande in de beschouwing van alle zijne bijzondere gevallen.*

576. *Offchoon het verklaarde in de voorgaande Les voldoende is, om alles, wat tot de uitvoering van den Regel van Drieën behoort, grondig te verstaan, zullen wij, daar die Regel van zoo veel gebruik is, nog de bijzondere gevallen doorloopen, welke de Cijfermeesters van denzelfen gewonelijk opgeven.*

577. Men onderscheidt den Regel van Drieën in twee hoofdgevallen: in den Regel van Drieën in geheelen en den Regel van Drieën in gebrokene getallen: en deze hoofdgevallen worden wederom in verscheidene anderen verdeeld, naar de deelen en minderdeelen, welke bij één of meer der bekende termen gevonden worden, welke gevallen wij, om geene onnoodige omschrijvingen te maken, door uitgewerkte voorbeelden zullen voordragen. (1)

I. *Regel van Drieën in Geheele Getallen.*

578. I. Wanneer bij den voorgaanden term van de tweedede reden deelen en minderdeelen staan.

1. **VOORBEELD.** *Wanneer 5 fl van zekere waar kosten 7 gl. 10 stuiv. hoe veel kosten dan 37 fl ?*

(47) Helder dit door een voorbeeld op?

(48) Is zulk eene verkleining nuttig?

(1) In hoe veel hoofdgevallen kan men den Regel van Drieën onderscheiden?

$$5 \text{ fl.} : 37 \text{ fl.} = 7 \text{ gl. } 10 \text{ stuiv.} : x \text{ gl.}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 150 \text{ fl.} \\ 30 \\ \hline 37 \\ 1110 \text{ stuiv.} \end{array}$$

$$x = 55 \text{ gl. } 10 \text{ stuiv.}$$

VERKLARING. Stel dat 37 fl. kost x gulden; dan heeft men de evenredigheid, 5 fl. : 37 fl. = 7 gl. 10 fl. x guld. Ik herleid de 7 gl. 10 fl. tot stuivers, en vindt daarvoor 150 stuiv.; dan wordt de evenredigheid 5 fl. : 37 fl. = 150 stuiv. = x stuivers. De voorgaande termen dezer evenredigheid zijn deelbaar door 5; deze termen door 5 deelende, wordt de evenredigheid 1 : 37 = 30 : x . Hier is x niet in waarde veranderd: ik multipliceer nu (volgens den regel tot het zoeken der vierde evenredige) de termen 30 en 37 met elkander, en behoef door den eersten term, die de éénheid is, niet te deelen: ik vindt dat $x = 1110 \text{ stuiv.}$ is, welke, tot guldens herleid, geven $x = 55 \text{ gl. } 10 \text{ stuiv.}$ (2)

579. 2. VOORBEELD. Hoe veel beloopt 119 ellen van zekere stof, indien de 7 ellen kosten 3 gl. 17 stuiv. 8 penn.?

$$7 \text{ ell.} : 119 \text{ ell.} = 3 \text{ gl. } 17 \text{ stuiv. } 8 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 20 \\ \hline 77 \text{ stuiv.} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 155 \text{ halve-stuivers} \\ \text{met } 17 \text{ vermenigv.} \end{array}$$

$$\text{product } 2635 \text{ halve-stuivers}$$

$$\begin{array}{r} 2) \\ \hline 1317 \frac{1}{2} \text{ heele stuivers} \end{array}$$

$$x = 65 \text{ gl. } 17 \text{ stuiv. } 8 \text{ penn.}$$

VERKLARING. De evenredigheid is 7 ell. : 119 el. = 3 gl. 17 fl. 8 penn. : x gl. Omdat 8 penn. een halve stuiver is, maak ik 3 gl. 17 fl. 8 penn. tot halve stuivers, en dan is de nieuwe evenredigheid, 7 el. : 119 el. = 155 halve-stuivers : x halve-stuivers. De termen der eerste reden zijn beide deelbaar door 7. Ik verkrijg dus de evenredigheid 1 : 17 = 155 halve-stuiv. : x halve-stuiv. In deze geeft mij de oplossing van de vierde evenredige $x = 2635 \text{ halve-stuiv.} = 65 \text{ gl. } 17 \text{ fl. } 8 \text{ pn.}$ (3)

(2) Verklaar de bewerking van het eerste voorbeeld?

(3) Verklaar de bewerking van het tweede voorbeeld?

Meer VOORBEELDEN.

1. Hoe veel kost 3796 fl. tegen 2 gl. 11 fl. 14 penn. het fl.?
2. Elf stukken linnen, 16 zamen lang 639 ellen, hoe veel bedragen die, de el gerekend tegen 16 stuiv. 10 penn.?
3. Hoe veel beloopt 113 lasten graan, die ik tegen 38 goud-gl. 11 stuiv. 10 penn. heb ingekogt?
4. Ik weet dat 35 fl. van zekere waar mij kosten 47 guld. 12 stuiv. 8 penn., hoe veel kost mij dan de geheele partij van 761 fl.?

580. 3. VOORBEELD. Ik heb eene zekere waar, de 100 fl. tegen 75 gl. 12 stuiv. 8 penn. gekogt, hoe veel kost mij dan het pond?

$$100 \text{ fl.} : 1 \text{ fl.} = 75 \text{ gl. } 12 \text{ stuiv. } 8 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

$$1 \text{ halve-stuiver}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 1512 \\ 2 \\ \hline 3025 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 30 \frac{1}{4} \text{ halve-stuivers} \\ 2) \end{array} \right.$$

$$x = 15 \frac{1}{2} \text{ stuiv.}$$

VERKLARING. De evenredigheid is, 100 fl. : 1 fl. = 75 gl. 12 fl. 8 penn. : x gl. De 75 gl. 12 fl. 8 penn. herleid ik tot halve stuivers; dan is de evenredigheid, 100 fl. : 1 fl. = 3025 halve-stuiv. : x halve-stuiv. De volgende term van de tweede reden de éénheid zijnde, behoef ik met denzeven niet te multipliceren: ik deel dan 3025 door den eersten term 100, en verkrijg $x = 30 \frac{1}{4} \text{ halve-stuiv.}$, welke, door 2 gedeeld, geve $x = 15 \frac{1}{2} \text{ fl.} = 15 \text{ fl. } 2 \text{ penn.}$ (4)

581. 4. VOORBEELD. Iemand heeft eene partij koffij gekogt, wegende 37183 lb., de 100 lb. tot 85 gl. 18 fl. 12 pn., hoe veel bearaagt die geheele partij?

$$100 \text{ lb.} : 37183 \text{ lb.} = 85 \text{ gl. } 18 \text{ stuiv. } 12 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 1718 \text{ stuiv.} \\ 16 \\ \hline 275 \text{ penn.} \end{array}$$

$$\text{multipl. } 37183$$

$$16 / 10225325 \text{ penn.} / 63908 \frac{1}{2} \text{ fl.}$$

$$\text{rest } 13 \text{ penn.} \quad 31954 \text{ gl. } 2 \text{ fl. } 13 \text{ pn.} = x.$$

(4) Verklaar de bewerking van het derde voorbeeld?

VERKLARING. De gestelde evenredigheid verandert, nadat men 85 gl. 18 st. 12 penn. tot penningen herleid heeft, in 100 fl. : 37183 fl. = 27500 penn. : x penn.; men deele de voorgaande termen door 100, dan verkrijgt men 1 : 37183 = 275 : x ; hieruit vindt men x = 10225325 penn. = 639082 fl. 13 p. n. = 31954 gl. 2 st. 13 penn. (5)

582. 5. VOORBEELD. Wanneer 161 ellen kosten 231 gl. 16 st. 13 penn. hoe veel kosten dan 115 ellen?

$$\frac{161 \text{ ell.} : 115 \text{ ell.} = 231 \text{ gl. 16 st. 13 penn.} : x \text{ gl.}}{7 \quad 5 \quad 20}$$

$$\frac{4636 \text{ stuiv.}}{16}$$

$$\frac{74189 \text{ penn.}}{(5 \text{ multipl.})}$$

$$370945$$

divid. door 7)

$$52935\frac{1}{2} \text{ penn.} = x$$

16)

$$\frac{33018 \text{ st. } 7\frac{1}{2} \text{ penn.} = x}{165 \text{ gl. 8 st. } 7\frac{1}{2} \text{ penn.} = x}$$

$$165 \text{ gl. 8 st. } 7\frac{1}{2} \text{ penn.} = x$$

VERKLARING. De gestelde evenredigheid wordt 161 ell. : 115 ell. = 74189 penn. : x penn. De termen der eerste reden door 23 gedeeld zijnde, heeft men 7 : 5 = 74189 : x ; hieruit vindt men, x = 52935 $\frac{1}{2}$ penn. = 165 gl. 8 st. 7 $\frac{1}{2}$ penn. (6)

583. 6. VOORBEELD. Gesteld dat 7 fl. 13 oncen 25 gl. waard zijn, hoe veel van die waar zal men dan voor eenen gulden hebben?

$$\frac{2\frac{1}{2} \text{ Gl.} : 1 \text{ Gl.} = 7 \text{ fl. 13 oncen.} : x \text{ fl.}}{1 \quad 16}$$

$$\frac{17\frac{1}{2} \text{ oncen.}}{x = 5 \text{ oncen.}}$$

VERKLARING. Nadat men in de opgestelde evenredigheid de 7 fl. 13 oncen. tot oncen herleid heeft, heeft men de evenredigheid, 25 gl. : 1 gl. = 125 oncen. : x oncen. De voorgaande termen zijn deelbaar door 25, en dan heeft men 1 : 1 = 5 : x ; derhalve x = 5 oncen. (7)

Meer VOORBEELDEN.

1. Hoe veel kosten 1376 fl., de 100 fl. tot 55 gl. 18 st. 11 penn.?

2. Indien 8963 fl. kosten 5186 gl. 11 penn. hoe veel kost dan 100 fl.?

3. Indien 1375 fl. kosten 6512 gl. 7 st. 8 penn. hoe veel 1 fl.?

4. Voor 36 gl. 12 st. 8 penn. kan ik 100 fl. koopen, hoe veel pond zal ik dan hebben voor 3000 gl.?

5. Indien men met 100 guld in een jaar wint 5 gl. 11 st. 12 penn. hoe veel zal men dan met 37195 gl. in denzelfden tijd winnen?

6. Iemand heeft 's jaarlijks 2516 gl. 17 st. 18 verseren, hoe veel bedraagt zulks in elke week en in elken dag? Het jaar gerekend tegen 52 weken en 365 dagen?

584. II Wanneer bij de termen der eerste reden deelen en minderdeelen zijn.

7. VOORBEELD. Wanneer 1 fl. kost 17 stuiv. hoe veel dan 17 fl. 7 oncen?

$$\frac{1 \text{ fl.} : 17 \text{ fl. 7 oncen.} = 17 \text{ stuiv.} : x \text{ stuiv.}}{16 \text{ oncen.} \quad 16}$$

$$\frac{279 \text{ oncen.}}{17 \text{ verm.}}$$

$$16 \mid 4743 \left\{ \begin{array}{l} 2916\frac{1}{2} \text{ stuiv.} = x \\ \text{rest } 7) \end{array} \right.$$

$$14 \text{ gl. 16 stuiv. 7 penn.} = x$$

VERKLARING. De evenredigheid uit de vraag volgende, is, 1 fl. : 17 fl. 7 oncen. = 17 fl. : x fl. Ik maak 17 fl. 7 oncen. tot oncen; dan heb ik 279 oncen. Maar vermits, in eene evenredigheid de termen van dezelfde reden in dezelfde eenheden moeten worden uitgedrukt, moet ook de voorgaande term der eerste reden, dat is, 1 fl. tot oncen herleid worden, en dan wordt de evenredigheid 16 oncen. : 279 oncen. = 17 stuiv. : x stuiv. Wordende x als naar gewoonte bepaald, (8)

585. 8. VOORBEELD. Wanneer men voor 13 stuiv. 12 penn. kan koopen 1 fl., hoe veel ponden kan men dan koopen voor 154 gulden?

$$\frac{14 \text{ stuiv. } 12 \text{ penn.} : 154 \text{ gl.} = 1 \text{ fl.} : x \text{ fl.}}{4 \quad 16 \quad (3 \quad 20)}$$

$$\frac{55 \text{ vierd. stuiv.}}{3036 \text{ stuiv.}}$$

$$\frac{4}{12320 \text{ vierde stuiv.}}$$

$$\text{divid. door } 55)$$

$$224 \text{ fl.} = x$$

(8) Verklaar de bewerking van het zevende voorbeeld?

(5) Verklaar de bewerking van het vierde voorbeeld?

(6) Verklaar de bewerking van het vijfde voorbeeld?

(7) Verklaar de bewerking van het zesde voorbeeld?

VERKLARING. Hier zijn wederom de termen der eerste reden, wanneer men 13 *fl.* 12 *penn.* tot vierde deelen van stuivers maakt, ongelijknamig: ik maak derhalve 154 *gl.* tot vierde deelen van stuivers, en heb de evenredigheid 55 vierd. *fl.* : 12320 vierd. *fl.* = 1 *fl.* : x ; waaruit, bij de oplossing, volgt, $x = 224$ *fl.* (9)

Aanmerking. Men kan dit nogtans korter aldus bewerken:

$$\begin{array}{r} 13 \text{ fl.} \quad 12 \text{ penn.} : 154 \text{ gl.} = 1 \text{ fl.} : x \\ 4 \quad 16 \quad 3 \quad 20 \\ \hline 55 \quad 14 \} \text{vermenigv.} \\ 5 \quad 4 \end{array}$$

komt 224 *fl.* = x .

VERKLARING. Na dat ik de 13 *fl.* 12 *penn.* tot 55 vierde stuivers heb herleid, moet ik 154 *gl.*, die de tweede term der reden is, met 20 en 4 vermenigvuldigen, om dien term met den eersten gelijknamig te maken: maar nu zie ik, dat 55 en 154 elk door 11 deelbaar zijn, ik verkrijg dus, na die deeling, 5 en 14; voorts zie ik dat 5 en 20, elk door 5 deelbaar zijn: na deze deeling verkrijg ik, voor den eersten term 1 en voor den tweeden het product van 4. van 14 en van 4, hetwelk, aangezien de voorgaande termen elk gelijk één zijn, de waarde van x geven (10)

586. 9. **VOORBEELD.** Indien 17 Mark 4 oncen 16 engels kosten 77 *gl.* hoe veel dan 1 Mark?

$$\begin{array}{r} 17 \text{ Mark } 4 \text{ onc. } 16 \text{ Eng.} : 1 \text{ Mark} = 77 \text{ Gl.} : x \text{ Gl.} \\ 8 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \\ \hline 10 \text{ onc.} \quad 35 \text{ multipl.} \\ 20 \quad 5 \quad 8 \quad 35 \quad 4 \text{ gl.} \\ \hline 704 \text{ vijfde Eng.} \\ 8 \quad 8 \quad 20 \end{array}$$

derhalve $x = 4$ *Gl.* $7\frac{1}{2}$ *fl.*

NB. De leerling stelle zelf de verklaring van deze bewerking. (11)

587. 10. **VOORBEELD.** Wanneer 39 *fl.* kost 13 *Gl.* 17 *fl.* 14 *penn.* hoe veel *fl.* kan men dan kopen voor 665 *Gl.* 10 *stuivers*?

(9) Verklaar de bewerking van het achtfte voorbeeld?

(10) Verklaar de nadere bewerking van het achtfte voorbeeld?

(11) Verklaar de bewerking van het negende voorbeeld?

$$\begin{array}{r} 13 \text{ Gl. } 17 \text{ fl. } 14 \text{ penn.} : 655 \text{ Gl. } 10 \text{ fl.} = 39 \text{ fl.} : x \text{ fl.} \\ 20 \quad 7 \text{ duit.} \quad 20 \quad 13 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 277 \text{ fl.} \quad 13110 \text{ fl.} \\ 16 \quad 8 \quad \text{met } 8 \text{ tot duitten} \\ \hline 2777 \text{ duitten} \quad 43 \text{ fl.} \\ 741 \quad 230 \\ 57 \quad \hline 1840 \text{ fl.} = x. \\ 19 \quad 1 \end{array}$$

VERKLARING. Men berleidt eerst 13 *gl.* 17 *fl.* 14 *penn.* tot duitten; de 655 *gl.* 10 *fl.* tot stuivers, die stuivers moeten, door dezelve met 8 te vermenigvuldigen, tot duitten herleid worden, ten einde beide termen van de eerste reden in dezelfde eenheden zouden uitgedrukt zijn: maar, eer ik die multiplicatie uitvoer, stel ik het getal 8, waarmede ik moet vermenigvuldigen, als factor onder 13110 *fl.*, en zie, of de termen van de eerste reden of de beide voorgaanden niet tegen elkander verkleinbaar zijn? De termen 2223 en 39 zijn eerst verkleinbaar door 3; deze verkleining geeft mij 741 en 13; ik zie dat deze nog door 13 verkleinbaar zijn, en ik verkrijg, in derzelver plaats, 57 en 1. Nog zijn 57 en 13110 beide verkleinbaar door 3; en ik verkrijg, na de verkleining, 19 en 4370: deze zijn nog verkleinbaar door 19, en dit geeft mij 1 en 230. Nadat ik nu 230 met 8 vermenigvuldigd heb, heb ik de evenredigheid 1 : 1840 = 1 : x , derhalve $x = 1840$ *fl.* (12)

VOORBEELDEN TOT OEFENING.

1. Indien 1 Last kost 43 gulden, hoe veel bedragen dan 17 Last 13 mudden 2 schepels?
2. Hoe veel beloopt 29 Schip *fl.* 11 Lijs *fl.* en 10 *fl.*, het Schip *fl.* tot 52 gulden?
3. Indien 40 Lasten tarw kosten 1917 gulden, hoe veel kost dan een schepel?
4. Hoe veel ponden kan men hebben voor 259 *gl.* 16 *fl.* en 5 *penn.* indien ten pond kost 17 *fl.* en 12 *penn.*?
5. Wanneer een Last kost 79 *gl.* 19 *fl.* 12 *penn.* hoe veel Last kan men dan kopen voor 1587 *gl.* 3 *fl.* 3 *penn.*?
6. Indien 10 Lijs *fl.* 10 *fl.* kosten 26 *gl.* hoe veel kosten dan 8 Schip *fl.* 19 Lijs *fl.* 6 pond?
7. Indien 100 *fl.* kosten 8 *gl.* 15 *fl.*, hoe veel pond kan men dan kopen voor 821 *gl.* 7 *fl.* 4 *penn.*?

588. III. Wanneer de beide middelste termen, of wel al de bekende termen der evenredigheid uit geheelen, deelen en minderdeelen bestaan.

(12) Verklaar de bewerking van het tiende voorbeeld?

II. DEEL.

C

11. VOORBEELD. Indien 1 Last kost 69 gl. 7 st. 2 penn., hoe veel kosten dan 36 Last 17 mudden 3 schepels?

$$\begin{array}{r}
 1 \text{ Last} : 36 \text{ L. } 17 \text{ m. } 3 \text{ sch.} = 69 \text{ Gl. } 7 \text{ st. } 2 \text{ penn.} : x \text{ Gl.} \\
 \begin{array}{r}
 27 \text{ m.} \quad 27 \quad \quad \quad 20 \\
 108 \text{ sch.} \quad \underline{\quad} \quad \quad \underline{\quad} \\
 54 \quad 989 \text{ m.} \quad \quad \quad 1387 \text{ st.} \\
 6 \quad 4 \quad \quad \quad 16 \\
 2 \quad \underline{\quad} \quad \quad \underline{\quad} \\
 3959 \text{ sch.} \quad \quad \quad 22194 \text{ penn.} \\
 411 \text{ vermenigv.} \quad \quad \quad 11007 \\
 \underline{\quad} \quad \quad \quad 1733 \\
 3959 \quad \quad \quad 411 \\
 3959 \\
 15836 \\
 \underline{\quad} \\
 1627149 \\
 2) \quad \underline{\quad} \\
 813574 \frac{1}{2} \text{ penn.} = x \\
 50848 \text{ st. } 6 \frac{1}{2} \text{ penn.} = x \\
 \text{of } 2542 \text{ gl. } 8 \text{ st. } 6 \frac{1}{2} \text{ penn.} = x.
 \end{array}
 \end{array}$$

VERKLARING. Na de evenredigheid te hebben opgesteld, herleidt men, zoo als het behoort, de termen van de eerste reden elk tot schepels; dan wordt de evenredigheid 108 schep. : 3959 schep. = 69 gl. 7 st. 2 penn. : x gl. Nog herleidt men de eerste term van de tweede reden tot penningen; dan wordt de evenredigheid, in geheele getallen, 108 schep. : 3959 schep. = 22194 penn. : x penn. De voorgaande termen dezer evenredigheid zijn verkleinbaar eerst door 2, daarna door 9, daarna door 3; en de evenredigheid wordt, na de verkleining, 2 : 3959 = 411 : x, welke, als naar gewoonte, opgelost zijnde, de waarde van x in penningen geven zal, en daarna in guldens doen bekend worden. (13)

589. 12 VOORBEELD. Indien 37 Last 19 mudden en 2 schepels kosten 2616 gl. 5 st. 7 penn., hoe veel kost dan 1 Last?

(13) Verklaar de bewerking van het elfde voorbeeld?

$$\begin{array}{r}
 37 \text{ L. } 19 \text{ m. } 2 \text{ sch.} : 1 \text{ Last} = 2616 \text{ gl. } 5 \text{ st. } 7 \text{ penn.} : x \text{ gl.} \\
 \begin{array}{r}
 27 \quad \quad \quad 27 \text{ m.} \quad \quad \quad 20 \\
 108 \text{ mud.} \quad \quad \quad 108 \text{ sch.} \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 4 \quad \quad \quad 54 \quad \quad \quad 52325 \text{ st.} \\
 \quad \quad \quad 18 \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 16 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 837207 \text{ penn.} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 18 \text{ vermen.} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 \text{deel door } 679 / 15069726 \left\{ \begin{array}{l} 22194 \text{ penn.} \dots = x \\ 1489 \quad \quad \quad 1387 \text{ st. } 2 \text{ penn.} = x \\ 1317 \quad \quad \quad 69 \text{ gl. } 7 \text{ st. } 2 \text{ penn.} = x. \end{array} \right. \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6382 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2716 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{rest } 0
 \end{array}
 \end{array}$$

De leerling make zelf de verklaring. (14)

590. 13. VOORBEELD. Indien 3 Schip en 4 Lijs en 5 kosten 314 guld. 4 st. 9 penn., hoe veel kosten dan 19 Schip en 18 Lijs en 10 ?

$$\begin{array}{r}
 3 \text{ Sch. } 4 \text{ L. } 5 \text{ Lijs} : 19 \text{ Sch. } 18 \text{ L. } 10 \text{ Lijs} = 314 \text{ gl. } 4 \text{ st. } 9 \text{ penn.} : x \text{ gl.} \\
 \begin{array}{r}
 20 \quad \quad \quad 1 \quad 20 \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 20 \\
 \underline{\quad} \quad \quad \quad \underline{\quad} \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 64 \text{ L. } \quad \quad \quad 398 \text{ L.} \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6284 \text{ st.} \\
 15 (3) \quad \quad \quad 15 (3) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 \underline{\quad} \quad \quad \quad \underline{\quad} \quad \quad \quad \quad \quad \quad 16 \\
 193 \quad \quad \quad 1196 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 100553 \text{ penn.} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 100553 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 904977 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 603318 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 120261388 \\
 \text{deel door } 193) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{komt } 623116 \text{ penn.} = x \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 16) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 \quad 38944 \text{ st. } 12 \text{ penn.} = x \\
 \quad \underline{\quad} \\
 \quad 1947 \text{ gl. } 4 \text{ st. } 12 \text{ penn.} = x.
 \end{array}
 \end{array}$$

De leerling make zelf de verklaring. (15)

(14) Verklaar mij de bewerking van het twaalfde voorbeeld?

(15) Verklaar die van het dertiende voorbeeld?

VOORBEELDEN TOT OEFENING.

1. Hoe veel kost 11 fl 7 oncp, als 1 fl kost 17 stuiv. 10 penn.?
2. Indien 1 Last Groninger maas kost 78 gl. 10 stuiv. 4 penn., hoe veel beloopt dan 29 Last 31 mudden 11 spins?
3. Hoe veel bedragen 19 Schip fl 12 Lijs fl 10 fl tot 54 gl. 19 stuiv. 4 penn. het Schippond?
4. Indien 15 Schip fl 3 Lijs fl 5 fl kosten 537 gl. 9 stuiv. 6 penn., hoe veel beloopt dan 1 Schip fl ?
5. Wanneer 12 Last 13 mudden en 2 schepels kosten 958 gl 7 stuiv. 3 penn., hoe veel kost dan een Last?
6. Hoe veel kost een Schepel, wanneer 7 Last 11 mudden en 1 schepel kosten 317 gl. 17 stuiv. 15 penn.?
7. Wanneer 1 Mark 9 engels 15 azen kosten 22 fl 14 fl 9 fl , hoe veel kosten dan 3 Mark 3 oncen 16 engels 14 azen?
8. Wanneer, met 7 Gl. en een stooter, 7 stuiv. 9 penn. gewonnen wordt, hoe veel wint men dan met 17 Ducaten en 23 zesthalven?

II. Regel van Driën in Gebroken Getallen.

591. Dit tweede hoofdgeval wordt, naar aanleiding van het geen dienaangaande, in art. 573, is gezegd, tot het eerste gebracht, *wanneer men de termen, in welke breuken voorkomen, met den noemer van het gebroken vermenigvuldigt: maar dan moet men den term, welke met dezen alzoo vermenigvuldigten term overeenstemt, volgens de V Eigenschap, art. 541, met dit zelfde getal vermenigvuldigen, opdat de onbekende term niet van waarde verandere.* (16) Men doet nogtans in het algemeen beter, wanneer men dien vermenigvuldiger bij zijnen term stelt, en, eer men vermenigvuldigt, onderzoekt, of 'er eene verkleining kan plaats hebben, omdat men, in dit geval, altijd overvloedige bewerkingen uitwint. (17)

592. 14. VOORBEELD. Hoe veel kosten 308 fl tegen 17 $\frac{1}{2}$ stuiv. het fl ?

$$1 \text{ fl} : 308 \text{ fl} = 17 \frac{1}{2} \text{ fl.} : x \text{ fl.}$$

$$\begin{array}{r} 4 \quad 77 \\ 1 \quad 77 \end{array}$$

$$497$$

$$497$$

$$5467 \text{ fl.} = x$$

$$\text{of } 273 \text{ gl. } 7 \text{ fl.} = x.$$

- (16) Wat is bij den Regel van Driën in het gebroken in acht te nemen?
 (17) Wat kan men met voordeel in de toepassing van dien regel in acht nemen?

VERKLARING. Ik vermenigvuldig den derden term der evenredigheid met den noemer der breuk, waarmede hij is aangedaan; dan verkrijg ik 71; maar nu moet ik ook den eersten term met 4 vermenigvuldigen, en dan is de nieuwe evenredigheid $4:308=71:x$, of, de termen der eerste reden door 4 deelvende, verkrijg ik $1:77=71:x$, welke, als naar gewoone, wordt opgelost. (18)

593. 15. VOORBEELD. Hoe veel kosten 15 $\frac{1}{2}$ el, tegen 7 stuiv. de 3 ellen?

$$\frac{3 \text{ ell.} : 15 \frac{1}{2} \text{ ell.} = 7 \text{ stuiv.} : x \text{ stuiv.}}$$

$$173$$

$$41$$

$$(7 \text{ vermenigv.})$$

$$287$$

$$\text{deel door } 8)$$

$$35 \frac{1}{2} \text{ stuiv. of } 35 \text{ stuiv. } 14 \text{ penn.} = x.$$

VERKLARING. Ik vermenigvuldig den tweeden term der reden met 8, den noemer der breuk, waarmede hij is aangedaan; en nu moet ik ook den eersten term met 8 vermenigvuldigen: doch, eer ik die vermenigvuldiging uitwerk, verklein ik 3 en 123 tegen elkander door 3, en verkrijg in de plaats 1 en 41. De evenredigheid wordt dan $8:41=7:x$; enz. (19)

594. 16. VOORBEELD. Wanneer 11 $\frac{1}{2}$ fl kosten 5 guld. 9 stuiv. 11 penn., hoe veel kost dan 37 $\frac{1}{2}$ fl ?

$$11 \frac{1}{2} \text{ fl} : 37 \frac{1}{2} \text{ fl} = 5 \text{ gl. } 9 \text{ fl. } 11 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ 7 \end{array}$$

$$159$$

$$109 \text{ fl.}$$

$$(16)$$

$$1755 \text{ penn.}$$

$$351$$

$$159 \text{ verm.}$$

$$\text{komt } 55809 \text{ penn.} = x$$

$$\text{of } 174 \text{ gl. } 8 \text{ fl. } 1 \text{ penn.} = x.$$

VERKLARING. Ik maak den derden term tot penningen, vermenigvuldig den eersten term met den noemer van zijne breuk, en stel onder den tweeden dien noemer als factor. Nu verklein ik de voorgaande termen 35 en 1755 door 5, dan verkrijg ik 7 en 351; voorts nog 7 en 371 door 7, dan heb ik, 1 en 53. De evenredigheid wordt dan, $1:3 \times 53 \text{ of } 159=351:x$, enz. (20)

- (18) verklaar de bewerking van het veertiende voorbeeld?
 (19) Verklaar die van het vijftiende voorbeeld?
 (20) Verklaar die van het zestiende voorbeeld?

595. 17. VOORBEELD. Indien $7\frac{1}{2}$ fl kosten 24 gl. 16 st. hoe veel bedragen dan 103 $\frac{1}{2}$ fl ?

$$7\frac{1}{2} \text{ fl} : 103\frac{1}{2} \text{ fl} = 24 \text{ gl. 16 st.} : x \text{ gl.}$$

31	1243	20
12	4	496 st.
3		16
		1243 verm.
		19888

deel door 3)

komt 6629 $\frac{1}{3}$ stuiv. = x
of 331 gl. 9 $\frac{1}{3}$ st. = x.

VERKLARING. Na den derden term tot stuivers herleid te hebben, vernietigvuldig ik den eersten term met 4, den tweeden met 12; de producten zijn 31 en 1243; onder deze termen stel ik als factoren, 12 en 4. Nu is 31 en 496 elk door 31 deelbaar, en 4 en 12 elk door 4. Ik verkrijg derhalve $3 : 1243 = 16 : x$, enz. (21)

595. 18. VOORBEELD. Hoe veel kost 1 Last, als 2 $\frac{1}{2}$ Lasten kosten 107 gl. 8 $\frac{1}{2}$ stuiv.?

$$2\frac{1}{2} \text{ Last} : 1 \text{ Last} = 107 \text{ Gl. 8}\frac{1}{2} \text{ st.} : x \text{ Gl.}$$

25	12	20
4	3	2148 $\frac{1}{2}$ stuiv.
5		8595
		1719
		3 verm.
		5157

deel door 5)

komt 1031 $\frac{1}{5}$ st. = x
of 51 gl. 11 $\frac{1}{5}$ stuiv. = x.

VERKLARING. Na den derden term tot stuivers herleid te hebben, is de evenredigheid $2\frac{1}{2} \text{ Last} : 1 \text{ Last} = 2148\frac{1}{2} \text{ st.} : x \text{ st.}$ Ik vernietigvuldig den eersten term met 12, den derden met 4, en stel, om de evenredigheid te behouden, onder den eersten term den factor 4, en onder den tweeden term den factor 12; ik deel 25 en 8595 elk door 5; 4 en 12 elk door 4, en verkrijg $5 : 3 = 1719 : x$, enz. (22)

(21) Verklaar die van het zeventiende voorbeeld?

(22) Verklaar die van het achttiende voorbeeld?

597. 19. VOORBEELD. Wanneer 21 ellen kosten 84 gl. 11 $\frac{1}{2}$ stuiv., hoe veel kosten dan 16 $\frac{1}{2}$ ellen?

$$21 \text{ ell.} : 16\frac{1}{2} \text{ ell.} = 84 \text{ gl. 11}\frac{1}{2} \text{ stuiv.} : x \text{ gl.}$$

12	197	20
3	725 verm.	1691 $\frac{1}{2}$ st.
108	142825	5075
deel	725	

komt 1322 st. 7 $\frac{1}{2}$ penn. = x
of, 66 gl. 2 st. 7 $\frac{1}{2}$ penn. = x.

De leerling make zelf de verklaring. (23)

598. 20. VOORBEELD. Indien 26 $\frac{1}{2}$ fl kosten 4 gl. 15 $\frac{1}{2}$ penn., hoe veel kost dan 2 $\frac{1}{2}$ fl ?

$$26\frac{1}{2} \text{ fl} : 2\frac{1}{2} \text{ fl} = 4 \text{ gl. 0 st. 15}\frac{1}{2} \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

200	5	20
2	8	80
5	4	16
19		1295 $\frac{1}{2}$ penn.
1		6479
		589
		31
		4

124 penn. = x
of, 7 stuiv. 12 penn. = x.

De leerling make zelf de verklaring dezer bewerking. (24)

599. 21. VOORBEELD. Wanneer $\frac{1}{2}$ el kost $\frac{1}{2}$ guld., hoe veel kosten dan $\frac{1}{2}$ ellen?

$$\frac{1}{2} \text{ ell.} : \frac{1}{2} \text{ ell.} = \frac{1}{2} \text{ gl.} : x \text{ gl.}$$

3	9	2
32	4	1
3	3	1 verm.
16	1	1
4	deel door 4)	

komt $\frac{1}{2}$ gl. = x.

(23) Verklaar die van het negentiende voorbeeld?

(24) Verklaar die van het twintigste voorbeeld?

De kerling stelle zelve de verklaring. (25)

VOORBEELDEN TOT OEFENING.

1. Als $7\frac{1}{2}$ ellen kosten 23 guld. 12 stuiv. 5 penn., hoe veel kosten dan $11\frac{1}{2}$ ellen?
2. Hoe veel kosten 11 mudden $2\frac{1}{2}$ schepel, als $2\frac{1}{2}$ Last kosten 117 guld 11 stuiv. 15 penn.?
3. Als 1 mudda Gerst kost $2\frac{1}{2}$ goud-guld., hoe veel Last zal men dan kunnen hebben voor 512 daalders 11 stuiv. 8 penn.?
4. Hoe veel belopen 135 pond, als $7\frac{1}{2}$ pond kosten 9 gl. 11 $\frac{1}{2}$ stuiv.?
5. Als $\frac{3}{4}$ mark kosten $17\frac{1}{2}$ stuiv., hoe veel belopen dan 17 mark 5 oncen?
6. Hoe veel Zeeuwen à 52 stuivers bedragen 17 Last 11 mudden 1 schepel, als 1 $\frac{1}{2}$ Last kosten 99 goud-gl. 12 $\frac{1}{2}$ stuivers?
7. Als 1 once kost 3 guld. $17\frac{1}{2}$ stuiv., hoe veel kosten dan 19 $\frac{1}{2}$ mark?
8. Als 12 pond kost $16\frac{1}{2}$ guld., hoe veel kosten dan 11 $\frac{1}{2}$ oncen?
9. Als 3 mark kosten $17\frac{1}{2}$ schelling, hoe veel kosten dan 17 $\frac{1}{2}$ mark 5 $\frac{1}{2}$ oncen?
10. Als de $\frac{1}{2}$ van $\frac{1}{2}$ ellen kosten $\frac{1}{3}$ daalder, hoe veel ducaten bedragen dan $\frac{1}{2}$ van de helft van $11\frac{1}{2}$ ellen?
11. Als een derde van anderhalve derde-part van één el $\frac{1}{2}$ van $3\frac{1}{2}$ stuiver kost, hoe veel guld. kosten dan $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$ el?
12. Hoe veel pond zal men kopen voor 18 $\frac{1}{2}$ goud-gl., als $\frac{1}{2}$ uit $\frac{1}{2}$ van $\frac{1}{2}$ maal 117 $\frac{1}{2}$ pond 120 $\frac{1}{2}$ guld. + $1\frac{1}{2}$ ducaten kosten?

XL. LES. Vervolg der voorgaande Les. Nadere beschouwing van den Regel van Drieën.

600. Men kan, in de bewerking van den Regel van Drieën, gebruik maken van de bewerkingen, welke in het *Eerste Deel*, *Lesen* XVI, XVII, XVIII, XIX en XXVI, verklaard zijn. (1) Gelijk in de volgende voorbeelden te zien is.

601. 1. VOORBEELD. In de evenredigheid:

$$1 \text{ fl.} : 317 \text{ fl.} = 1 \text{ gl.} 17 \text{ st.} 3 \text{ penn.} : x \text{ guld.}$$

kan men, in plaats van 1 gl. 17 st. 3 penn. tot penningen te herleiden, dit zamengestelde getal, volgens art. 204, met 317 vermenigvuldigen, en, daar de eerste term der evenredigheid de éénheid is, is het product gelijk aan de begeerde vierde evenredige. (2)

602. Op dezelfde wijze zal men de volgende gestelde Regels van Drieën kunnen uitwerken.

- a) 1 el : 716 ell. = 3 gl. 15 st. 12 penn. : x gl.
- b) 1 Last : 79 Last = 173 gl. 11 st. 5 penn. : x gl.

(25) Verklaar de bewerking van het een-en-twintigste voorbeeld?

(1) Kan men den Regel van Drieën nog anders, dan in de voorgaande Les geleerd is, oplossen?

(2) Hoe wordt het eerste voorbeeld behandeld?

603. 2. VOORBEELD. Indien gegeven ware de evenredigheid:

$$1 \text{ fl.} : 317 \text{ fl.} = 3 \text{ gl.} 17 \text{ st.} 9 \text{ gl.} : x \text{ gl.}$$

en men wilde de uitkomst in guldens en deelen van dien hebben, dan zou men, naar den regel van art. 193, eerst 3 gl. 17 st. 9 gl. tot guldens herleiden, en als in art. 601 te werk gaan. (3)

604. 3. VOORBEELD. Zoo ook, wanneer gegeven ware:

$$1 \text{ Last} : 173 \text{ Last} = 83 \text{ goud-gl.} 22 \text{ st.} 13 \text{ penn.} : x \text{ guld.}$$

en men de uitkomst in guldens begeerde, zou men, volgens art. 185, de 83 goud-gl. 22 st. 13 penn. eerst tot guldens herleiden, en voorts als in art. 601 werken. (4)

605. 4. VOORBEELD. Gesteld zijnde de evenredigheid:

$$15 \text{ fl.} : 807 \text{ fl.} = 33 \text{ gl.} 17 \text{ st.} 4 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

dan zal men eerst bezien, of de termen der eerste reden niet verkleinbaar zijn; inderdaad is $15 : 807 = 5 : 269$, en men heeft dus de evenredigheid:

$$5 : 269 = 33 \text{ gl.} 17 \text{ st.} 4 \text{ penn.} : x \text{ guld.}$$

men vermenigvuldige dan, (volgens art. 204.) 33 gl. 17 st. 4 penn. met 269, en deele het product, volgens art. 219, in 5 gelijke deelen; dan verkrijgt men de waarde van x. (5)

606. Of wil men nog anders, dan deele men beide termen der eerste reden door 5, dan heeft men:

$$1 : 53\frac{1}{2} = 33 \text{ gl.} 17 \text{ st.} 4 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

		53	
	1794 gl. 44 st. 4 penn.		
6	15	7 $\frac{1}{2}$	}
20	6	5 $\frac{1}{2}$	

$$1 \text{ komt} : \dots : 1821 \text{ gl.} 16 \text{ st.} 0\frac{1}{2} \text{ penn.} = x$$

men moet derhalve 33 gl. 17 st. 4 penn. met 53 $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen: dit bewerkstelligt men aldus: men vermenigvuldigt 33 gl. 17 st. 4 penn. met 53, dan is het product 1794 gl. 44 st. 4 penn., hierbij moet nog geteld worden vier-vijfde deelen van 33 gl. 14 st. 4 penn., men neemt dan eerst een-vijfde deel, dit is 6 gl. 15 st. 7 $\frac{1}{2}$ penn., en dit vijfde deel neemt men driemaal, dan verkrijgt men 20 gl. 6 st. 5 $\frac{1}{2}$ penn., deze alle bij elkander optellende, vindt men voor het begeerde 1821 gl. 16 st. 0 $\frac{1}{2}$ penn. (6)

607. Op dezelfde wijze, zal men de volgende evenredigheden kunnen oplossen.

$$a) 13 : 1756 = 17 \text{ gl.} 11 \text{ st.} 11 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

$$b) 3 : 175 = 51 \text{ gl.} 0 \text{ st.} 3 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

608. 5. VOORBEELD. Wanneer gegeven is de evenredigheid:

$$7\frac{1}{2} \text{ fl.} : 113\frac{1}{2} \text{ fl.} = 113 \text{ gl.} 17 \text{ st.} 10 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

(3) Hoe behandeld gij het tweede voorbeeld?

(4) Hoe het derde?

(5) Hoe het vierde?

(6) Hoe kan men dit voorbeeld anders oplossen?

zoo zoeken men de reden van $7\frac{1}{2}$ tot $113\frac{1}{2}$ in geheele getallen, door beide termen met het kleinste gemeene veelvoud van 2 en 3, dat is, met 6 te vermenigvuldigen, en dan vindt men 45 : 680, en de termen dezer reden door 5 gedeeld hebbende, is heeft men: 9 : 136. Men kan dan stellen:

$$9 : 136 = 113 \text{ gl. } 17 \text{ st. } 9 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

Men vermenigvuldige dan den derden term met 136, en deele het product door 9.

Nog korter zal men werken, wanneer men beide termen der eerste reden door 9 deelt; want dan verkrijgt men:

$$1 : 15\frac{1}{9} = 113 \text{ gl. } 17 \text{ st. } 9 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 1708 \text{ gl. } 3 \text{ st. } 7 \text{ penn.} \\ 12 \quad 13 \quad 1 \end{array}$$

$$\text{komt} \dots 1720 \text{ gl. } 16 \text{ st. } 8 \text{ penn.} = x$$

dat is, men vermenigvuldige den derden term met 15, en telte bij het product één-negende van dien term op. (7)

609. In het algemeen, zal men altijd de termen der eerste reden in eene andere reden kunnen veranderen, waarvan de eerste term de éénheid is, en dan zal men de vierde evenredige op de voorgaande wijze kunnen vinden. (8)

610. 6. VOORBEELD. Wanneer gegeven is de evenredigheid:

$$17 \text{ st. } 8 \text{ penn.} : 116 \text{ gl.} = 1 \text{ fl.} : x \text{ fl.}$$

dan zal men, even zoo als. in de XVII Les, geleerd is, bepalen, hoe veel maal 17 st. 8 penn. op 116 gl. begrepen zij; en hierdoor zal x bekend worden. (9)

611. 7. VOORBEELD. In de evenredigheid:

$$3 \text{ gl. } 12 \text{ st. } 4 \text{ penn.} : 1196 \text{ gl. } 13 \text{ st.} = 17 \text{ fl. } 4 \text{ st.} : x \text{ fl.}$$

zal men bepalen, hoe veel maal 3 gl. 12 st. 4 penn. in 1196 gl. 13 st. begrepen zij, en met dit geheel of gemengde getal, zal men 17 fl. vermenigvuldigen, waardoor x zal bekend worden. (10)

612. 8. VOORBEELD. In de evenredigheid:

$$716 \text{ fl.} : 1 \text{ fl.} = 3176 \text{ gl. } 8 \text{ st. } 6 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

behoeft men niets anders te doen, dan, volgens art. 219, het zeven-honderd-en-zestiende gedeelte van 3176 gl. 8 st. 6 penn. te nemen, en x zal gevonden zijn. (11)

613. 9. VOORBEELD. In de evenredigheid:

$$76\frac{1}{2} \text{ fl.} : 1 \text{ fl.} = 83 \text{ gl. } 17 \text{ st. } 3 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

(7) Verklaar de wijzen, op welke het vijfde voorbeeld kan worden opgelost?

(8) Wat kan men in het algemeen aanmerken?

(9) Verklaar het zesde voorbeeld?

(10) Verklaar het zevende voorbeeld?

(11) Verklaar het achtere voorbeeld?

zal men de voorgaande termen, dat is, den eersten en derden term, elk met 4 vermenigvuldigen, en dan heeft men:

$$307 : 1 = 335 \text{ gl. } 8 \text{ st. } 12 \text{ penn.} : x \text{ gl.}$$

en den derden term door 307 deelen. (12)

614. Wanneer men eenen regel van drieën in het gebroken, door den regel, voor het vinden van de vierde evenredige gegeven, (zie art. 535.) zal oplossen, zonder voorafgaande herleiding of wegmaking der breuken, (te weten, dat die vierde evenredige gelijk zij aan het product der middelste, gedeeld door den voorsten term,) kan men, na alle gemengde getallen tot breuken gebragt te hebben, de multiplicatie en divisie der breuken dadelijk toepassen, zonder dat het noodig zij, de noemers der breuken over te brengen. (13)

10. VOORBEELD. Gegeven zijnde de evenredigheid:

$$3\frac{1}{2} \text{ fl.} : 15\frac{1}{2} \text{ fl.} = 1\frac{1}{2} \text{ guld.} : x \text{ gl.}$$

dan wordt dezelve:

$$\frac{1}{2} \text{ fl.} : \frac{1}{2} \text{ fl.} = \frac{1}{2} \text{ gl.} : x \text{ gl.}$$

en derhalve (volgens art. 535.)

$$x = \frac{46 \times 13 \times 2}{3 \times 8 \times 7} = \frac{23 \times 13}{3 \times 2 \times 7} = 7\frac{1}{2} \text{ gl.} \quad (14)$$

Om nu van zulk eene oplossingswijze alle voordeel, ten opzichte van de verkleining der getallen, te trekken, moet men, onder het oog houden: dat, bijaldien in het gebroken

$$\frac{a \times b \times c \times d \times e}{p \times q \times r \times s \times t}$$

eenige factor van den noemer verkleinbaar is tegen eenigen factor van den teller, die verkleining altijd kan worden in het werk gesteld, waar die factoren in teller of noemer mogten voorkomen. Aldus is, in het uitgewerkte voorbeeld, 46 en 2 elk door 2 gedeeld, en 8 door 2 $\times$ 2 of 4. (15)

11. VOORBEELD. Gegeven zijnde de evenredigheid:

$$1\frac{1}{2} \text{ fl.} : \frac{1}{2} \text{ fl.} = \frac{3}{2} \text{ gl.} : x \text{ gl.}$$

dan zal

$$x = \frac{11}{12} \times 11 \times \frac{1}{16} = \frac{121}{96} \text{ gl.} \text{ zijn.} \quad (16)$$

(12) Verklaar het negende voorbeeld?

(13) Wat merkt gij aangaande den Regel van Drieën in het gebroken op?

(14) Verklaar het tiende voorbeeld?

(15) Wat merkt gij omtrent deze handelwijze op?

(16) Verklaar het elfde voorbeeld?

In vele gevallen kan het voordeelig zijn, dien trant van werken te volgen.

615. Men kan nog vele andere kunstgrepen bedenken, om eenen Regel van Drieën langs andere, dan de reeds aangewezen, handelwijzen op te lossen; dan, de bovenstaande zijn de voornaamste: alle anderen worden in de uitvoering, of schoon misfchien kunstmatiger, nogtans langwijger en lastiger, waarom wij ons met dezelve niet zullen ophouden. De meeste gevallen van het gemeene leven, in welke een regel van drieën te pas komt, loopen, over het berekenen van het beloop der koopwaren, tegen eenen bepaalde prijs, waarvan in de XIX Les een genoegzaam aantal voorbeelden zijn opgegeven, met aanwijzing van de geschikteste en gebruikelijkste rekenwijzen, welke, in elk dezer gevallen, behooren gevolgd te worden. (17)

616. Uit eene naauwkeurige vergelijking van het behandelde in deze en de voorgaande Les, met het geen in de XXXIII Les, art. 452, gezegd is, moet het voordeel van het wijsgeerig Stelsel van Maten en Gewigten, in de XXXI Les verklaard, ontegenzeggelijk in het oog loopen; daar, wanneer men alle waren en alle geldwaarden in de Maten, Gewigten en Muntspecien van dit Stelsel uitdrukt, men met de verschillende herleidingen van geheel tot deelen en minderdeelen, of van minderdeelen tot geheel in de oplossing van eenen regel van drieën, en welke de berekening zoo langwijzig maakt, niets te doen heeft; komende, in het allermoeijelijkste geval, de oplossing van eenen Regel van Drieën op eene enkele multiplicatie en eene enkele divisie neder, gelijk zulks op de aangehaalde plaats, I. Deel, bladz. 174, breeder kan gezien worden, (18)

VRAAGSTUKKEN, door den Regel van Drieën op te lossen.

1. VRAAGSTUK. Hoe veel bedragen 783 kilogrammes 7 hectogrammes 3 decagrammes 7 grammes, de kilogrammes tegen 7 Francs 23 centimes?

2. VRAAGSTUK. Hoe veel bedragen 379 meters 7 decimeters Linmen, de meter tegen 2 Francs 17 centimes?

3. VRAAGSTUK. Hoe veel bedragen 118 kiloliters 7 hectoliters 3 decaliters 5 liters koren, de kiloliter gerekend tegen 83 Francs 87 centimes?

4. VRAAGSTUK. Het basten van eenen weg, die 3 kilometers lang, 2 meters 7 decimeters 3 centimeters breed is, wordt tegen 10 Francs 15 centimes de vierkante meter aangenomen: hoe veel kost dan de geheele weg?

(17) Wat merkt gij aangaande het voorgaande op?

(18) Wat merkt gij nog op?

5. VRAAGSTUK. Een koopman heeft 3817 kilogrammes van zekere waar gekocht, waar voor hij met onkosten betaald 9371 Francs 79 centimes; hoe veel moet hij de kilogramme verkoopen, om 10 ten honderd te winnen?

6. VRAAGSTUK. Maar zoo diezelfde waar op de 100 kilogrammes 8 kilogrammes was ingedroogd, hoe veel zou hij dan de kilogramme moeten verkoopen, om 12 ten honderd te winnen?

7. VRAAGSTUK. Wanneer het transport per as van een myriagramme, voor eenen kilometer affands, tegen 1 Franc 27 centimes berekend wordt, hoe veel zal dan het transport van 7916 kilogrammes op een affand van 73 myriameters bedragen?

8. VRAAGSTUK. Een landgoed, groot 39 hectares 7 decars 9 deciarets, heeft in een jaar aan vruchten opgebracht ter waarde van 1796 Francs 73 centimes, hoe veel bedraagt zulks per are?

9. VRAAGSTUK. Een Mesfelaar heeft eenen muur, ter breedte van 17,3 meters, ter hoogte van 12,7 meters en ter dikte van 0,37 meters, voor 786 Francs aangenomen, hoe veel bedraagt zulks voor elken cubieken meter of stere?

10. VRAAGSTUK. Een winkelier heeft goederen, welke hem de el, Amsterdamsche maat, 23 stuiv. 8 penn. kosten; tegen hoe veel Francs en centimes kan hij dezelve per meter afleveren, om 10 ten 100 te winnen?

11. VRAAGSTUK. Hij heeft goederen, welke hem het Amsterd. fl kosten 33 $\frac{1}{2}$ stuiv.; tegen hoe veel Francs zal hij die per kilogramme moeten afleveren, om 12 ten 100 te winnen?

12. VRAAGSTUK. Indien het last graan kost 126 goud-gl., tegen hoe veel Francs kan men dan de kiloliter met 10 ten 100 winst afleveren?

13. VRAAGSTUK. Een winkelier heeft onderscheidene wollen en zijds stoffen, welke hij, bij de Amsterdamsche el, uit den winkel tegen 16 st. 23 st. 46 st. 90 st. 126 st. 7 gl. 8 $\frac{1}{2}$ gl. verkoopen moet; maar nu wordt de nieuwe el, die 12 decimeters lang is, ingevoerd, op welke prijzen moet hij nu zijn tarif stellen, om, op denzelfden voet, te blijven verkoopen?

14. VRAAGSTUK. Een ander heeft waren, welke hij, het Amsterdamsche fl , tot 12, 18, 23, 46 stuivers verkoopt; maar nu moet hij met het nieuwe fl , dat is, de halve kilogramme, verkoopen; welk is dan het tarif, waarna hij, op denzelfden voet, met het nieuwe pond, verkoopen moet?

15. VRAAGSTUK. Een werkmans is gewoon zijn werk bij den vierkanten Amsterdamschen voet tot 7 $\frac{1}{2}$ stuiver te berekenen; maar bij de inschrijving tot eene aanneming moet dit werk bij den vierkanten meter berekend worden; op hoe veel Francs moet hij dan den vierkanten meter berekenen, om zijne rekening op denzelfden voet in te rigten?

16. VRAAGSTUK. Het gewerkt goud moet aan hoofdrecht betalen 20 Francs de hectogramme, nog boven dien eens 10 pCent, en nog eens 16 pCent; hoe veel rogt moet dan in Hollands geld betaald worden voor een stuk, hetwelk 17 engels 23 azen weegt?

17. VRAAGSTUK. Hoe veel bedraagt de interest van 1736 Francs 73 cent. tegen 5 $\frac{1}{2}$ ten honderd?

18. VRAAGSTUK. Iemand heeft 3786 kilogrammes, welke hem 0,76 Francs de kilogramme kosten: hoe veel moet hij ze voor 3520 kilogrammes

ingedroeft, nu is hij verplicht, dezelve 3½ stuur, het Amsterdamsche 8 te verkoopen: wint of verliest hij? en hoe veel?

19. VRAAGSTUK. Volgens de sterflijsten van DEPARCIEUX, leven 'er van de 10000 menschen, die geboren worden, bij het begin van het 10e, 20e, 30e, 40e, 50e, 60e, 70e, 80e jaar, respectievelijk, 6004, 5558, 5005, 4490, 3964, 3191, 2109 en 812: nu zijn 'er in eene stad 4173 kinderen geboren; hoe veel zullen 'er nog op die onderdommen van in leven zijn?

20. VRAAGSTUK. Men rekent dat 'er, in groote steden, het eene jaar door het ander, van de 26 inwoners, één sterft; hoe groot is de bevolking van eene stad, alwaar in den loop van één jaar 5386 menschen gestorven zijn?

21. VRAAGSTUK. Op het oogenblik, dat eene opstaande mast, die 10 meters hoog is, eene schaduw van 13,73 meters werpt, wordt de schaduw van eenen toren 98,78 meters lang bevonden: hoe hoog is dan die toren?

22. VRAAGSTUK. Wanneer de middellijn van eenen cirkel in 113 deelen gedeeld wordt, bevat de omtrek zeer na 355 deelen; hoe veel meters is dan de omtrek van eenen cirkel lang, die 17,3 meters middellijn heeft?

23. VRAAGSTUK. De omtrek van eenen ronden toren is 25,5 meters groot, hoe groot is dan zijne middellijn?

24. VRAAGSTUK. Drie arbeiders kunnen een werk, de eerste in 5, de tweede in 7, en de derde in 9 dagen, afmaken: in het veel tijd zullen zij dan dit werk gezamenlijk volbrengen?

De eerste doet in een dag $\frac{1}{5}$, de tweede $\frac{1}{7}$, de derde $\frac{1}{9}$ van het werk: in een dag maken zij met hun drieën $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{31}{135}$; men zegge dan: $\frac{31}{135}$ werk tot 1 werk = 1 dag tot x dagen.

25. VRAAGSTUK. Vier aannemers hebben zoo veel volk in 's werk, dat (9 uren daags werkende,) A het werk in 300 dagen, B in 250, C in 400, D in 380 dagen kan volbrengen; indien dit werk in 70 dagen moet gerasd zijn, hoe veel uren zullen zij gezamenlijk daags daar aan moeten werken?

XLI LES. Over de aanëengeschakelde Evenredigheden, en derzelver gebruik, in de zoogenaamde Gezelschaps-Rekening.

617. Wanneer drie of meer redens aan elkander gelijk zijn; dan verkrijgt men eene aanëengeschakelde evenredigheid. (1) Bij voorbeeld, $8:4 = 6:3 = 10:5 = 14:7 = 22:11 = 13:6\frac{1}{2}$, is eene aanëengeschakelde evenredigheid. (2)

618. In het algemeen wordt eene aanëengeschakelde evenredigheid, in algemeen geïllustreerd, aldus geschreven: $a:b = c:d$

(1) Wat is eene aanëengeschakelde evenredigheid?

(2) Geef er een voorbeeld van?

$= e:f = g:h = i:k$. (3) Zij kan uit zoo vele redens bestaan, als men goedvindt. (4)

619. Men kan eene aanëengeschakelde evenredigheid ook aldus schrijven of uitdrukken:

$$(a, c, e, g, i) :: (b, d, f, h, k)$$

door de voorgaande termen der redens, zoo als zij, in rangorde, volgen, eerst tusschen twee haakjes te schrijven, en daarna de volgende termen in dezelfde rangorde te laten volgen, en tusschen beiden de groepen van termen het teeken :: te plaatsen, dat bij sommige Schrijvers, in de beschouwing der evenredigheden, voor het teeken = genomen wordt. (5)

620. EIGENSCHAP. In elke aanëengeschakelde evenredigheid, is de som van alle de voorgaande termen, tot de som van alle de volgende, gelijk een voorgaande term van eene der redens tot den volgende term van diezelfde reden. (6)

Opheldering. In de aanëengeschakelde evenredigheid, $7:14 = 3:6 = 5:10 = 4:8$, zijn de voorgaande termen 7, 3, 5 en 4; de som dezer termen is 19: de volgende termen zijn 14, 6, 10 en 8; de som dezer termen is 38: nu is $19:38 = 7:14$, of $19:38 = 3:6$, of $19:38 = 5:10$, of $19:38 = 4:8$. (7)

Betog. Indien $a:b = c:d = e:f = g:h = i:k$ is, dan zal moeten bewezen worden, dat

$$a + c + e + g + i : b + d + f + h + k = a:b$$

zal zijn. Laat de reden van a tot b (dat is, a gedeeld door b) het geheel, gebroken of gemengde getal n zijn; dan is ook, wegens de gelijkheid der redens, c gedeeld door d gelijk n , e gedeeld door f , g gedeeld door h enz., het getal n . Is dit zoo, dan is $a = bn$; $c = dn$; $e = fn$; $g = hn$; $i = kn$; en bijgevolg,

$$a + c + e + g + i = bn + dn + fn + hn + kn$$

of wel:

$$a + c + e + g + i = (b + d + f + h + k) \times n$$

en dienvolgens is:

$$\frac{a + c + e + g + i}{b + d + f + h + k} = n$$

maar $\frac{a}{b}$ is ook gelijk n ; derhalve is, zie art. 515:

(3) Hoe wordt in het algemeen eene aanëengeschakelde evenredigheid geschreven?

(4) Uit hoe veel redens kan zij bestaan?

(5) Hoe kan men eene aanëengeschakelde evenredigheid nog anders uitdrukken?

(6) Welke eigenschap heeft de aanëengeschakelde evenredigheid?

(7) Helder dit door een voorbeeld op?

$$a + c + e + g + i : b + d + f + h + k = a : b$$

en dit bewezen zijnde, volgt ook, dat de som der voorgaanden tot de som der volgende, als c tot d , of als e tot f , of als g tot h , of als i tot k is. (8)

621. Men kan ook zoo vele voorgaande termen uit de aanteengeschakelde evenredigheid nemen, als men goedvindt, en de som der voorgaanden tot de som der volgende, welke tot die voorgaanden behooren, stellen, als de voorgaande term van eene der redens tot den volgende term, welke tot die reden behoort. (9) Aldus is:

$$\begin{aligned} a + c + e : b + d + f &= a : b \\ c + e + g : d + f + h &= a : b \\ a - e + g : b - f + h &= a : b \end{aligned}$$

en op dezelfde wijze met vele anderen. (10)

622. Uit deze eigenschap volgt: hoe men een gegeven getal A in zeker aantal deelen, bij voorbeeld, vier deelen verdeelen kan, welke tot elkander in reden staan, als eenige geveene getallen a, b, c en d . (11)

Want, laten deze deelen gesteld worden s, u, v, w ; dan moet

$$a : s = b : u = c : v = d : w$$

zijn, en derhalve:

$$a + b + c + d : s + u + v + w = a : s = b : u = c : v = d : w$$

maar $s + u + v + w = A$ zijnde, moet men, om de vier deelen te vinden, de vier evenredigheden

$$\begin{aligned} a + b + c + d : A &= a : s, \text{ of } a + b + c + d : a = A : s \\ a + b + c + d : A &= b : u, \text{ of } a + b + c + d : b = A : u \\ a + b + c + d : A &= c : v, \text{ of } a + b + c + d : c = A : v \\ a + b + c + d : A &= d : w, \text{ of } a + b + c + d : d = A : w \end{aligned}$$

oplossen; waaruit blijkt, dat elk der onbekende deelen van het gegeven getal, door de oplossing van eenen regel van drieën, gevonden wordt. (12)

623. Wanneer het gegeven getal A in een grooter getal deelen moet gedeeld worden, welke evenredig moeten zijn aan geveene getallen, zal men, door eene gelijke redeneering, tot dezelfde regel komen. Men zal, namelijk, hoe groot het aantal der deelen zij, waarin een getal moet gedeeld

worden, de som der geveene getallen, welke de verhouding der deelen aanduiden, tot het getal, dat de verhouding van het eerste, tweede, derde, enz., deel tot de overige deelen uitdrukt, in reden stellen, gelijk het gegeven getal, dat verdeeld moet worden, tot het eerste, tweede, derde, enz. deel. (13)

624. 1. VOORBEELD. Het getal 322 in vier deelen te verdeelen, welke tot elkander staan in reden, als de getallen 3, 4, 7 en 9?

Door optelling, vindt men: $3 + 4 + 7 + 9 = 23$; derhalve heeft men de evenredigheden:

$$\begin{aligned} 23 : 3 &= 322 : s, \text{ of } 1 : 3 = 14 : s; \text{ en } s = 42 \\ 23 : 4 &= 322 : u, \text{ of } 1 : 4 = 14 : u; \text{ en } u = 56 \\ 23 : 7 &= 322 : v, \text{ of } 1 : 7 = 14 : v; \text{ en } v = 98 \\ 23 : 9 &= 322 : w, \text{ of } 1 : 9 = 14 : w; \text{ en } w = 126 \end{aligned}$$

de som der gevondene deelen $42, 56, 98$ en 126 is $= 322$; en $42 : 56 = 3 : 4$; $42 : 98 = 3 : 7$; $42 : 126 = 3 : 9$; $56 : 98 = 4 : 7$; $56 : 126 = 4 : 9$ en $98 : 126 = 7 : 9$; waaruit blijkt, dat de getallen, in alle opzichten, aan de voorwaarden der vraag voldoen. (14)

2. VOORBEELD. Het getal 1000 in vijf deelen te verdeelen, welke tot elkander staan, in reden als de getallen, 3, 7, 4, 8 en 23?

3. VOORBEELD. Het getal $932\frac{1}{2}$ in drie deelen te verdeelen, welke tot elkander staan, in reden als $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ en $1\frac{1}{2}$?

4. VOORBEELD. Vier personen, A, B, C en D , moeten 600 gulden, in vier voegen, onder elkander deelen: dat A een-derde van die som, B een-vierde, C een-vijfde, en D een-zesde van dezelve neemt; en dat dan het overschot nog moet verdeeld worden, in evenredigheid van het geen elk reeds van die som genomen heeft: men vraagt, hoe veel elks aandeel van die som van 600 gl. zijn zal?

625. Tot het algemeene vraagstuk, om een getal in een zeker aantal deelen te verdeelen, welke tot elkander in eene geveene reden staan, behoort de zoogenaamde COMPAGNIE- of GEZEISCHAPS-REKENING. (15) Onderscheidene personen, A, B, C, D enz., hebben onderscheidene kapitalen, die wij a, b, c, d enz. noemen, in één fonds gebragt, om daar mede handel te drijven, onder de billijke voorwaarde, dat de winsten, welke door dit gezamenlijke kapitaal zullen aangebragt, of de verliezen, welke zullen geleden worden, onder hen, naar evenredigheid van elks aangebragte kapitaal, zullen verdeeld of geleden worden. (16)

(8) Hoe bewijst gij deze eigenschap?

(9) Wat volgt hier uit?

(10) Helder dit op?

(11) Wat volgt uit de betoogde eigenschap?

(12) Hoe wordt dit vraagstuk opgelost?

(13) Strekt zich deze leerwijze verder uit, dan tot het verdeelen van een gegeven getal in vier deelen?

(14) Helder dit alles door een voorbeeld op?

(15) Is dit verklaarde vraagstuk tot iets nuttig?

(16) Verklaar wat Gezelschaps-rekening zij?

Indien 'er nu eene zekere som *w* gewonnen is, moet, volgens dit contract, die som verdeeld worden in zoo vele deelen, als 'er participanten of deelnemers zijn, en deze deelen moeten aan ieders inlage evenredig zijn. (17)

5. VOORBEELD. Drie compagnons: *A*, *B* en *C*, hebben, om negotie te drijven, bijeen gebragt *A* 20000 Francs, *B* 15000 Francs, en *C* 18600 Francs: na verloop van één jaar is het batig saldo van de kas dezer compagnieschap 9650 Francs; hoe veel is nu elks aandeel in deze winst?

<i>A</i> . . .	20000 Francs.	} ingelegde kapitalen op te tellen.
<i>B</i> . . .	15000 ———	
<i>C</i> . . .	18600 ———	

53600 : 20000	==	9650 : winst van <i>A</i>
53600 : 15000	==	9650 : winst van <i>B</i>
18600 : 18600	==	9650 : winst van <i>C</i> .

De som der ingelegde kapitalen is 53600 Francs. Men stelle dan, om het aandeel van *A* te vinden, het geheele kapitaal 53600 Francs staat tot het kapitaal van *A*, dat is 20000 Francs, gelijk de geheele winst 9650 Francs tot de winst van *A*, enz. Insgelijks stelle men twee evenredigheden, om de winsten *B* en *C* te vinden (18)

6. VOORBEELD. Tot de uitrusting van een kaperschip, hebben *A*, *B*, *C*, *D* en *E* respectievelijk ingelegd 20000, 18600, 15000, 14300, 12000 Francs. Het zuiver provens van eenige gemaakte prijzen bedraagt 69073 Francs; hoe veel moet elk van de deelnemers van die winst, naar evenredigheid van zijn ingelegde kapitaal, genieten?

7. VOORBEELD. Onder een smaldeel van vijf schepen van oorlog, respectievelijk met 500, 450, 300, 380 en 200 manschappen bemand zijnde, moet, naar evenredigheid van de manschappen, verdeeld worden 25000 kilogrammes scheeps-beschuit, 100 hectolitters brandewijn, 6620 kilogrammes rijst: hoe moet deze verdeling geschieden?

8. VOORBEELD. Eene gratificatie van 3000 Francs moet, onder eene compagnie, bestaande uit eenen kapitein, eenen eersten en tweeden luitenant en 112 gemeenen, verdeeld worden, zoodanig, dat, wanneer de kapitein 20 francs ontvangt, de eerste luitenant 15, de tweede 10, en elk gemeen soldaat één franc van deze som geniet; hoe veel zal dan elk aandeel in deze gratificatie zijn?

9. VOORBEELD. Vijf werklieden hebben aan een zeker werk verdiend 250 gulden, en hebben respectievelijk daar aan gewerkt de eerste 16, de tweede 14, de derde 10, de vierde 18, en de vijfde 17½ dagen, indien men nu de verdiensten dezer werklieden aan de tijden, die zij gewerkt hebben, evenredig stelt; hoe veel moet elk dan voor zijn aandeel ontvangen?

10. VOORBEELD. Onder vier personen moet eene som van 6600 gulden zoodanig verdeeld worden, dat het deel van *A* tot dat van *B* staat, als 2 tot 3; het deel van *B* tot dat van *C*, als 4 tot 7; het

deel van *C* tot dat van *D*, als 5 tot 8; hoe veel moet, naar deze bepaling, elk voor zijn aandeel ontvangen?

Oplossing. Stel de aandelen van *A*, *B*, *C*, *D*, die onbekend zijn, *p*, *q*, *r* en *s*; dan moet $p:q = 2:3$ zijn; derhalve $3p = 2q$ en $q = \frac{3}{2}p$, dat is, *B* moet hebben $\frac{3}{2}$ maal het aandeel van *A*. Voorts is $q:r = 4:7$; derhalve $4r = 7q$ en $r = \frac{7}{4}q = \frac{7}{4} \times \frac{3}{2}p = \frac{21}{8}p$; dat is, *C* moet hebben $\frac{21}{8}$ maal het aandeel van *A*; eindelijk is $r:s = 5:8$; derhalve is $5s = 8r$ en $s = \frac{8}{5}r = \frac{8}{5} \times \frac{21}{8}p = \frac{21}{5}p$. Hieruit blijkt: dat de aandelen van *A*, *B*, *C* en *D* tot elkander staan in reden, als p , $\frac{3}{2}p$, $\frac{21}{8}p$, $\frac{21}{5}p$; of als 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{21}{8}$, $\frac{21}{5}$, en dat derhalve de gegevene som in reden van de getallen 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{21}{8}$ en $\frac{21}{5}$ moet verdeeld worden.

11. VOORBEELD. Eene som van 8500 gulden onder vijf personen, *A*, *B*, *C*, *D* en *E*, zoodanig te verdeelen, dat het aandeel van *A* tot dat van *B* staat als 3 tot 2, van *B* tot *C* als 3 tot 4, van *C* tot *D* als 6 tot 7, en van *D* tot *E* als 4 tot 5?

12. VOORBEELD. Onder drie personen moeten 6000 gulden zoodanig verdeeld worden, dat driemaal het aandeel van *A* gelijk zij aan tweemaal het aandeel van *B*, en vijfmaal het aandeel van *B* gelijk aan zevenmaal het aandeel van *C*?

Oplossing. Omdat $3A = 2B$ is, is $B = \frac{3}{2}A$; en omdat $5B = 7C$ is, is $C = \frac{5}{7}B = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2}A = \frac{15}{14}A$; derhalve staan de aandelen van *A*, *B* en *C* tot elkander als 1, $\frac{3}{2}$ en $\frac{15}{14}$; of (indien men deze getallen alle met 14 vermenigvuldigt) als 14, 21 en 15. Waaruit nu het overige kan gevonden worden.

13. VOORBEELD. Drie aannemers nemen gezamenlijk een werk aan voor 20000 francs; *A* zou dit werk alleen in 300 dagen, *B* alleen in 340 dagen, en *C* in 500 dagen in gereedheid hebben kunnen brengen. Men vraagt, in hoe veel tijd dit werk in gereedheid zal zijn, en hoe veel elk van de bedongen som, naar evenredigheid van zijn werk, ontvangen zal?

Oplossing. *A* maakt in eenen dag $\frac{1}{300}$, *B* in eenen dag $\frac{1}{340}$, en *C* in eenen dag $\frac{1}{500}$ deel van het geheele werk; derhalve, omdat zij elk hetzelfde getal dagen werken, en elks aandeel evenredig aan de door elk verrigte arbeid moet zijn, moet de som van 20000 francs in reden van $\frac{1}{300}$, $\frac{1}{340}$ en $\frac{1}{500}$ verdeeld worden.

XLI LES. Over de omgekeerde Evenredigheden, en den omgekeerden Regel van Drieën.

626. Eene omgekeerde evenredigheid wordt uit eene regte, of gewone evenredigheid, gemaakt, door ééne van de redens van die regte of gewone evenredigheid om te keeren. (1)

(1) Wat verstaat men door eene omgekeerde evenredigheid?

(17) Hoe moet die berekening behandeld worden?

(18) Verklaar die berekening door een voorbeeld?

Uit de gewone evenredigheden

$$7 : 16 = 21 : 48$$

$$a : b = c : d$$

volgen de omgekeerde evenredigheden

$$7 : 16 \text{ omg. } = 48 : 21$$

$$16 : 7 \text{ omg. } = 21 : 48$$

$$a : b \text{ omg. } = d : c$$

$$b : a \text{ omg. } = c : d \quad (2)$$

627. Vier getallen of grootheden zijn dan in eene omgekeerde evenredigheid, indien de eerste term staat tot den tweeden, gelijk de vierde tot den derden term. (3) Of, wanneer de reden van den eersten tot den tweeden gelijk is aan de reden van den vierden tot den derden term. (4)

628. Eene omgekeerde evenredigheid wordt aldus geschreven:

$$a : b \text{ omgek. } = d : c$$

en gelezen: a is tot b in de omgekeerde reden van d tot c . (5)

629. Eene omgekeerde evenredigheid wordt in eene regte veranderd, door ééne der twee redens om te keeren. (6)

Alzoo zullen uit de omgekeerde evenredigheid,

$$a : b \text{ omgek. } = d : c,$$

volgen, de regte of gewone evenredigheden

$$a : b = c : d$$

$$b : a = d : c$$

want, door ééne der twee redens van deze regte evenredigheid om te keeren, verkrijgt men wederom de gestelde omgekeerde evenredigheid. (7)

630. Daar men dan, op zulk eene eenvoudige wijze, eene omgekeerde evenredigheid in eene regte evenredigheid veranderen kan, zal men, door eene omgekeerde evenredigheid tot eene regte over te brengen, op die omgekeerde evenredigheid alles kunnen toepassen, wat in de XXXVII Les over de gewone evenredigheden gezegd is. (8)

631. Wanneer, bij voorbeeld, drie getallen a , b en c gegeven zijn,

(a) Helder dit door voorbeelden op?

(3) Welk eene andere bepaling kan men dan van eene omgekeerde evenredigheid geven?

(4) Kan men dit ook nog eenigzins anders uitdrukken?

(5) Hoe wordt eene omgekeerde evenredigheid geschreven en gelezen?

(6) Hoe wordt eene omgekeerde evenredigheid in eene regte veranderd?

(7) Helder dit nader op?

(8) Wat volgt hier uit?

en men tot deze drie getallen een vierde getal x begeert te vinden, zoodanig dat het eerste getal a tot het tweede b sta, in de omgekeerde reden van het derde getal c tot het gevraagde, dan zal

$$a : b \text{ omgek. } = c : x$$

moeten zijn: maar daaruit volgt dan de regte evenredigheid

$$b : a = c : x$$

en volgens art. 535. is dan

$$x = \frac{a \times c}{b} \quad (9)$$

632. De oplossingswijze van het vraagstuk, in het voorgaande artikel voorgesteld, wordt genoemd tot drie gegevene getallen a , b en c eene vierde omgekeerde evenredige te zoeken, (10) en deze is gelijk aan het product van het eerste en derde getal, gedeeld door het tweede. (11) Of wel, die omgekeerde vierde evenredige wordt gevonden, indien men, door de termen van de eerste reden om te keeren, de omgekeerde evenredigheid in eene regte verandert, en deze, als eenen gewonen regel van drieën oplost: (12) en deze laatste handelwijze zullen wij steeds volgen. (13)

633. De omgekeerde evenredigheid behelst geene nuttelooze beschouwing: 'er bestaan, in het gemeene leven, in de Kunsten en Wetenschappen, vele omgekeerde evenredigheden. (14)

634. 1°. Om hetzelfde werk te volbrengen, zal men het getal der werklieden moeten vergrooten, wanneer het werk in korter tijd zal moeten gereed zijn; immers, om het, in de helft of in een derde van den tijd, in gereedheid te brengen, zal men het getal van werklieden moeten verdubbelen of drievoudig nemen. Men kan dan stellen: dat, tot het daarstellen van een werk van dezelfde uitgestrektheid, het getal der werklieden in de omgekeerde reden der tijden en de tijden in de omgekeerde reden der werklieden moeten zijn. Doch zulks is alleen waar, in de onderstelling, dat de vermogens der werklieden gelijk staan. (15)

635. 2°. Om met onderscheidene kapitalen, in onderscheidene tijden, dezelfde winsten te verkrijgen, moeten de kapitalen in de omgekeerde reden der tijden staan, (indien namelijk deze kapitalen op denzelfden voet of voorwaarde winnen:) want, indien het kapitaal, dat in eenen zekeren tijd eene zekere winst heeft aangebragt, twee,

(9) Toon dit gebruik door een voorbeeld aan?

(1) Hoe noemt men de oplossing van dit vraagstuk?

(11) Waar aan is die vierde omgekeerde evenredige gelijk?

(12) Kan men die vierde omgekeerde evenredige anders vinden?

(13) Welke van die twee oplossingen zullen wij voortaan volgen?

(14) Is de omgekeerde evenredigheid nuttig in het gebruik?

(15) Geef een voorbeeld van eene omgekeerde evenredigheid?

drie, vier, enz. en n maal gewonnen wordt, zal slechts de helft een derde, een vierde, enz. een n de van den tijd noodig zijn, om die zelfde winst aan te brengen. (16)

636. 3°. Hieruit volgt: dat, wanneer ik aan iemand eene zekere som, voor eenen zekeren tijd, zonder interest leen, de tijd voor welken ik hem eene andere som leenen kan, op dat de waarde der wederzijdsche diensten gelijk staan, in de omgekeerde reden van dit geleende kapitaal zijn moet. (17)

637. 4°. De hoeveelheid van zekere waar, welke men voor eenen bepaalden prijs hebben kan, is in de omgekeerde reden van derzelver rijzing en daling; dat is, naar mate de waar hoger in prijs loopt zal men voor denzelfden prijs eene mindere hoeveelheid kunnen koopen. (18)

638. 5°. In de Meetkunst bewijst men: dat, wanneer de inhouden der rechthoeken gelijk zijn, de lengten in de omgekeerde reden van de breedten zijn. (19)

639. 6°. En dat, wanneer de inhouden van twee balken gelijk zijn, de lengten in de omgekeerde reden van de doorsneden zijn. (20)

640. 7°. In de Werktuigkunde bewijst men: dat de armen van eenen hefboom of unzer in de omgekeerde reden zijn van de gewigten, welke aan derzelver uiteinden opgehangen zijnde, met elkander in evenwigt staan. (21)

641. 'Er zijn vele vraagstukken, die in denersten opslag, indien men aan den klank der woorden blijft hangen, tot de stelling van eenen regel van drieën schijnen te behooren, en welke nogtans, door de stelling van eene omgekeerde evenredigheid, moeten beantwoord worden. Om zulks nu wel te onderscheiden, moet men over de onderlinge afhankelijkheid der gegevene en der gevraagde grootheden nadenken, om te zien: of deze in eene regte of omgekeerde evenredigheid staan: staan zij tot elkander in een regte evenredigheid, dan moet de vraag, als een regten regel van drieën, opgelost worden; maar staan zij in eene omgekeerde evenredigheid, dan moet de oplossing van de vierde omgekeerde evenredige worden te werk gesteld. Zie art. 632. (22)

642. 1 VOORBEELD. Indien 36 werklieden, in den tijd van 65 dagen, zeker werk kunnen afmaken, hoe lang zullen 45 werklieden daar toe noodig hebben (de vermogens en de bekwaaamheden der werklieden gelijk stellende)?

Oplossing. Hier is het getal der werklieden in de omgekeerde reden der tijden. Ik stel derhalve

(16) Geef een tweede voorbeeld?

(17) Geef een derde voorbeeld?

(18) Geef een vierde voorbeeld?

(19) Geef een vijfde voorbeeld?

(20) Geef een zesde voorbeeld?

(21) Geef een zevende voorbeeld?

(22) Wat moet men bij de oplossing der vragen van den omgekeerden regel van drieën in acht nemen?

36 werkl. : 45 werkl. omg. = 65 dag. : x dag.

en, om deze omgekeerde evenredigheid in eene regte te veranderen, schrijf ik:

$$45 : 36 = 65 : x$$

$$\text{derhalve } x = \frac{4 \cdot 36 \times 65}{45 \cdot 9} = 52 \text{ dagen.}$$

Men ziet: dat x gelijk is aan $\frac{36 \times 65}{45}$; de getallen 65 en 45 zijn

door 5 verkleinbaar en men vindt 13 en 9 in plaats van 65 en 45; wederom zijn 36 en 9 door 9 verkleinbaar en men vindt 4 en 1; men behoeft, na deze verkleining, slechts 4 en 13 met elkander te vermenigvuldigen, om het begeerde te vinden. (23)

643. 2 VOORBEELD. Indien men, met een kapitaal van 2000 gl., tegen 4 ten honderd uitstaande, in 5 jaar 400 gl. wint: hoe lang zal dan een kapitaal van 3000 gl., tegen 4 ten honderd moeten uitgezet worden, om insgelijks 400 gl. te winnen?

Men zal, zie art. 635, hebben:

$$2000 \text{ kap.} : 3000 \text{ kap. omg.} = 5 \text{ jaar} : x \text{ jaar}$$

waar uit de regte evenredigheid

$$3000 : 2000 = 5 : x$$

$$\text{of } 3 : 2 = 5 : x$$

$$x = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ jaar. (24)}$$

644. Men ziet uit deze voorbeelden: dat het geene de minste zwarigheid in heeft, om, wanneer, uit het voorgestelde vraagstuk, de omgekeerde evenredigheid is opgesteld, de zelfde op te lossen. Hier komt alles op het verstaan van de vraag en het beoordeelen van de soort van evenredigheid aan, in welke de grootheden voorkomen. De volgende zullen voldoende zijn, om den leerling daarin te oefenen.

3 VOORBEELD. Eene regt vierhoekige kamer, welke 16½ voeten lang 11½ voeten breed is, moet op de lengte van 14½ voeten gebragt worden; hoe groot zal men de breedte moeten nemen, op dat de inhoud van de vloer gelijk blijve? Zie art. 638.

4 VOORBEELD. Eene kamer, die 24 voeten lang 18 voeten breed

(23) Verklaar het eerste voorbeeld?

(24) Verklaar het tweede voorbeeld?

is, wordt 3 voet in de lengte verminderd, hoe veel voeten moet dan de breedte vermeerderd worden, op dat de ruimte dezelde blijve?

5 **VOORBEELD.** Een behanger heeft, om een kamer te behangen, noodig 320 ellen papier, ter breedte van vijf-vierde el; hoe veel el zal hij nodig hebben, wanneer hij daartoe papier van één el breedte gebruikt?

6 **VOORBEELD.** Hoe lang moet een balk van 3 en 5 duim dikte zijn, om zoo zwaar te wegen als een balk van 6 en 8 duim dikte en 8 voet lengte; onderstellende die balken van dezelfde soort van hout te zijn?

7 **VOORBEELD.** *Om door eene engte van 15 meters te defileeren heeft eene armée den tijd van 4 uren 30 minuten noodig, hoe lang zal die zelve armée dan nodig hebben om door eene engte van 20 meters breedte te defileeren?

8 **VOORBEELD.** Iemand, die dagelijks 5 mijl reist, heeft, om zekeren weg af te leggen, 14 dagen tijd nodig; hoe veel mijlen zal hij dan daags moeten reizen, om dien weg in 16 dagen af te leggen?

9 **VOORBEELD.** Indien men aanneemt: dat een rijtuig in den zelden tijd 1 maal zoo veel wegs aflegt, als een man, welke met eenen regelmatigen stap voortgaat; in hoe veel tijd zal dan dit rijtuig een weg afleggen, welken die man, regelmatig voortgaande, in 7 uur volbrengen kan?

10 **VOORBEELD.** Indien 150 man, in 7 maanden, een werk kunnen afmaken; hoe veel man zal men 'er dan nog bij moeten aanneemen, om dit werk in 6 maanden te volbrengen?

11 **VOORBEELD.** Maar indien die 150 man, welke in 7 maanden dit werk kunnen volbrengen, reeds twee maanden op dien voet gewerkt hadden, en de rest van het werk in drie maanden moest gereed zijn: hoe veel man zou men dan boven de 150 man tot dat einde nog moeten in het werk stellen?

12 **VOORBEELD.** 'Er zijn 42 werklieden, die 12 uren daags arbeiden, en op dien voet, een werk in 6 maanden volbrengen: indien 'er nu 6 werklieden minder zijn, hoe veel uren zullen zij dan daags moeten werken, om evenwel dit werk in 6 maanden af te doen?

13 **VOORBEELD.** Indien 170 werklieden 10 uren daags werken, en, alzoo doende, een werk in 9 maanden kunnen volbrengen, hoe veel uren zullen zij dan daags moeten arbeiden, om dit zelve werk drie maanden vroeger in gereedheid te brengen?

14 **VOORBEELD.** Gesteld, dat een garnisoen van 1800 man voor 9 maanden gevoorviandeerd zij; hoe lang zal dan die proviand strekken, indien dit garnisoen met 1600 man vergroot worde?

15 **VOORBEELD.** In eene vesting is zoo veel voorraad, dat men dagelijks 5 hectogrammes vleesch, een kilogramme brood en een deciliter brandewijn, gedurende den tijd van 8 maanden, aan de manschappen kan uitdeelen; hoe groot zal dan de dagelijksche uitdeeling moeten zijn, om dien voorraad 10½ maand te doen strekken?

16 **VOORBEELD.** Doch, zoo, op dien voet, 1600 man in die vesting is, welke 8 maanden lang die dagelijksche uitdeeling genieten kan; hoe groot zal dezelfde uitdeeling moeten zijn, indien dit garnisoen met 200 man vermeerderd wordt, en die voorraad 8 maanden zal moeten strekken?

17 **VOORBEELD.** Ingevalle ik aan iemand 1600 gelden voor 8

maanden geleend had, zonder daar voor eenigen interest te verdienen, voor hoe lang zou hij mij dan 2000 gl. kunnen leenen, op dat wij elkander winst noch schade doen?

18 **VOORBEELD.** Tegen hoe veel ten 100 moeten 750 gulden uitgezet worden, om in denzelfden tijd zoo veel te winnen als 600 gl. tegen 34 ten honderd?

19 **VOORBEELD.** Tot een transport van goederen worden 100 karren vereischt, welke elk 1200 pond gewigt vervoeren; hoe zwaar zal men elke kar moeten beladen, indien men tot het doen van dit transport niet meer dan 88 karren bekomen kan?

20 **VOORBEELD.** Een overstroomd land kan door eene uitwatering, welke 2000 vierkante voeten profiel heeft, in den tijd van 14 dagen van zijn overvloedig water ontlast worden; in hoe veel tijd zal die ontlasting kunnen geschieden, indien dit profiel slechts 1800 vierkante voeten groot is?

21 **VOORBEELD.** Wanneer men met zeker kapitaal in 8 maanden, tegen 34 pCent, 300 gulden winnen kan; tegen hoe veel pCent zal men dan, met dat zelve kapitaal, die zelve som in een half jaar, winnen?

22 **VOORBEELD.** Wanneer een Last Rogge kost 130 gulden, dan geldt een brood van 3 lb 54 stuiver; hoe veel pond brood zal men dan voor dienzelfden prijs hebben, als het Last 10 gulden afflaat?

NB. 'Er zijn onder deze voorbeelden, welke door eenen Regten Recl van Drieën moeten opgelost worden.

XLIII LES. Over de zamengestelde Evenredigheden.

645. Indien men de overëenkomstige termen van twee redens (in getallen gegeven) met elkander vermenigvuldigt; dan hebben de producten tot elkander eene reden, welke gezegd wordt uit deze twee redens te zijn zamengesteld. (1)

646. Indien men dus de redens 3 tot 5 en 2 tot 7 onder elkander stelt, en de overëenkomstige termen dezer redens met elkander vermenigvuldigt; dan wordt de reden der producten 6:35 gezegd zamengesteld te zijn uit de redens 3 tot 5 en 2 tot 7. (2)

Redens

3 : 5

2 : 7

6 : 35

647. Men zal op deze wijze drie, vier en meer redens, door de gedurige producten van derzelver overëenkomstige termen te nemen, tot ééne enkele reden kunnen samenstellen; en dan zullen de producten gezegd worden, zamengesteld te zijn uit de redens der factoren. (3)

(1) Wanneer is eene reden uit twee redens zamengesteld?

(2) Geef een voorbeeld?

(3) Kan men deze samenstelling der redens verder uitstrekken?

648. Indien men derhalve heeft de redens a tot b , c tot d , e tot f en g tot h ; dan zal de reden van a tot h tot b tot d tot f tot h zamengesteld zijn uit de redens van a tot b , van c tot d , van e tot f en van g tot h . (4)

649. Wanneer derhalve twee gedurige producten gesteld worden, beide hetzelfde aantal factoren hebbende, als bij voorbeeld:

$$abcde \text{ en } pqrst$$

dan kan men de reden dezzer gedurige producten aanmerken, als te zijn zamengesteld uit de redens der factoren, welke, naar hunne rangorde, uit het eerste en tweede product beurtelings genomen worden; en men zal derhalve zeggen: $abcde$ staat tot $pqrst$ in eene reden, welke zamengesteld is uit de redens van a tot p , van b tot q , van c tot r , van d tot s en van e tot t . (5)

650. Die twee gedurige producten, $abcde$ en $pqrst$, zijn getallen, welke evenredig kunnen zijn met twee andere getallen m en n (en zulks op oneindig vele wijzen,) dit alzoo aannemende, heeft men de evenredigheid:

$$m : n = abcde : pqrst$$

welke van eene regte evenredigheid, in het wezen der zake, niet verschilt; doch, wegens de factoren, uit welke de termen van de tweede reden zijn zamengesteld, eene zamengestelde Evenredigheid genoemd wordt. (6)

651. Eene zamengestelde evenredigheid is dan zulk eene evenredigheid, in welke ééne der twee redens uit twee of meer andere redens is zamengesteld. Nogtans kunnen ook beide redens der evenredigheid zamengestelde redens zijn. (7)

652. De evenredigheid

$$m : n = ab : pq$$

wordt gelezen: m staat tot n in de zamengestelde reden van a tot p en van b tot q .

De evenredigheid

$$m : n = abc : pqr$$

wordt gelezen: m staat tot n in de zamengestelde reden van a tot p , van b tot q en van c tot r .

De evenredigheid

$$m : n = abcd : pqrs$$

(4) Helder dit door een voorbeeld op?

(5) Wat volgt hieruit?

(6) Wat merkt gij aangaande de zamengestelde redens op?

(7) Wat is derhalve eene zamengestelde evenredigheid?

wordt gelezen: m staat tot n in de zamengestelde reden van a tot p , van b tot q , van c tot r en van d tot s . (8)

653. Men kan dan, door de termen van ééne der redens eener gewone evenredigheid elk in twee of meer factoren te verdeelen, uit die gewone evenredigheid eene zamengestelde maken. (9)

Bij voorbeeld, gegeven zijnde de evenredigheid, $3:4=18:24$; dan kan ik, in plaats van 18 , stellen 2×9 ; en, in plaats van 24 , schrijven 4×6 , en dan zal $3:4=2 \times 9:4 \times 6$ zijn, en ik zal nu zeggen: 3 staat tot 4 in de zamengestelde reden van 2 tot 4 en van 9 tot 6 . (10)

654. Men kan ook regte redens met omgekeerde redens zamenvoegen; mits men die omgekeerde redens vooraf in regte verandere. (11)

655. De omkeering der omgekeerde redens tot regte kan op tweederlei wijze plaats hebben: 1°. door de termen van de omgekeerde redens om te zetten; dat is, door den voorgaanden term met den volgenden te verwisselen: 2°. door de termen, elk op zich zelve genomen, om te keeren; dat wil zeggen, (zie I. Deel, art. 366) door elke term onder de gedaante eener breuk te schrijven, en die breuk omtkeeren, dat is, den teller in plaats van den noemer te stellen. (12)

Ophefdering. Ik wil de regte reden $a:b$ met de omgekeerde reden $c:d$ (dat is, met eene reden, die ik omgekeerd denk,) zamenvoegen; dan mag ik niet schrijven, $a:c:b:d$; want dan had ik eene regte reden $a:b$ met eene regte reden $c:d$ zamengesteld; maar ik moet de regte reden $a:b$ met de regte reden $d:c$, die uit de omgekeerde $c:d$ volgt, zamenvoegen, en schrijven $ad:bc$; en dan heb ik de regte reden $a:b$ met de omgekeerde reden $c:d$ op de eerste wijze zamengesteld. (13) De zamenvoeging op de tweede wijze geschiedt nu aldus: de regte reden is $a:b$; de omgekeerde $c:d$ wordt eene regte, door te stellen $d:c$; nu is $d:c = \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$, zoo als genoegzaam daarnit blijkt: dat het product der uiterste termen gelijk is aan het product der middelste termen. Ik stel derhalve $a:b$ met $\frac{1}{c} : \frac{1}{d}$, als regte redens, te zamen, en dan is $\frac{a}{c} : \frac{b}{d}$ zamengesteld uit de regte reden van a tot b en de omgekeerde reden van c tot d . (14)

(8) Hoe worden de zamengestelde evenredigheden gelezen?

(9) Wat volgt hieruit?

(10) Helder dit door een voorbeeld op?

(11) Kunnen ook regte met omgekeerde redens worden zamengesteld?

(12) Op hoe vele wijzen kan men de regte met de omgekeerde redens zamenvoegen?

(13) Helder de eerste wijze van zamenvoegen op?

(14) Hoe geschiedt de tweede wijze van zamenvoegen?

Deze laatste zamengestelde reden, $\frac{a}{c} : \frac{b}{d}$, schijnt nu anders, dan de eerste, $a d : b c$, te zijn; doch zij zijn wezenlijk dezelfde. (15) Laat, om zulks te betoogen, $\frac{a}{c} : \frac{b}{d}$ zijn, in reden van twee geheele getallen, p tot q , hoedanige men 'er altijd vele vinden kan; indien $\frac{a}{c} : \frac{b}{d}$ wezenlijk dezelfde reden is als $a d : b c$; dan moet

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = p : q$$

$$\text{en } a d : b c = p : q$$

zijn: en dit is ook in de daad alzoo; want men vermenigvuldigt in de eerste evenredigheid de termen van de eerste reden met c ; dan heeft men $a : \frac{b c}{d} = p : q$, en wanneer men de termen van de eerste reden dezer laatste evenredigheid nog met d vermenigvuldigt, dan verkrijgt men: $a d : b c = p : q$. Het blijkt dan hier uit, dat 'er geen wezenlijk onderscheid tusschen $\frac{a}{c} : \frac{b}{d}$ en $a d : b c$ is. (16) De eerste is wel in gebrokene, en de tweede in geheele uitgedrukt; doch men houde onder het oog, dat eene rede niet verandert, wanneer derzelver termen met hetzelfde getal vermenigvuldigd of gedeeld worden. (17)

656. Men kan, op deze wijze, zoo vele regte en zamengestelde redens zamenstellen, als men goedvindt, mits zulks op ééne der twee voorgaande wijzen geschiede: nogtans verkiest men meestal de laatste. (18)

Laten gegeven zijn de regte redens $\left\{ \begin{array}{l} a : b \\ c : d \\ e : f \end{array} \right\}$
 en de omgekeerde redens $\left\{ \begin{array}{l} p : q \\ r : s \end{array} \right\}$

dan zal de reden, welke uit deze drie regte en de twee omgekeerde redens is zamengesteld, worden $\frac{a c e b d f}{p r q s}$. (19) Waaruit men ziet: dat, om regte redens met omgekeerde zamenstellen, de producten van de voorgaande en volgende termen van de regte redens door de producten van

(15) Schijnen deze twee wijzen, om de regte met de omgekeerde redens zamen te stellen, niet onderscheiden te zijn?

(16) Hoe betoogt men, dat dit onderscheid slechts schijnbaar is?

(17) Hoe kan men anders de zamengestelde reden, op de eerste wijze gemaakt, tot die, welke op de tweede wijze is zamengesteld, herleiden?

(18) Kan men dan vele redens (regte en omgekeerde) zamenstellen?

(19) Geef hier een voorbeeld van?

de voorgaande en volgende termen der omgekeerde redens moeten gedeeld worden. (20)

657. Alle redens, het zij zij, uit regte of omgekeerde, of gedeeltelijk uit regte en omgekeerde redens, zijn zamengesteld, kunnen altijd (zie art 506.) door de reden van twee geheele getallen, en zulks, op onderscheidene, ja ontelbare, wijzen, worden voorgesteld; (21) en dan ontstaan hieruit alle soorten van zamengestelde evenredigheden. Zamengestelde evenredigheden bestaan dan uit de gelijkheid van eene eenvoudige met eene zamengestelde reden, (22) of ook wel uit de vergelijking van eene zamengestelde met eene zamengestelde reden, (23) welke op de volgende wijze kunstmatig moeten gelezen worden:

658. De evenredigheid

$$a : b = p r : q s$$

wordt gelezen: *a staat tot b in de zamengestelde reden van p tot q en van r tot s.*

659. De evenredigheid

$$a : b = p r t v : q s u w$$

wordt gelezen: *a staat tot b in de zamengestelde reden van p tot q, van r tot s, van t tot u en van v tot w.* (24)

660. Men leest deze evenredigheden ook nog anders: de eerste leest men: *de reden van a tot b is zamengesteld uit de regte redens van p tot q en van r tot s.* De tweede leest men: *de reden van a tot b is zamengesteld uit de regte redens van p tot q, van r tot s, van t tot u en van v tot w.* (25)

661. De evenredigheid

$$a : b = \frac{1}{p} : \frac{1}{q}$$

wordt gelezen: *a staat tot b, in de omgekeerde reden van p tot q.*

662. De evenredigheid

$$a : b = \frac{p}{r} : \frac{q}{s}$$

wordt gelezen: *a staat tot b in de regte van p tot q en in de omgekeerde reden van r tot s; of, a staat tot b in eene reden, welke za-*

(20) Hoe worden dan, in het algemeen, regte redens met omgekeerde op de beste wijze zamengesteld?

(21) Kan men zamengestelde redens ook door enkele getallen uitdrukken?

(22) Wat zijn dan zamengestelde evenredigheden?

(23) Zijn zij ook nog wel anders zamengesteld?

(24) Geef voorbeelden?

(25) Kan men deze evenredigheden nog anders lezen?

mengefeld is, uit de rechte reden van p tot q en de omgekeerde reden van r tot s .

663. De evenredigheid

$$a : b = \frac{c e g}{p r} : \frac{d f h}{q s}$$

wordt gelezen: de rede van a tot b is zamengefeld uit de rechte redens van c tot d , van e tot f , van g tot h ; en uit de omgekeerde redens van p tot q en van r tot s . (26)

664. De evenredigheid

$$a c : b d = p r t : q s u$$

wordt gelezen: de reden, zamengefeld uit de rechte reden van a tot b en van c tot d , is gelijk aan de reden, welke is zamengefeld uit de rechte reden van p tot q , van r tot s en van t tot u . (27)

665. 'Er zijn nog vele andere zamengefelde evenredigheden, welke wel niet, onder dien naam, zoo algemeen bekend zijn; maar nogtans tot dezelve behooren. (28) Zij worden aldus gelezen:

666. De evenredigheid

$$a : b = p^2 : q^2$$

wordt gelezen: a staat tot b in de vierkante reden van p tot q .

667. De evenredigheid

$$a : b = p^3 : q^3$$

wordt gelezen: a staat tot b in de cubieke reden van p tot q .

668. De evenredigheid

$$a : b = \frac{1}{p^2} : \frac{1}{q^2}$$

wordt gelezen: a staat tot b in de omgekeerde vierkante reden van p tot q .

669. De evenredigheid

$$a : b = \sqrt{p} : \sqrt{q}$$

wordt gelezen: a staat tot b , als de vierkants-wortel, uit p tot den vierkants-wortel uit q .

670. De evenredigheid

$$a : b = \sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{q}$$

wordt gelezen: a staat tot b , als de cubus-wortel uit p tot den cubus-wortel uit q . (29)

671. Alle deze zamengefelde evenredigheden, en zoo vele duizend anderen, welke tot in het oneindige kunnen ge-

(26) Geef nog meer voorbeelden?

(27) Geef nog een ander voorbeeld?

(28) Zijn 'er ook nog andere soorten van zamengefelde evenredigheden?

(29) Geef voorbeelden?

vormd worden, bezitten, zonder onderscheid, alle de eigenschappen der rechte evenredigheden, welke van art. 531. tot art. 552. verklaard zijn; (30) en, door deze eigenschappen toe te passen, kan men aan de zamengefelde evenredigheden onderscheidene andere gedaanten geven, welke in het gebruik zeer nuttig kunnen zijn. (31)

672. Men deele de termen der evenredigheid

$$\begin{array}{l} a : b = p r : q s \\ \text{door de overeenkomstige termen van de evenredigheid} \\ r : s = r : s \end{array}$$

dan heeft men $\frac{a}{r} : \frac{b}{s} = p : q$; of $p : q = \frac{a}{r} : \frac{b}{s}$. Bijaldien

dan twee grootheden a en b in de zamengefelde reden zijn van p tot q en van r tot s ; dan zal p eene reden tot q hebben, zamengefeld uit de rechte reden van a tot b en uit de omgekeerde reden van r tot s . (32)

673. Men vermenigvuldige de zamengefelde evenredigheid $a : b = \frac{p}{r} : \frac{q}{s}$ met de evenredigheid $r : s = r : s$; dan zal, volgens art. 549,

$$a r : b s = p : q; \text{ of } p : q = a r : b s \text{ zijn. (33)}$$

674. Men zal, door de toepassing van die zelfde beginselen, uit de evenredigheid, $a : b = \frac{p r t}{c e} : \frac{q s u}{d f}$, de volgende afleiden. (34)

$$1) \frac{a c e}{p r} : \frac{b d f}{q s} = p r t : q s u$$

$$2) \frac{a c e}{p r} : \frac{b d f}{q s} = t : u$$

$$3) \frac{a c e}{r t} : \frac{b d f}{s u} = p : q$$

$$4) e : f = \frac{p r t}{a c} : \frac{q s u}{b d}$$

enz. enz.

Verklaring. De eerste evenredigheid volgt, door de gefelde met de evenredigheid $c e : d f = c e : d f$ te vermenigvuldigen. Het zij aan den leerling overgelaten, te zoeken, hoe de tweede, derde en vierde evenredigheden uit de gefelde dat is uit de eerste volgen. (35)

675. Men noemt in eene zamengefelde evenredigheid, $a : b = \frac{p r t}{c e} : \frac{q s u}{d f}$, zoo wel de termen van de enkelde re-

(30) Wat merkt gij aangaande de zamengefelde evenredigheden op?

(31) Wat volgt daar uit?

(32) Geef een eerste voorbeeld van de gedaanteverandering eener zamengefelde evenredigheid?

(33) Geef een tweede voorbeeld?

(34) Geef nog meer voorbeelden?

(35) Verklaar dezelve?

den a tot b , als de termen der regte redens p tot q , r tot s , t tot u , en de termen der omgekeerde redens, als van de omgekeerde reden van c tot d , en van de omgekeerde reden van e tot f , in het algemeen, de termen der zamengestelde evenredigheid. (36) Eene zamengestelde evenredigheid moet ten minsten zes zulke termen hebben; maar, daar men zoo vele redens kan zamenstellen, als men goedvindt, is het aantal termen, waaruit eene zamengestelde evenredigheid bestaat, onbepaald groot; offchoon dit aantal termen altijd een even getal is. (37)

676. Wanneer één der termen van eene zamengestelde evenredigheid onbekend is, kan die onbekende term altijd gevonden worden. (38)

Wij zullen zulks in twee gevallen aantoonen: 1°. Wanneer de zamengestelde evenredigheid alleen uit regte redens is zamengesteld. 2°. Wanneer zij gedeeltelijk uit regte en gedeeltelijk uit omgekeerde redens bestaat. (39)

677. I. Stel, dat, in de zamengestelde evenredigheid $a : b :: c : g :: d : f :: h$, de term h onbekend zij; noem dezelve x ; dan is

$$a : b :: c : g :: d : f :: x$$

maar in elke evenredigheid is het product der uiterste termen gelijk aan dat der middelsten; derhalve is

$$a d f x = b c e g$$

en wanneer men door den coëfficiënt van x , dat is, door $a d f$ deelt, verkrijgt men:

$$x = \frac{b c e g}{a d f} = h. (40)$$

Op dezelfde wijze zal men vinden:

$$f = \frac{b c e g}{a d b}; d = \frac{b c e g}{a f h}; g = \frac{a d f h}{b c e}; e = \frac{a d f h}{b c g}; c = \frac{a d f h}{a e g};$$

$$b = \frac{a d f h}{c e g} \text{ en } a = \frac{b c e g}{d f h}. (41)$$

en het is nuttig deze oplossingen alle uit te werken.

(36) Wat verstaat men door de termen eener zamengestelde evenredigheid?

(37) Hoe veel zulke termen kan eene zamengestelde evenredigheid hebben?

(38) Kan men een term, onbekend zijnde, denzelven wedervinden?

(39) Hoe veel gevallen neemt gij hier in aanmerking?

(40) Geef een voorbeeld van het eerste geval?

(41) Geef meer voorbeelden?

678. II. In eene zamengestelde evenredigheid, welke gedeeltelijk uit regte en gedeeltelijk uit zamengestelde redens is zamengesteld, wordt ééne der onbekende termen op dezelfde wijze gevonden: maar om hier in met meer zekerheids te werk te gaan, maakt men eerst, uit de gestelde zamengestelde evenredigheid, de breuken weg, en behandelt daarna de oplossing, als in het eerste geval. (42) Laat, bij voorbeeld, gegeven

zijn, de zamengestelde evenredigheid, $p : q :: \frac{a c e}{g i} : \frac{b d f}{h k}$; laat één van derzelver termen, bij voorbeeld, de term f onbekend zijn: men stelde denzelven $= x$; dan is

$$p : q :: \frac{a c e}{g i} : \frac{b d x}{h k}$$

men vermenigvuldige deze evenredigheid met $g i : h k :: g i : h k$; dan is

$$p g i : q h k :: a c e : b d x$$

en hier uit volgt dan:

$$x = \frac{q h k a c e}{p g i b d}. (43)$$

679. Wanneer de onbekende term een term van ééne der omgekeerde redens is, gelijk, wanneer k onbekend ware, dan zou men op dezelfde wijze blijven te werk gaan. (44) Want, stellende voor den onbekenden term x , dan is

$$p : q :: \frac{a c e}{g i} : \frac{b d f}{h x}$$

$$p g i : q h x :: a c e : b d f$$

$$a c e q h x = b d f p g i$$

$$x = \frac{b d f p g i}{a c e q h} = k. (45)$$

Men zal, dien regel volgende, vinden $a = \frac{p g i b d f}{q h k e}$, enz. De Onderwijzer moet dit verder laten ontwikkelen.

680. Men ziet uit de voorgaande artikelen, dat het bepalen van den onbekenden term eener zamengestelde evenredigheid, of van vijf, of van zeven, of van negen, of van meer bekende termen of getallen afhangt, welker aantal altijd oneven is. Wanneer ééne der redens van de zamengestelde evenredigheid uit twee regte, ééne regte en ééne omgekeerde of twee omgekeerde redens bestaat, en één der zes termen dezer omgekeerde evenredigheid onbekend is, dan hangt die onbekende term van vijf bekende

(42) Hoe behandelt men het tweede geval?

(43) Geef hier een voorbeeld van?

(44) Maar hoe gaat men te werk, wanneer een term van eene der omgekeerde redens onbekend is?

(45) Geef hier van een voorbeeld?

termen af, en men zoekt dus uit vijf getallen een zesde getal: daaronder hebben de Cijfermeesters eenen rechten en omgekeerden *Regel van Vijven* onderscheiden (46) en regels voorgeschreven, om dien onbekenden term, in elk geval, te vinden, die, wanneer de gronden der zaak niet genoeg ontwikkeld zijn, even zoo spoedig vergeten worden, als men dezelve geleerd heeft. Bovendien ziet men: dat 'er zoo wel een regel van zevenen, een regel van negenen, van elfen, enz. als een regel van vijven bestaan kan; welke alle begrepen zijn in de algemeene oplossing van het vraagstuk, om *een der onbekende termen van eene zamengestelde evenredigheid te bepalen*, welk vraagstuk in art. 677, 678 en 679 in alle deszelfs omstandigheden opgelost is. (47)

XLIV LES. Toepassing der zamengestelde Evenredigheden.

681. Alles, wat wij nu in de voorgaande *Les* verklaard hebben, bestaat in algemeene beschouwingen in getallen, welke men naar welgevallen kan uitbreiden; doch deze beschouwingen verkrijgen eerst eene wezenlijke nuttigheid, wanneer men dezelve op het dagelijksch gebruik toepast. (1)

682. In den natuurlijke samenhang der dingen hangt elke grootheid of van ééne of van twee of van meer grootheden af. (2) Die wijze van afhankelijkheid kan op oneindig vele wijzen, door den aard en de omstandigheden der dingen zelve gewijzigd zijn, (3) en om deze alle te kennen en te doorgronden, moet men met alle de deelen der Wiskunde bekend zijn. (4) Doch, onder alle deze menigvuldige onderlinge afhankelijkheden der dingen, is die wijze van onderlinge afhankelijkheid, welke de rechte of omgekeerde reden der samenhangende grootheden volgt, de eenvoudigste, en wij noemen dezelve daarom *onderlinge evenredige afhankelijkheid*, en behooren de vraagstukken, welke men zich, aangaande dezelve, kan voorstellen, tot het gebied der rechte, omgekeerde en zamengestelde evenredigheden. (5) Eer men nu deze evenredigheidsleer op die dingen mag toepassen, moet men vooraf van het wezenlijk bestaan der evenredigheden tusschen dezelve volkomen verzekerd zijn (6); omdat 'er vele grootheden zijn, welke, bij een oppervlakkig beschouwen, in eene evenredigheid schijnen te staan, en nogtans in geene evenredigheid zijn. (7) Zoo duren,

- (46) Wat is de zogenaamde regel van vijven?
- (47) Hebben die benamingen geene aanmerkelijke nadeelen?
- (1) Zijn de voorgaande beschouwingen van enig nut?
- (2) Wat merkt men in den natuurlijke samenhang der dingen op?
- (3) Is die onderlinge afhankelijkheid der dingen altijd dezelfde?
- (4) Hoe leert men dezelve in alle gevallen kennen?
- (5) Welke zijn nogtans de eenvoudigste en gemakkelijkste?
- (6) Wat wordt vereischt, om de evenredigheidsleer toe te passen?
- (7) Waar toe is die duidelijke kennis noodig?

bij voorbeeld, de schommelingen van eenen slinger wel langer als de slinger langer is: maar men zou verkeerdelyk besluiten, indien men de lengte der slingers in evenredigheid van de tijden der schommelingen aanname. (8) De volgende beschouwingen bevatten de hulpmiddelen, om de beoordeeling der dingen, welke in eene onderling evenredige afhankelijkheid tot elkander staan, met klaarheid en zelfs overtuiging na te gaan.

683. I BESCHOUWING. Wanneer eene grootheid A van eene andere grootheid P afhangt, zal men nagaan, wat deze grootheid A worden zal, indien men de grootheid P twee, drie, vier en meer-malen neemt. Indien dan

met A, 2 A, 3 A, 4 A, 5 A, enz. n A
overeenstemt P, 2 P, 3 P, 4 P, 5 P, enz. n P

dan zal men mogen besluiten: dat $A : nA = P : nP$ is; dat is, dat de onderscheidene waarden van A evenredig zijn aan de overeenkomstige waarden van P. (9) Aan deze voorwaarden voldoen de negen stellingen, welke, van art. 556—art. 565. bladz. 34, 35 en 36, zijn voorgedragen. (10) Maar stelde

met A, 2 A, 3 A, 4 A, enz. n A
overeen P, 3 P, 5 P, 8 P, enz. (n + 3) P

dan zou wel P te gelijk met A grootter worden; maar 'er zou als dan geene evenredigheid tusschen A en P meer plaats hebben; daar deze grootheden, volgens eene geheel andere wet, van elkander zouden afhangen. (11)

684. II BESCHOUWING. Maar, wanneer A van P zoodanig afhangt, dat, bijaldien

met A, 2 A, 3 A, 4 A, 5 A, enz. n A
overeenstemt P, $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{3}P$, $\frac{1}{4}P$, $\frac{1}{5}P$, enz. $\frac{1}{n}P$,

dan zal niet meer (gelijk in de voorgaande beschouwing,) $A : nA = P : \frac{1}{n}P$; maar wel $A : nA = \frac{1}{n}P : P$ zijn; waarvan de waarheid blijken zal, indien men de termen van de laatste reden dezer evenredigheid met n vermenigvuldigt. Men zal derhalve, in dit geval, zeggen: de grootheid A is in de omgekeerde reden van de grootheid P. (12) De stellingen, welke van art. 634—art. 639. bladz. 69 en 70, zijn voorgedragen, bevinden zich in dit geval. (13)

NB. De onderwijzer moet aan deze twee beschouwingen de stellingen van art. 556—art. 565, en die van art. 634—art. 639 met zijne

- (8) Kunt gij dit door een voorbeeld ophelderen?
- (9) Wat zegt de eerste beschouwing?
- (10) Hebben wij van deze zaak reeds voorbeelden gehad?
- (11) Geef een voorbeeld, dat niet altijd, wanneer P grootter wordt dan A, P aan A evenredig is?
- (12) Wat zegt de tweede beschouwing?
- (13) Hebben wij hiervan al voorbeelden aangetroffen?

leerlingen ter toetse brengen, zoo om hen met deze zaken gemeenzamer te maken, als om hen op den weg te helpen, om deze voort van beschouwingen op andere zaken te leeren toepassen. Hier aan is ten uiterste veel gelegen.

685. III BESCHOUWING. *Het gebeurt dikwijls, dat A van twee andere grootheden P en Q afhangt. Wanneer dit gebeurt, kan men altijd nagaan, wat 'er gebeuren zal, indien men Q onveranderd laat en P als veranderlijk denkt; en wat 'er verder gebeuren zal, indien men P onveranderd laat en Q als veranderlijk beschouwt.* (14)

686. I GEVAL. Wanneer dan Q standvastig blijft, en P genoomen wordt

$$P, 2P, 3P, 4P, 5P, \text{ enz. } nP$$

en met deze waarden van P overeenstemmen,

$$A, 2A, 3A, 4A, 5A, \text{ enz. } nA$$

en nog daarenboven, wanneer men P standvastig neemt, en als dan met

$$Q, 2Q, 3Q, 4Q, 5Q, \text{ enz. } nQ$$

overeenstemmen,

$$A, 2A, 3A, 4A, 5A, \text{ enz. } nA$$

dan zal men mogen besluiten: dat de onderscheidene waarden, welke de grootheid A, door de gelijktijdige veranderingen van P en Q verkrijgt, in eene reden zijn, welke zamengesteld is, uit de regte redens van de overeenkomstige waarden van P, en de regte redens van de overeenkomstige waarden van Q. (15) Het welk men korter aldus uitdrukt: A is in de zamengestelde reden van P en Q. (16)

Betoog. Want, laat P gelijk worden aan p maal P, dan wordt A natuurlijk p maal A, of pA; wanneer men daarna Q laat worden q maal Q, dan wordt pxA daar door q maal pA; dat is, pq maal A, of pqA. Op dezelfde wijze zal, wanneer P en Q elk afzonderd worden r x P en s x Q, A worden rs maal A; dus zullen de waarden, welke de grootheid A verkregen heeft, worden pq x A en rs x A; maar nu is, zie art. 502

$$\begin{aligned} pq \times A : rs \times A &= pq : rs \\ \text{maar } p \times P : r \times P &= p : r \\ q \times Q : s \times Q &= q : s \end{aligned}$$

derhalve zullen de getallen, voorstellende de twee waarden, welke de grootheid A verkregen heeft, zijn in de zamengestelde reden van de reden der getallen, welke de overeenkomstige waarden van P en de overeenkomstige waarden van Q uitdrukken, en het is in dien zin, dat de spreekwijze: de grootheid A is in de zamengestelde reden van P en Q, moet verstaan worden. (17)

(14) Wat kan men beschouwen, indien eene grootheid A van twee andere B en Q afhangt.

(15) Geef een voorbeeld van het eerste geval?

(16) Hoe drukt men dit korter uit?

(17) Hoe bewijst gij dit?

687. I VOORBEELD. *Aldus is de winst, door eenig kapitaal; in eenigen tijd, aangebragt, in de zamengestelde reden van dit kapitaal en dien tijd.* (18) Want, als de tijd dezelfde blijft, zal een 2, 3, 10, n voudig kapitaal eene 2, 3, 10, n voudige winst opbrengen; en blijft het kapitaal hetzelfde, dan zal de winst in eenen n voudigen tijd, ook n maal grooter zijn (verg. 4 en 5 Voorbeeld, bladz. 38). Men drukt dit aldus uit:

$$\text{Winst : Winst} = \text{Kap.} \times \text{Tijd} : \text{Kap.} \times \text{Tijd.} \dots (20)$$

688. II VOORBEELD. *De verdiensten of arbeidsloonen der werklieden, welke met gelijke vermogens, inspanning en vlijt werken, zijn in de zamengestelde reden van het getal der werklieden n en de tijden hoe lang zij gewerkt hebben.* (21) Want, zijn de tijden gelijk, dan zijn de verdiensten evenredig aan de werklieden; en hetzelfde getal werklieden verdient arbeidsloonen, welke evenredig aan de tijden zijn; (22) dit drukt men aldus uit:

$$\text{Arb. loon : Arb. loon} = \text{Werkl.} \times \text{Tijd} : \text{Werkl.} \times \text{Tijd.} (23)$$

689. III VOORBEELD. *Op gelijke wijze, zijn de hoeveelheden arbeids, door werklieden, met gelijke krachten werkende, daargesteld, in de zamengestelde reden van het getal der werklieden en de tijden, hoe lang zij gewerkt hebben.* (24) Men drukt dit aldus uit:

$$\text{Werk : Werk} = \text{Werklied.} \times \text{Tijd} : \text{Werklied.} \times \text{Tijd.} (25)$$

690. IV VOORBEELD. *De snelheden van eenen voetganger, een paard, een rijtuig, eene trekschuit, en in het algemeen van een bewogen ligchaam, is niets anders dan de wegen, welke die voetganger, dit paard, dit rijtuig, die trekschuit, dit bewogen ligchaam, in denzelfden tijd, bij voorbeeld, eene minuut, een uur, enz. doorloopen.* (26) Bij voorbeeld, zoo een voetganger in een uur 5500 meters aflegt, en een man te paard 9000 meters in een uur; dan zal men zeggen: de snelheid van den voetganger staat tot de snelheid van den man te paard, in reden staan als 5500 tot 9000, als 55 tot 90, als 11 tot 18. (27) Dit verstaan hebbende, zal men kunnen nagaan: dat de wegen, welke twee bewogen lichamen, met onderscheidene snelheden, in verschillende tijden, doorloopen, in de za-

(18) Geef een toepaslijk voorbeeld?

(19) Waarom bestaat die zamengestelde evenredigheid?

(20) Hoe drukt men dezelve uit?

(21) Geef een ander voorbeeld?

(22) Waarom bestaat die zamengestelde evenredigheid?

(23) Hoe drukt men dezelve uit?

(24) Geef een derde voorbeeld?

(25) Hoe drukt men dit uit?

(26) Wat verstaat men door de snelheid van een bewogen ligchaam?

(27) Helder dit door een voorbeeld op?

mengefelde reden der snelheden en tijden zijn. (28) Het geen aldus wordt uitgedrukt:

Weg : Weg = Snelh. $\times$ Tijd : Snelh. $\times$ Tijd. (29)

691. V VOORBEELD. De prijs van het brood hangt af van de prijs van het graan en van de grootte van het brood, welke aan dezelfde gewigt evenredig is; want het brood van een zelfde gewigt wordt daarder, naar mate het graan rijst, en wanneer het graan op den zelfden prijs blijft, zal men meer voor een brood moeten betalen, maar evenredigheid dat het zwaarder weegt. (30) Men drukt dit aldus uit:

Prijs Br. : Prijs Br. = Prijs Gr. $\times$ Gew. : Prijs Gr. $\times$ Gew. (31)

692. VI VOORBEELD. De noodige voorraad van levensmiddelen en behoeften voor een vesting, een bodem, of eenig ander etablissement, hangt af van het aantal der verteerende personen en van den tijd, gedurende welchen die voorraad strekken moet; die voorraad is derhalve in de zamengefelde reden van het getal der verteerende personen en den tijd. (32) Men drukt dit aldus uit:

Voorr. : Voorr. = Person. $\times$ Tijd : Person. $\times$ Tijd. (33)

693. VII VOORBEELD. De inhoud van een vierkantig vlak (in de Meekunst regthoek genaamd;) hangt af van de lengte en van de breedte van dit vlak; blijft de breedte dezelfde; dan staat de inhoud in reden van de lengte; maar hij staat in de reden van de breedte, wanneer deze verandert en de lengte dezelfde blijft. De inhoud is dus in de zamengefelde reden van de lengte en breedte. (34) Dit drukt men aldus uit:

Inhoud : Inhoud = Lengte $\times$ Br. : Lengte $\times$ Br. (35)

694. VIII VOORBEELD. Het gewigt van een ligchaam (van een zekere zelfstandigheid in het algemeen) hangt af van dezelfde uitgebreidheid van datzelfde digtheid. (36) De uitgebreidheid wordt in cubieke eenheden, bij voorb. cubieke meters, decimeters, centimeters, enz. uitgedrukt; de digtheid is dan niets anders dan het getal, dat het gewigt van eenen cubieken meter, decimeter of centimeter (of van eenige andere eenheid van lichaamsmaat) voorstelt. (37) Het gewigt wordt evenrediglijk grooter, wanneer, de digtheid dezelfde blijvende, de uitgebreidheid grooter wordt; het gewigt wordt insgelijks evenrediglijk-groo-

(28) Welk eene evenredigheid bestaat 'er tuschen de doorgeeloopene ruimte, de snelheden en de tijden?

(29) Hoe drukt men dat uit?

(30) Wat zegt het vijfde voorbeeld?

(31) Hoe schrijft men dit in teekens?

(32) Wat zegt het zesde voorbeeld?

(33) Hoe drukt men dit uit?

(34) Wat zegt het zevende voorbeeld?

(35) Hoe schrijft men dit in teekens?

(36) Wat zegt het achtste voorbeeld?

(37) Wat verstaat men door de digtheid van een ligchaam?

ter, wanneer, onder dezelfde uitgebreidheid, de digtheid toeneemt. Het gewigt van een ligchaam is derhalve in de zamengefelde reden van de uitgebreidheid en de digtheid. Men drukt dit aldus uit:

Gew. : Gew. = Uitgebr. $\times$ Digth. : Uitgebr. $\times$ Digth. (38)

En men kan nog vele andere voorbeelden, uit de wetenschappen ontleend, bijbrengen.

695. II GEVAL. Komen wij tot onze grootheid A (zie art. 686.) terug, welke van de grootheden P en Q afhangt: en laat aangenomen worden, dat, wanneer Q onveranderd blijft, maar P wordt

P, 2P, 3P, enz. pP, rP

de grootheid A worden zal

A, 2A, 3A, enz. pA, rA

maar dat, P standvastig blijvende, en Q genomen wordende,

Q, 2Q, 3Q en qQ, sQ

de grootheid A worden zal

A, $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{3}A$ en $\frac{1}{q}A$, $\frac{1}{s}A$

en dat A derhalve in dezelfde reden af- of toeneemen zal, waarin Q toef- of afneemt, dan zal men zeggen: de grootheid A is in eene reden, welke zamengefeld is uit de regte reden van P en de omgekeerde reden van Q. (39)

Betoog. Want, wanneer P wordt $p \times P$ of $r \times P$, dan wordt A natuurlijk $p \times A$ en $r \times A$; maar wanneer Q in $\frac{p}{q} \times Q$ verandert, dan verandert eenige waarde welke A verkregen heeft, $\frac{p \times A}{q}$ of $\frac{p}{q} \times A$; en verandert Q in $\frac{r}{s} \times Q$, dan verandert eenige waarde van A, bij voorbeeld rA , in $\frac{r}{s} \times A$. Men heeft derhalve:

$$\frac{p}{q} \times A : \frac{r}{s} \times A = \frac{p}{q} : \frac{r}{s}.$$

De getallen derhalve, in welke de twee toestanden van de grootheid A uitgedrukt worden, zijn in eene reden, welke zamengefeld is uit de regte reden van de getallen, welke de overeenkomstige waarden van P, en in de omgekeerde reden der getallen, welke de overeenkomstige waarden van Q voorstellen, het welk eene letterlijke uiteenzetting en omschrijving van het gestelde is. (40)

696. VOORBEELD. Om de hoegroothed van kapitalen uit de winsten, welke zij in bepaalde tijden mogen opgebracht hebben, te leeren kennen, zal men zeggen: de kapitalen staan in de regte reden der winsten,

(38) Hoe drukt men dit in teekens uit?

(39) Geef een voorbeeld, hoe eene grootheid A nog anders van twee andere grootheden P en Q kan afhangen?

(40) Hoe betoogt men deze stelling?

wanneer de tijden dezelfde blijven; doch in de omgekeerde reden van de tijden, wanneer de winsten gelijk blijven, omdat men, met een grooter of kleiner kapitaal, evenrediglijk zoo veel minder of meer tijd noodig heeft, om dezelfde winst te genieten. (41) Men drukt dit aldus uit:

$$\text{Kap. : Kap.} = \frac{\text{Winst}}{\text{Tijd}} : \frac{\text{Winst}}{\text{Tijd}} \quad (42)$$

697. Men kan deze zamengestelde evenredigheid, uit die van art. 687, dadelijk vinden: aldaar is bewezen, dat

$$\text{Winst : Winst} = \text{Kap.} \times \text{Tijd} : \text{Kap.} \times \text{Tijd}$$

is; verplaatst men de redens, dan heeft men

$$\text{Kap.} \times \text{Tijd} : \text{Kap.} \times \text{Tijd} = \text{Winst} : \text{Winst}$$

en deelt men deze evenredigheid door

$$\text{Tijd} : \text{Tijd} = \text{Tijd} : \text{Tijd}$$

dan wordt (zie art. 550)

$$\text{Kap. : Kap.} = \frac{\text{Winst}}{\text{Tijd}} : \frac{\text{Winst}}{\text{Tijd}} \quad (43)$$

698. Men kan, naar het voorbeeld van art. 687, door nadenken en redeneren, bepalen: hoe eene van drie grootheden van de twee anderen afhangt; doch, bijaldien eene dezer zamengestelde evenredigheden bekend is, kan men uit deze verscheidene anderen, en bijzonderlijk de begeerde, afleiden: alzoo zal men, op de wijze van art. 674, uit de zamengestelde evenredigheden, welke van art. 687—art. 694 zijn betoogd en opgegeven, verkond de volgende kunnen vinden. (44)

1°. Uit de zamengestelde evenredigheid van art. 687. volgt:

$$1) \text{ Kap. : Kap.} = \frac{\text{Winst}}{\text{Tijd}} : \frac{\text{Winst}}{\text{Tijd}}$$

en deze is de zamengestelde evenredigheid van art. 696 en 697.

$$2) \text{ Tijd : Tijd} = \frac{\text{Winst}}{\text{Kap.}} : \frac{\text{Winst}}{\text{Kap.}}$$

dat is: de onderscheidene tijden, in welke twee onderscheidene kapitalen elk eens onderscheiden winst hebben opgebracht, zijn in eene reden, welke zamengesteld is uit de rechte reden der winsten en de omgekeerde reden der kapitalen. (45) En dit wordt, door de redeneerwijze van art. 686 en 695, bevestigd; want, wanneer de kapitalen dezelfde zijn, dan zijn de winsten evenredig aan de tijden, en, wanneer de kapitalen gelijke winsten hebben opgebracht, dan moeten de tijden in de omgekeerde reden van de kapitalen staan; derhalve enz. (46)

(41) Geef een voorbeeld van zulk eene zamengestelde evenredigheid?

(42) Hoe schrijft men deze evenredigheid?

(43) Kan men ook die evenredigheid uit eene andere vinden?

(44) Wat is bij de beschouwing der zamengestelde evenredigheden op te merken?

(45) Geef een voorbeeld van deze afleiding?

(46) Hoe wordt dit bevestigd?

2°. Uit de zamengestelde evenredigheid van art. 688; te weten, uit

$$\text{Arb loon : Arb. loon} = \text{Werkl.} \times \text{Tijd} : \text{Werkl.} \times \text{Tijd}$$

volge de evenredigheden:

$$1) \text{ Werkl. : Werkl.} = \frac{\text{Arb loon}}{\text{Tijd}} : \frac{\text{Arb. loon}}{\text{Tijd}}$$

$$2) \text{ Tijd : Tijd} = \frac{\text{Arb loon}}{\text{Werkl.}} : \frac{\text{Arb. loon}}{\text{Werkl.}} \quad (47)$$

3°. Uit de zamengestelde evenredigheid van art. 689, te weten:

$$\text{Werk : Werk} = \text{Werkl.} \times \text{Tijd} : \text{Werkl.} \times \text{Tijd}$$

volgen de zamengestelde evenredigheden:

$$1) \text{ Werkl. : Werkl.} = \frac{\text{Werk}}{\text{Tijd}} : \frac{\text{Werk}}{\text{Tijd}}$$

$$2) \text{ Tijd : Tijd} = \frac{\text{Werk}}{\text{Werkl.}} : \frac{\text{Werk}}{\text{Werkl.}} \quad (48)$$

4°. Uit de zamengestelde evenredigheid van art. 690, te weten, uit

$$\text{Weg : Weg} = \text{Snelb.} \times \text{Tijd} : \text{Snelb.} \times \text{Tijd}$$

volgen de zamengestelde evenredigheden:

$$1) \text{ Snelb. : Snelb.} = \frac{\text{Weg}}{\text{Tijd}} : \frac{\text{Weg}}{\text{Tijd}}$$

$$2) \text{ Tijd : Tijd} = \frac{\text{Weg}}{\text{Snelb.}} : \frac{\text{Weg}}{\text{Snelb.}} \quad (49)$$

Op dezelfde wijze, zal men uit de zamengestelde evenredigheden van art. 691, 692, 693 en 694 andere zamengestelde evenredigheden kunnen opstellen, welke de Leerling, naar hetzelfde model, moet afleiden en de zelve schriftelijk in bewoordingen verklaren.

699. III GEVAL. Hangt de grootheid A van de grootheden P en Q zoodanig af, dat, het zij P, het zij Q standvastig blijvende, in beide gevallen A evenrediglijk af- of toeneemt, naar mate P of Q toe- of afnemen, dan zullen de getallen, welke de onderscheidene waarden van A voorstellen, zijn in eene reden, welke zamengesteld zal zijn, uit de omgekeerde reden der getallen, welke de waarden van P, en uit de omgekeerde reden der getallen, welke de waarden van Q uitdrukken (50) Het zij aan den Leerling overgelaten, zulks, op de wijze van art. 683, te betoogen. (51)

(47) Geef nog een tweede voorbeeld?

(48) Geef nog een derde voorbeeld?

(49) Geef nog een vierde voorbeeld?

(50) Op welk eene wijze kan eene grootheid A van twee andere grootheden P en Q afhangen?

(51) Hoe betoogt men zulks?

700. IV BESCHOUWING. Eene grootheid A kan van eenige andere grootheden P, Q, R, S enz. (laten wij slechts vier grootheden P, Q, R en S, noemen) afhangen, en bij deze afhankelijkheid kunnen de volgende gevallen plaats hebben. (52)

701. I GEVAL. Wanneer alle de grootheden tot op ééne na, standvastig blijven, en de vierde veranderende, de grootheid A aan deze verandering evenredig blijft, dan zullen, indien zulks voor elke der vier grootheden afzonderlijk plaats heeft, de waarden van de grootheid A in eene reden zijn, welke zamengefeld is uit de redens van de waarden van P, uit die van de waarden van Q, uit die van de waarden van R en uit die van de waarden van S. (53) Men kan dit op dezelfde wijze als in art. 686 betoogen. (54)

702. I VOORBEELD. Alzoo zijn de winsten, door onderscheidene kapitalen, in onderscheidene tijden, aangebragt, in de zamengefelde reden van de kapitalen van de tijden en van de intressen, naar welke deze kapitalen ten honderd in het jaar zijn uitgezet. (55) Men drukt zulks aldus uit:

$$\text{Winst} : \text{Winst} = \text{Kap.} \times \text{Tijd} \times \text{Intr.} : \text{Kap.} \times \text{Tijd} \times \text{Intr.} \quad (56)$$

703. II VOORBEELD. Ook zijn de hoeveelheden werks, door onderscheidene werktuigen, met onderscheidene werkkragten (die evenredig zijn aan de hoeveelheid werks, in dezelfde tijd door elk hunner volbragt,) begaafd, in onderscheidene weken, verschillende dagen in de week en onderscheidene uren op den dag, in de zamengefelde reden van het getal der werktuigen, die in elk geval gewerkt hebben, van de onderscheidene kragten dezer werktuigen, van de weken, die zij gewerkt hebben, van de dagen in de week en van de uren op den dag. (57) Men drukt dit aldus uit:

$$\text{Werk} : \text{Werk} = \text{Werkt.} \times \text{Kragt} \times \text{Weken} \times \text{Dag.} \times \text{Ur.} : \text{Werkt.} \times \text{Kragt} \times \text{Weken} \times \text{Dag.} \times \text{Ur.} \quad (58)$$

704. III VOORBEELD. De inhouden van viertakten lichamen (in de Meerkunst regthoekige parallelipedums genoemd) zijn in de zamengefelde reden van de lengte, breedte en hoogte. (59) Dit wordt aldus uitgedrukt:

$$\text{Inh.} : \text{Inh.} = \text{Lengte} \times \text{Br.} \times \text{Hoogte} : \text{Lengte} \times \text{Br.} \times \text{Hoogte} \quad (60)$$

705. II GEVAL. Wanneer de grootheid A grooter wordt, in dezelfde reden, als P en Q grooter worden; maar de grootheid A in dezelfde reden vermindert of verminderd, als de grootheden R en S vermeerderen of verminderen: dan zal men zeggen: de waarde van

(52) Kan men de zamengefelde evenredigheden nog verder uitstrekken?

(53) Wat zegt het eerste geval?

(54) Hoe betoogt men zulks?

(55) Geef hiervan een voorbeeld?

(56) Hoe wordt dit geschreven?

(57) Geef een tweede voorbeeld?

(58) Hoe wordt dit geschreven?

(59) Geef een derde voorbeeld?

(60) Hoe schrijft men deze zamengefelde evenredigheid?

A is in eene reden, welke zamengefeld is, uit de rechte redens van de waarde van P en uit die van Q, en uit de omgekeerde redens van de waarde van R en die van S. (61) Noemende dus de waarden van A, A en a; van P, P en p; van Q, Q en q; van R, R en r; van S, S en s; dan zal men hebben:

$$A : a = \frac{P \times Q}{R \times S} : \frac{p \times q}{r \times s} \quad (62)$$

706. En hieruit blijkt genoegzaam, hoe men alle andere gevallen zal uitdrukken, daar, na de verklaring van alle de voorgaande dingen, geen geval eenige zwaarigheid meer hebben kan. De volgende stellingen strekken tot eene nadere beoefening.

707. Uit de zamengefelde evenredigheid van art. 702, te weten:

$$\text{Winst} : \text{Winst} = \text{Kap.} \times \text{Tijd} \times \text{Intr.} : \text{Kap.} \times \text{Tijd} \times \text{Intr.}$$

volgen de volgende zamengefelde evenredigheden:

$$1) \text{ Kap.} : \text{Kap.} = \frac{\text{Winst}}{\text{Tijd} \times \text{Intr.}} : \frac{\text{Winst}}{\text{Tijd} \times \text{Intr.}}$$

$$2) \text{ Tijd} : \text{Tijd} = \frac{\text{Winst}}{\text{Kap.} \times \text{Intr.}} : \frac{\text{Winst}}{\text{Kap.} \times \text{Intr.}}$$

$$3) \text{ Intr.} : \text{Intr.} = \frac{\text{Winst}}{\text{Kap.} \times \text{Tijd}} : \frac{\text{Winst}}{\text{Kap.} \times \text{Tijd}}$$

en wanneer men de winsten gelijk stelt, dan is

$$\text{Kap.} \times \text{Tijd} \times \text{Intr.} = \text{Kap.} \times \text{Tijd} \times \text{Intr.}$$

en dan volgt hier uit:

$$4) \text{ Kap.} : \text{Kap.} = \frac{1}{\text{Tijd} \times \text{Intr.}} : \frac{1}{\text{Tijd} \times \text{Intr.}}$$

$$5) \text{ Tijd} : \text{Tijd} = \frac{1}{\text{Kap.} \times \text{Intr.}} : \frac{1}{\text{Kap.} \times \text{Intr.}}$$

$$6) \text{ Intr.} : \text{Intr.} = \frac{1}{\text{Kap.} \times \text{Tijd}} : \frac{1}{\text{Kap.} \times \text{Tijd}}$$

De eerste dezer zamengefelde evenredigheden wordt gelezen: de kapitalen, welke in onderscheidene tijden, tegen verschillende procenten in het jaar, onderscheidene winsten hebben aangebragt, zijn in eene reden, welke zamengefeld is, uit de rechte reden der aangebragte winsten, uit de omgekeerde reden der tijden, en uit de omgekeerde reden der procenten of intressen ten honderd in het jaar; en de vierde zamengefelde evenredigheid, welke op de onderstelling van gelijke aangebragte winsten steunt, zegt: de kapitalen, welke gelijke winsten

(61) Op welk eene wijze kan eene grootheid A nog van vier andere grootheden afhangen?

(62) Hoe wordt zulk eene evenredigheid geschreven?

hebben aangebragt, zijn in eens reden, welke zamengefeld is uit de omgekeerde reden der tijden en de omgekeerde reden der interesfen of perconten in 's jaar.

708. Uit de zamengefelde evenredigheid van art. 703 en 704 kan men voortgelijke zamengefelde evenredigheden afleiden. Het welk aan den Leerling wordt overgelaten.

709. Alles, wat tot hier toe in deze Les verhandeld is, zal meer dan voldoende zijn, om elk vraagstuk, dat tot den zamengefelde Regel van Drieën behoort, te verftaan, van andere vraagstukken te onderscheiden, en eindelijk, om hetzelve op te losfen. Men ftelle de zamengefelde evenredigheid, welke de gegevene en gevraagde of onbekende grootheden met elkander maken, behoortijk en naar den aard der zake op, en losse, naar de voorschriften van art. 677—art. 680. de onbekende grootheid uit dezelve op. (63)

710. 1 VOORBEELD. Indien met 100 gulden kapitaal, in 12 maanden, $3\frac{1}{2}$ gl. gewonnen wordt, hoe veel zal men dan met 760 gl. in 21 maanden, tegen dezelfde voorwaarde, winnen?

Om dat, zie art. 687, de winsten in de zamengefelde reden zijn van de kapitalen en tijden, zoo zal men, de gevraagde winst x stellende, hebben de zamengefelde evenredigheid:

$$\begin{array}{cccccc} \text{winst} & \text{winst} & \text{kap.} & \text{tijd} & \text{kap.} & \text{tijd} \\ 3\frac{1}{2} & : & x & = & 100 & \times 12 : 760 \times 21 \\ \text{derhalve } 100 \times 12 \times x & = & 760 \times 21 \times 3\frac{1}{2} \\ x & = & \frac{760 \times 21 \times 3\frac{1}{2}}{100 \times 12} = \frac{19 \times 7}{100 \times 12} \times 7 \\ & & & & & 100 \times 12 \times 2 \\ \text{of } x & = & \frac{19 \times 7 \times 7}{20} = 46 \text{ gl. 11 fl.} \end{array}$$

Ophefdering. Na dat men, naar aanleiding van de vraag, de zamengefelde evenredigheid heeft opgefteld, maakt men de producten der uiterfte en middelste termen aan elkander gelijk en deelt de vergelijking door de factoren, welke de onbekende grootheid vermenigvuldigen. (64)

711. AANMERKING. In deze en de volgende voorbeelden, komt men op eene uitdrukking van den vorm $x = \frac{abcde}{fghi}$, of eene voortgelijke, welke te kennen geeft: dat

(63) Hoe zal men nu een vraagstuk, het welk van de eene of andere zamengefelde evenredigheid afhangt, oplossen?

(64) Verklaar de oplossing van het eerste voorbeeld?

men het gedurig product der getallen a, b, c, d en e door het gedurig product der getallen f, g, h en i deelen moet. Om nu het werk zoo veel mogelijk te vereenvoudigen en tevens te bekorten, moet men elken factor in den teller of noemer, welke met eene breuk is aangedaan, met den noemer van die breuk vermenigvuldigen; maar dan moet men dien factor ook in den noemer of teller der breuk overbrengen. Wanneer men nu dit alles alzo tot geheele getallen herleid heeft, moet men zoo veel men kan, de factoren van den teller tegen die van den noemer verkleinen. (65) (Zie I. Deel art. 349.)

712. 2 VOORBEELD. Wanneer met 100 gl. kapitaal, in 12 maanden, $3\frac{1}{2}$ gl. kan gewonnen worden, in hoe veel tijds zal men dan met 650 gl. winnen 36 gl.?

Om dezelfde reden, als in het voorgaande voorbeeld, ftelle men:

$$\begin{array}{cccccc} \text{winst} & \text{winst} & \text{kap.} & \text{tijd} & \text{kap.} & \text{tijd} \\ 3\frac{1}{2} & : & 36 & = & 100 & \times 12 : 650 \times x \\ \text{derhalve heeft men, als boven,} \\ 3\frac{1}{2} \times 650 \times x & = & 36 \times 100 \times 12 \\ \text{waaruit dan eindelijk volgen zal:} \end{array}$$

$$x = \frac{36 \times 100 \times 12}{3\frac{1}{2} \times 650} = 17\frac{37}{5} \text{ maand. (66)}$$

NB. Wij maken in het vervolg (om plaats te winnen) de verkleiningen niet, waarvan in het voorgaande art. gefproken is.

713. 3 VOORBEELD. Hoe veel kapitaal zal men noodig hebben, om, tegen $5\frac{1}{2}$ ten honderd 's jaars, in 44 maanden, 847 gl. te winnen?

Volgens hetzelfde beginsel is

$$\begin{array}{cccccc} \text{winst} & \text{winst} & \text{kap.} & \text{maand.} & \text{kap.} & \text{maand.} \\ 5\frac{1}{2} & : & 847 & = & 100 & \times 12 : x \times 44 \\ x & = & \frac{847 \times 100 \times 12}{5\frac{1}{2} \times 44} = 4200 \text{ gl. (67)} \end{array}$$

714. 4 VOORBEELD. Indien 24 werklieden, in 20 weken, daags 7 uren werkende, 1435 gulden verdienen; hoe veel ver-

(65) Wat moet bijzonderlijk bij de oplossing van eene zamengefelde evenredigheid in acht genomen worden?

(66) Verklaar het tweede voorbeeld?

(67) Verklaar het derde voorbeeld?

dienen dan 33 werklieden in 36 weken, dagelijks 12 uren werkende? veronderstellende de krachten der werklieden gelijk te zijn.

Volgens art. 703 heeft men de zamengestelde evenredigheid:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{werkloon} & \text{werkloon} & \text{wl.} & \text{w.} & \text{u.} & \text{wl.} & \text{w.} & \text{u.} \\ 1435 & : & x & = & 24 \times 20 \times 7 & : & 33 \times 36 \times 12 \\ x & = & \frac{1435 \times 33 \times 36 \times 12}{24 \times 20 \times 7} & = & 6088\frac{1}{2} \text{ gl. (68)} \end{array}$$

715. 5 VOORBEELD. Gesteld dat 33 werklieden, in 36 weken, 12 uren daags arbeidende, 6088½ gl. verdienen; in hoe veel weken zullen dan 24 van die werklieden, indien zij 7 uren daags werken, 1437 gulden verdienen?

De zamengestelde evenredigheid is:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{loon} & \text{loon} & \text{wl.} & \text{w.} & \text{u.} & \text{wl.} & \text{w.} & \text{u.} \\ 6088\frac{1}{2} & : & 1435 & = & 33 \times 36 \times 12 & : & 24 \times x \times 7 \\ x & = & \frac{1435 \times 33 \times 36 \times 12}{6088\frac{1}{2} \times 24 \times 7} & = & 20 \text{ weken. (69)} \end{array}$$

716. 6 VOORBEELD. Indien 840 gulden kapitaal, in 8 jaren, tegen 3 ten honderd 's jaars, eene zekere winst opbrengen, tegen hoe veel ten honderd in het jaar, zullen dan 200 gulden, voor den tijd van 2½ jaren, moeten uitgezet worden, om dezelfde winst aan te brengen?

Omdat de winsten in de zamengestelde reden zijn van de kapitalen, de tijden en de interesten ten honderd in het jaar, en dezelve winsten gelijk moeten zijn, zoo volgt hier uit: dat de percenten, tegen welken de kapitalen zijn uitgezet, tot elkander in eene reden staan, welke zamengesteld is uit de omgekeerde reden der kapitalen en de omgekeerde reden der tijden: men stelle derhalve:

$$\frac{pCt.}{8} : \frac{pCt.}{x} = \frac{1}{800 \times 8} : \frac{1}{2400 \times 2\frac{1}{2}}$$

dat is, zie art. 678 hier boven,

$$x = \frac{8}{2400 \times 2\frac{1}{2}} \times \frac{800 \times 8}{1} = \frac{8 \times 800 \times 8}{2400 \times 2\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2} pCents. (70)$$

Men kan ook, indien men van de zamengestelde evenredigheid van art.

(68) Verklaar het vierde voorbeeld?

(69) Verklaar het vijfde voorbeeld?

(70) Verklaar de oplossing van het zesde voorbeeld?

808 gebruik wil maken, daar de termen van de eerste reden gelijk zijn, dadelijk stellen:

$$2400 \times 2\frac{1}{2} \times x = 3 \times 800 \times 8$$

want het is eigenlijk hetzelfde hoe men werke, indien, het geen men stelle, slechts op goede grond steunt. (71)

717. 7 VOORBEELD. Indien 360 soldaten, in 12 weken, 6½ dag's weeks, en 1 uren daags werkende, eene gragt waken, die 7200 voet lang, 28 voet breed en 10 voeten diep is; hoe lang zal dan eene gragt moeten zijn, die 50 voeten breedte en 12½ voeten diepte heeft, waaraan 560 soldaten daags 1½ uren, 24 weken lang en 5½ dag in de week, gewerkt hebben?

In dit vraagstuk is, zie art. 703, het verrigte werk in de zamengestelde reden van het getal werklieden, van de weken, die zij gewerkt hebben, van de dagen in de week en de uren daags; maar de grootte van het werk is evenredig aan de grootte der gegraven grachten, en deze zijn in de zamengestelde reden van derzelver lengte, breedte en diepte: men stelle derhalve de volgende zamengestelde evenredigheid:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \text{lang} & \text{breed} & \text{diep} & \text{dag} & \text{breed} & \text{diep} & \text{sold.} & \text{wek.} & \text{dag.} & \text{sold.} & \text{wek.} & \text{dag.} & \text{sold.} & \text{wek.} & \text{dag.} & \text{sold.} & \text{wek.} & \text{dag.} \\ 7200 \times 28 \times 10 \times 1 & : & x \times 30 \times 12\frac{1}{2} & = & 360 \times 12 \times 6\frac{1}{2} \times 12 & : & 560 \times 24 \times 5\frac{1}{2} \times 14\frac{1}{2} \end{array}$$

waaruit dan volgt:

$$x = \frac{7200 \times 28 \times 10 \times 560 \times 24 \times 5\frac{1}{2} \times 14\frac{1}{2}}{30 \times 12\frac{1}{2} \times 360 \times 12 \times 6\frac{1}{2} \times 12} = 17449\frac{1}{11}, (72)$$

718. I AANMERKING. De zeven voorgaande voorbeelden bevatten al de verscheidenheid, welke immer in de oplossing van den zamengestellten Regel van Drieën kan plaats hebben; uit dezelve blijkt, dat de oplossing van den onbekenden term geene de minste zwarigheid hebben kan, zoodra men slechts gevat hebbe, hoedanig de grootheden van elkander afhangen, waartoe de zaken, welke van art. 674 tot art. 707, verklaard zijn, den leerling volkomen moeten in staat stellen. (73). Men heeft ook gezien: dat het ganschelijk vrijstaat, om de zamengestelde evenredigheid zoo op te stellen, als zij zich het eerst aan ons verstand opdoet, waarna men oogenblikkelijk bemerken moet, welke getallen met elkander vermenigvuldigd en gedeeld moeten worden. (74)

(71) Hoe kan men dit voorbeeld nog anders uitwerken?

(72) Verklaar de bewerking van het zevende voorbeeld?

(73) Wat blijkt uit de zeven opgeloste voorbeelden?

(74) Wat merkt gij meer op?

Hierdoor vervalt nu het nutteloos onderscheid tusfchen den zoogenaamden *regten* en *omgekeerden regel van vijven*, en men ziet tevens, dat, wanneer men dit onderscheid wilde behouden, 'er ook een *regel van zevenen*, van *negenen*, enz. zoude zijn, en dat het zevende voorbeeld, op dien grond, tot eenen *regel van dertien*en zou behooren. (75) Wij hebben alle deze onderscheidene regels onder den naam van *zamengestelden Regel van Drieën* gebragt; omdat alle nuttelooze onderscheidingen het geheugen bezwaren en de aangeleerde zaken spoedig doen vergeten. (76)

719. II AANMERKING. Men zal misfchien denken, dat de oplossing niet regelmatig genoeg is, omdat het onbekende getal niet in den achterften term der zamengestelde evenredigheid voorkomt: maar dit is immers geene wet? juist, omdat de Schrijvers dit onbekende getal in het achterfte lid der evenredigheid willen hebben, moeten zij hunnen toevlug tot zoo vele onderscheidingen maken, welke tot niets nuttig zijn. (77) Ware men 'er nogtans op getield, om het onbekende getal in den achterften term der evenredigheid te hebben, zoo zou niets gemakkelijker zijn, daar zulks, met behulp van het verklaarde in *art.* 540, dadelijk gefchieden kan; zoo zal men, in het eerste voorbeeld, door verplaatfing der redens, hebben:

$$100 \times 12 : 760 \times 21 = 3\frac{1}{2} : x$$

In het tweede voorbeeld, *art.* 712, zal men de zamengestelde evenredigheid door de evenredigheid $100:650 = 100:650$ deelen, en dan verkrijgt men:

$$\frac{3\frac{1}{2}}{100} : \frac{36}{650} = 12 : x$$

In het derde voorbeeld, *art.* 713, zal men, op gelijke wijze, vinden:

$$\frac{5\frac{1}{2}}{12} : \frac{847}{44} = 100 : x$$

Het vierde voorbeeld *art.* 714 zal, door verplaatfing der redens, geven:

$$24 \times 20 \times 7 : 33 \times 36 \times 12 = 1435 : x$$

Wanneer men de zamengestelde evenredigheid van *art.* 715. door $33 \times 12 : 24 \times 7 = 33 \times 12 : 24 \times 7$ deelt, zal men verkrijgen:

$$\frac{6083\frac{1}{2}}{33 \times 12} : \frac{1435}{24 \times 7} = 36 : x$$

(75) Geven deze verschillende zamengestelde evenredigheden geene aanleiding tot verschillende regels?

(76) Onder welk eenen algemeenen naam brengt men alle die verschillende regels?

(77) Behoorde toch niet het onbekende getal in den achterften term te staan?

Het voorbeeld van *art.* 716. zal worden:

$$\frac{1}{800 \times 8} : \frac{1}{2400 \times 2\frac{1}{2}} = 3 : x$$

en wanneer men, in het voorbeeld van *art.* 717. eerst de redens verplaatst en daarna alles door $28 \times 10 : 30 \times 12\frac{1}{2} = 28 \times 10 : 30 \times 12\frac{1}{2}$ deelt, dan verkrijgt men:

$$\frac{360 \times 12 \times 6\frac{1}{2} \times 12}{28 \times 10} : \frac{560 \times 24 \times 5\frac{1}{2} \times 14\frac{1}{2}}{30 \times 12\frac{1}{2}} = 7200 : x. (78)$$

720. III AANMERKING. Wanneer men de zamengestelde evenredigheden, op deze wijze verschikt heeft, en dan de vierde evenredige oplost, verkrijgt men dezelve uitkomst; zoo is het laatste voorbeeld,

$$x = 7200 \times \frac{560 \times 24 \times 5\frac{1}{2} \times 14\frac{1}{2}}{30 \times 12\frac{1}{2}} \times \frac{28 \times 10}{360 \times 12 \times 6\frac{1}{2} \times 12}$$

welke van de uitdrukking voor x in *art.* 717 in niets anders, dan in de rangfchikking der factoren verschilt. (79) Maar waartoe nu die nuttelooze transformatiën, ten zij men dezelve fieraadshalve verkiezen mogt?

721. IV AANMERKING. *Alle vraagstukken, welke tot den zamengestelden regel van drieën behooren, kunnen, door twee, drie, of meer van elkander afhangende regte of omgekeerde regels van drieën opgelost worden.* (80) Het eerste voorbeeld van *art.* 710 aldus:

a) $12 \text{ maand.} : 21 \text{ maand.} = 3\frac{1}{2} \text{ winst} : x \text{ winst}$
hieruit vindt men $x = 6\frac{1}{2} \text{ winst.}$

b) $100 \text{ kap.} : 760 \text{ kap.} = 6\frac{1}{2} \text{ winst} : x \text{ winst}$
en deze oplosfende, vindt men $x = 46\frac{1}{2} \text{ gl.}$

Of men kan ook aldus rekenen:

$$100 \text{ kap.} : 760 \text{ kap.} = 3\frac{1}{2} \text{ winst} : x \text{ winst}$$

$$12 \text{ maand.} : 21 \text{ maand.} : x \text{ winst} : y \text{ winst}$$

en dan wordt, door de oplossing van de eerste evenredigheid, x bekend, en door die van de tweede y . (81) De leerling ontlede nu de voorgaande vragen in zulke enkelde, regte of omgekeerde regels van drieën: dit zal voor hem nuttig zijn.

(78) Kan dit echter niet gefchieden?

(79) Kan deze verschikking geen onderscheid in de uitkomsten geven?

(80) Kan men de vraagstukken, tot deze zamengestelden regel van drieën behoorende, ook anders oplossen?

(81) Geef hiervan een voorbeeld?

II. DEEL.

E

MEER VOORBEELDEN TOT OEFENING.

8 VOORBEELD. Indien 8 knechts, in den tijd van 12 maanden, 2592 gulden winnen; hoe veel winnen dan 35 knechts, in den tijd van 10½ maand, de verdiensten of werkzaamheden dezer knechts gelijk stellende?

9 VOORBEELD. Wanneer 9 knechts, in 10½ week, 738½ gl. verdienst hebben, hoe veel heeft dan één knecht in één week verdiend?

10 VOORBEELD. Hoe veel zal men met 1625 gulden, in 17½ maand, tegen 3½ ten honderd, in het jaar winnen?

11 VOORBEELD. Wanneer men, met 450 gl. in 12 jaar, tegen 6 ten honderd in het jaar, 324 gulden winnen kan, hoe veel zal men dan winnen met 750 gl., in 7½ jaar, tegen 3½ ten honderd in het jaar.

12 VOORBEELD. Indien 5 werklieden, 6 dagen in de week werkende, in den tijd van 4½ week, 147½ gl. verdienen, hoe veel zullen dan, de verdiensten der werklieden gelijk stellende, 53 werklieden in 46½ week verdienen, zoo zij elke week 6½ dag werken?

13 VOORBEELD. Een loodgieter heeft, om een plat, dat 13½ voet lang 7½ voet breed is, te beleggen, 45 lb lood noodig, hoe veel lood van dezelfde dikte zal hij dan nodig hebben, om een plat van 20 voeten lengte en 14 voeten breedte te beleggen?

13 VOORBEELD. Een schilder heeft, om eene schutting van 50 meters lengte en 13 meters hoogte te schilderen, 37 kilogrammes verw noodig, hoe veel van die verwstof zal hij noodig hebben, om vier schuttingen, die 56,2 meters lang en 4 meters hoog zijn, te beschilderen?

14 VOORBEELD. Een kiloliter koorn is een cubus, die eenen meter lang, breed en hoog is; hoe veel kiloliters zal men dan bergen op eenen zolder, welke 19 meters lang en 7,5 meters breed is, indien men het koren 5 decimeters hoog legt?

15 VOORBEELD. Indien 12 knechts, in 7 weken, 6 dagen in de week en 10 uren daags werkende, 650 francs verdienen, hoe veel verdienen dan 20 knechts in 12½ week, 5½ dag werkende en 9 uren daags, in de onderselling, dat elk van de laatstgenoemde twintig knechts, in denzelfden tijd, 1½ maal zoo veel werks afdoet, als elk van de eerstgenoemde 12 knechts?

16 VOORBEELD. Indien een last sarw kost 1:8 goud-gl. dan betaalt men 4½ stuivers voor een brood van 3 lb; hoe veel lb brood zal men dan voor 9 stuivers en 8 penn. kunnen kopen, indien de sarw 16 goud-gl. op het last afflaat?

17 VOORBEELD. Een loodgieter heeft 106½ lb lood noodig, om daar mede het vierkantig plat van een huis te bekleden, zoo nu het plat 27½ voet lang is, hoe breed zal het dan zijn, indien hij, om een plat, dat 13½ lang 7½ voet breed is, te bekleden, 45½ lb van dat zelfde lood noodig heeft?

18 VOORBEELD. Eene anderhalve steens muur, 32 voet breed en 36½ voet hoog zijnde, belooft aan kosten, voor arbeidsloon en bouwstof, 360 gl., hoe breed zal dan een drie steens muur zijn, die, ter hoogte van 45½ voet opgemetzel zijnde, aan arbeidsloon 1110 gulden gekost heeft?

19 VOORBEELD. Twintig arbeiders hebben, in 15 weken, 6 dagen 's weeks en 6 uren daags gewerkt hebbende, 1000 gulden verdiend; hoe

veel wren daags hebben dan 36 andere arbeiders gewerkt, indien zij in 4 weken, 6 dagen 's weeks werkende en 8 uren daags, 640 gulden verdiend hebben?

20 VOORBEELD. Gefeld, dat men, met 8000 gulden in 16 maanden, tegen 3 pCt., 320 gulden winnen kan; met welk kapitaal zal men dan in 3½ maand 513 gulden, tegen 3½ pCt., winnen kunnen?

21 VOORBEELD. Hoe hoog moet een regenbak opgemetzel worden, die 12 voeten lang 16½ voet breed is, om zoo veel tonnen waters te houden, als een andere bak, die 11 voet lang, 8 voet breed en 14½ voet hoog is?

22 VOORBEELD. Hoe veel kapitaal moet voor 16 maanden, tegen 4½ pCt. 's jaars, op interest belegd worden, om even zoo veel te winnen, als 600 gulden in 13½ maand tegen 3½ pCt.?

23 VOORBEELD. Hoe lang moeten 1200 gl., tegen 3½ pCt. 's jaars, op interest gezet worden, om zoo veel winst op te brengen, als 1600 gulden in 5 jaar en 3 maanden, tegen 4½ pCt. 's jaars?

24 VOORBEELD. Hoe veel uren daags moeten 15 werklieden 14 dagen lang werken, om zoo veel werk af te doen, als 8 werklieden in 27 weken doen kunnen, dagelijks 10½ uur werkende?

25 VOORBEELD. Hoe veel werklieden, die met hun drieën in één uur zoo veel doen kunnen als 4 andere werklieden, zullen, in 18 weken 13 uren daags werkende, zoo veel doen kunnen, als 24 van die andere werklieden, in 24 weken 9½ uur daags werkende, verrigten?

26 VOORBEELD. Hoe veel werklieden zullen, indien zij 's weeks 5 dagen en 's daags 11½ uur werken, in 18 weken, zoo veel werks kunnen afdoen, als 846 werklieden in 10 weken 6½ dag 's weeks en 12½ uur daags werkende, kunnen daarstellen?

XLV LES. Over de verdere eigenschappen der Evenredigheden, derzelver toepassing, en inzonderheid over den zoo genaamden KETTING-REGEL.

722. I STELLING. Wanneer men zich eenige gelijkfachtige grootheden A, B, C, D, E, F, G voorsfelt, (bij voorbeeld alle lengten, vlakten, lichamen, tijden, gewigten, snelheden, enz.) en gegeven zijn de reden van de eerste A tot de tweede B , als een getal a tot een getal b ; die van de tweede tot de derde, als een getal c tot een getal d , en

$$\begin{aligned} A : B &= a : b \\ B : C &= c : d \\ C : D &= e : f \\ D : E &= g : h \\ E : F &= i : k \\ F : G &= l : m \end{aligned}$$

insgelijks de reden van elke voorgaande tot elke volgende, en alzo voortgaande, tot de twee laatste dezer grootheden in-

gesloten, als een getal tot een getal, zoo als, in de nevenstaande tafel, uitvoeriger is voorgefeld; dan zal de eerste grootheid A tot de derde C staan in eene reden, welke is zamengesteld uit de redens van de eerste tot de tweede, en van de tweede tot de derde; (dat is $A:C = ac:bd$) de eerste tot de vierde in eene reden, welke zamengesteld is uit de redens van de eerste tot de tweede, van de tweede tot de derde en van de derde tot de vierde; (dat is $A:D = ace: bdf$), en deze zelfde wet zal bestendig blijven plaats hebben; zoo dat, bij voorbeeld, de reden van de eerste tot de twintigste in rang zal zamengesteld zijn uit negentien redens, namelijk uit de redens van de eerste tot de tweede, van de tweede tot de derde, enz. tot de reden van de negentiende tot de twintigste. (1)

Betoog. Omdat $A:B = a:b$ is, is (art. 510.) $b \times A = a \times B$ en $B = \frac{b}{a} \times A$: om dezelfde reden, zal uit $B:C = c:d$, volgen $d \times B = c \times C$ en $B = \frac{c}{d} \times C$ en daarom is $\frac{b}{a} \times A = \frac{c}{d} \times C$; vermenigvuldigt men nu deze laatste gelijkheid met ad , dan verkrijgt men (art. 471.) $bd \times A = ac \times C$, en nu volgt hieruit, $A:C = ac:bd$. (2)

Uit deze laatste evenredigheid volgt (art. 510.) $C = \frac{bd}{ac} \times A$, en uit de evenredigheid $C:D = e:f$ volgt $C = \frac{e}{f} \times D$; derhalve is $\frac{bd}{ac} \times A = \frac{e}{f} \times D$ en wanneer men nu deze vergelijking met acf vermenigvuldigt, wordt $bdf \times A = ace \times D$ en hieruit volgt dan wederom $A:D = ace:bdf$. (3)

Men kan op dezelfde wijze alle de andere evenredigheden betoogen. (4)

723. 1 AANMERKING. Wanneer, in plaats van de grootheden A, B, C, D, E enz., getallen p, q, r, s, t enz. gegeven zijn, en de evenredigheden $p:q = a:b$, $q:r = c:d$, $r:s = e:f$, $s:t = g:h$ enz. blijven plaats hebben, zal zulks in de algemeene stelling geene verandering maken; men zal derhalve insgelijks mogen stellen $p:s = ac:bd$, $p:t = ace:bdf$, $p:st = aceg:bdfh$ enz. (5) Maar de geselde evenredigheden kunnen, in dit geval, gemakkelijker betoogd worden; want vermenigvuldigt men de overeenkomstige termen der twee

eerste evenredigheden, $p:q = a:b$ en $q:r = c:d$, met elkander, dan is (art. 549.) $pq:qr = ac:bd$ en wanneer men nu de termen van de eerste reden der laatste evenredigheid door $p = q$ deelt, zal (art. 541.) $p:q = ac:bd$ zijn, enz. (6) Omdat men geene grootheden, maar wel getallen met elkander kan vermenigvuldigen, wordt het betoog der algemeene stelling eenigzins omslagdiger. (7)

724. 2 AANMERKING. Uit de gegeven evenredigheden besluit men derhalve tot de reden van de eerste grootheid A tot elke der anderen; maar men kan, ook op dezelfde gronden, tot de reden van elke andere grootheid tot ééne der volgende besluiten; alzoo zal $B:D = ce:df$; $B:E = ceg:djh$; $B:F = cegit:dfhkt$; $B:G = cegil:dfhkm$; en $C:E = egt:h$; $C:F = egt:fhk$; $C:G = egt:ghk$; $D:F = git:hkt$; $D:G = git:hkm$ en $E:G = it:hkm$. (8)

725. 3 AANMERKING. Eene grootheid wordt als bekend aange-merkt, indien zij in eenige bekende maat of eenheid is uitgedrukt: wanneer dan gezegd wordt $A:B = a:b$, dan weet men alleen de reden tusschen A en B; maar men kan geene dezer grootheden met eene bekende maat, een meter, een kilogramme, enz. vergelijken; want, ofschoon de reden dezer grootheden door de getallen a en b bekend is, blijven deze grootheden, daar wij niet weten, welke reden zij tot eenige aangenomene maat hebben, onbekend, maar is, bij voorbeeld, $A = cM$, of weer men, dat de grootheid A tot de maat M staat, als c tot 1; dan volgt uit de evenredigheden $A:B = a:b$ en $M:A = b:c$, volgens het bewezene,

$M:B = a:bc$; en nu is $B = \frac{bc}{a} M$, en de betrekking van de tweede grootheid B tot de maat M wordt dan insgelijks bekend. Hieruit volgt dan in het algemeen: dat, wanneer (zie tafeltje art. 722.) de reden van ééne der grootheden A, B, C, D, E, enz. tot eenige bekende maat M gegeven is, de reden van elke der anderen tot die maat insgelijks bekend zal zijn. (9)

726. 4 AANMERKING. Wanneer (zie tafeltje art. 722.) de reden van A:G gegeven is als een getal t tot u; dan zal men hebben:

$$acgil:bdfhkm = t:u$$

en dan is (art. 531.)

$$acgil \times u = bdfhkm \times t$$

en wanneer nu een dezer getallen onbekend is, (bij voorbeeld g) kan hetzelfde altijd gevonden worden; want deelt men deze vergelijking door $acgilu$ dan heeft men:

$$g = \frac{bdfhkm t}{acgilu} \quad (10)$$

(6) Hoe kan men in dit geval de eigenschap korter betoogen?

(7) Waarom is het voorgaande betoog omslagdiger?

(8) Wat merkt gij in de tweede plaats op?

(9) Wat merkt gij ten derden op?

(10) Wat zegt de vierde aanmerking?

(1) Welke eigenschap moet hier betoogd worden?

(2) Hoe bewijst men de evenredigheid $A:C = ac:bd$?

(3) Hoe bewijst men de evenredigheid $A:D = ace:bdf$?

(4) Hoe bewijst gij de volgende evenredigheden?

(5) Wat zegt de eerste aanmerking?

727. Men kan van deze betoogde stellingen en bijgevoegde aanmerkingen eene nuttige toepassing maken.

728. 1 VOORBEELD. Stellen wij: dat de meter tot den Amsterdamschen voet staat als het getal a tot het getal b , en de meter tot de Amsterdamsche el als c tot d ; in welk eene evenredigheid staat dan de Amsterdamsche el tot den Amsterdamschen voet?

Opl. De meter, de Amsterdamsche voet en de Amsterdamsche el zijn hier gelijkstachige grootheden, namelijk lengten: men stelle de gegeven grootheden aldus.

$$\begin{array}{lcl} \text{Meter} : \text{Amst. voet} & = & a : b \\ \text{Amst. el} : \text{Meter} & = & d : c \end{array}$$

en hieruit besluit men dan, volgens de eerste eigenschap, dat

$$\text{Amst. el} : \text{Amst. voet} = ad : bc$$

zal zijn. (11)

729. 2 VOORBEELD. Wanneer, door proeven bekend is, dat de meter tot den Parijschen voet staat als $a : b$; de Londonsche voet tot den Parijschen als $c : d$; de meter tot den Rhijnlandschen voet als $e : f$; de Rhijnlandsche tot den Amsterdamschen als $g : h$; hoe kan dan bepaald worden, welk eene reden elk dezer lengtematen tot elke andere hebbe?

Opl. Men stelle de gegeven evenredigheden, in deze rangorde, onder elkander.

$$\begin{array}{lcl} \text{Lond. voet} : \text{Par. voet} & = & c : d \\ \text{Par. voet} : \text{Meter} & = & b : a \\ \text{Meter} : \text{Rhijnl. voet} & = & e : f \\ \text{Rhijnl. voet} : \text{Amst. voet} & = & g : h \end{array}$$

dan zal hieruit volgen

$$\begin{array}{lcl} \text{Lond. voet} : \text{Meter} & = & bc : ad \\ \text{Lond. voet} : \text{Rhijnl. voet} & = & bce : adf \\ \text{Lond. voet} : \text{Amst. voet} & = & bceg : adfh \\ \text{Par. voet} : \text{Rhijnl. voet} & = & be : af \\ \text{Par. voet} : \text{Amst. voet} & = & beg : afh \\ \text{Meter} : \text{Amst. voet} & = & eg : fh \end{array}$$

en wanneer nu de getallen a, b, c, d, e, f, g en h gegeven zijn, zal men, door enkele vermenigvuldiging, de gevraagde evenredigheden in bekende getallen vinden. (12)

730. 3 VOORBEELD. De meter staat tot de Amsterdamsche el als 10 tot 6,87815, en tot de Haagsche el als 10 tot

6,91252, hoe veel Amsterdamsche ellen zal men dan voor 8925 Haagsche ellen kunnen hebben?

Opl. Men stelle

$$\begin{array}{lcl} \text{Meter} : \text{Amst. el} & = & 10 : 6,87815 \\ \text{Haags. el} : \text{Meter} & = & 6,91252 : 10 \end{array}$$

derhalve is nu ook

$$\text{Haags. el} : \text{Amst. el} = 6,91252 : 6,87815$$

Laat nu het begeerde getal Amsterdamsche ellen $= x$ zijn, dan zijn 8925 Haagsche ellen $= x$ Amst. ellen, en daarom (zie art. 520.) is

$$\text{Haags. el} : \text{Amst. el} = x : 8925$$

deze evenredigheid, met de naastvoorgaande vergeleken zijnde, heeft men in getallen

$$x : 8925 = 6,91252 : 6,87815$$

$$\text{en } x = \frac{8925 \times 6,91252}{6,87815} = 9008,36 \text{ (13)}$$

731. AANMERKING. Het opstellen van deze evenredigheden vereischt eenige oplettendheid: men behoort daarbij eene zekere orde in acht te nemen. Wanneer men de evenredigheden, in art. 722. gesteld, naauwkeurig met elkander vergelijkt, ziet men, dat, in elke volgende evenredigheid, de voorgaande term der eerste reden dezelfde grootheid is als de volgende term van de eerste reden der onmiddellijk voorgaande evenredigheid, en dat deze wet, van de eerste tot de laatste evenredigheid, bestendig blijft plaats hebben: zonder dit vereischte zouden de evenredigheden, welke uit de gestelde zijn opgemaakt, ophouden te bestaan; men moet derhalve, om soortgelijke vragen als de twee voorgaande, langs den aangewezenen weg te kunnen oplossen, zorgvuldig in acht nemen, dat men de evenredigheden, welke uit de gegevens der vraag volgen, ook in die orde onder elkander plaatze, of wel (dat hier op hetzelfde uitkomt,) zoodanig, dat elke volgende term van de eerste reden eener volgende evenredigheid dezelfde zij, als de voorgaande term van de eerste reden der voorgaande evenredigheid (gelijk zij in de twee bijgebrachte voorbeelden gesteld zijn). Waar men deze regelmatigheid niet in acht name zou men valsche besluiten maken, en wanneer men, uit de gegevens van het vraagstuk, niet zoodanige of geen genoegzaam aantal evenredigheden zou kunnen halen, welke men, op deze wijze, onder elkander konde plaatsen, zou zulks een bewijs zijn, dat 'er gegevens ontbreken, of dat het vraagstuk van dien aard is, dat het door de toepassing van de eigenschap van art. 722. niet kan worden opgelost. (14)

(13) Verklaar het derde voorbeeld?

(14) Wat moet, bij het opstellen van dergelijke werkstukken, in aanmerking genomen worden?

(11) Verklaar het eerste voorbeeld?

(12) Verklaar het tweede voorbeeld?

732. II STELLING.

Wanneer eenige gelijkfch. rige grootheden A, B, C, D, E, F, G gegeven zijn, en tusfchen dezelve zuik eene overeenkomst beftaat, dat $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m)$ zekere geheele of gebrokene getallen zijnde, $b \times A = a \times B$, $d \times B = c \times C$, enz. is, zoo als in het nevenftaande tafeltje bree-

der kan gezien worden, dan zal men uit deze geftelde gelijkheden tot de gelijkheden $bd \times A = ac \times C$, $bdf \times A = ace \times E$ enz. mogen beftuiten. (15)

Betoog. Want uit de geftelde gelijkheden volgen (art. 511.) de evenredigheden $A:B = a:b$; $B:C = c:d$; $C:D = e:f$ enz., en uit deze wederom (zie art. 722.) $A:C = ac:bd$; $A:D = ace:bdf$ enz., en uit deze evenredigheden (zie art. 510.) eindelijk de gelijkheden $bd \times A = a \times C$; $bdf \times A = ace \times E$, enz. (16)

733. 1 AANMERKING. Deze ftelling is met de eerste (in art. 722. voorgedragen) onmiddellijk verknocht; want uit de geftelde vergelijkingen volgen (zie art. 511.) $A:B = a:b$; $B:C = c:d$ enz., en verder $A:C = ac:bd$, enz. (17)

734. 2 AANMERKING. Alle de aanmerkingen op de eerste ftelling gemaakt, gelden derhalve ook voor de tweede: want

1^o. Men zal uit de gegevene vergelijkingen nog halen, $df \times B = ce \times D$; $dgh \times B = ceg \times E$; enz.

2^o. Wanneer men bij de vergelijking $bdfhkm \times A = acgil \times G$ nog voegt $p \times A = q \times G$, zal daaruit volgen: $bdfhkm \times q = acgil \times p$, en wanneer nu een dezer getallen onbekend is, zal het, op de wijze in art. 726. voorgelchreven, gevonden worden. (18)

735. Met behulp dezer tweede ftelling kan men eene groote menigte rekenkunftige vraagftukken oplofen.

736. 1 VRAAGSTUK. Indien 24 Amfterdamsche ponden zoo zwaar wegen als 25 pond te Antwerpen, en 100 pond te Antwerpen zoo zwaar zijn als 107 pond te Sevilien, hoe veel pond te Sevilien zullen dan met 3600 pond te Amfterdam eene gelijkje zwaarte hebben?

$$\begin{array}{l} b \times A = a \times B \\ d \times B = c \times C \\ f \times C = e \times D \\ h \times D = g \times E \\ k \times E = i \times F \\ m \times F = l \times G \end{array}$$

$$\begin{array}{l} bd \times A = ac \times C \\ bdf \times A = ace \times E \\ bdfh \times A = aceg \times E \\ bdfhk \times A = acegi \times F \\ bdfhkm \times A = acgil \times G \end{array}$$

Oplofing. Stel het begeerde getal ponden te Sevilien $= x$; dan hebben wij

$$x \text{ bij Sevil.} = 3600 \text{ bij Antf.}$$

$$24 \text{ bij Antf.} = 25 \text{ bij Antw.}$$

$$100 \text{ bij Antw.} = 107 \text{ bij Sevil.}$$

in alles derhalve drie vergelijkingen tusfchen drie grootheden, het Amfterdamsche, Antwerpifche en Sevillaanfche pond gewigt; daar nu deze vergelijkingen zoodanig onder elkander geplaatst zijn, als in de II STELLING art. 732 vereifcht wordt, zoo is het product der getallen in de eerste kolom gelijk aan het product der getallen in de tweede kolom, en men heeft derhalve:

$$24 \times 100 \times x = 3600 \times 25 \times 107$$

$$x = \frac{3600 \times 25 \times 107}{24 \times 100} = 4014\frac{1}{2} \text{ (19)}$$

737. 1 AANMERKING. Wanneer men de vergelijkingen, uit dit vraagftuk getrokken, aandachtig befchouwt, ziet men: dat zij zoodanig onder elkander geplaatst zijn, dat de grootheid in het achterfte lid van elke vergelijking dezelfde is, als die welke in het voorfte lid van de naaftvolgende vergelijking voorkomt; aldus ftaan in het achterfte lid van de eerste vergelijking Amfterdamsche ponden, en deze ftaan ook in het eerste lid van de tweede vergelijking; en, wanneer nu alle vergelijkingen, die uit de vraag volgen, behoorlijk opgefteeld zijn, bevat het voorfte lid der eerste vergelijking dezelfde grootheid als het achterfte lid der laaftte vergelijking; waar nu dit vereifchte vervuld is, zijn de vergelijkingen in genoegzaam getale gegeven; maar, wanneer de vergelijkingen, die uit de vraag volgen, in zulk eene orde niet onder elkander konden gebragt worden, zou daaruit volgen, of dat het vraagftuk langz dien weg niet opgelost zou kunnen worden, of dat 'er gegevene ontbreken, om het begeerde te bepalen. (20)

738. 2 AANMERKING. Men kan in de rangfchikking der vergelijkingen geheel willekeurig te werk gaan; mits dat, zoo als in de voorgaande aanmerking gezegd is, de grootheid in het tweede lid van elke vergelijking dezelfde is, als de grootheid, welke in het eerste lid van elke volgende vergelijking voorkomt, waardoor dan, blijaldien alle de vergelijkingen zijn uigefchreven, het tweede vereifchte, waarbij de grootheid in het voorfte lid der eerste vergelijking dezelfde is, als die, welke in het tweede lid der laaftte vergelijking voorkomt, altijd van zelve vervult wordt. (21) Ya zelfs kunnen de vergelijkingen worden omgezet; maar dan is de grootheid in elk voorfte lid eener vergelijking dezelfde als die, welke in het achterfte lid der naaftvolgende vergelijking voorkomt, terwijl de grootheid in het achterfte lid der eerste vergelijking aldan dezelfde is, als die, welke in het voorfte lid der laaftte vergelijking voorkomt. (22) Men kan derhalve de vergelijkingen van het voorgaande vraagftuk ook nog in dezer voegen onder elkander plantzen.

(15) Wat leert de tweede ftelling?

(16) Hoe wordt de tweede ftelling betoogd?

(17) Wat merkt gij in de eerste plaats aan?

(18) Wat is in de tweede plaats aan te merken?

(19) Verklaar de oplofing van het eerste vraagftuk?

(20) Wat merkt men in de eerste plaats op?

(21) Hoe moet men in het opftellen der vergelijkingen te werk gaan?

(22) Wat is derhalve het kenmerk, waaraan men weet dat de vergelijkingen behoorlijk onder elkander ftaan?

24 fl. <i>Amst.</i> ==	25 fl. <i>Antw.</i>	100 fl. <i>Amst.</i> ==	107 fl. <i>Sevil.</i>
100 fl. <i>Antw.</i> ==	107 fl. <i>Sevil.</i>	x fl. <i>Sevil.</i> ==	3600 fl. <i>Amst.</i>
x fl. <i>Sevil.</i> ==	3600 fl. <i>Amst.</i>	24 fl. <i>Amst.</i> ==	25 fl. <i>Antw.</i>
3600 fl. <i>Amst.</i> ==	x fl. <i>Sevil.</i>	25 fl. <i>Antw.</i> ==	24 fl. <i>Amst.</i>
25 fl. <i>Antw.</i> ==	24 fl. <i>Amst.</i>	107 fl. <i>Sevil.</i> ==	100 fl. <i>Antw.</i>
107 fl. <i>Sevil.</i> ==	100 fl. <i>Antw.</i>	3600 fl. <i>Amst.</i> ==	x fl. <i>Sevil.</i>
107 fl. <i>Sevil.</i> ==	100 fl. <i>Amst.</i>		
3600 fl. <i>Amst.</i> ==	x fl. <i>Sevil.</i>		
25 fl. <i>Antw.</i> ==	24 fl. <i>Amst.</i>		

berwelk het gemak aanbrengt, dat men, in het opstellen der gelijkheden, van die vergelijking, welke in het vraagstuk het eerste voorkomt, beginnen kan. (23)

759. 3 AANMERKING. De vergelijkingen, welke in de oplossing van het voorgaande vraagstuk voorkomen, zijn vergelijkingen, welke de betrekking van twee gelijkvloerige grootheden voorstellen: alzoo volgt uit 24 fl. *Amst.* == 25 fl. *Antwerpen* de evenredigheid

$$\text{Amst. pond} : \text{Antw. pond} = 25 : 24;$$

maar 'er kunnen, in deze soort van vraagstukken, nog andere gelijkheden voorkomen, die geene betrekking tusschen gelijkvloerige grootheden zijn, maar eene gelijkstelling van waarde tusschen twee geheel ongelijkvloerige grootheden, welke, van den eenen tot den anderen tijd, naar gelang der omstandigheden, veranderen, of afhangen van de waarde, welke men in de samenleving aan deze dingen hecht; en zulke gelijkheden moeten in de eersten zorgvuldig onderscheiden worden. Wanneer men zegt 24 Amsterdamse ponden zijn aan 25 Antwerpse ponden gelijk, dan stelt men zich twee gelijke gewigten, die even zwaar zijn, voor; maar wanneer men zegt *drie Amsterdamsche ponden kosten 7 gulden*, dan stelt men hier eene gelijkheid van waarde, en offchoon de grootheden zelve, als ongelijkvloerige niet kunnen vergeleken worden, kan men nogtans zeggen 3 fl. == 7 gl. Wanneer nu zulke waardij-vergelijkingen in het vraagstuk voorkomen, maken zij in de oplossingswijze geene verandering. (24)

740. 2 VRAAGSTUK. Wanneer 24 fl. te Amsterdam 200 zwaar zijn als 25 fl. te Antwerpen, en 100 fl. te Antwerpen 200 zwaar als 107 fl. te Sevilien; hoe veel zullen dan 3600 fl. te Amsterdam kosten, indien 100 fl. van die zelfde waar te Sevilien 55 gulden kost?

Men stelle de vergelijkingen, in dit vraagstuk voorkomende, aldus op:

x Guild.	==	3600 fl. <i>Amst.</i>
24 fl. <i>Amst.</i>	==	25 fl. <i>Antw.</i>
100 fl. <i>Antw.</i>	==	107 fl. <i>Sevil.</i>
100 fl. <i>Sevil.</i>	==	55 Guild.

(25) Wat volgt hier uit?

(26) Wat valt 'er ten aanzien dezer vergelijkingen op te merken?

dan volgt hier uit:

$$24 \times 100 \times 100 \times x = 3600 \times 25 \times 107 \times 55$$

$$x = \frac{3600 \times 25 \times 107 \times 55}{24 \times 100 \times 100} = 226\frac{1}{2} \text{ gl.}$$

en nu zijn in dit vraagstuk alle de vergelijkingen, behalve de laatste volstrekte gelijkheden van gelijkvloerige grootheden; maar de laatste stelt eene gelijkheid van waarde, welke van den eenen tot den anderen tijd veranderen kan. (25)

741. 3 VRAAGSTUK. Laten wij hetzelfde stellen, als in het voorgaande; maar vragen wij: hoe veel zullen 3600 fl. te Amsterdam moeten verkogt worden, om 10 ten 100 te winnen, indien 100 fl. te Sevilien 55 gl. ingekogt waard zijn?

In dit geval heeft men ééne vergelijking meer, te weten:

x Gl. uitgekogt	==	3600 fl. <i>Amst.</i>
24 fl. <i>Amst.</i>	==	55 fl. <i>Antw.</i>
100 fl. <i>Antw.</i>	==	107 fl. te <i>Sevil.</i>
100 fl. <i>Sevil.</i>	==	55 guld. ingekogt.
100 gl. ingek.	==	110 guld. uitgekogt.

en men zal nu hebben

$$x = \frac{3600 \times 25 \times 107 \times 55 \times 110}{24 \times 100 \times 100 \times 100} = 2426\frac{1}{2} \text{ gl. (26)}$$

742. 4 AANMERKING. Alle vraagstukken van dien aard kunnen door twee of meer regels van drieën worden opgelost. (27) Bij voorbeeld het eerste, door de twee volgende:

$$24 \text{ fl. } \text{Amst.} : 3600 \text{ fl. } \text{Amst.} = 25 \text{ fl. } \text{Antw.} : x \text{ fl. } \text{Antw.}$$

$$\text{komt } x = 3750 \text{ fl. } \text{Antw.}$$

$$100 \text{ fl. } \text{Antw.} : 3750 \text{ fl. } \text{Antw.} = 107 \text{ fl. } \text{Sevil.} : x \text{ fl. } \text{Sevil.}$$

$$\text{komt } x = 4014\frac{1}{2} \text{ fl. } \text{Sevilien. (28)}$$

en deze evenredigheden of Regels van Drieën zijn zoodanig aan elkander verbonden, dat, het geen men tot uitkomst in den eersten verkrijgt, de laatst bekende term in den tweeden of volgenden wordt. (29) Men noemt daarom den Regel, waardoor soortgelijke vraagstukken als de voorgaanden worden opgelost, *aandingschakelden Regel van Drieën*, of KETTING-REGEL, (30) en men volgt in dezen den volgenden

(25) Verklaar de oplossing van het tweede vraagstuk?

(26) Verklaar de oplossing van het derde vraagstuk?

(27) Kan men die soort van vraagstukken nog anders oplossen?

(28) Geef hier van een voorbeeld?

(29) Hoe hangen deze Regels van Drieën van elkander af?

(30) Wat naam geeft men aan den Regel, waardoor deze soort van vragen worden opgelost?

743. REGEL. 1°. Onderzoekten men, waar naar gevraagd wordt, dit getal onbekend zijnde, noemt men x : en dit onbekende ge al stelt men vooraan.

2°. Daarna herleest men de vraag, en vraagt aan zich zelve, welk getal moet aan dit onbekende gelijk zijn? dit getal stelt men achter het eerste met het teeken = tusſchen beiden.

3°. Alle andere gelijkheden, welke in de vraag voorkomen, moeten onder de eerste zoodanig geſield worden, dat het eerste lid van elke volgende gelijkheid gelijknamig zij met het tweede lid van de voorgaande, hetwelk men altijd uit de aandachtige lezing der vraag vinden kan.

4°. Indien men alle de gelijkheden, die in de vraag voorkomen, alzoo onder elkander geſchreven heeft, dan heeft men twee kolommen van getallen, in de voorſte van welken het onbekende getal ſtaat, en in welke het laaſte lid van de tweede kolom gelijknamig is met het onbekende eerste lid van de eerste kolom.

5°. Indien het gebeurt, dat het laaſte lid van de tweede kolom niet gelijknamig is met het eerste lid van de eerste kolom, heeft men of eenen miſlag in het opſtellen van de gelijkheden begaan, of alle gelijkheden niet opgeteekend, of 'er is in de vraag niet alles gegeven, dat tot het bepalen der onbekende grootheid gevorderd wordt. (31)

744. Somtijds moet men de gelijkheden, die ontbreken, uit bekende betrekkingen aanvullen. Bij voorbeeld, wanneer gevraagd wordt: hoe veel derthiend'halven kan men hebben voor 173 dukaten van 105 ſtuiters? ſtelt men:

$$\begin{array}{l} \text{Derthiendh. } x = 173 \text{ Dukaten} \\ \text{Dukaat } 1 = 105 \text{ Stuitv.} \\ \text{Stuitv. } 12\frac{1}{2} = 1 \text{ Derthiend'halv. (32)} \end{array}$$

745. Wanneer de gelijkheden uit de vraag zijn opgeſield, volgt men, om het onbekende te vinden, dezen

REGEL. 1°. Eerst moet men, indien 'er gebrokene of gemengde getallen zijn, die getallen met de noemers van de daar bij ſtaande breuken vermenigvuldigen, en den noemer van die breuk als factor in de andere kolom ſtellen, om de gelijkheid te bewaren.

2°. Men moet, zoo lang het mogelijk zij, eenig getal van

- (31) Welke is de regel om eenen ketting-regel op te ſtellen?
(32) Wat moet men ſomtijds in aanmerking nemen?

de eene kolom tegen eenig getal van de andere kolom verkleinen.

3°. Eindelijk moet men het product van de termen of factoren der achterſte kolom door het product van die van de voorſte deelen. (33)

746. Het vraagſtuk van art. 736 wordt dan aldus bewerkt:

$$\begin{array}{rcl} \text{Sev. } x & = & 3600 \text{ @ Amſt. } 150 \\ \text{Amſt. } 24 & = & 25 \text{ @ Antw. } 75 \\ \text{Antw. } 100 & = & 107 \text{ @ Sev.} \\ & & 4 \quad 75 \\ & & 2 \quad 535 \\ & & \frac{1749}{2} \left\{ 4012\frac{1}{2} \text{ @} = x. (34) \right. \end{array}$$

747. 4 VRAAGSTUK. Een koopman ontvangt uit Engeland een zeker aantal ſtukken Linnen, die hem aldaar 42 £ ſterlings de el koſten. Indien nu 12 ellen te Amſterdam 10 vlaamsche ellen, 7 vlaamsche ellen 5 engelsche ellen waardig zijn, en de koers van de wiſſel is 36 £ 4 s vlaamsch, vraagt men, hoe veel ſtuiters eene el van dat Linnen te Amſterdam koſten zal?

$$\begin{array}{rcl} \text{ſtuitv. } x & = & 1 \text{ el te Amſterd.} \\ 2 \text{ el te Amſt. } 12 & = & 10 \text{ vlaamsche ellen } 5 \\ \text{vlaamsche el } 7 & = & 5 \text{ engelsche ellen} \\ \text{engelsche el } 1 & = & 42 \text{ £ ſterling } 0 \\ 7 \text{ £ ſterl. } 12 & = & 1 \text{ £ ſterling} \\ 4 \text{ £ ſterl. } 20 & = & 36\frac{1}{2} \text{ £ vlaamsch } 109 \\ 5 \text{ vlaamsch } 1 & = & 0 \text{ ſtuiters} \\ & & 3 \quad 109 \\ & & 2 \quad 5 \\ & & 4 \quad \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 24x & = & 545 \\ x & = & \frac{545}{24} = 22\frac{17}{24} \text{ ſtuitv.} \end{array}$$

Verklaring. Men vermenigvuldigt $36\frac{1}{2}$ met 3, komt in plaats 109, en men ſtelt de 3, waarmede een lid van de tweede kolom is vermenigvuldigd geworden, ook als factor in de eerste kolom. Nu verkleint men

- (33) Welke is de regel ter oplosſing?
(34) Helper dien regel door een voorbeeld op?

eerst de 12, het tweede lid in de eerste kolom, tegen de 6, het laatste lid in de tweede kolom; de 7 het derde lid in de eerste kolom tegen de 42 het vierde lid in de tweede kolom; de 6, welke men door deze laatste verkleining verkrijgt, tegen de 12, het vijfde lid in de eerste kolom; de 2, welke daaruit voortkomt, tegen 10, het tweede lid in de tweede kolom; de 5, welke daaruit voortkomt, tegen de 20, het zesde lid in de eerste kolom; dan houdt men slechts in de eerste kolom de factoren x , 2, 4 en 3, en in de tweede kolom de factoren 5 en 109, en men vindt $x = 22\frac{1}{2}$ stuivers (35)

MEER VOORBEELDEN TOT OEFENING.

1 VOORBEELD. Hoe veel acht-en-twintigen zal men ontvangen voor 713 dukaten?

2 VOORBEELD. Hoe veel dukaten zal men hebben voor 3486 Fransche kroonen, in de veronderstelling dat elke Fransche kroon 28 stuiv. waardig is?

3 VOORBEELD. Hoe veel zeshalven zal iemand ontvangen voor 360 gouds ridders, de ridder gerekend tegen 14 guldens?

4 VOORBEELD. Iemand heeft voor 36 guldens een stuk Linnen gekocht, dat 50 ellen lang is: voor hoe veel zal hij de el wederom moeten uitverkoopen, om 10 ten 100 te winnen?

uitverk. guld. $x = 1$ ell. ingekogt
ell. ingek. 50 = 36 gl. ingekogt
gl. ingek. 100 = 110 gl. uitverkogt.

5 VOORBEELD. Een koopman heeft een stuk Laken, hetwelk 230 guldens kost, en lang bevonden 46 ellen: hoe veel zal hij de el moeten verkoopen, om 20 ten 100 te winnen?

6 VOORBEELD. Indien 57 fl te Bamberg even zoo zwaar zijn als 56 fl te Amsterdam, op hoe veel zullen dan 171 Bambergische fl te slaan komen, bijaldien 21 fl Amsterdamsch gewigt 43 gl. kosten?

7 VOORBEELD. Wat kost een el Laken te London, als een Amsterdamsche el 4 gl. 19 stuiv. kost, en 100 Amsterdamsche ellen zoo lang zijn als 99 ellen te London, als mede een pond sterlings te Amsterdam 86 fl 8 q waardig is?

8 VOORBEELD. Indien 100 fl te Geneve zoo zwaar wegen als 108 fl te Lion, en 100 fl te Lion kosten 30 L 12 fl 8 q vlaamsch; hoe veel kosten dan 100 fl te Geneve?

9 VOORBEELD. Indien 100 fl te Amsterdam zoo zwaar wegen als 105 fl te Antwerpen, en 960 fl te Antwerpen kosten 4 L 10 fl 6 q vlaamsch, hoe veel kosten dan 240 fl te Amsterdam?

10 VOORBEELD. Indien 100 fl te Amsterdam zoo zwaar is als 109 fl te London, en 6 schellingen sterlings aldaar 3 gl. 6 stuiv. waard zijn; op hoe veel komt dan 100 fl te Amsterdam, indien 336 fl te London kost 11 L 17 fl 9 q sterlings?

(35) Verklaar het tweede voorbeeld?

VIII HOOFDDEEL. Verdere toepassing van het voorgaande.

XLVI LES. Over de Percent-Rekening.

748. De Percent-Rekening bestaat in het berekenen van de Interesfen der uitgezette kapitalen, de reële waarde der publieke Effecten, premien van Asfurantiën, courtage van Makelaars, kortingen voor prompte of gereede betaling. (1) Offchoon nu dit alles door het voorgaande genoegzaam kan gevonden worden, heeft elk dezer artikelen zijne eigene wijze van berekenen, welke de gemakkelijkste in het gebruik is, of als zoodanig doorgaat, en daarom behoort gekend te worden. (2)

749. INTEREST-REKENING. Interesfen zijn, in het algemeen, de vruchten of inkomsten van iemands kapitaal of geldmiddelen. De interest wordt ten honderd, in het jaar, fontijds in de maand, berekend; en is veranderlijk naar den overvloed of de schaarscheid van het geld. (3) Bij het berekenen van den interest komt in aanmerking: 1°. het kapitaal; 2°. den tijd; 3°. het percent, dat is, hoe veel ten honderd in het jaar, voor het gebruik van het geld, betaald wordt. (4)

750. I VOORBEELD. Hoe veel is de interest van 3716 gl. 10 st. 8 penn. tegen $3\frac{1}{2}$ percent in 't jaar?

Verklaring. Daar men eigenlijk stellen moet: 100 kap. : 3716 gl. 10 st. 8 pn. = $3\frac{1}{2}$ winst : x winst, blijkt hier uit: dat men, om de vierde evenredige te vinden, het gegeven kapitaal met $3\frac{1}{2}$ moet vermenigvuldigen en het product door 100 deelen. Raadpl. art. 204 en 221. (5)

3716 gl. 10 st. 8 pn.

3 $\frac{1}{2}$

11149 : 11 : 8

1858 : 5 : 4

gl. 130 | 07 : 16 : 12

20

fl. 156

16

pn. 9108

- (1) In welke voornaamste dingen komt de Percent-Rekening voor?
(2) Kan dit alles, door het gene hier boven geleerd is, niet reeds worden uitgevoerd?
(3) Wat is de Interest-Rekening?
(4) Wat komt bij de Interest-Rekening in aanmerking?
(5) Verklaar het eerste voorbeeld?

751. In de nieuwe Muntspecien gaat die berekening gemakkelijker. Bij voorbeeld: *Hoe veel is de interest van 3819 Francs 35 centimes tegen 3½ percent?*

Verklaring. Men multiplceert het kapitaal 3819.35 Francs met 3½, en men deelt het product door 100, dan verkrijgt men, voor den gevraagden interest, 163 Francs 58 centimes, iets te veel. (6)

3819,35 Fr.
3½
11458,05
100
114,5805
114,5805
Fr. 163,58

752. AANMERKING. De percenten worden in geheel, of in geheelen en een gebroken daar en boven berekend; doch deze gebroken zijn altijd halven, quarteren, achtstent, zestienden, twee-en-dertigsten, zelden vier-en-zestigsten. (7) *Men vermenigvuldigt, in den gewonen stijl van rekenen, doorgaans het gegeven kapitaal met het geheele getal van het percent, en telt bij het product zoo veel deelen van het kapitaal, als het gebroken, bij het percent behoorende, aanwijst.* (8) Aldus neemt men:

Voor een half de helft van het kapitaal.
Voor een vierde een vierde van het kapitaal.
Voor drie vierde, eerst de helft, en dan nog een vierde van het kapitaal.
Voor een achtfste een achtfste van het kapitaal.
Voor drie-achtfste, eerst twee-achtfste of een-vierde en dan nog de helft van een vierde, dat is een-achtfste van het kapitaal.
Voor vijf-achtfste, een half en een vierde van een half van het kapitaal.
Voor zeven-achtfste, een half, de helft van een half; dat is, een vierde en de helft van een vierde; dat is, een achtfste van het kapitaal.
Voor een zestiende neemt men ½ van ½.
Voor drie-zestiende neemt men ½ van ½ van ½.
Voor vijf-zestiende neemt men ½ van ½ van ½.
Voor zeven-zestiende neemt men ½ van ½ van ½ van ½; dat is ¼ met de ¾ van ¼; dat is ⅛ en de ⅛ van ⅛.
Voor negen-zestiende neemt men, ⅛ van ⅛; dat is ⅛ met ⅛ van ⅛.
Voor elf-zestiende neemt men, ⅛ van ⅛ van ⅛; dat is ⅛ + ⅛ van ⅛ + ⅛ van ⅛.
Voor dertien-zestiende neemt men, ⅛ van ⅛ van ⅛ van ⅛; dat is ⅛ + ⅛ van ⅛ + ⅛ van ⅛ + ⅛ van ⅛.
Voor vijftien-zestiende neemt men ⅛ van ⅛ van ⅛ van ⅛ van ⅛; dat is ⅛ + ⅛ van ⅛ (of ⅛) + ⅛ van ⅛ (of ⅛) + ⅛ van ⅛. (9)

- (6) Is die berekening in francs en centimes niet gemakkelijker?
(7) Hoe worden gewoonlijk de percenten gerekend?
(8) Welke is doorgaans de gebruikelijke regel?
(9) Hoe gaat men derhalve met de gebroken te werk?

En hieruit zal men gemakkelijk vinden hoe ⅓, ⅔, ⅕, enz. ⅔, ⅔, enz. moeten verdeeld worden.

VOORBEELDEN.

Bereken de interest van de volgende geldsummen:

a. 1768 gl. 17 st. 8 pn. tegen 4½ pCt.	h. 376 fr. 39 c. tegen 7½ pCt.
b. 7093 gl. 1 st. 12 pn. — 5½ —	i. 9191.17 — 3½ —
c. 13086 gl. 15 st. — 6½ —	k. 789.39 — 4½ —
d. 7873 gl. 18 st. 4 pn. — 4½ —	l. 8718.10 — 5½ —
e. 3375 gl. 19 st. — 5 —	m. 7812.35 — 4½ —
f. 9608 gl. 17 st. 8 pn. — 3½ —	n. 8.63.40 — 5½ —
g. 1796 gl. 10 st. — 4½ —	p. 7387.96 — 4½ —

753. B. Wanneer de tijd bij het kapitaal in aanmerking komt, dan kan men, gelijk in art 710. geleerd is, den vervallen interest door den zamengestelden regel van drieën vinden; doch, in den gewonen stijl van werken, vergroot men het gegeven kapitaal in reden van den gegebenen tijd; dat is, men vermenigvuldigt het gegeven kapitaal met het geheel, gebroken of gemengd getal jaren, en men berekent, als in art. 750, den interest van het kapitaal, dat men op deze wijze verkregen heeft. (10) De reden hiervan is klaar; want een kapitaal a brengt in n jaren (n moge een geheel, gebroken of gemengd getal zijn,) zoo veel op, als het kapitaal $n \times a$ in één jaar. (11)

VOORBEELDEN. *Hoe veel is de interest 1° van 3763 gl. 10 st. 12 penn. in 6 jaar 5 maanden, tegen 4½ percent, en 2° van 4793 francs 76 cent. in 7 jaar 4 maand. tegen 5½ percent?*

3763 gl. 10 st. 12 pn.	6 jaar 5 m	Francs.
		4793.76
22581 4 8 opst.		7 jaar 4 m.
1254 10 4 opst.		33556.32 ops.
313 12 9 opst.		1597.92 ops.
(A) 24149 7 5 tegen 4½ pCt.		B. 35154.24 tegen 5½ pCt.
96597 9 4 opst.		175771.20
6037 6 13 opst.		8 17577.17
3018 13 6 opst.		4 8788.585
gl. 1056153 9 7		1 2197.147
st. 10 67		2043106.601
pn. 11 11		2043 Fr. 17 cent.

- (10) Hoe werkt men in den gewonen stijl, wanneer de tijd in aanmerking komt?
(11) Hoe bewijst gij dien regel?

VERKLARING. In het eerste voorbeeld vermenigvuldigt men 3763 *gl.* 10 *st.* 12 *pn.* met 6. en telt bij het product, eerst voor 4 maanden, welke één-derde jaar maken. één-derde van het gegeven kapitaal, en dan nog, voor ééne maand, die één-vierde van 4 maanden zijn, een-vierde van een derde van het kapitaal, dat is een-vierde van 1254 *gl.* 10 *st.* 4 *pn.* Deze som, die in (A) staat, is $6\frac{1}{2}$ maal het gegeven kapitaal; hiervan bereken ik den interest tegen $4\frac{1}{2}$ pCt., gelijk boven geleerd is, en vind voor den interest 105 *gl.* 10 *st.* 11 *penn.* (12) De leerling geve de verklaring van het tweede voorbeeld.

754. I AANMERKING. Bij het nemen van de deelen der kapitalen in de vermenigvuldiging van dezelve met breuken van de tijds éénheden, of van de procenten, verwaarloost men de gebrokenen der penningen, of van de Hollandsche en de tiende deelen der centimes in de Fransche muntspecien; want, daar men altijd de producten door 100 deelen moet, en de interesten niet verder dan tot penningen of centimes kunnen betaald worden, zullen die verwaarloosde gedeelten der penningen of centimes, in den loop der bewerking, geenen invloed op de nauwkeurigheid der uitkomst kunnen hebben. (13)

755. II AANMERKING. Men kan de berekening der interesten, voor eenen gegebenen tijd, door de orde der bewerking om te keeren, nog anders inrigten. Men berekent eerst den interest van het gegeven kapitaal voor één jaar, en vermenigvuldigt de uitkomst met den tijd (14) Of men berekent, hoe veel de interest ten honderd in den gegebenen tijd maakt, door te zeggen (in het eerste voorbeeld) 12 m. : 6 j. 5 m. = $4\frac{1}{2}$: x en in het tweede 1 j. : $7\frac{1}{2}$ j. = $5\frac{1}{2}$: x. Men vindt, in het eerste geval, x = 28 $\frac{1}{2}$, en in het tweede x = 42 $\frac{1}{2}$. In het eerste geval, is dus 28 $\frac{1}{2}$, en in het tweede 42 $\frac{1}{2}$ ten honderd gewonnen: men berekene dan, in het eerste geval, de interest van het gegeven kapitaal, tegen 28 $\frac{1}{2}$, en in het tweede geval, tegen 42 $\frac{1}{2}$ percent, en men zal dezelfde uitkomst, als boven, moeten verkrijgen. (15) De leerling berekene de twee opgegevene voorbeelden, naar deze twee voorgeschrevene wijzen van werken, welke, naar de omstandigheden, die ter beoordeeling des berekenaars staan, hare bijzondere gemakken en voordeelen kunnen hebben.

756. III AANMERKING. In het vermenigvuldigen van het gegeven kapitaal met de deelen der tijds éénheden moet men verder opmerken: dat

- 1 maand, is $\frac{1}{12}$ jaar.
- 2 maanden, is $\frac{1}{6}$ jaar.
- 3 maanden, is $\frac{1}{4}$ jaar.
- 4 maanden, is $\frac{1}{3}$ jaar.
- 5 maanden, is $\frac{1}{2}$ jaar + $\frac{1}{6}$ jaar of $\frac{2}{3}$ jaar + $\frac{1}{6}$ van $\frac{1}{3}$ jaar.

(12) Verklaar het eerste voorbeeld?

(13) Wat kan men ter bekorting in aanmerking nemen?

(14) Kan men de berekening der interesten nog anders inrigten?

(15) Hoe kan dit nog anders uitgevoerd worden?

6 maanden is $\frac{1}{2}$ jaar.

7 maanden is $\frac{1}{2}$ jaar + $\frac{1}{6}$ van een $\frac{1}{2}$ jaar of $\frac{2}{3}$ jaar + $\frac{1}{6}$ jaar.

8 maanden is $\frac{2}{3}$ jaar + $\frac{1}{6}$ van een $\frac{1}{2}$ jaar.

9 maanden is $\frac{3}{4}$ jaar + $\frac{1}{4}$ jaar.

10 maanden is $\frac{5}{6}$ jaar + $\frac{1}{6}$ jaar.

11 maanden is $\frac{11}{12}$ jaar + $\frac{1}{12}$ jaar + $\frac{1}{12}$ jaar.

De deelen der maanden rekent men bij $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$ enz. of bij dagen, de maand tot 30 dagen gerekend, en daar 2, 3, 5, 6, 10 en 15 evenmatige deelen van 30 zijn, zal men gemakkelijk de verdeling der enkele dagen kunnen vinden. (16)

VOORBEELDEN. Te berekenen de interest van de volgende sommen.

- a) van 1733 *gl.* 10 *st.* in 5 jaar 7 m., tegen $4\frac{1}{2}$ percent in 't jaar?
- b) van 5875 *gl.* 11 *st.* 8 *penn.* in 3 jaar 9 m., tegen $5\frac{1}{2}$ percent 's jaars?
- c) van 7662 *gl.* 10 *st.* 4 *penn.* in 5 jaar 11 m., tegen 6 percent 's jaars?
- d) van 1271 *gl.* 10 *st.* in 7 jaar 3 m., tegen $4\frac{1}{2}$ percent 's jaars?
- e) van 7800 *gl.* in 5 jaar 5 maand, tegen $4\frac{1}{2}$ percent 's jaars?
- f) van 1796 *gl.* 11 *st.* 4 *penn.* in 4 jaar 7 m. 17 dagen, tegen $4\frac{1}{2}$ percent 's jaars?
- g) van 317 *gl.* 17 *st.* 12 *penn.* in $7\frac{1}{2}$ maand, tegen $4\frac{1}{2}$ percent 's jaars?
- h) van 719 *gl.* 10 *st.* in 7 maand. 11 dagen, tegen $5\frac{1}{2}$ percent 's jaars?
- i) van 719,13 Francs in $7\frac{1}{2}$ jaar, tegen $5\frac{1}{2}$ percent 's jaars?
- k) van 4096,30 Francs in 9 jaar 4 maand., tegen $3\frac{1}{2}$ percent 's jaars?
- l) van 4971,72 Francs in 5 jaar $7\frac{1}{2}$ m., tegen $4\frac{1}{2}$ percent 's jaars?
- m) van 5097,25 Francs in 3 jaar $9\frac{1}{2}$ maand, tegen $4\frac{1}{2}$ percent 's jaars?
- n) van 1796,29 Francs in $7\frac{1}{2}$ maand, tegen $5\frac{1}{2}$ percent 's jaars?
- o) van 179,32 Francs in 11 maand. 17 dagen, tegen $5\frac{1}{2}$ percent 's jaars?
- p) van 3000 Francs in 1 jaar 7 maand. 25 dagen, tegen $3\frac{1}{2}$ percent 's jaars?

757. C. Kasfiers, Solliciteurs en andere personen berekenen de interesten van hunne voorgefchotene gelden, doorgaans, bij de maand en niet bij het jaar: gewoonlijk rekenen zij $\frac{1}{2}$ percent 's maands. Wij zullen, tot oefening, dit nogtans laten verschillen. (17)

VOORBEELD. Hoe veel is de interest 1°. van 637 *gl.* 10 *st.* in 7 maanden 10 dagen, tegen $\frac{1}{2}$ percent 's maands? 2°. van 716 francs 39 cent. in 8 maand. 13 dagen, tegen $\frac{1}{2}$ percent 's maands?

(16) Hoe neemt men de maanden in deelen van het jaar?

(17) Hoe worden anders de procenten gerekend?

637 gl. 10 st. 0 penn.			
7 m. 10 d.			
10 d.	4462	10	0
	212	10	0
A.	4675	0	0
$\frac{1}{2}$ gl. 25	37	10	0
	10		
st. 7	50		
	16		
penn. 8	00		
komt interest			
23 gl. 7 st. 8 penn.			

716,39 Francs	
8 m 13 d.	
	5731,12
10	238,797
3	71,639
B	6041,556
4	1510,389
2	755,194
1	377,597
	2643,180
komt 26 Fr. 43 cent.	

VERKLARING. Men vermenigvuldigt in het eerste voorbeeld het kapitaal 637 gl. 10 st. met 7, en telt bij het product voor de 10 dagen, welke $\frac{1}{2}$ maand maken, één-derde van het kapitaal; de som in A, is het kapitaal, dat in ééne maand zoo veel wint, als het gegebene kapitaal in 7 maanden en 10 dagen. Dit kapitaal in A, vermenigvuldigt men met het percent 's maands, dat is met $\frac{1}{2}$, en deelt het product door 100. In het tweede voorbeeld, multiplieert men het gegebene kapitaal 716,39 Francs met den tijd van 8 maanden 13 dagen; nemende voor 13 dagen 10 dag. + 3 dag., dat is $\frac{1}{2}$ maand + $\frac{1}{10}$ maand: het product staat in B; dit kapitaal zal nu in ééne maand zoo veel interest geven, als het gegebene in 8 m. 13 dag. Men multiplieert hetzelfde daarom met $\frac{1}{2}$; dat is, men telt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ van $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$ van $\frac{1}{2}$ bij elkander, en deelt de som door 100. (18)

VOORBEELDEN. Bereken de interest van

- 816 gl. 11 st. in 11 maand. 15 dagen, tegen $\frac{1}{2}$ percent 's maands?
- van 1736 gl. 11 st. in 7 maand. 11 dag., tegen $\frac{7}{10}$ percent 's maands?
- van 3817 gl. 11 st. 8 penn. in 13 maand. 22 dag., tegen $\frac{2}{5}$ percent 's maands?
- van 1796 Francs 39 cent. in 5 maand. 13 dag., tegen $\frac{3}{5}$ percent 's maands?
- van 3817 Francs in 15 m. 28 dag., tegen $\frac{3}{2}$ percent 's maands?

758. INTEREST VAN INTEREST REKENING. Wanneer een kapitaal op interest belegd is, om, na verloop, het zij van elk jaar, het zij van elke maand, de interest bij de hoofdsom te voegen, en deze vermeerderde hoofdsom in het volgend jaar tegen denzelfden interest te doen winnen, dan wordt dit kapitaal gezegd op interest van interest te staan. (19)

VOORBEELD. Stel dat een kapitaal van 10000 gl. tegen 5 percent 's jaars op interest van interest gefteld wordt, dan zal men redeneren als

- Verklaar die wijze van rekenen door een voorbeeld?
- Wat verstaat men door interest van interest?

volgt: 100 kap. geven, na verloop van één jaar, aan beloop van kapitaal en interest 105, hoe veel dan 10000 gl? of

$$100 : 10000 = 105 : x$$

en men vindt $x = 10500$ gl. Deze som van 10500 gl. wordt, in den loop van het tweede jaar, als een winnend kapitaal aangemerkt, en men stelt, om het beloop van kapitaal en interest, op het einde van het tweede, of het begin van het derde jaar, te bepalen,

$$100 : 10500 = 105 : x$$

en dan vindt men $x = 11025$ gl., en deze som wordt, in het derde jaar, op nieuw als een winnend kapitaal aangemerkt. Op deze wijze voortgaande, zal men het beloop van kapitaal en interest, op het einde van een gegeven aantal jaren, vinden, en bij gevolg even zoo veel regels van driën moeten mitrekenen, als 'er jaren gegeven zijn. (20) Deze berekening kan nu wel eenigzins bekort worden; doch deze bekortingen halen in geenen deele bij het gebruik der Logarithmen, waarom wij dit onderwerp in het laatste hoofddeel hervatten zullen.

759 RABAT-REKENING bestaat in het bepalen van de contante waarde, waarmede men eene som, welke men, na verloop van eenen gegebenen of bepaalden tijd schuldig is, te betalen, dadelijk afdoet, mits kortende een zeker percent in het jaar. (21)

Bij voorbeeld, ik ben aan A schuldig 2000 guld., te betalen over 15 maanden, zoo ik deze som dadelijk afdoe, dan sta ik aan A eene som af, waarmede ik in dien tijd voordeelen zou kunnen doen, en welke voordeelen nu aan A vervallen zullen; om derhalve niet tot mijne schade te werk te gaan, moet ik aan A zoo veel betalen, dat die som, tot den overreangekomenen interest berekend, na verloop van den tijd, op het einde van welken ik schuldig was te betalen, aan interest en kapitaal, (hetwelk hier de som is, die ik contant betaal,) de verschuldigde som opbrengt, dan, in 12 maanden bereken ik aan interest 5 percent, hoe veel dan in 15 maanden, dat is

$$12 : 15 = 5 : x$$

en dan is $x = 6\frac{1}{4}$ pCent in 15 maanden. Nu zeg ik: om, na verloop van 15 maanden, 106 $\frac{1}{4}$ gulden aan kapitaal en interest te ontvangen, moet ik 100 gl. kapitaal op interest stellen: hoe veel moet ik dan op interest stellen, om na dezelfde 15 maanden aan kapitaal en interest op te brengen 2000 gl.? dat is: ik stel,

$$106\frac{1}{4} : 2000 = 100 : x$$

en ik vindt $x = 188\frac{1}{2}$ gl. 7 st. 0 $\frac{1}{2}$ penn., zijnde de contante som, waarmede ik mijne over 15 maanden verschuldigde 2000 gl. kan afdoen. (22)

- Helder dit door een voorbeeld?
- Wat verstaat men door de rabat rekening?
- Helder dit door een voorbeeld?

760. Wanneer ik de korting afzonderlijk verkies te vinden, dan stel ik

$$106\frac{1}{2} : 2000 = 6\frac{1}{2} : x$$

en ik vind $x = 117$ gl. 12 st. 15 $\frac{1}{2}$ penn, de korting, welke, van 2000 afgetrokken, de contante som geeft. (23)

MEER VOORBEELDEN.

Hoe veel is het rabas van

- 7069 gl. 10 st. in 7 $\frac{1}{2}$ maand $\hat{=}$ 5 $\frac{1}{2}$ pCt. 'sjaars?
- 8092 gl. 17 st. 8 pn. in 16 maanden $\hat{=}$ 5 $\frac{1}{2}$ pCt. 'sjaars?
- en van 3875 franc. 75 cent. in 21 maanden $\hat{=}$ 5 $\frac{1}{2}$ pCt. 'sjaars?

761. De KORTING VOOR PROMPTE BETALING moet, als van eene geheel andere natuur zijnde, met de Rabat-Rekening niet verward worden. Korting voor prompte betaling is, of bij den slijf van sommige koopen, of, bij onderlinge overeenkomsten in gebruik, en bestaat daarin, dat men voor elke 100 gl., die men betalen moet, éenen gulden, of zoo veel als men bedongen heeft, kort. (24)

VOORBEELDEN

- 1 fl witte candij kost 19 fl , hoe veel 3176 fl af 2 pCt.?
- 1 fl soetlic kost 19 $\frac{1}{2}$ fl banco, hoe veel 317 fl af 1 pCt.?
- Twee balen koffijbonen, wegende n°. 1. bruto 438 fl , n°. 2. h-win 269 fl , af tara voor beide balen 23 fl , worden verkocht tot 26 $\frac{1}{2}$ fl . het pond, met 1 pCt. korting, hoe veel bedraagt dit alles?
- Iemand verkoopt 8 balen cabosse zijde, wegende bruto 1360 fl , tara 1 $\frac{1}{2}$ fl voor elke bal tegen 27 fl 10 d het fl netto met 1 pCt. korting?
- Hoe veel is het beloop van 2 kisten thee kost, wegende bruto 903 fl af tara 16 $\frac{1}{2}$ fl en uitslag 5 fl per kist tegen 38 $\frac{1}{2}$ fl . het fl met éen pCt. korting?
- 20 vaten Bloscovische talk, wegende bruto 49875 fl tara 16 pCt., worden verkocht tegen 14 $\frac{1}{2}$ gl . de 100 fl met korting van 1 pCt. en nog 1 perCt.; hoe veel zal dit bedragen?

762. Tot de Percent-Rekening behoort ook de COURTAGIE van Makelaars; de PROVISIE van Commisfarijen en Correspondenten; het SALARIS van Administrateurs; doch bij dezen komt geen tijd in aanmerking. (25) De volgende voorbeelden zullen een denkbeeld van deze in zich zelve zeer ligte zaak geven.

(23) Hoe gaat men te werk, wanneer men de korting afzonderlijk wil vinden?

(24) Wat is korting voor prompte betaling?

(25) Wat verstaat men door courtage, provenu, enz. en hoe wordt de-zelve berekend?

a) Een Makelaar heeft voor zijn Principaal ingekocht goederen ten bedrage van 1763 gl. 10 stuiv., hoe veel bedraagt zijne courtage, gerekend tot $\frac{1}{2}$ pCt.?

b) Drie Executeurs rekening en verantwoording van eene nalatenschap gedaan hebbende, blijkt het zuiver beloop van dezelve te zijn 56173 gl 16 stuivers, hoe veel bedraagt elks salaris, indien zij gezamenlijk 5 pCt. voor de gedane moeite genieten?

763. Tot de Percent-Rekening behoort ook het berekenen van de reële waarde en provenuen der publieke Effecten (26)

VOORBEELD. Iemand heeft 25 stuks Hollandsche effecten of obligatiën, elk groot 1000 gl., gekocht, hcs stuk tegen 25 $\frac{1}{2}$ pCt., rentende tegen 5 $\frac{1}{2}$ pCt. getierceerde nominale waarde, men vraagt: hoe veel de reële waarde hem aan interest ten 100 in 't jaar zal opbrengen?

Oplossing. Wanneer men zegt, dat eene obligatie, groot 1000 vuldens, tegen 25 $\frac{1}{2}$ pCt. zijn ingekocht, betekent zulks, dat men voor elke 100 gulden nominale waarde, slechts 25 $\frac{1}{2}$ guld. reële geldwaarde betaalt, elke obligatie is dus in reële waarde waard 250 gl. en 25 stuks 6250 gl. Inruschen is de nominale waarde $25 \times 1000 = 25000$ gl. en deze nominale waarde geeft tegen 5 $\frac{1}{2}$ pCt. rente, en daarom stelt men $100 : 2500 = 5\frac{1}{2} : x$, men vindt $x = 1375$ gl. doch daar de interesten getierceerd zijn, geniet hij slechts $\frac{3}{4}$ van 1375, dat is 458 $\frac{3}{4}$ gl. Om nu eindelijk hieruit te vinden hoe veel ten 100 hij met zijne reële penningen wint, zegt men 6250 gl. : 100 gl. 458 $\frac{3}{4}$ wint : x wint, komt 7 $\frac{3}{4}$ pCt. (27)

764. AANMERKING. Deze vraag kan lichter worden opgelost. Wanneer de effecten in reële waarden rijzen of dalen, dan zijn de interesten, welke altijd krachtens het contract van den geldleener, van de nominale waarde betaald worden, ten aanzien van de reële waarde, in de omgekeerde reden van de oogenblikkelijke reële waarde of prijzen van dezelve. (28) Want indien eenig effect slechts 50 pCt. waard heeft, dan zal men tot den aankoop slechts 50 gulden voor de 100 gulden, die den eersten geldleener geschoten heeft, behoeven uit te geven; maar daar de geldleener de bedongen interest naar de eerst opgenomen som blijft berekenen, geniet de tweede bezitter voor 50 gulden zoo veel interest, als de eerste voor zijne 100 gulden opgeschotene penningen, indien hij bezitter wis gebleven, zou genoren hebben, dat is een dubbelde interest; men stelde dan

$$100 : 25\frac{1}{2} \text{ omgek.} = \frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2} : x$$

$$\text{of } 25\frac{1}{2} : 100 = \frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2} : x$$

en dezen regel uitrekeneinde vindt men $x = 7\frac{3}{4}$ pCt. (29)

XLVII LES. Over het berekenen van Winst en Verlies in den Handel.

765. Winst en verlies is aan elk bekend. Wanneer men

(26) Wat behoort eindelijk nog tot de Interest-Rekening?

(27) Verklaar de oplossing van dit voorbeeld?

(28) Kan men deze vraag korter oplossen, en welke is dan de regel?

(29) Hoe kan men dit vraagstuk uitrekeneig?

eenige hoeveelheid koopwaren, van welke aard deze zijn, tot eene grootere som verkoopt, dan dezelve zijn ingekogt, en de onkosten; die op inkoop en verkoop kunnen gevallen zijn, bedragen, dan heeft men gewonnen, en de winst is in dit geval gelijk aan het zuiver provenu van verkoop min de inkoopsprijs te zamen gerekend met de onkosten, welke op die handelpartij, het zij bij in- of uitkoop, gevallen zijn (1). Verlies heeft plaats, wanneer het provenu minder is dan het beloop van inkoop en onkosten, en is gelijk aan de som van inkoop en onkosten min het provenu van den uitkoop (2).

766. De Winst en het Verlies wordt op tweeërlei wijze beschouwd, of voltrekkelijk of vergelijkenderwijze: (3) bij de eerste wijze van beschouwen vergenoegt men zich met slechts na te gaan, hoe veel men in het geheel gewonnen hebbe, en bij de tweede wijze, hoe veel men ten honderd in eenen bepaalden tijd, bij voorbeeld, in één jaar, hebbe gewonnen. (4) In beide gevallen komen verschillende omstandigheden in aanmerking, welke de kennis van elk bijzonder artikel van handel vereischt; doch ook, wanneer men in dezen het gebruik kent, geheel niets anders dan eene geringe oplettenheid en de kennis van de gronden der Rekenkunde vereischt, om alles, wat men begeren mogt, uit te rekenen. (5) De volgende vraagstukken zullen den Leerling in de oplossing van deze soort van vraagstukken op den weg helpen.

767. 1 VRAAGSTUK. Iemand heeft gekogt 3763 fl suiker tegen 17 stuivers het pond; hier op zijn gevallen aan onkosten 17 gl. 12 stuiv., hij verkoopt dezelve daarna, tot 23 $\frac{1}{2}$ stuiver het pond; maar bevindt, bij de aflevering, 17 fl verlies, en heeft bij dezelve nog 5 gl. 7 stuiv. onkosten; men vraagt of hij gewonnen of verloren hebbe, en hoe veel?

Oplossing. Men berekene het beloop van 3763 fl tegen 17 stuiv., daar voor vindt men 3198 gl. 11 stuiv. hier bij tel men de onkosten van inkoop 17 gl. 12 stuiv. en die van verkoop 5 gl. 7 st., de som is 3221 gl. 10 stuiv.; zoo veel heeft hij nu in alles uitgegeven; maar nu verkoopt hij 3763 fl min 17 fl , dat is 3746 fl tegen 23 $\frac{1}{2}$ stuivers, en ontvangt daar voor 4401 gl. 11 stuiv., hier van zijne uitgegevene som en onkosten ten

bedrage van 3221 gl. 10 afrekkende, blijft hem voor zuivere winst over 1180 gl. 1 stuiver. (6)

768. 2 VRAAGSTUK. Iemand koopt 8317 fl van zekere koopmanschap voor 19 $\frac{1}{2}$ stuiv. het pond, en betaalt aan inkoopkosten 25 gl. 17 stuiv.: na verloop van 5 maanden verkoopt hij dezelve tot 22 $\frac{1}{2}$ stuiver, en bevindt, dat de koopmanschap op de 100 fl 7 fl is ingedroogd of verminderd: hoe veel heeft hij dan ten 100 in het jaar gewonnen?

Oplossing. De 8317 fl bedragen, tegen 19 $\frac{1}{2}$ stuiv. gerekend, 8100 gl. 1 $\frac{1}{2}$ stuiv., hierbij 25 gl. 17 stuiv. kosten, komt voor het geheele uitfchor 8134 gl. 18 $\frac{1}{2}$ stuiv. De 8317 fl zijn op de 100 fl 7 fl ingedroogt: men stelde dus 100 fl : 8317 fl = 7 fl ingedroogd tot x : komt x = 582 fl nagenoeg (de gedeelten van ponden komen niet in aanmerking), dus het gewigt, dat hij uitverkoopt, is 8317 fl — 582 fl = 7735 fl : deze verkoopt hij tegen 22 $\frac{1}{2}$ stuiv., dit bedraagt 8701 gl. 17 $\frac{1}{2}$ stuiv. Hier nu van afrekkende de geheele inkoopsprijs en onkosten, namelijk 8134 gl. 18 $\frac{1}{2}$ st., blijft 566 gl. 19 st. winst. Deze som heeft hij nu in 5 maanden met een kapitaal van 8134 gl. 18 $\frac{1}{2}$ stuiv. gewonnen: men stelde derhalve (om in ronde getallen te rekenen,)

$$8155 \text{ kap.} \times 5 \text{ m.} : 100 \text{ kap.} \times 12 \text{ m.} = 567 \text{ winst} : x \text{ winst.}$$

$$x = \frac{100 \times 12 \times 567}{1835 \times 5} = 74 \frac{1}{2} \text{ per Ct. nagenoeg. (7)}$$

769. 3 VRAAGSTUK. Een winkelier koopt eene partij koffij, wegende 2630 fl , tegen 13 $\frac{1}{2}$ stuiv. het fl ; deze begint hij tegen 14 stuivers het fl uit den winkel uit te verkoopen; na dat hij van die partij 623 fl tegen dien prijs gesleten heeft, rijst de koffij tot op 17 $\frac{1}{2}$ stuivers; tegen dien prijs nog 837 fl gesleten hebbende, rijst dezelve nog tot op 19 stuivers, en hij slijt op dien voet nog 520 fl ; maar daarna daalt dezelve eensklaps op 14 stuivers, en nog meerdere daling vreezeende, verkoopt hij de rest tot dien prijs; men vraagt hoe veel hij gewonnen hebbe?

Oplossing. De geheele partij van 2630 fl tegen 13 $\frac{1}{2}$ stuiv. bedraagt aan inkoopsprijs 1775 gl. 5 stuiv. Hier van verkoopt hij 623 fl tegen 14 st., en ontvangt daarvoor 436 gl. 2 stuiv. Verder 837 fl tegen 17 $\frac{1}{2}$ stuiv., en dit bedraagt 732 gl. 7 stuiv. 8 penn. Eindelijk nog 520 fl tegen 19 st., en dit bedraagt 494 gl. Nu heeft hij in alles verkogt 1980 fl , en 'er blijft van de geheele partij nog 650 fl over, die hij tegen 14 stuiv. verkoopt, en dus ontvangt 455 gl. Het beloop van alle deze partijen bij elkander tellende, vindt men 2117 gl. 9 st. 8 penn., hiervan den inkoopsprijs afrekkende, vindt men voor de zuivere winst 342 gl. 4 st. 8 penn. (8)

(1) Wat verstaat men door winst?

(2) Wat is verlies?

(3) Op hoe velerlei wijze wordt wint en verlies berekend?

(4) Verklaar dit nader?

(5) Wat wordt 'er vereischt om die soort van vraagstukken op te lossen?

(6) Verklaar het eerste voorbeeld?

(7) Verklaar het tweede voorbeeld?

(8) Verklaar het derde voorbeeld?

770. 4 VRAAGSTUK. Iemand eenige stukken Linnen, ten bedrage van 3457 ellen, tegen de ronde som van 2500 gulden, ingekogt hebbende, sorteert dezelve in drie qualiteiten, te weten: 1287 ellen van de slechtste, 1123 ellen van betere, en de rest van de beste qualiteit: na verloop van eene maand verkoopt hij de partij van de beste qualiteit, tegen 19½ stuiv. de el, ééne maand later de partij van de slechtste qualiteit, tegen 16 stuiv. de el, en de middelbare qualiteit, ten zelfden tijde, tegen 18 stuiv. de el, alles om gereed geld; hoe veel heeft hij in alles gewonnen, en hoe veel ten 100 in 't jaar?

Oplossing. Men rekene als volgt:

3457 el ingekogt tot	2500 gl.
1287 el slechtste soort, à 16 stuiv. de el	1029 gl. 12 ft.
1123 el betere soort, à 18 stuiv. de el	1010 gl. 14 ft.
2410 el som der twee eerste soorten	
1047 el beste soort tegen 19½ stuiv. de el	1033 gl. 18 ft. 4 penn.

som der geheele uitkoop	3073 gl. 4 ft. 4 penn.
inkoop prijs	2500 gl. 0 ft. 0 penn.

de geheele winst	573 gl. 4 ft. 4 penn.
----------------------------	-----------------------

Om nu te vinden, hoe veel hij ten 100 in het jaar gewonnen hebbe, redeneere men aldus: De inkoop is geschied in de onderstelling, dat de geheele partij van gelijke soort ware; om nu de inkoop prijs van de beste soort te vinden, stelle men de evenredigheid

$$3457 \text{ el} : 1047 \text{ el} = 2500 \text{ gl.} : x \text{ gl.}$$

komt $x = 757 \text{ gl. } 3 \text{ ft. } 3 \text{ penn.}$ nagenoeg; trekt men deze inkoop som der twee andere soorten $1742 \text{ gl. } 16 \text{ ft. } 13 \text{ penn.}$ Hij wint dus op de beste soort $276 \text{ gl. } 15 \text{ ft. } 1 \text{ penn.}$, en op de twee andere soorten, die hij te gelijk verkoopt, $296 \text{ gl. } 9 \text{ ft. } 8 \text{ penn.}$ Men stelle nu deze twee evenredigheden (hierin voor het gemak de naaste heele getallen van gulden nemende,)

$$757 \text{ kap.} : 100 \text{ kap.} = 269\frac{1}{2} \text{ gl. winst} : x \text{ winst}$$

$$1743 \text{ kap.} : 100 \text{ kap.} = 296\frac{1}{2} \text{ gl. winst} : y \text{ winst}$$

Hier uit vindt men: $x = 35 \text{ gl. } 7 \text{ ft. } 6 \text{ penn.}$ nagenoeg, welke som hij in ééne maand met 757 kapitaal gewonnen heeft; en $y = 17 \text{ gl. } 0 \text{ ft. } 3 \text{ penn.}$ nagenoeg, en deze som heeft hij met 1743 gl. kapitaal in twee maanden gewonnen. In een jaar heeft hij derhalve met 757 gl. gewonnen 12 maal $35 \text{ gl. } 7 \text{ ft. } 6 \text{ penn.} = 424 \text{ gl. } 8 \text{ ft. } 8 \text{ penn.}$ en met 1743 gl. in een jaar 6 maal $17 \text{ gl. } 0 \text{ ft. } 3 \text{ penn.} = 102 \text{ gl. } 1 \text{ ft. } 2 \text{ penn.}$ ten 100 gewonnen. (9)

(9) Verklaar de oplossing van het vierde vraagstuk?

771. 5 VRAAGSTUK. Iemand heeft eene partij surinaamsche koffij ten bedrage van 3765 fl contant gekogt voor 10 stuivers 't fl , verkoopt dezelve, na verloop van eene halve maand, tegen 13 stuiv. het fl , op 3 maanden te betalen; zoo nu bij de aflevering bevonden wordt dat de partij met 23 fl verminderd is, hoe veel is 'er dan in alles, en hoe veel ten 100 in 't jaar gewonnen?

Oplossing. De inkoop prijs van 3765 fl tegen 10 stuiv. 't fl bedraagt 1782 guld. 10 stuiv. Bij de aflevering vindt hij 23 fl vermindering, en levert dus slechts 3742 fl af tegen 13 stuivers 't fl , dit bedraagt 2432 gl. 6 ft.: hier van de inkoop prijs aftrekkende, vindt men voor de winst 649 gl. 10 stuiv. Doch hij betaalt den inkoop contant, en verkoopt een halve maand na den inkoop, om zijn geld eerst 3 maanden later te incasseren; het is dus even zoo, als of hij met 1782½ guld. in 3½ maand 649½ gl. winst; stel dan, om de winst ten 100 in het jaar te vinden, de zamengestelde evenredigheid

$$1782\frac{1}{2} \text{ gl.} \times 3\frac{1}{2} \text{ m.} : 100 \text{ gl.} \times 12 \text{ m.} = 649\frac{1}{2} \text{ gl.} : x \text{ winst}$$

en gij zult de winst ten 100 in 't jaar vinden. (10)

772. 6 VRAAGSTUK. Iemand heeft ingekogt zes balen koffij, wegende n°. 1. 683 fl ; n°. 2. 579 fl ; n°. 3. 713 fl ; n°. 4. 689 fl ; n°. 5. 509 fl en n°. 6. 653 fl , deze komen hem door elkander op 2013 gl. te staan; en alzo deze balen van verschillende soort zijn, mengt hij dezelve door elkander; men vraagt: tegen hoe veel hij het fl moet verkoopen om 20 perCt. te winnen?

Oplossing. Daar hier geen tijd van uitkoop bepaald wordt, moet men berekenen, hoe veel de inkoop prijs van 2013 tegen 20 perCt. aan interest wint, deze winst bedraagt 402 gl. 12 ft. Deze winst bij den inkoop prijs voegende, vindt men de som van 2415 gl. 12 stuivers, tegen welke de geheele partij moet uitverkogt, worden om 20 perCt. te winnen. Nu kan men vinden, tegen hoe veel het pond onder die bepaling moet verkogt worden, door te stellen, $3826 \text{ fl} : 1 \text{ fl} = 2415 \text{ gl. } 12 \text{ ft.} : x \text{ ft.}$ (11)

MEER VOORBEELDEN TOT OEFENING.

7 VRAAGSTUK. Eenige goederen zijn ingekogt voor 120 gl.; hier op zijn bij inkoop 6 gl. 10 stuiv. onkosten gevallen; na drie maanden worden dezelve tegen 135 gl. verkogt: hoe veel is dan in het geheel, en hoe veel ten 100 in 't jaar gewonnen?

8 VRAAGSTUK. Iemand koopt een stuk Lijnwaad, lang 530 el, tegen 14 stuiv. de el, en heeft bij inkoop de onkosten van 5 gl. 10 ft. 3½ maand later wil hij deze partij in eens met 10 perCent ten 100 in het jaar winst verkoopen; tegen hoe veel moet hij dan de el berekenen?

(10) Verklaar de oplossing van het vijfde vraagstuk?

(11) Verklaar de oplossing van het zesde vraagstuk?

9 VRAAGSTUK. Eene partij van 6096 fl Virginia bladen worden tegen $6\frac{1}{2}$ fl . ingekocht, en naderhand, na twee maanden, wederom voor $7\frac{1}{2}$ fl . uitverkocht, zoo 'er bij den uitkoop 3 fl ten 100 verlies aan gewigt bevonden wordt, en de onkosten bij den inkoop 6 gl . 10 fl . en bij den uitkoop 7 gl . 12 fl . bedragen; hoe veel is aan die partij ten 100 in het jaar gewonnen?

10 VRAAGSTUK. Iemand heeft 8096 fl koffij, tegen 13 stuivers het fl ingekocht, en bij den inkoop 16 gl . 12 fl . onkosten gehad; na verloop van één maand verkoopt hij van die partij 3620 fl tegen 15 fl . doch na verloop van 2 maanden bevindt hij het restant van dezelve zoo beschadigd te zijn, dat hij hetzelfde slechts tegen $10\frac{1}{2}$ fl . kan afhandig maken; men vraagt: hoe veel hij ten 100 in het jaar gewonnen of verloren hebbe?

11 VRAAGSTUK. Iemand verkoopt een partij kaneel voor 1532 gl . op 4 maanden, en bevindt alzoo 20 ten 100 in het jaar gewonnen te hebben; men vraagt: hoe veel den inkoop bedraagt?

12 VRAAGSTUK. Iemand koopt een partij Russische effecten tegen 33 $\frac{1}{2}$ pCent, een maand naderhand verkoopt hij dezelve tegen 42 pCent; hoe veel heeft hij dan ten 100 in het jaar gewonnen?

XLVIII LES. Over het berekenen van de middelbare waarde der vermengde Koopwaren.

773. Soms tijds gebeurt het, dat men verscheidene hoeveelheden koopwaren van verschillende prijzen en hoedanigheden onder elkander mengt, en de middelbare prijs van dezelve begeert te kennen. (1) De rekenwijze, waardoor die middelbare prijs bepaald wordt, noemen de Cijfermeesters *Menging* (Regula aligationis). (2) Deze berekening is zeer ligt; een duidelijk begrip der zake wijst hier wederom van zelve, hoe men dezelve moet inrigten.

774. 1 VRAAGSTUK. Iemand heeft drierlei soort van koffij, te weten, 384 fl van 10 fl . 't fl ; 587 fl tegen 11 fl . en 813 fl tegen 13 $\frac{1}{2}$ fl . het fl : deze drie soorten mengt hij onder elkander: men vraagt de middelbare waarde van het pond gemengde koffij te bepalen?

Oplossing. Men berekene de geldwaarde van iedere soort koffij, zoo als in de nevenstaande schets te zien is, en tek deze waarden bij elkander, en men vindt, dat alle de drie soorten in gewigt 1784 fl bedragen, de waarde van 2127 $\frac{1}{2}$ fl . suiver hebbende, deze geldwaarde dan door

$$\begin{array}{rcl} 384 \text{ fl} \times 10 \text{ fl.} & = & 3840 \text{ fl.} \\ 587 \text{ fl} \times 11 \text{ fl.} & = & 6457 \text{ fl.} \\ 813 \text{ fl} \times 13\frac{1}{2} \text{ fl.} & = & 10975\frac{1}{2} \text{ fl.} \end{array}$$

$$1784 \text{ fl} \dots\dots\dots 2127\frac{1}{2} \text{ fl.}$$

$$11 \text{ fl. } 14\frac{1}{2} \text{ penn.}$$

(1) Welk geval kan soms tijds voorkomen?

(2) Hoe noemt men den regel, waardoor men de middelbare waarde van de vermengde koopwaren bepaakt?

het getal der ponden gewigts deelende, vindt men voor de middelbare waarde van elk pond 11 fl . 14 $\frac{1}{2}$ penn., zo dat hij elk pond, tegen dien prijs verkoopende, noch wint noch verliest. (3)

775. Uit dit voorbeeld blijkt: dat hoe veelerelei soorten van waren van denzelfden aard tegen onderscheidene prijzen mogten gegeven zijn, de middelbare waarde van derzelver vermeniging altijd op dezelfde wijze zal bepaald worden. (4) Men vermenigvuldigt namelijk de waarde van elke éénheid van gewigt of maat van elke soort met het getal van die maten of eenheden, welke de hoeveelheid van elke soort voorstelt, en deelt de som der producten door de som der hoeveelheden van alle de gegebene soorten. (5)

776. 2 VRAAGSTUK. Laat, om dit algemeener voor te stellen, gegeven zijn van dezelfde soort van waar A, B, C, D, E, enz. ponden tot a, b, c, d, e, enz. stuivers het pond, en gevraagd worden de middelbare prijs van deze onder elkander vermengde waren te vinden?

Oplossing. Een getal van A ponden, tegen a stuivers het pond, bedraagt Aa stuivers. De tweede en volgende qualiteiten bedragen, om dezelfde reden Bb, Cc, Dd, Ee enz. stuivers. De geheele massa van die qualiteiten bedraagt derhalve in geliswaarde Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + enz. stuivers, en de som van dezelve A + B + C + D + E + enz. ponden. Sielt men nu de waarde van elk pond = x stuivers; dan moet [A + B + C + D + E + enz.] $\times$ x = Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + enz. stuiv. zijn, en derhalve

$$x = \frac{Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + \text{enz.}}{A + B + C + D + E + \text{enz.}}$$

welke formule in het kort den bovenstaanden regel uitdrukt. (6)

777. Maar behalve dit algemeene geval kunnen er nog veele andere bedagt worden, waarvan sommige, door de eenvoudige regels der Cijferkunst, anderen met behulp der Stelkunst moeten opgelost worden.

778. 3 VRAAGSTUK. Bij eene hoeveelheid wijns van 156 mingelen, 12 stuivers de mingel waard zijnde, wordt 10 mingelen water gedaan; men vraagt: hoe vele stuivers de mingel gemengde wijn waard zal zijn?

Oplossing. Aan het water geen prijs toeschrijvende, kunnen nu de 156

(3) Verklaar het eerste vraagstuk?

(4) Wat gevolg trekt gij uit de oplossing van het eerste vraagstuk?

(5) Welk een regel volgt men tot dat einde?

(6) Verklaar het tweede vraagstuk?

mingelen, die tot op 166 vermeerderd zijn, worden aangemerkt als 156 $\times$ 12 stuivers waard te zijn; elk mingel zal dus $\frac{156 \times 12}{166} = 11\frac{3}{11}$ *stuv.* waarde verkregen hebben.

779. 4 VRAAGSTUK. Iemand heeft 20 tonnen biers van 5 gulden de ton; hoe veel tonnen biers van 7 gulden zal hij daar onder moeten mengen, om de ton op 6 gulden waarde te brengen?

Oplossing. Stel het gevraagde getal tonnen van 7 gulden $= x$; dan is

$$\begin{aligned} 20 \text{ ton} \times 5 \text{ gulden} &= 100 \text{ gl.} \\ x \text{ ton} \times 7 \text{ gulden} &= 7x \text{ gl.} \end{aligned}$$

men heeft dan in alles $20 + x$ ton, en die zijn waard $100 \text{ gl.} + 7x \text{ gl.}$; maar elke ton moet 6 gulden waard zijn; men heeft dan de vergelijking

$$\begin{aligned} 6 \times (20 + x) &= 100 + 7x \\ \text{of } 120 + 6x &= 100 + 7x \end{aligned}$$

hieruit volgt, zie *art.* 476, $x = 20 \text{ ton.}$ (7)

780. 5 VRAAGSTUK. Hoe veel tonnen waters moeten bij eene menging van 20 tonnen biers van 4 gl., 30 tonnen biers van 5 gl. en 25 tonnen biers van 6 gulden gevoegd worden, om het verlangde mengsel tot de waarde van $4\frac{1}{2}$ gl. de ton te brengen?

Oplossing. Dewijl het bijgevoegde water stilstaand onderfeld wordt geene waarde te hebben, zoo berekene men de waarde van de hoeveelheid van elke soort van bier; het getal der bij te voegen tonnen waters dan $= x$ stellende, heeft men in het geheel $20 + 30 + 25 + x = 75 + x$ ton, waarvan de geldwaarde $80 + 150 + 150 = 380 \text{ gl.}$ bedraagt: nu moet elke ton van dit mengsel waard zijn $4\frac{1}{2} \text{ gl.}$; derhalve $(75 + x) \times 4\frac{1}{2} = 380 \text{ gl.}$: of deze vergelijking met 2 vermenigvuldigd hebbende, $(75 + x) \times 9 = 760$: hieruit vindt men $x = 9\frac{1}{3} \text{ ton.}$ (8)

$$\begin{aligned} 20 \text{ ton} \times 4 \text{ gl.} &= 80 \text{ gl.} \\ 30 \text{ ton} \times 5 \text{ gl.} &= 150 \text{ gl.} \\ 25 \text{ ton} \times 6 \text{ gl.} &= 150 \text{ gl.} \\ x \text{ ton} \times 0 \text{ gl.} &= 0 \text{ gl.} \\ \hline 75 + x \text{ ton kosten} &= 380 \text{ gl.} \\ \text{derhalve} & \\ (75 + x) \times 4\frac{1}{2} &= 380 \\ (75 + x) \times 9 &= 760 \\ 675 + 9x &= 760 \\ 9x &= 760 - 675 = 85 \\ x &= \frac{85}{9} = 9\frac{1}{3} \text{ ton.} \end{aligned}$$

781. 6 VRAAGSTUK. Een koopman heeft drierlei soort van kofij, te weten, 380 lb , 425 lb en 520 lb tot 11, 13 en 15 *stuv.* het pond: tegen hoe veel zal hij, deze soorten onder elkander gemengd hebbende, het pond moeten uitvoeren, om 10 ten 100 te winnen?

(7) Verklaar de oplossing van het vierde vraagstuk?

(8) Verklaar de oplossing van het vijfde vraagstuk?

Oplossing. Men berekent eerst, gelijk in de nevenstaande schets, het beloop van alle de drie soorten: dit bedraagt 17505 *stuv.*, zijnde de inkoop prijs der drie partijen; omdat nu 10 ten 100 te winnen, zoo veel is, als een tiende van den inkoop prijs te winnen, telt men bij den inkoop prijs een tiende, komt voor den uitkoop prijs 19-55 $\frac{1}{2}$ *stuv.*, deze uitkoop prijs deelt men door 1325, zijnde de som van de hoeveelheden der drie partijen; en men vindt 14 $\text{ft. } 8\frac{6}{11}$ *pen.*, waar het pond der vermengde kofij moet worden uitverkocht. (9)

$$\begin{aligned} 380 \text{ lb } 11 \text{ st.} &= 4110 \text{ st.} \\ 425 \text{ lb } 13 \text{ st.} &= 5525 \text{ st.} \\ 520 \text{ lb } 15 \text{ st.} &= 7800 \text{ st.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1325 \text{ lb} &= 17505 \text{ st.} \\ \text{tel bij } \frac{1}{10} &= 1750\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{uitkoop prijs } 19255\frac{1}{2} \text{ st.}$$

$$\text{komt } 14 \text{ ft. } 8\frac{6}{11} \text{ pen.}$$

782. 7 VRAAGSTUK. Een werkbaas heeft drieërlei soorten van knegts, welke werkkragten tot elkander staan, als de getallen 7, 8 en 9; van de eerste soort 25, van de tweede 30 en van de derde 36: nu heeft hij een werk aangenomen, het welk hij in den tijd van 6 maanden, met 100 werklieden, welke kragten in vergelijking tot die der bovengenoemden, door het getal 10 worden voorgesteld, in gereedheid kan brengen; men vraagt: in hoe veel tijds hij dit aangenomen werk met al zijn volk gezamenlijk zal kunnen uitvoeren?

Oplossing. Men vindt, dat de middelbare kragten der $25 + 30 + 36 = 91$ door het getal $8\frac{1}{2}$ worden voorgesteld: nu is de hoeveelheid van werk in de zamengestelde reden van het aantal der werklieden en de kragten van elk derzelven; de hoeveelheden werks, door de 100 werklieden, die elk een vermogen van 10 hebben, en door de 91 werklieden, die eene middelbare kragt van $8\frac{1}{2}$ hebben, zijn derhalve als $100 \times 10 : 91 \times 8\frac{1}{2}$, of als 1000 tot 739. De hoeveelheid werks, door het getal 1000 uitgedrukt, wordt nu in 6 maanden volbragt; men stelde derhalve, $100 : 739$ omgek. $= 6 : x$, of $739 : 1000 = 6 : x$, komt $x = 8\frac{1}{11}$ maanden. (10)

XLIX. LES. Over het gehalte van het Goud en Zilver.

783. Het Goud en Zilver zijn metalen van veel waarde, waaruit de Muntspecien en verscheiden andere kostbare Werken vervaardigd worden; doch meestal wordt, ter bevordering van het gemak in de bewerking en tot andere einden, het goud met zilver of koper, en het zilver met koper vermengd. (1) Nu is het, wegens de hooge waarde van het

(9) Verklaar de oplossing van het zesde vraagstuk?

(10) Verklaar de oplossing van het zevende vraagstuk?

(1) Wat merkt gij aangaande het Goud en Zilver op?

goud en zilver, hetwelk men, in deszelfs volkomene zuiverheid genomen, als de ware maat van de waarde van alle andere dingen kan aanmerken, van het uiterst belang, te weten, in welk eene evenredigheid het goud of zilver in eenig stuk tot de hoeveelheid van het daarmede vermengd metaal vereenigd zij. (2) De wetten hebben, ter voorkoming van bedrog omtrent de evenredigheid van die vermenging, bepalingen gemaakt, en de Scheikundigen middelen daargesteld, om de evenredigheid van die vermenging te onderzoeken, en hiermede kunnen wij ons niet onthouden; (3) maar, daar er bij het vermengen van goud en zilver veel berekening vereischt wordt, zullen wij de dingen, welke tot derzelver volkomen verstand noodig zijn, verklaren. (4)

784. Goud of zilver, dat van alle vreemde metalen gezuiverd is, noemt men *zijn goud en zilver*, zoo veel, als of men zeide: *zuiver goud en zilver*; (5) doch het fijne goud of zilver, met eenig vreemd metaal vermengd zijnde, noemt men zulk eenen klomp *Bruto (onzuiver) goud of zilver*. (6) Bij het Bruto goud of zilver komt in aanmerking: 1^o. het *Gehalte*, waar door men verstaat, het *zuiver goud of zilver in den Bruto klomp voorhanden*; (7) 2^o. de *Alliage* of *ingemengde vreemde stof*, waar door men verstaat, het *zilver of koper dat met het zuiver goud in den bruto klomp vermengd is*; (8) 3^o. eindelijk de evenredigheid waarin het gehalte tot de alliage staat. (9) *Hoe grooter nu deze verhouding is, zoo veel te nader komt het Bruto goud of zilver tot den staat van zuiverheid*. (10)

785. Het komt 'er nu op aan, om een duidelijk begrip te hebben, op welk eene wijze men deze evenredigheid pleeg uit te drukken; en daaromtrent bestaan thans twee onderscheidene wijzen; de *Oude* en de *Nieuwe*. (11)

(2) Wat wordt wegens de groote waarde van het Goud en Zilver noodzakelijk?

(3) Bestaan 'er voorzorgen om gepleegd bedrog te ontdekken?

(4) Wat komt hier bijzonderlijk in aanmerking?

(5) Wat verstaat men door *zijn Goud en zijn Zilver*?

(6) Wat is Bruto Goud of Zilver?

(7) Wat komt bij het Bruto Goud of Zilver, en wat is het gehalte?

(8) Wat is de *Alliage*?

(9) Wat komt bij de beschouwing van gehalte en alliage in aanmerking?

(10) Wat valt bij deze evenredigheid op te merken?

(11) Hoe velerlei wijzen bestaan 'er, om de evenredigheid van het gehalte tot de alliage te bepalen?

786. Volgens het aloude gebruik, wordt het goud en zilver, bij *Marken Hollandsch Trooisch* gewogen; (12) worden de het mark in 8 oncen, de once in 20 engels, en de engels in 32 azen verdeeld; zoodat het mark houdt 5120 azen. (13) Doch, om het gehalte te bepalen, heeft men twee ingebeelde maten; ééne voor het goud en ééne voor het zilver. (14) Tot het bepalen van het gehalte van het goud heeft men de karaat, zijnde eene ingebeelde éénheid, die men zoo groot of klein denken kan als men wil, en waar voor men dus ook het vier-en-twintigste deel van een mark nemen kan, die men verdeelt in 12 penningen: nu zegt men: dat zuiver goud houdt 24 karaat of 24×12 dat is 288 penningen; en dan wil de spreekwijs goud van 21 karaat en 11 penn., dat is goud van 263 penningen *fijn* zeggen, dat op 24×12 of 288 deelen van den bruto klomp 263 deelen *fijn goud of gehalte* en 25 deelen *alliage voorhanden zijn*. (15) Zoodat, in dien klomp, het gewigt van denzelven tot het gewigt van het *fijne* of *zuivere goud* zal staan als 288:263, en de gehalte tot de alliage als 263:25 (16). — Tot het bepalen van de evenredigheid van de gehalte van het zilver bezigt men insgelijks eene ingebeelde maat, die men penningen en greinen noemt. Zilver van 12 penningen *fijn* of van 288 grein wordt zuiver onvermengd genoemd; indien ik derhalve zeg zilver van 11 penningen en 7 grein, of van $11 \times 24 + 7 = 273$ grein, versta ik daar door zilver, in hetwelke het gehalte tot de alliage staat, als 273 tot 15. (17)

787. In het wijsgeerig stelsel van maten en gewigten is de bepaling van het gehalte veel eenvoudiger. In plaats van met het Mark Trooisch te wegen, weegt men met de Hectogramme, Decagramme, Gramme, Decigramme, Centigramme en Milligramme (18) en het gehalte bepaalt men voor het goud en zilver op eenerelei wijze. (19) Men verdeelt

(12) Hoe wordt het Goud en Zilver gewogen?

(13) Hoe wordt het Mark Hollandsch Trooisch verdeeld?

(14) Hoe bepaalt men nu het gehalte?

(15) Hoe bepaalt men de gehalte van het Goud?

(16) Verklaar dit nog wat nader?

(17) Hoe bepaalt men de gehalte van het Zilver?

(18) Hoe weegt men in het wijsgeerig stelsel van Maten en Gewigten het Goud en Zilver?

(19) Bepaalt men het gehalte ook voor het Zilver op eene andere wijze dan voor het Goud?

eene zekere hoeveelheid gouds of zilvers, groot of klein, in 1000 gelijke deelen, en men bepaalt hoe veel van die duizend deelen gehalte, en bij gevolg hoe veel alliage daarop begrepen is. (20) Indien ik dus zeg goud of zilver ter gehalte van 913, dan zeg ik hier mede, dat het bedoelde goud of zilver, in duizend deelen verdeeld zijnde, onder die 1000 deelen 913 deelen fijn goud of zilver en 87 deelen alliage of vreemde stof voorhanden zijn. (21) Deze wijze van het gehalte te bepalen heeft, behalve dat zij in de berekening veel eenvoudiger is, ook het voordeel, dat alle omstandigheden naauwkeuriger en preciser kunnen worden uitgedrukt. (22)

788. Muntmeesters, Esfaisjeurs en Goudsmiten kunnen met het uitrekenen van de volgende vraagstukken te doen hebben.

789. A. Het herleiden van het oude tot het nieuwe gehalte, en van het nieuwe tot het oude gehalte. (23)

790. I VOORBEELD. Een klomp goud heeft het gehalte van 22 karaten $7\frac{1}{2}$ grein: men vraagt dit gehalte in het nieuwe stelsel van maten en gewigten uit te drukken?

Oplösing. Daar het zuiver goud 24 karaat of $24 \times 12 = 288$ grein houdt, en 22 karaat $7\frac{1}{2}$ gr. $= 22 \times 12 + 7\frac{1}{2} = 271\frac{1}{2}$ grein, zoo staat de geheele klomp (groot of klein, dat doet 'er niet toe) tot het gehalte, dat is tot de hoeveelheid zuiver goud, in denzelven begrepen, als 288 : $271\frac{1}{2}$. Om nu het gehalte op de nieuwe wijze uit te drukken, berekent men eenvoudig, hoe veel gehalte op 1000 deelen van den klomp begrepen zijn, (want, omdat de alliage in den klomp altijd gelijkelijk verdeeld is, zal het gehalte door alle de deelen van den klomp evenrediglijk verdeeld zijn,) men stelle dan de evenredigheid

$$\begin{aligned} 288 : 271\frac{1}{2} &= 1000 : x \\ \text{of } 576 : 543 &= 1000 : x \\ x &= \frac{543 \times 1000}{576} = 942,7 \end{aligned}$$

dat is, wanneer men bij geheele getallen blijven wil, 943 gehalte iets te veel. (24)

791. 2 VOORBEELD. Een klomp zilver heeft het ge-

halte van 10 penn. 19 grein, hoe wordt dit gehalte op de nieuwe wijze uitgedrukt?

Oplösing. Men stelle, om dezelfde reden, als in het eerste voorbeeld,

$$\begin{aligned} 12 \text{ penn.} : 10 \text{ penn. } 19 \text{ grein} &= 1000 : x \\ 288 \text{ gr. } 259 \text{ grein} &= 1000 : x \end{aligned}$$

en men vindt $x = 899,3$ of 899 nagenoeg. (25)

MEER VOORBEELDEN.

1°. Het gehalte van goud tot 19 karaat $7\frac{1}{2}$ penn. — tot 21 karaat $3\frac{1}{2}$ penn. — tot 22 karaat $10\frac{1}{2}$ penn. in het nieuwe gehalte uit te drukken?

2°. Het gehalte van zilver tot 10 penn. 23 gr. — tot 11 penn. $3\frac{1}{2}$ grein — tot 9 penn. $18\frac{1}{2}$ grein, in het nieuwe gehalte uit te drukken?

792. 3 VOORBEELD. Indien men goud ter gehalte van 913 heeft, hoe veel is dan het gehalte in karaten en greinen uitgedrukt?

Oplösing. Dezelfde gronden dienen hier, om dit te berekenen: men stelle:

$$\begin{aligned} 1000 : 913 &= 24 \text{ karaat} : x \text{ kar.} \\ \text{komt } x &= 21 \text{ kar. } 19\frac{1}{2} \text{ penn. (26)} \end{aligned}$$

793. 4 VOORBEELD. Het gehalte van zilver dat 873 zijn houdt, in het oude gehalte uit te drukken?

Oplösing. Men stelle wederom de evenredigheid

$$\begin{aligned} 1000 : 873 &= 12 \text{ penn.} : x \text{ penn.} \\ \text{komt } x &= 10 \text{ penn. } 11\frac{1}{2} \text{ grein. (27)} \end{aligned}$$

794. B. Het bepalen van de hoeveelheid fijn goud en zilver in eenen klomp van een gegeven gewigt voorhanden zijnde, wanneer het gehalte gegeven is. (28)

795. 5 VOORBEELD. Hoe veel fijn goud is 'er voorhanden in eene staaf, wegende 9 mark 7 oncen 17 engels 19 azen, indien het gehalte bij het esfay bevonden is 22 karaat $7\frac{1}{2}$ grein te houden?

Oplösing. Volgens de hier boven verklaarde beginselen moet men stellen de evenredigheid:

(25) Verklaar de oplossing van het tweede voorbeeld?

(26) Verklaar de oplossing van het derde voorbeeld?

(27) Verklaar de oplossing van het vierde voorbeeld?

(28) Wat komt verder in aanmerking?

(20) Hoe bepaalt men het gehalte?

(21) Geef hier van een voorbeeld?

(22) Heeft deze wijze van het gehalte te bepalen eenig voordeel?

(23) Welke is de eerste berekening waarmede men te doen heeft?

(24) Verklaar de oplossing van het eerste voorbeeld?

$$\begin{array}{r} 24 \text{ kar. : } 22 \text{ kar. } 7\frac{1}{2} \text{ gr.} = 9 \text{ M. } 7 \text{ Onc. } 17 \text{ Eng. } 19 \text{ Az. : } x \\ 288 \text{ gr. : } 271\frac{1}{2} \text{ gr.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2705 - 7 - 7 - 29 \\ 4 - 7 - 18 - 25\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2710 - 7 - 6 - 22\frac{1}{2} \\ \text{deel door } 288) \\ \text{komt } 9 \text{ M. } 3 \text{ Onc. } 6 \text{ Eng. } 2\frac{1}{4} \text{ Azen.} \end{array}$$

Men make de termen van de eerste reden belde tot greinen, vermenigvuldige den derden term met $271\frac{1}{2}$, en deele het product door den eersten term 288. (29)

796. 6 VOORBEELD. Hoe veel fijn zilvers is 'er voorhanden in eenen klomp, wegende 3 mark 7 oncen 19 engels, ter gehalte van 10 penn. $18\frac{1}{2}$ grein?

Oplossing. Men stelle wederom

$$\begin{array}{r} 12 \text{ penn. } 10 \text{ penn. } 18\frac{1}{2} \text{ gr.} = 3 \text{ M. } 7 \text{ onc. } 19 \text{ eng. : } x \text{ Mark.} \\ \text{komt } x = (30) \end{array}$$

797. In de nieuwe wijze van het gehalte te bepalen, is deze berekening veel gemakkelijker, zoo als uit de twee volgende voorbeelden blijken kan. (31)

798. 7 VOORBEELD. Hoe veel fijn goud is 'er voorhanden in eene staaf, die weegt 8 hectogrammes 5 decagrammes 3 grammes 7 decigrammes 8 centigrammes 7 milligrammes, hebbende deze staaf 913 gehalte?

Oplossing. Men stelle wederom

$$\begin{array}{r} 1000 : 913 = 8,53787 : x \\ 913 \text{ verm.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7795,97531 \\ \text{deel door } 1000) \\ \text{komt } x = 7,79597531 \end{array}$$

Men vermenigvuldige het gegeven gewicht met het gehalte, en deele het product door 1000, komt 7 hectogr. 7 decagr. 9 gramm. 5 decigr. $7\frac{1}{2}$ milligr. (32)

799. 8 VOORBEELD. Hoe veel fijn zilvers is 'er in eenen klomp die 5,81796 hectogrammes weegt en 883 gehalte heeft voorhanden?

(29) Verklaar de oplossing van het vijfde voorbeeld?

(30) Verklaar de oplossing van het zesde voorbeeld?

(31) Is deze berekening op de nieuwe wijze niet gemakkelijker?

(32) Verklaar de oplossing van het zevende voorbeeld?

Oplossing. Men stelle wederom

$$\begin{array}{r} 1000 : 883 = 5,81766 : x \\ \text{komt } x = 5,1364 \text{ Hectogr. (33)} \end{array}$$

MEER VOORBEELDEN TOT OEFENING.

1°. Hoe veel zuiver gouds is 'er voorhanden in eenen klomp, wegende 11 Mark 13 engels, tegen het gehalte van 19 karaat 17 grein?

2°. Hoe veel in eenen klomp gouds, wegende 13,176 Hectogr., tegen 913 gehalte?

3°. Hoe veel in eenen klomp zilver, wegende 13 Mark 6 oncen 13 engels, tegen 11 penn. $3\frac{1}{2}$ grein gehalte?

4°. Hoe veel in een klomp zilver, wegende 13,8756 Hectogrammes, tegen 917,3 gehalte?

80. C. Nog heeft men noodig de oude in de nieuwe, en de nieuwe in de oude gewigten over te brengen. Hier toe moet men de evenredigheid tusschen het Hollandsch Trooisch gewigt en het metrieke gewigt kennen. Deze evenredigheid vindt men I Deel art. 434. opgegeven. Het mark Hollandsch Trooisch weegt namelijk 246,08386 grammes, en de hectogrammes weegt 0,10159135 mark Hollandsch Trooisch; naar deze evenredigheid kan men nu elken klomp of staaf goud van het Hollandsch Trooisch tot het metrique gewigt, en omgekeerd van het metrique gewigt tot het Hollandsch Trooisch overbrengen. (34)

801. Om hectogrammes tot marken trooisch te herleiden moet men met 0,10159135 vermenigvuldigen. (35)

802. 1 VOORBEELD. Eene staaf goud weegt 32,819 hectogrammes; hoe veel bedraagt zulks in marken Trooisch gewigt?

Oplossing. Men vermenigvuldige het ge-
gevene getal hectogramme met het getal
0,10159, (de volgende cijfers 135 kan men
hier veilig weglaten,) dan verkrijgt men 3
mark, en in tiendeeligen 0,33408221 (waar-
van men de drie achterste cijfers 221 kan
verwaarloozen,) men vermenigvuldige ver-
der 0,33408 mark met 8; om deze tiendeel-
lige marken tot oncen te herleiden; men
verkiijgt alzoo 2,67264 oncen, verder ver-
menigvuldige men (zie verder art. 402.) met
20 en daarna met 16, en men vindt 3 Mark
2 oncen 13 engels $14\frac{1}{2}$ azen. (36)

$$\begin{array}{r} \text{mult. } 32,819 \text{ Hectogr.} \\ 0,10159 \\ \hline \text{komt } 3,33408221 \text{ mark} \\ 8 \\ \hline 2,67264 \text{ onc.} \\ 20 \\ \hline 13,45280 \text{ eng.} \\ 32 \\ \hline 14,4896 \text{ azen} \end{array}$$

(33) Verklaar de oplossing van het achtste voorbeeld?

(34) Verklaar de oplossing van het eerste voorbeeld?

(35) Hoe maakt men Hectogrammes tot Marken trooisch?

(36) Helder dit door een voorbeeld op?

MEER VOORBEELDEN. Het Hollandsch trooisch te herleiden a) 2,7891 hectogrammes, b) 0,8125 hectogrammes, c) 7 1853 decagr.

803. Wil men omgekeerd het mark gewigt tot hectogrammes overbrengen, dan moet men, naar het voorschrift van art. 401 de onderdeelen van het mark gewigt in tiendeeligen herleiden, en dan het mark gewigt, aldus uitgedrukt, met 2,4608386 vermenigvuldigen. (37)

804. 2 VOORBEELD. Om 7 mark 5 oncen 17 engels 29½ azen tot hectogrammes te herleiden?

Oplossing. Men herleide 5 oncen 17 engels 29,5 azen tot tiende-deelen van marken, dan vindt men 7,737012 Mark, dit getal vermenigvuldige men met 2,4608386, of het geen hier voldoende zal zijn, 7,737 met 2,46084, dan vindt men voor het begeerde getal hectogrammes 19,03952 nagenoeg. (38)

MEER VOORBEELDEN. Om tot hectogrammes te herleiden a) 3 Mark 5 once, b) 17 Mark 17 engels 7 azen, c) 3 oncen 15 engels 11½ azen?

805. D. Men heeft ook noodig de waarde van de baren goud en zilver te berekenen. De koers van het goud en zilver verandert naar de omstandigheden: de middelbare koers van het fijne zilver is 23 gl. 10 st, en die van het fijne goud 355 gl. het mark trooisch. (39) De volgende voorbeelden zullen deze rekenwijze ophelderen.

806. 1 VOORBEELD. Eene staaf zilver weegt 11 mark 3 oncen 13 engels, en wordt in den oofst bevonden te houden 11 penn. 1½ grein, hoe veel is de waarde van die staaf, rekenende het mark fijn zilver op 23 gl. 15 stuiv?

Oplossing. Men bepale eerst hoe veel fijn zilver in de baar voorhanden is, (zie art. 803.) en dan berekene men de waarde van dit gewigt tegen den gegeven koers van 23 gl. 15 st. (40)

2 VOORBEELD. Een baar goud van 23 karaat en 3 grein weegt 7 mark 3 oncen 9 engels 13 azen, hoe veel is de waarde van die baar, gerekend tegen 357 gl. het mark fijn?

807. 3 VOORBEELD. Indien de koers van het zilver is 23 gl. 18 stuiv. het mark fijn, hoe veel is de waarde van eene baar, wegende 21,735 hectogrammes tot het gehalte van 903?

Breng eerst de baar tot fijn, door het gewigt met 903 te vermenigvuldigen en het product door 1000 te deelen: aangezien nu eene hectogramme houdt 0,10159135 mark, zoo vermenigvuldig dit getal met 23 gl. 18 st. of 23,9 gl., komt voor de waarde van de hectogramme 2,428 gl. nagenoeg. Vermenigvuldig eindelijk het getal hectogrammes fijn met 2,428 gl., dan zult gij de waarde van die baar vinden. (41)

(37) Hoe herleidt men het Mark gewigt tot hectogrammes?

(38) Helder dit door een voorbeeld op?

(39) Welke is de middelbare prijs van het Goud en Zilver?

(40) Verklaar de oplossing van het eerste voorbeeld?

(41) Verklaar de oplossing van het derde voorbeeld?

4 VOORBEELD. Hoe veel is de waarde van eens staaf gouds, wegende 31,8179 hectogrammes, houdende 877 fijn tegen 358 gl. het mark Hollandsch trooisch?

808. E. Men heeft ook somtijds noodig het gehalte te bepalen van twee of meer baren van een gegeven gehalte, welke onder elkander gemengd worden, of ook wel, om het gehalte door de bijvoeging van fijn goud of zilver te verhoogen of door de bijvoeging van alliage te verminderen. (42) De berekening van deze gevallen komt overeen met het geen wij in de voorgaande les, wegens het bepalen van de middelbare waarde der koopwaren, geleerd hebben. (43) De volgende voorbeelden zullen leeren, hoe men in die gevallen moet te werk gaan.

809. 1 VRAAGSTUK. Een goudsmit heeft twee baren zilver, wegende de eerste 3 mark 5 oncen, tegen het gehalte van 10 penn. 7 grein, en de tweede 5 mark 7 oncen, tegen 11 penn. 3½ grein: hoe veel zal het gehalte zijn, wanneer hij deze baren onder elkander smelt?

Oplossing. De hoeveelheid fijn zilver wordt volgens art. 796. gevonden, wanneer men stelt, 288 grein staat tot het gehalte gelijk het gewigt van den geheelen klomp tot het gewigt van het fijn zilver in den klomp begrepen: men moet derhalve voor de eerste baar het gewigt 3 mark 5 oncen of 29 onc. met 10 penn. 7 gr. of 247, en voor de tweede baar het gewigt 5 mark en 7 oncen, of 47 oncen met het gehalte 11 penn. 3½ grein of 267½ grein vermenigvuldigen; de som dezer producten namelijk 19735½ gedeeld door 288, geeft de hoeveelheid fijn zilver, in beide baren voorhanden; dit product derhalve door de som der gewigten deelende, zal men de evenredigheid tusschen de hoeveelheid fijn zilver, in beide staven bevat, tot het gewigt van beiden staven, dat is, het gehalte der zamengesmolten staven hebben. (44)

29 onc. × 247	=	7163
47 onc. × 267½	=	12572½
76		19735½
		76
		25911½ gr.
		24
komt . . .		10 penn. 19½ gr.

810. In het metrique gewigt zal deze berekening veel gemakkelijker zijn. (45)

811. 2 VRAAGSTUK. Welke zal het gehalte zijn van drie zamengesmolten baren goud, waarvan n°. 1. weegt 7,83

(42) Wat heeft men bij het goud en zilver al meer in aanmerking te nemen?

(43) Waarmede komt het berekenen van deze gevallen overeen?

(44) Verklaar de oplossing van het eerste vraagstuk?

(45) Zij die soort van berekeningen in het nieuwe Metrieke Stelsel niet gemakkelijker?

hectogrammes, n°. 2. 13,78 hectogrammes, en n°. 3. 11,37 hectogrammes, wanneer het gehalte van n°. 1, 2 en 3. respectievelijk door 916 en 876 en 925 wordt uitgedrukt?

Oplossing. Men vermenigvuldige het gewicht van elke baar met het gehalte, en deele de som der producten door de som van de gewichten der staven, en men vindt voor het middelbare gehalte 902,4. (46)

7,83	×	916	=	7172,28
13,78	×	876	=	12071,28
11,37	×	925	=	10517,25
				32,98 29760,81
				komt 902,4

812. Men zal nu ligtelijk de volgende voorbeelden kunnen oplossen.

3 VRAAGSTUK. Iemand heeft een baar zilver, wegende 13 mark 7 oncen 15 engels tot het gehalte van 11 penn. 7 grein, hoe veel koper zal 'er moeten bijgevoegd worden, om het gehalte op 10 penning. 12 grein te brengen?

4 VRAAGSTUK. Hoe veel zuiver zilvers zal men bij een baar, wegende 31 mark 6 oncen, hebbende een gehalte van 9 penn. 21 grein, moeten voegen, om het mengsel op 11 penningen te brengen?

5 VRAAGSTUK. Een baar goud, wegende 21,812 hectogrammes, hebbende 873 gehalte, moet op 900 gehalte gebracht worden, hoe veel fijn goud zal 'er tot dat einde moeten bijgevoegd worden?

6 VRAAGSTUK. Een baar goud, ter grootte van 27,81 hectogrammes van 876 gehalte, moet tot 900 gehalte gebracht worden; hoe veel goud van 950 gehalte zal men tot dat einde 'er moeten bijvoegen?

L. L. S. Oplossing van eenige algemeene Vraagstukken.

813. Wij zullen in deze Les de oplossing van eenige algemeene vraagstukken voordragen.

814. I VRAAGSTUK. Iemand heeft de volgende kapitalen, A, B, C, D, E, F, welke respectievelijk tegen a, b, c, d, e, f, ten honderd 'sjaars winnen, hoe groot is dan de winst, welke deze kapitalen gezamenlijk in één jaar opbrengen?

Oplossing. Men kan de interessen van elk dezer kapitalen berekenen en de som dezer interessen is dan het begeerde. Dan, men kan dit eenigzins korter verrigten. Of de kapitalen en de percenten 'sjaars in algemeene letters of in bepaalde getallen gegeven zijn, de evenredigheden tusschen de kapitalen en de winsten blijven nogtans dezelfde. Wij hebben dan

$$\begin{aligned} 100 \text{ kap.} : A \text{ kap.} &= a \text{ winst} : \frac{1}{100} A a \text{ winst} \\ 100 \text{ kap.} : B \text{ kap.} &= b \text{ winst} : \frac{1}{100} B b \text{ winst} \\ 100 \text{ kap.} : C \text{ kap.} &= c \text{ winst} : \frac{1}{100} C c \text{ winst} \end{aligned}$$

(46) Verklaar de oplossing van het tweede vraagstuk?

ik moet namelijk, om de winst, met het kapitaal A aangebragt te vinden A met a multipliceren en het product door 100 deelen. Tel ik nu alle de winsten op, dan heb ik voor de geheele winst, die ik x noemen zal,

$$x = \frac{Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + Ff}{100}$$

Deze vergelijking leert mij nu: dat de som van al de winsten gelijk is aan de som der producten van elk kapitaal met zijn pCt. vermenigvuldigd, gedeeld door 100.

1 VOORBEELD. Hoe veel interest hebben in een jaar 760 gl. tot 3½ pCt., 550 gl. tot 4½ pCt., 1200 tot 5½ pCt. opgebracht?

$$\begin{aligned} 760 \text{ kap.} \times 3\frac{1}{2} \text{ pCt.} &= 2660 \\ 550 \text{ kap.} \times 4\frac{1}{2} \text{ pCt.} &= 2475 \\ 1200 \text{ kap.} \times 5\frac{1}{2} \text{ pCt.} &= 6300 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{som } 11435 \\ &\text{deel door } 100) \quad \text{komt } 114 \text{ gl. } 7 \text{ stuiv.} \end{aligned}$$

2 VOORBEELD. De volgende kapitalen, te weten 716 gl., 1850 gl., 2300 gl., 1765 gl., 1920 gl. hebben tegen 4, 4½, 5½, 5½ en 6 pCt. 'sjaars winsten opgebracht, hoe veel bedraagt zulks in het jaar?

815. II VRAAGSTUK. Iemand heeft de volgende kapitalen A, B, C, D, E, welke ten 100 in het jaar winnen a, b, c, d en e, tegen hoe veel ten honderd zal hij alle die kapitalen moeten uitzetten, om, in denzelfden tijd, bij voorbeeld, één jaar, hetzelfde te winnen?

Oplossing. Volgens het voorgaande vraagstuk is de som der winsten gelijk aan

$$\frac{Aa + Bb + Cc + Dd + Ee}{100}$$

Stel nu de interest, tegen welke hij de som van alle zijne kapitalen moet uitzetten om hetzelfde te winnen = x; dan is

$$100 \text{ kap.} : A + B + C + D + E \text{ kap.} = x \text{ winst}$$

de vierde evenredige dezer evenredigheid is klaarblijkelijk

$$\frac{(A + B + C + D + E) \times x}{100}$$

en dit is de winst, welke de som der kapitalen in een jaar zal aanbrengen; deze moet aan de som van de winsten der afzonderlijke kapitalen gelijk zijn; wij hebben dan:

$$\frac{(A + B + C + D + E) x}{100} = \frac{Aa + Bb + Cc + Dd + Ee}{100}$$

of, beide leden dezer vergelijking met 100 vermenigvuldigd hebbende,

$(A+B+C+D+E)x = Aa+Bb+Cc+Dd+Ee$
 en alles door $A+B+C+D+E$ deelende

$$x = \frac{Aa+Bb+Cc+Dd+Ee}{A+B+C+D+E}$$

waaruit dan blijkt, dat de *interest*, tegen welken men de som der kapitalen moet uitzetten, om, in denzelfden tijd, zoo veel te winnen, als met alle deze onderscheidene kapitalen tegen deze onderscheidene percenten winnende, gelijk is aan de som der producten van elk kapitaal vermenigvuldigd met zijn percent, gedeeld door de som der kapitalen.

1 **VOORBEELD.** Iemand heeft op *interest* staan de volgende kapitalen: 1730 Francs tegen $4\frac{1}{2}\%$; 3816 Francs tegen $4\frac{1}{2}\%$; 4682 Francs tegen 5% . 's jaars, tegen hoe veel $\%$ Ct. zal men de som dezer kapitalen moeten uitzetten, om in denzelfden tijd hetzelfde te winnen?

$$1730 \text{ Francs} \times 4\frac{1}{2}\% \text{ Ct.} = 7785$$

$$3816 \text{ Francs} \times 4\frac{1}{2}\% \text{ Ct.} = 18126$$

$$4682 \text{ Francs} \times 5\% \text{ Ct.} = 23410$$

som 10223

$$49321 \left\{ 4\frac{1}{2}\frac{422}{221}\% \text{ Ct.} \right.$$

2 **VOORBEELD.** Tegen hoe veel $\%$ Ct. moeten de volgende kapitalen 360 gl., 700 gl., 900 gl., 1150 gl., 1730 gl., uitslaande tegen 3, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$ en $4\frac{1}{2}\%$ Ct., worden uitgezet, om even zoo veel vruchten op te brengen?

816. 3 **VRAAGSTUK.** Zekere kapitalen, die ik A, B, C, D, E, zal noemen, hebben gedurende den tijd van p, q, r, s en t maanden, tegen a, b, c, d en e $\%$ Ct. in het jaar gewonnen: hoe veel hebben deze kapitalen in die tijden te zamen aan winst opgebracht?

Oplossing. Men kan de winsten van elk kapitaal afzonderlijk berekenen en daarna deze winsten bij elkander optellen; maar, wanneer men de volgende regels van drieën

$$100 \text{ kap.} \times 12 \text{ m.} : A \text{ kap.} \times p \text{ maand.} = a \text{ winst:}$$

$$100 \text{ kap.} \times 12 \text{ m.} : B \text{ kap.} \times q \text{ maand.} = b \text{ winst:}$$

opstelt, en alle deze zamengefelde regels van drieën uitwerkt, en de som der winsten x noemt, dan zal men vinden

$$x = \frac{Aap+Bbq+Ccr+Ddr+Ees}{100 \times 12}$$

of wil men den teller en noemer dezer breuk (het geen de waarde van x niet verandert) door 12 deelen, dan heeft men

$$x = \frac{Aa \times \frac{1}{12}p + Bb \times \frac{1}{12}q + Cc \times \frac{1}{12}r + Dd \times \frac{1}{12}s + Ee \times \frac{1}{12}t}{100}$$

in welke $\frac{1}{12}p$, $\frac{1}{12}q$, enz. de tijden verbeelden niet in maanden maar in

jaren uitgedrukt. Men leest hier dus uit: dat de *interest*, tot welken de som van onderscheidene kapitalen moeten worden uitgezet, om in één jaar zoo veel te winnen, als deze kapitalen in onderscheidene tijden, tegen onderscheidene interesten, opbrangen, gelijk is aan de som van de producten dier kapitalen, elk vermenigvuldigd met de percenten en de tijden, gedeeld door twaalf maal honderd, wanneer de tijden in maanden, of door 100 wanneer de tijden in jaren zijn uitgedrukt.

817. 4 **VRAAGSTUK.** Iemand is aan eenen zijner crediteuren schuldig te betalen de volgende sommen, namelijk A gl. na verloop van a maanden; nog B gl., C gl., D gl., E gl., na verloop van b, c, d en e maanden: men vraagt in welken tijd hij deze sommen in eens zal kunnen afdoen, zonder dat noch hij noch zijn crediteur daar door benadeeld worde?

Oplossing. Om deze vraag op te lossen, moet men in aanmerking nemen, dat de tijd, waarin de geheele som van alle de verschuldigde sommen moet betaald worden, zoodanig moet genomen worden, dat de som dezer schulden in dien tijd denzelfden *interest* zal opbrengen, als de som der interesten van elke schuld in den tijd, waarin zij moet voldaan worden: stel dan de *interest* ten honderd = r; dan is

$$\begin{aligned} 100 \times 12 : A \times a &= r : \frac{1}{1200} Aar \\ 100 \times 12 : A \times b &= r : \frac{1}{1200} Bbr \\ \text{enz.} & \qquad \qquad \text{enz.} \end{aligned}$$

de som van al de interesten is derhalve

$$\frac{Aar+Bbr+Ccr+Ddr+Eer}{1200}$$

stelt men nu den tijd, waarin de som van al de schulden kan worden afgedaan = x; dan is

$$100 \times 12 : (A+B+C+D+E) \times x = r : \frac{(A+B+C+D+E)xr}{1200}$$

den geheele *interest* van de som der schulden, moet nu gelijk zijn aan de som van de interesten der afzonderlijke schulden: men heeft derhalve

$$\frac{(A+B+C+D+E)rx}{1200} = \frac{(Aa+Bb+Cc+Dd+Ee)r}{1200}$$

vermenigvuldigt men deze vergelijking eerst met 1200, en deelt men dan het product door r dan zal (zie *art.* 471.)

$$(A+B+C+D+E)x = Aa+Bb+Cc+Dd+Ee$$

zijn en hieruit volgt dan

$$x = \frac{Aa+Bb+Cc+Dd+Ee}{A+B+C+D+E}$$

en dit leert ons: dat de tijd, in welke de geheele som van eenige na

verloop van onderscheidene tijden verschuldigde kapitalen in eens lumen worden afgedaan, gevonden wordt, indien men de som van de producten dezer kapitalen, elk vermenigvuldigt met den tijd, in welke hetzelfde moet voldaan worden, deelt door de som dezer kapitalen.

818. 5 VRAAGSTUK. Men heeft eenige gelijksoortige waren, maar van verschillende qualiteit, wegende A, B, C, D, E enz. ponden tegen a, b, c, d, e stuivers het pond: men vraagt, wanneer deze onder elkander gemengd zijn, den middelbaren prijs van dezelve te bepalen?

Oplossing. Men stelle de volgende evenredigheden

$$\begin{aligned} 1 \text{ lb} : A \text{ lb} &= a \text{ stuyv.} : Aa \text{ stuyv.} \\ 1 \text{ lb} : B \text{ lb} &= b \text{ stuyv.} : Bb \text{ stuyv.} \\ 1 \text{ lb} : C \text{ lb} &= c \text{ stuyv.} : Cc \text{ stuyv.} \\ &\text{enz. enz.} \end{aligned}$$

indien men nu alle deze vierde evenredigheden optelt, heeft men voor het beloop van alle die waren

$$Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + \text{enz. stuyv.}$$

Stel nu het pond van de gemengde waar x stuyv., dan wordt die zelfde geldwaarde door

$$(A + B + C + D + E + \text{enz.}) x \text{ stuyv.}$$

uitgedrukt, en wij hebben de vergelijking

$$(A + B + C + D + E + \text{enz.}) x = Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + \text{enz.}$$

en hier uit volgt dan :

$$x = \frac{Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + \text{enz.}}{A + B + C + D + E + \text{enz.}}$$

dat is: men deelt de som van de producten van de hoeveelheid van elke waar met de prijs, die de eenheid waard is, door de som van de hoeveelheden van alle de onderscheidene waren, en het quotiens zal de middelbare prijs zijn.

819. 6 VRAAGSTUK. Iemand heeft onderscheidene staven goud, wegende A, B, C, D , enz. hectogrammes tot a, b, c, d , enz. gehalte: welke is het middelbare gehalte van alle deze staven onder elkander gesmolten zijnde?

Oplossing. Men zal, als in art. 811. redenerende en het middelbare gehalte $= x$ stellende, vinden:

$$x = \frac{Aa + Bb + Cc + Dd + \text{enz.}}{A + B + C + D + \text{enz.}}$$

820. 7 VRAAGSTUK. Er is gegeven eene baar goud of zilver, wegende A hectogrammes tot a gehalte, hoe veel

alligie zal men er moeten bijvoegen, om het mengsel tot $a - b$ gehalte te brengen?

Oplossing. Stel de bij te voegen alligie $= x$ hectogrammes, daar de hoeveelheid gouds of zilvers dezelfde blijft, is het gehalte in de omgekeerde reden van het gewigt der baren: men heeft derhalve

$$\begin{aligned} a : a - b \text{ omg.} &= A : A + x \\ a - b : a &= A : A + x \\ (a - b) \times (A + x) &= Aa \\ (a - b) \times A + (a - b) \times x &= Aa \\ (a - b) \times x &= Aa - (a - b) \times A \\ (a - b) \times x &= Aa - Aa + bA = bA \\ x &= \frac{bA}{a - b} \end{aligned}$$

Hier uit volgt dezen regel: men vermenigvuldigt het gewigt van de gegeven baar met het getal, dat aanduidt, hoe veel het gehalte moet vermindert worden, en deelt het product door het getal, dat aanduidt welk gehalte het mengsel moet verkrijgen.

821. 8 VRAAGSTUK. Maar indien dezelfde baar op het gehalte van $a + b$ moest gebragt worden, hoe veel fijn goud of zilver zou men 'er in dit geval moeten bijvoegen?

Oplossing. Stel de hoeveelheid bij te voegen fijn goud of fijn zilver $= x$ hectogrammes, dan hebben wij de getallen a en $a + b$, waardoor de gehaltes worden uitgedrukt, deze als gebrokens aanmerkende, en het gehalte van het fijne goud of zilver $= 1$ stellende, is het gewigt fijn gouds of zilver, in de gegevene baar vervat, $= Aa$; hier bijvoegende x hectogrammes fijn goud of zilver, heeft men voor de hoeveelheid fijn goud in de vermengde baar $Aa + x$ hectogrammes; maar de geheele baar weegt na de vermenging $A + x$ hectogrammes, en deze moet $a + b$ gehalte hebben; de hoeveelheid fijn goud of zilver wordt dan nog uitgedrukt door $(A + x) \times (a + b)$, men heeft derhalve:

$$\begin{aligned} (A + x) \times (a + b) &= Aa + x \\ Aa + Ab + ax + bx &= Aa + x \\ ax + bx - x &= -Ab \\ (1 - a - b) x &= -Ab \\ x &= \frac{Ab}{1 - a - b} \end{aligned}$$

Vergelijk, om de toepassing te maken, art. 812.

822. 9 VRAAGSTUK. Wanneer men de metalen in het water weegt, verliezen zij aan gewigt zoo veel als het gewigt bedraagt van de hoeveelheid waters die zij verplaatsen. (Zie J. NUIS, Natuurkundig Schoolboek, Bladz. 136.) Indien men

nu door proeven bevonden heeft, dat A hectogrammes zuiver goud, en B hectogrammes zuiver zilver, in het water gewogen, respectievelijk a en b hectogrammes aan gewigt verliezen, en men verder bevonden heeft, dat eene vermenging van goud en zilver, wegende C hectogrammes, in het water gewogen, aan gewigt c hectogrammes verliezen, hoe zal men dan berekenen, welk eene hoeveelheid fijn gouds en fijn zilvers in deze vermenging bevat zij?

Oplossing. Stel de hoeveelheid fijn goud $= x$ hectogrammes, dan is de hoeveelheid fijn zilver $C - x$ hectogrammes; daar nu 2, 3, 4, enz. hectogrammes gouds of zilvers, in het water gewogen, natuurlijk 2, 3, 4, enz. maal zoo veel gewigts als eene hectogramme verliezen, is het verloren gewigt altijd evenredig aan het gewigt zelve, en wij zullen dus kunnen bepalen, hoe veel het zuiver goud en het zuiver zilver, in de vermenging begrepen, elk op zich zelve in het water gewogen zijnde, aan gewigt verliezen, wanneer wij deze twee regels van drie opstellen: 1°. A hectogr. goud staat tot x hectogr. goud $= a$ hectogr. verloren gewigt in het water tot het gewigt dat x hectogr. in het water verliezen; of $A : x = a$; vierde evenredige. Deze vierde evenredige wordt dan

$\frac{ax}{A}$. 2°. B hectogr. zilver staat tot $C - x$ hectogr. zilver gelijk b

hectogr. verloren gewigt in het water tot het gewigt dat $C - x$ hectogr. zilver in het water verliezen; of $B : C - x = b$ tot eene vierde

evenredige: die vierde evenredige wordt $\frac{bC - bx}{B}$. Wij weten nu, dat

het vermengde goud $\frac{ax}{A}$ en het vermengde zilver $\frac{bC - bx}{B}$ hectogrammes

in het water verliezen; de som van deze verliezen is natuurlijk gelijk aan het geheele verlies, en dit geheele verlies is bekend in $= c$: wij hebben dan

$$\frac{ax}{A} + \frac{bC - bx}{B} = c$$

en uit deze vergelijking moet x worden opgelost. Men vermenigvuldige deze vergelijking met $A \times B$, dan verkrijgt men:

$$aBx + bAC - bAx = cAB$$

$$aBx - bAx = cAB - bAC$$

$$x = A \times \frac{cB - bC}{aB - bA}$$

en hier uit wordt den regel bekend, om x en bijgevolg $C - x$ te vinden.

IX HOOFDDEEL. Over het trekken van den Quadraats- en Cubus-wortel.

LI LES. Over het trekken van den Quadraats-wortel.

823. Wanneer men getal 36 met zichzelf, dat is, met 36 vermenigvuldigt, wordt het product 1296 het kwadraat of vierkant van 36 genoemd. (1) Men noemt dit product ook wel de tweede magt van het getal 36. (2) De benaming van kwadraat of vierkant is uit de Meetkunst ontleend; om dat men namelijk den inhoud van een kwadraat of vierkant in vierkante voeten, meters, enz. vindt, door het getal voeten, meters, enz. in de zijden van dit vierkant begrepen, met zich zelve te vermenigvuldigen, noemt men elk getal dat met zich zelve vermenigvuldigd is, vierkant of kwadraat. (3)

824. Den vierkants-wortel uit eenig getal 4096 te trekken, is het getal 64 te vinden, het welk met zich zelve vermenigvuldigd zijnde, het getal 4096 zal voortbrengen. (4) Quadraats-wortel, vierkants-wortel en tweede magts wortel te trekken, zijn drie woorden, welke hetzelfde beteekenen. (5) — Quadraats-, vierkants- of tweede magts-wortel is derhalve het getal, dat, met zich zelve vermenigvuldigd zijnde, het gegeven kwadraat of vierkant wederom te voorschijn brengt. (6)

825. Wanneer men een getal beschouwt als uit twee deelen a en b te bestaan, en $a + b$ met $a + b$ vermenigvuldigt, of $(a + b)^2$ ontwikkelt, dan is (zie art. 67) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; maar nu is $2ab + b^2 = (2a + b) \times b$; derhalve $(a + b)^2 = a^2 + (2a + b) \times b$. Men verkrijgt dus het vierkant van eene tweeledige grootheid, of van de som van twee getallen, wanneer men bij het vierkant van het eerste lid optelt het product, dat men verkrijgt, wanneer men bij het dubbeld van het eerste lid het tweede lid optelt, en deze som met het tweede lid vermenigvuldigt. (7) Als bij

- (1) Wat verstaat men door het kwadraat of vierkant van een getal?
- (2) Geeft men daar ook eenen anderen naam aan?
- (3) Waaruit heeft deze benaming haren oorsprong?
- (4) Wat verstaat men door het trekken van den quadraats-wortel?
- (5) Heeft men geene andere woorden die hetzelfde beteekenen?
- (6) Wat verstaat men door den quadraats-wortel uit een getal?
- (7) Hoe kan men zich het kwadraat van de som van twee getallen voorstellen?

voorbeeld $a = 7$ en $b = 5$ is, zal $a + b = 12$ en $(a + b)^2 = 7 \times 7 + [2 \times 7 + 5] \times 5 = 49 + 19 \times 5 = 49 + 95 = 144$ zijn. (8) Offchoon men nu het vierkant door dadelijke vermenigvuldiging gemakkelijker vinden kan, moet men deze beschouwing echter als het hulpmiddel tot het trekken van een quadrats-wortel aanmerken. (9)

826 Wij hebben (I C. §. 756) aangevoerd, dat, wanneer A gelijk is, de som van eenige getallen $a + b + c + d + e + \text{enz.}$ het vierkant van dit getal bestaat uit de som van de volgende deelen:

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{e}} & \dots a^2 \\ 2^{\text{e}} & \dots (2a + b) \times b \\ 3^{\text{e}} & \dots (2a + 2b + c) \times c \\ 4^{\text{e}} & \dots (2a + 2b + 2c + d) \times d \\ 5^{\text{e}} & \dots (2a + 2b + 2c + 2d + e) \times e \\ 6^{\text{e}} & \dots (2a + 2b + 2c + 2d + 2e + f) \times f \\ \text{enz.} & \text{enz.} \end{array}$$

Volgens deze ontwikkeling bestaat het vierkant van het getal A uit even zoo vele deelen, als 'er deelen in het getal A gefeld worden; het eerste deel is het vierkant van het eerste deel; het tweede deel is de som van tweemaal het eerste deel, opgeteld met het tweede deel, en die som met het tweede deel vermenigvuldigd; het derde deel is de som van tweemaal de twee eerste deelen, en het derde vermenigvuldigd met het derde deel, en alzoo gaat zulks naar dezelfde wet regelmatig voort. (10)

827. Elk getal, 3756 bij voorbeeld, kan aangemerkt worden als te bestaan uit zoo vele deelen als 'er cijfers in dit getal zijn, namelijk $3756 = 3000 + 700 + 50 + 6$. Volgens onze algemeene vergelijking van het voorgaande art. is

$$\begin{aligned} 3756 \times 3756 &= 3000 \times 3000 \\ &+ [2 \times 3000 + 700] \times 700 \\ &+ [2 \times 3000 + 2 \times 700 + 50] \times 50 \\ &+ [2 \times 3000 + 2 \times 700 + 2 \times 50 + 6] \times 6 \end{aligned}$$

Maar nu is, elk dezer deelen berekenende,

$$\begin{aligned} 3000 \times 3000 &= 9000000 \\ [2 \times 3000 + 700] \times 700 &= 4690000 \\ [2 \times 3000 + 2 \times 700 + 50] \times 50 &= 372800 \\ [2 \times 3000 + 2 \times 700 + 2 \times 50 + 6] \times 6 &= 4506 \\ \text{derhalve } 3756 \times 3756 &= 14\,075\,36 \quad (11) \end{aligned}$$

828. Men verkrijgt het vierkant van een gegeven getal langs deze for-

(8) Helder dit door een voorbeeld op?

(9) Waar toe dient deze eigenschap?

(10) Hoe kan men zich het vierkant van een getal voorstellen, dat uit de som van drie, vier, of meer getallen bestaat?

(11) Pas deze formule op een voorbeeld in getallen toe?

mule, wel op eene omflagtiger wijze, dan door de gewone vermenigvuldiging; maar men moet dezelve grondig kennen, omdat zij ons eigenlijk leeren moet, hoe uit een gegeven getal den vierkants-wortel kan worden getrokken. (12) Men merke, om deze formule tot dat einde te leeren toepassen, op, dat, wanneer men de deelen van een vierkant, door de algemeene formule voorgesteld, van achter naar voren neemt, het eerste deel uit eenheden; het tweede deel uit honderdtallen; het derde deel uit tienduizendtallen; het vierde deel uit milioentallen; het vijfde deel uit honderdmiljoentallen zal bestaan, enz. (wel verstaande, dat men de deelen van den wortel zich voorstelt als uit de som van eenheden, tientallen, enz. te zijn zamengefeld). (13) En hier uit volgt dan, dat, wanneer uit een gegeven getal, bij voorbeeld, 387639851 den vierkants-wortel moet getrokken worden, en men dit getal, van achteren af te beginnen, van twee tot twee cijfers afdeelt, (aldus $8 \mid 87 \mid 63 \mid 98 \mid 51$) de wortel uit zoo veel cijfers zal bestaan, als 'er deelen of perken in dit getal voorkomen. (14) Dit onder het oog houdende, zal men den vierkants-wortel uit eenig getal door den volgende regel vinden, waarvan de grond in de zoo even bijgebrachte formule begrepen is.

829. REGEL 1^o. Verdeel het gegebene getal, waaruit den vierkants-wortel moet getrokken worden, van twee tot twee cijfers, van achter af; zoo vele verdeelingen, perken of vakken 'er dan in dit getal voorkomen, uit zoo veele cijfers zal de wortel bestaan.

2^o. Neem den naast kleineren wortel uit het voorste deel, en trek het vierkant van dien wortel van dit eerste deel af, dan is het eerste deel van den wortel bekend.

3^o. Schrijf nevens dit verschil de twee cijfers van het volgende vak: haal het achterste cijfer van dit getal (dat wij met * zullen teekenen) door, en beschouw de overblijvende cijfers als een deeltal. Verdubbel het eerste gedeelte van den wortel en beschouw dit dubbeld gedeelte als deeler: vraag hoe menigmaal is die deeler op het zoo evengemelde deeltal begrepen? dit quotient is dan het tweede deel van den wortel. Men stelde dit quotient in de plaats voor den wortel bestemd, als ook achter den zoo evengemelden deeler, zoodanig dat het met die deeler een doorlopend getal make: men vermenigvuldige dit doorlopend getal met het quotient, en stelde het product onder het getal, met * gemerkt, en trekke hetzelfde daarvan af.

4^o. Plaats nevens het verschil de twee cijfers van het derde vak; dan verkrijgt men een getal dat wij wederom met *

(12) Waartoe kan deze formule dienen?

(13) Wat merkt gij in deze formule op?

(14) Wat volgt hier uit?

II. DEEL.

G

zullen teekenen: haal het achterste cijfer door, en beschouw de overblijvende cijfer, als een deeltal, neem het dubbel van het reeds gevondene deel des wortels, dat nu uit twee cijfers bestaat, en vraag hoe menigmaal dit getal op het reeds gemelde deeltal begrepen zij? het quotient geeft het derde cijfer van den wortel: plaats dit derde cijfer in de plaats, voor den wortel bestemd, als ook achter den deeler, zoodanig dat het met den deeler een doorlopend getal uitmake, en vermenigvuldig het getal, dat gij op deze wijze verkrijgt, met hetzelfde quotient (het derde gedeelte van den wortel) en trek het product van het getal met * gemerkt.

5°. Plaats achter het verschil de twee cijfers van het vierde vak, en herhaal dezelfde bewerking in n°. 3 en 4. beschreven, tot dat het laatste cijfer van den wortel gevonden zij. (15)

830. VOORBEELD. Den vierkants-wortel uit 55612958976 te vinden?

Bewerking.

$$5 \mid 56 \mid 12 \mid 95 \mid 89 \mid 76 \quad \left\{ \begin{array}{l} abcdef \\ 235824 \text{ wortel.} \end{array} \right.$$

$$2 \times 2 = 4 \text{ A}$$

156 * hoe menigmaal 4 op 15? komt 3 maal.

$$43 \times 3 = 129 \text{ B}$$

2712 * hoe menigmaal 46 op 271? komt 5 maal.

$$465 \times 5 = 2325 \text{ C}$$

38795 * hoe menigmaal 470 op 3879? komt 8 maal.

$$4708 \times 8 = 37664 \text{ D}$$

113189 G * hoe menigm. 4716 op 11318? antw. 2 maal.

$$47162 \times 2 = 94324 \text{ E}$$

1886576 * hoe menigm. 47164 op 188657? antw. 4 maal.

$$471644 \times 4 = 1886576 \text{ F}$$

rest 0 en gaat op.

Verklaring. Men schrijft het gevevene getal op, en deelt het van achter af in perken van twee cijfers, dan heeft men 5 | 56 | 12 | 95 | 89 | 76. Nu vraagt men: wat is de naast kleinere wortel uit 5? Deze is 2, om dat 5 grooter dan $4 = 2 \times 2$ en kleiner dan $9 = 3 \times 3$ is. Deze 2 is nu het eerste deel van den wortel (welke ik, de bewerking met de formu-

(15) Welk is de regel om den vierkants-wortel uit een gegeven getal en vinden?

le van art. 826 te vergelijken a noem). Nu zeg ik $2 \times 2 = 4$; die 4 trek ik van 5 af, blijft 1. Achter dit verschil stel ik de twee volgende cijfers 56, die in het tweede vak staan, en dan heb ik 156; hier let ik nu alleen op 15 (de achterste cijfer doorhalende) ik verdubbel het eerste deel 2, dit geeft mij 4, en nu vraag ik: hoe veel maal 4 op 15? komt 3 maal. Dit quotient, dat ik met b beteekene, stel ik in de plaats, voor den wortel bestemd, en nog achter de 4 het dubbeld van a , dan heb ik $2a + b$; deze $43 = 2a + b$ vermenigvuldig ik met het quotient $3 = b$, dan heb ik $(2a + b) \times b = 129 = B$. Deze 129 trek ik af van 156, de rest is 27. Achter dit verschil schrijf ik de cijfers van het derde vak (namelijk 12) dan heb ik 3712. Met weglating van het achterste cijfer, vraag ik, na het nu gevondene deel des wortels, dat is 23, verdubbeld te hebben, hoe veel maal is dat dubbeld 46 op 271 begrepen? ik vind 5 maal: deze 5 is het derde deel $= c$; dit derde deel schrijf ik achter $46 = 2a + b$, dan is $465 = 2a + 2b + c$, en dit getal vermenigvuldig ik nu met $c = 5$, dan heb ik $465 \times 5 = (2a + 2b + c) \times c = 2325 = C$, en dit getal trek ik van 2712 af. Het verschil is 387. Achter dit verschil stel ik de twee cijfers van het vierde vak, dan heb ik 38795; ik verdubbel het reeds gevondene deel 235, dan heb ik $2a + 2b + 2c = 470$, en nu vraag ik: hoe veel maal 470 op 3879 (het achterste cijfer van 38795 weglatende) komt 8 maal; men heeft dus $d = 8$, $2a + 2b + 2c + d = 4708$, dit met $d = 8$ vermenigvuldigd, heeft men $(2a + 2b + 2c + d) \times d = 4708 \times 8 = 37664 = D$. Dit product trekke men van 38795, blijft 113189. — En ik ga nu op deze wijze tot het einde voort. (16) Deze bewerking is nu in alles overeenkomstig de formule van art. 826. Want men ziet met een weinig oplettendheids, dat de som der getallen in de bewerking, met A, B, C, D, E en F gerekend, gelijk is aan het gevevene getal; maar nu is

$$\begin{aligned} A &= a^2 \\ B &= (2a + b) \times b \\ C &= (2a + 2b + c) \times c \\ D &= (2a + 2b + 2c + d) \times d \\ E &= (2a + 2b + 2c + 2d + e) \times e \\ F &= (2a + 2b + 2c + 2d + 2e + f) \times f \end{aligned}$$

en diensvolgens $A + B + C + D + E + F = (a + b + c + d + e + f)^2 = (235824)^2 =$ het gevevene getal. (17)

VOORBEELDEN TOT OEFENING.

$$\begin{aligned} \sqrt{121} &= 11; \sqrt{169} = 13; \sqrt{225} = 15; \sqrt{576} = 24; \\ \sqrt{1024} &= 32; \sqrt{1296} = 36; \sqrt{106929} = 327; \\ \sqrt{1413721} &= 1189; \sqrt{1030225} = 1015; \sqrt{3236401} = 1799; \\ \sqrt{25090081} &= 5009; \sqrt{33663204} = 5802; \\ \sqrt{98982601} &= 9999; \sqrt{896822809} = 29947; \sqrt{8969226436} = 94706; \\ \sqrt{1995529167424} &= 1412632; \sqrt{20461872025} = 143025; \\ \sqrt{5027138321281} &= 2372159; \end{aligned}$$

(16) Verklaar het uitgewerkte voorbeeld?

(17) Hoe bewijst gij deze bewerking?

G 2

$\sqrt{94207594919376209401} = 9706059701$;
 $\sqrt{39952015199520004} = 199880002$;
 $\sqrt{110207594599376211001} = 1047980501$;
 $\sqrt{15999999968000000016} = 3999999996$.

831. Men onderscheidt de geheele getallen in *volkomene* en *onvolkomene* vierkante getallen. (18) De volkomene vierkante getallen zijn die, welke door de verheffing van een getal tot de tweede magt ontstaan zijn; (19) zij zijn de getallen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 225, 256, 289, enz. (20) de onvolkomene vierkante getallen zijn die, welke tusschen de volkomene vierkante getallen invallen, gelijk 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, enz. (21) Men kan uit deze laatste, die men ook wel *wortellooze getallen* noemt, wel bij benadering, maar niet volkomen, den vierkants-wortel vinden. (22)

832. De reden, waarom men uit een onvolkomen vierkant, bij voorbeeld uit 10, geen volkomen wortel vinden kan, is niet daarin gelegen, dat die wortel niet bestaat; maar omdat, zie art. 49^o, de wortel uit 10, met betrekking tot de éénheid, onmeetbaar is. (23) In den eersten cursus §. 767. is zulks algemeen bewezen: daar dit bewijs voor de eerste begifelen te moeilijk is, kan men zich met de volgende inductie vergenoegen. De vierkants wortel uit 10 is grooter dan 3 en kleiner dan 4; hij moet dus gelijk aan 3 en een gebroken zijn; laat dit gebroken, zoo veel mogelijk verkleind zijnde, zijn $\frac{a}{b}$; dan is $\sqrt{10} = 3 + \frac{a}{b} = \frac{3b+a}{b}$

$$= \frac{3b+a}{b}$$
 onverkleinbaar, en nu moet $10 = \frac{3b+a}{b} \times \frac{3b+a}{b} = \frac{9b^2 + 6ab + a^2}{b^2} = 9 + \frac{6a}{b} + \frac{a^2}{b^2}$; maar dit is, aangezien a en b onverkleinbaar zijn, niet mogelijk. (24) Echter zullen wij straks zien, dat men den wortel uit 10, zoo na kan vinden, als men verlangt. (25)

- (18) Hoe onderscheidt men de getallen?
 (19) Wat zijn volkomene vierkants-getallen?
 (20) Geef 'er voorbeelden van?
 (21) Wat zijn onvolkomene vierkants-getallen?
 (22) Kan men den vierkants-wortel wel uit wortellooze getallen vinden?
 (23) Wat is de reden, waarom men den vierkants-wortel niet uit een onvolkomen vierkant of wortelloos getal trekken kan?
 (24) Bewijs waarom dit niet geschieden kan?
 (25) Kan dit echter niet zeer nabij gebragt worden?

833. GRONDSTELLING. Wanneer men het product van twee of meer geheele getallen in het vierkant brengt, dan is dit vierkant altijd gelijk aan het product van de vierkanten der factoren. (26) Aldus is $(ab)^2 = a^2 b^2$; $(abc)^2 = a^2 b^2 c^2$; $(abcd)^2 = a^2 b^2 c^2 d^2$, enz. (27)

834. Hieruit volgt, omgekeerd: 1^o. Dat de vierkants-wortel uit het product van eenige vierkanten getallen gelijk is aan het product van de wortels uit deze getallen. (28) Aldus is $\sqrt{a^2 b^2} = ab$; $\sqrt{a^2 b^2 c^2} = abc$. (29)

835. 2^o. Maar, dat ons hier bijzonder te pas komt, is: dat de vierkants-wortel uit een getal, dat het product van een volkomen vierkant getal a^2 met een onvolkomen vierkant getal b gelijk is aan den wortel uit dit vierkante getal a , vermenigvuldigd met den wortel uit het onvolkomen vierkante getal. (30) Deze grondstelling wordt uitgedrukt door de zoo nuttige en telkens te pas komende vergelijking

$$\sqrt{(a^2 b)} = a \sqrt{b} \quad (31)$$

836. Men herleidt, indien het mogelijk zij, de wortels uit alle wortellooze getallen van den vorm $a^2 b$ tot $a \sqrt{b}$; omdat indien deze herleiding mogelijk is, veelal de wortel uit een grooter wortelloos getal tot dien uit een kleiner wortelloos getal herleid wordt. (32) Welke herleiding even zoo noodzakelijk is, als de herleiding van eene verkleinbare breuk tot eene onverkleinbare, vermits door zulk eene herleiding de uitdrukking altijd tot de eenvoudigste gedaante gebragt wordt. (33) Men moet dus, indien men den vierkants wortel uit een wortelloos getal te trekken heeft, onderzoeken, of dit wortelloos getal niet door een volkomen vierkant getal deelbaar zij? zoo niet, dan kan die herleiding geen plaats hebben, zoo ja, dan kan de wortel uit het wortelloos getal altijd tot den vorm $a \sqrt{b}$ gebragt worden. (34) Alzoo is

(26) Welke grondstelling komt bij de vierkants-wortelrekking uit wortellooze getallen te pas?

(27) Helder die grondstelling op?

(28) Wat volgt uit dezelve?

(29) Helder dit op?

(30) Wat volgt nog meer uit dezelve?

(31) Hoe wordt dit laatste door eene formule uitgedrukt?

(32) Wat gebruik maakt men van deze laatste formule?

(33) Is deze herleiding noodzakelijk?

(34) Wat is dan de regel, die men, indien men den vierkants-wortel uit een wortelloos getal zoeken zal, moet in acht nemen?

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ enz. (35) Deze uitdrukkingen hebben nu haar bijzonder voordeel; want indien ik, bij voorbeeld, gevonden heb, dat $\sqrt{2} = 1,41421356$ enz. is, zal ik, den vierkants wortel uit 8 nodig hebbende, geene nieuwe wortel-trekking behoeven uit te voeren; daar ik, aangezien $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ is, het tiendeelig gebroken $2,1,41421356$ slechts met twee behoeft te vermenigvuldigen, om te vinden: $\sqrt{8} = 2,82842712$. (36) Het zou derhalve voor het dagelijksche gebruik nuttig zijn te bezitten: 1°. eene tafel van de vierkants wortels uit de wortellooze getallen, die geen volkomen vierkant tot deeler hebben, als 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 46, 47, 51, 53, 55, enz. 2°. en tevens met de volgende tafel. (37)

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$	$\sqrt{76} = 4\sqrt{19}$	$\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$
$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$	$\sqrt{18} = 4\sqrt{3}$	$\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$	$\sqrt{112} = 4\sqrt{7}$
$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$	$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$	$\sqrt{84} = 2\sqrt{21}$	$\sqrt{116} = 2\sqrt{29}$
$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$	$\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$	$\sqrt{88} = 2\sqrt{22}$	$\sqrt{117} = 3\sqrt{13}$
$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$	$\sqrt{54} = 3\sqrt{6}$	$\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$	$\sqrt{120} = 2\sqrt{30}$
$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$	$\sqrt{56} = 2\sqrt{14}$	$\sqrt{92} = 2\sqrt{23}$	$\sqrt{124} = 2\sqrt{31}$
$\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$	$\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$	$\sqrt{96} = 4\sqrt{6}$	$\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$
$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$	$\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$	$\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$	$\sqrt{126} = 3\sqrt{14}$
$\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$	$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$	$\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$	$\sqrt{132} = 2\sqrt{33}$
$\sqrt{44} = 2\sqrt{11}$	$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$	$\sqrt{104} = 2\sqrt{26}$	$\sqrt{136} = 2\sqrt{34}$

enz.

enz.

enz.

837. Het komt er dan alleen maar op aan, om den vierkants-wortel uit een wortelloos getal a te vinden, dat geen volkomen vierkant getal tot deeler heeft. (38) Tot dat einde denke men het gegeven getal vermenigvuldigd te zijn met het vierkant van een der getallen 10, 100, 1000, enz. dat is met eenige evene magt van 10; denk in het algemeen met 10^n ; dan is (zie art. 835.)

$$\sqrt{(a \times 10^n)} = 10^n \sqrt{a}$$

(35) Helder dien regel door eenige voorbeelden op?

(36) Wat voordeel hebben nu deze herleiden?

(37) Wat zou voor het dagelijks gebruik nuttig zijn?

(38) Wat is dus het voornaamste daar het hier op aan komt?

en om derhalve uit den wortel $10\sqrt{a}$ tot $\sqrt{a}$ te komen, moet men $10^n\sqrt{a}$ eenvoudig door 10^n deelen, het geen geschiedt door van de cijfers des gevondenen wortels n cijfers af te snijden en in de tiendeelige breuk te brengen. (39) Men volgt daarom dezen REGEL. Trek den vierkants-wortel uit het wortelloos getal tot aan het laatste cijfer (alles volgens den regel van art. 829.) zet achter het laatste gevonden cijfer van den wortel het decimaal punt, en achter het overschot van de laatste bewerking twee nullen; telkens, om de volgende cijfers der tiendeelige breuk te vinden, dezelfde bewerking herhalende, tot dat men in de tiendeelige breuk zoo vele cijfers gevonden hebbe, als men, naar gelang der omstandigheden, nodig heeft. (40)

838. VOORBEELD. Om derhalve den vierkants-wortel uit 2 te trekken, werke men aldus. De wortel uit 2 is 1: hier is men nu reeds aan het laatste perk van het gegeven getal gekomen, men stelt derhalve in den wortel achter de 1 het decimaalpunt, en achter de 1, die het overschot der eerste bewerking is, twee nullen, en dit gedaan hebbende, gaat men met de bewerking, volgens den Regel van art. 829 voort, en verder voortwerkende, zal men vinden:

$$\begin{array}{r} 2,00 \left\{ 1,414 \text{ enz.} \right. \\ 1\overline{)2} = 1 \\ \underline{1} \\ 100 \\ 24 \times 4 = 96 \\ \underline{96} \\ 281 \\ 281 \times 1 = 281 \\ \underline{281} \\ 1900 \\ 2824 \times 4 = 11296 \\ \underline{11296} \\ 6000 \text{ enz.} \end{array}$$

$$\sqrt{2} = 1,41421\ 35623\ 73095\ 04880 \text{ enz.}$$

doch men kan uit de bewerking duidelijk zien: dat men nooit zoo ver kan komen dat het overschot nul wordt. (41) Zie hier meer voorbeelden:

$$\sqrt{3} = 1,73205\ 08075\ 68877\ 2$$

$$\sqrt{5} = 2,23606\ 79774\ 99789\ 6$$

$$\sqrt{6} = 2,44948\ 97427\ 83178\ 0$$

(39) Hoe rigt men deze worteltrekking in?

(40) Welke is de algemeene regel, om den vierkants-wortel uit een wortelloos getal te vinden?

(41) Geef een voorbeeld van dien regel?

$$\sqrt{7} = 2,64575 \quad 13110 \quad 6450 \quad 5$$

$$\sqrt{10} = 3,16227 \quad 76601 \quad 68379 \quad 3$$

$$\sqrt{17} = 4,12310 \quad 56256 \quad 17660 \quad 5$$

839. Of schoon de vierkants-wortel uit een wortelloos getal niet volkomen kan gevonden worden, kan men door het voortzetten der bewerking denzelfden toch zoo na bepalen als men goedvindt: elk nieuw cijfer der tiendeelige breuk geeft aan denzelfden eene nieuwen graad van naauwkeurigheid en nadere limieten of grenzen, tuschen welken dien wortel gelegen is; aldus is

$$\sqrt{2} \text{ grooter } 1,4 \text{ en kleiner dan } 1,5$$

$$\sqrt{2} \text{ grooter } 1,41 \text{ en kleiner dan } 1,42$$

$$\sqrt{2} \text{ grooter } 1,414 \text{ en kleiner dan } 1,415$$

hetwelk bij de proef blijken zal; want $1,414 \times 1,414$ zal kleiner dan 2 en $1,415 \times 1,415$ zal grooter dan 2 zijn; en men zal door deze benadering den wortel, indien men zulks verkies, tot zulk eene naauwkeurigheid kunnen brengen, dat hij van de preciese waarde zoo weinig afwijkt, dat deze afwijking minder is dan een zandkorrel in vergelijking van het geheel. (42)

840. Wanneer men zich herinnert hoedanig de producten en bij gevolg ook de magten van tiendeelige breuken gevonden worden, dan zal het van zelf blijken, hoe men den vierkants-wortel uit eene tiendeelige breuk zal moeten trekken. Men verdeelt, het decimaal-punt tot grondslag nemende, de geheelen, (indien 'er voorkomen) van achter naar voren, van twee tot twee cijfers en de tiendeeligen van voren naar achteren insgelijks van twee tot twee cijfers, en voorts behandelt men de geheele uitdrukking, als of het een geheel getal ware, zorg dragende, dat men, in den loop der berekening, het decimaal-punt in den wortel stelle daar ter plaats, waar men in de berekening van de geheelen tot de tiendeeligen overgaat. (43)

841. VOORBEELD. Den vierkants-wortel te trekken uit 1389,7984

$$13 \mid 89, 79 \mid 84 \quad \left\{ \begin{array}{l} 37, 28 \text{ wortel} \end{array} \right.$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$67 \times 7 = \begin{array}{r} 480 \\ 469 \end{array}$$

$$747 \times 2 = \begin{array}{r} 2070 \\ 1484 \end{array}$$

$$7448 \times 8 = \begin{array}{r} 59584 \\ 59584 \\ \hline 0 \end{array}$$

842. 2 VOORBEELD. Den vierkants-wortel te trekken uit 0,0000680625?

$$0,00 \mid 00 \mid 68 \mid 06 \mid 25 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0,00825 \end{array} \right.$$

$$8 \times 8 = 64$$

$$162 \times 2 = \begin{array}{r} 400 \\ 324 \end{array}$$

$$1645 \times 5 = \begin{array}{r} 8225 \\ 8225 \\ \hline 0 \end{array}$$

Men zegt: de wortel uit nul is nul, en men plaatst het decimaal-punt. Voorts de wortel uit 00 is 0; nogmaals de wortel uit 00 is 0, en verder, de wortel uit 68 is 8, enz. (45)

VOORBEELDEN. $\sqrt{10,6929} = 3,27$; $\sqrt{99,2016} = 9,96$; $\sqrt{152,399025} = 12,345$; $\sqrt{0,1296} = 0,36$; $\sqrt{0,2016} = 0,04$; $\sqrt{0,000144} = 0,012$; $\sqrt{0,0000288369} = 0,00537$. Wanneer de wortels onmeetbaar zijn, $\sqrt{111,9875} = 10,5824146$; $\sqrt{0,073521} = 0,2711475$; $\sqrt{4967,0962} = 70,477629$; $\sqrt{0,0013} = 0,0360555$; $\sqrt{1,6} = 1,264911$; $\sqrt{0,7} = 0,8366$. Voorts nog den vierkants-wortel uit 3,7; 11,3; 0,19; 0,031257, en 0,0000981672, alle tot tien cijfers in de tiendeeligen.

843. Om den vierkants-wortel uit eene gewone breuk

(42) Maakt deze benadering geene te groote onnaauwkeurigheid?

(43) Hoe trekt men den wortel uit een tiendeelige breuk?

(44) Verklaar het eerste voorbeeld?

(45) Verklaar de bewerking van het tweede voorbeeld?

$\frac{a}{b}$ te vinden, redeneer men aldus. Het gebroken $\frac{a}{b}$ is (zie

art. 417.) gelijk aan $\frac{ab}{bb}$; derhalve is $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{bb}}$; maar

nu is $\sqrt{\frac{ab}{bb}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{bb}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{1}{b} \times \sqrt{ab}$. Men vindt

derhalve den vierkants-wortel uit een gebroken, wanneer men den teller met den noemer vermenigvuldigt, en den vierkants-wortel uit het product door den noemer der gegevens breuk deelt. (46)

844. Aldus is $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$; $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \sqrt{5}$. (47)

845. En om den wortel uit een gemengd getal te trekken, moet men eerst dit gemengde getal tot eene breuk herleiden, en voorts den voorgaanden regel op deze breuk toepassen. (48)

846. Aldus is $\sqrt{2\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{10} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$; $\sqrt{3\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{30} = \frac{1}{3} \sqrt{30}$. (49)

847. Men brengt alzoo het vierkants-wortel-trekken uit een gebroken of gemengd getal tot de worteltrekking uit een geheel getal. (50) Om dus den wortel uit $\frac{1}{2}$ te trekken, zal men daar $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ is $\sqrt{2} = 1.414213562373$ enz. met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen of door 2 deelen, en $\sqrt{\frac{1}{2}}$ zal worden 0,70710678 1865. Insgelijks zal $\sqrt{2\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{10} = 1,58113883$ enz. zijn. (51)

848. Soms tijds is in den teller of noemer der breuk een factor begrepen, die een vierkant getal is: in dit geval kan de wortel eenvoudiger worden uitgedrukt. (52)

849. Bij voorbeeld $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{9 \times 2} = \frac{1}{2} \sqrt{18}$; $\sqrt{8\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{34} = \frac{1}{2} \sqrt{34}$; $\sqrt{25 \times 3} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$. (53)

(46) Hoe vindt men den vierkants-wortel uit een gebroken?

(47) Geef hier van voorbeelden?

(48) Hoe trekt men den wortel uit een gemengd getal?

(49) Geef hier van voorbeelden?

(50) Wat volgt hier?

(51) Geef hier van voorbeelden?

(52) Wat moet men opmerken, wanneer de teller of noemer een vierkant getal tot factor heeft?

(53) Geef hier van voorbeelden?

Meer VOORBEELDEN. Den vierkants wortel te trekken uit de volgende gebroken en gemengde getallen. Uit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{23}$, $\frac{1}{29}$, $\frac{1}{31}$, $\frac{1}{37}$, $\frac{1}{41}$, $\frac{1}{43}$, $\frac{1}{47}$, $\frac{1}{53}$, $\frac{1}{59}$, $\frac{1}{61}$, $\frac{1}{67}$, $\frac{1}{71}$, $\frac{1}{73}$, $\frac{1}{79}$, $\frac{1}{83}$, $\frac{1}{89}$, $\frac{1}{97}$, $\frac{1}{101}$, $\frac{1}{103}$, $\frac{1}{107}$, $\frac{1}{109}$, $\frac{1}{113}$, $\frac{1}{127}$, $\frac{1}{131}$, $\frac{1}{137}$, $\frac{1}{139}$, $\frac{1}{149}$, $\frac{1}{151}$, $\frac{1}{157}$, $\frac{1}{163}$, $\frac{1}{167}$, $\frac{1}{173}$, $\frac{1}{179}$, $\frac{1}{181}$, $\frac{1}{187}$, $\frac{1}{191}$, $\frac{1}{193}$, $\frac{1}{197}$, $\frac{1}{199}$, $\frac{1}{211}$, $\frac{1}{223}$, $\frac{1}{227}$, $\frac{1}{229}$, $\frac{1}{233}$, $\frac{1}{239}$, $\frac{1}{241}$, $\frac{1}{251}$, $\frac{1}{257}$, $\frac{1}{263}$, $\frac{1}{269}$, $\frac{1}{271}$, $\frac{1}{277}$, $\frac{1}{281}$, $\frac{1}{283}$, $\frac{1}{293}$, $\frac{1}{307}$, $\frac{1}{311}$, $\frac{1}{313}$, $\frac{1}{317}$, $\frac{1}{331}$, $\frac{1}{337}$, $\frac{1}{347}$, $\frac{1}{349}$, $\frac{1}{353}$, $\frac{1}{359}$, $\frac{1}{367}$, $\frac{1}{373}$, $\frac{1}{379}$, $\frac{1}{383}$, $\frac{1}{389}$, $\frac{1}{397}$, $\frac{1}{401}$, $\frac{1}{409}$, $\frac{1}{419}$, $\frac{1}{431}$, $\frac{1}{433}$, $\frac{1}{439}$, $\frac{1}{443}$, $\frac{1}{449}$, $\frac{1}{457}$, $\frac{1}{461}$, $\frac{1}{463}$, $\frac{1}{467}$, $\frac{1}{479}$, $\frac{1}{487}$, $\frac{1}{491}$, $\frac{1}{499}$, $\frac{1}{503}$, $\frac{1}{509}$, $\frac{1}{521}$, $\frac{1}{523}$, $\frac{1}{529}$, $\frac{1}{541}$, $\frac{1}{547}$, $\frac{1}{557}$, $\frac{1}{563}$, $\frac{1}{569}$, $\frac{1}{571}$, $\frac{1}{577}$, $\frac{1}{587}$, $\frac{1}{593}$, $\frac{1}{599}$, $\frac{1}{601}$, $\frac{1}{607}$, $\frac{1}{613}$, $\frac{1}{617}$, $\frac{1}{619}$, $\frac{1}{623}$, $\frac{1}{629}$, $\frac{1}{631}$, $\frac{1}{637}$, $\frac{1}{641}$, $\frac{1}{643}$, $\frac{1}{647}$, $\frac{1}{653}$, $\frac{1}{659}$, $\frac{1}{661}$, $\frac{1}{667}$, $\frac{1}{671}$, $\frac{1}{673}$, $\frac{1}{677}$, $\frac{1}{683}$, $\frac{1}{689}$, $\frac{1}{691}$, $\frac{1}{697}$, $\frac{1}{701}$, $\frac{1}{703}$, $\frac{1}{709}$, $\frac{1}{713}$, $\frac{1}{719}$, $\frac{1}{727}$, $\frac{1}{731}$, $\frac{1}{733}$, $\frac{1}{737}$, $\frac{1}{743}$, $\frac{1}{749}$, $\frac{1}{751}$, $\frac{1}{757}$, $\frac{1}{761}$, $\frac{1}{763}$, $\frac{1}{767}$, $\frac{1}{773}$, $\frac{1}{779}$, $\frac{1}{781}$, $\frac{1}{787}$, $\frac{1}{791}$, $\frac{1}{793}$, $\frac{1}{797}$, $\frac{1}{803}$, $\frac{1}{809}$, $\frac{1}{811}$, $\frac{1}{817}$, $\frac{1}{821}$, $\frac{1}{823}$, $\frac{1}{827}$, $\frac{1}{829}$, $\frac{1}{833}$, $\frac{1}{839}$, $\frac{1}{841}$, $\frac{1}{847}$, $\frac{1}{851}$, $\frac{1}{853}$, $\frac{1}{857}$, $\frac{1}{859}$, $\frac{1}{863}$, $\frac{1}{869}$, $\frac{1}{871}$, $\frac{1}{877}$, $\frac{1}{881}$, $\frac{1}{883}$, $\frac{1}{887}$, $\frac{1}{893}$, $\frac{1}{899}$, $\frac{1}{901}$, $\frac{1}{907}$, $\frac{1}{911}$, $\frac{1}{913}$, $\frac{1}{917}$, $\frac{1}{919}$, $\frac{1}{923}$, $\frac{1}{929}$, $\frac{1}{931}$, $\frac{1}{937}$, $\frac{1}{941}$, $\frac{1}{943}$, $\frac{1}{947}$, $\frac{1}{953}$, $\frac{1}{959}$, $\frac{1}{961}$, $\frac{1}{967}$, $\frac{1}{971}$, $\frac{1}{973}$, $\frac{1}{977}$, $\frac{1}{983}$, $\frac{1}{989}$, $\frac{1}{991}$, $\frac{1}{997}$.

Toepaselijke VRAAGSTUKKEN.

1 VRAAGSTUK. Een zeker getal personen hebben vertoerd 59 gl. 9 stuiv. Hoe groot is dit getal personen geweest, indien elk persoon zoo vele stuivers vertoerd heeft als 'er personen waren?

2 VRAAGSTUK. Wanneer men de helft van een getal met deszelfs derde gedeelte vermenigvuldigt, is het product 3456; welk is dit getal?

3 VRAAGSTUK. Hoe groot moet de zijde van een vierkant genomen worden, op dat het den inhoud van 819 vierkante voeten hebbe?

4 VRAAGSTUK. 'Er zijn drie stukken land, welke de lengte van 37, 23 en 29 roeden, en de breedte van 17, 11 en 18 roeden hebben; hoe groot moet de zijde van een vierkant stuk land genomen worden, om even zoo veel inhoud te hebben als deze drie stukken land te zamen?

5 VRAAGSTUK. Eene kamer, die de lengte van 31 en de breedte van 23 voeten heeft, wil men volkomen vierkant maken en denzelfden inhoud laten behouden: hoe groot moet men dan de lengte en breedte nemen, die in dit geval gelijk worden?

6 VRAAGSTUK. Tusschen de getallen 317 en 817 eene midden-evenredige te vinden?

7 VRAAGSTUK. Van eenen rechthoekigen driehoek ABC rechthoekig in B, is AB = 173 voeten BC = 169 voeten; hoe lang is de hypotheus of schuifschijde AC?

8 VRAAGSTUK. Maar indien van dienzelfden rechthoekigen driehoek AC = 317 voeten en BC = 218 voeten was, hoe lang zou dan de rechthoekszijde AB zijn?

LII LES. Over het trekken van den Cubus-wortel.

849. Een product van drie gelijke getallen a , a , en a of a^3 wordt de derde magt, of cubus, of teerling van dat getal a genoemd. (1) Een cubus of derde magt ontstaat ook, wanneer men het vierkant, of de tweede magt a^2 van een getal a nog eens met deszelfs wortel vermenigvuldigt. (2) De benaming van cubus of teerling (een ligchaam van gelijke lengte, breedte en dikte) is uit de Meerkunst afkomstig; de inhoud van dit ligchaam wordt uitgedrukt door zoo vele cubieke eenheden, als door de derde magt van het getal, dat voorstelt, hoe veel de eenheid van de lengtemaat in de zijde van den cubus begrepen is, wordt uitgedrukt. (3)

(1) Wat is de derde magt of teerling van een getal?

(2) Hoe wordt de cubus van een getal anders gevonden?

(3) Van waar is de benaming van cubus oorspronkelijk?

850. Den cubus-wortel uit een getal 64 te trekken, is het getal 4, hetwelk tot de derde magt verheven zijnde, dit getal 64 weder voortbrengt, te vinden. (Het is uit den inhoud van eenen cubus zijne zijde te vinden.) (4) Cubus-wortel, teerlings-wortel, derde-magts-wortel zijn drie spreekwijzen, die dezelfde beteekenis hebben. (5)

851. Wanneer men het vierkant $a^2 + 2ab + b^2$ met deszelfs wortel $a + b$ vermenigvuldigt, verkrijgt men voor het product, dat is, voor den cubus van $(a + b)$ de uitdrukking $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Deze bestaat uit vier termen: 1°. uit den cubus van a ; 2°. uit driemaal het product van het vierkant van a met het getal b ; 3°. uit driemaal het product van a met het vierkant van b ; en 4°. uit den cubus van b . (6)

852. Men kan deze uitdrukking onder eene andere gedaante brengen. De drie laatste termen zijn deelbaar door b ; en de cubus eener tweeledige grootheid $(a + b)$ kan derhalve op deze wijze worden voorgesteld:

$$(a + b)^3 = a^3 + [3a^2 + 3ab + b^2] \times b$$

en de cubus eener tweeledige grootheid $a + b$ bestaat derhalve uit twee leden, 1°. uit den cubus van het eerste lid a ; 2°. uit het product van de som van driemaal het vierkant van het eerste lid met driemaal het product van de beide leden en het vierkant van het tweede lid, en deze som vermenigvuldigd met het tweede lid. (7)

853. Wij hebben (I C. § 789), op grond dezer formule, bewezen, dat de cubus van een getal A , bestaande uit de som van eenige getallen $a + b + c + d + \text{enz.}$ kan aangemerkt worden als uit even zoo vele leden te bestaan, als 'er leden a, b, c enz. in het getal A gedacht worden, en dat deze leden zijn:

$$1^\circ. a^3$$

$$2^\circ. [3a^2 + 3ab + b^2] \times b$$

$$3^\circ. [3(a + b)^2 + 3(a + b)c + c^2] \times c$$

(4) Wat wil het zeggen den cubus-wortel uit een getal te trekken?

(5) Drukt men cubus-wortel nog door andere woorden uit?

(6) Hoe kan men zich den cubus van een getal, dat uit de som van twee getallen bestaat, voorstellen?

(7) Op welke wijze kan men zich anders den cubus van een tweeledig getal voorstellen?

$$4^\circ. [3(a + b + c)^2 + 3(a + b + c)d + d^2] \times d$$

$$5^\circ. [3(a + b + c + d)^2 + 3(a + b + c + d)e + e^2] \times e$$

enz.

enz.

Volgens deze ontwikkeling, bestaat de cubus van het getal A vooreerst uit den cubus van het eerste lid a ; ten tweeden uit het product van driemaal het vierkant van het eerste lid, driemaal het product van de twee eerste leden en nog het vierkant van het tweede lid, en deze som vermenigvuldigd met het tweede lid; ten derde uit het product van driemaal het vierkant van de som van de twee eerste leden, nog driemaal de som der twee eerste leden, vermenigvuldigd met het derde en nog het vierkant van het derde lid en deze som vermenigvuldigd met het derde lid. — De vierde, vijfde, zesde en volgende leden zijn voorts uit $a + b + c$ en d , uit $a + b + c + d$ en e , uit $a + b + c + d + e$ en f enz. op dezelfde wijze gemaakt als het derde lid uit de som $a + b$ en uit c gemaakt zijn, zoo dat alle de ontwikkelde termen van $(a + b + c + d + \text{enz.})$ gelijkvormig zijn. (8)

854. Uit deze formule volgt de regel, om uit een gegeven getal den cubus-wortel te trekken.

REGEL. 1°. Verdeel den gegebenen cubus van achter af in vakken, van drie tot drie cijfers: het getal dezer vakken is gelijk aan het getal cijfers, waaruit de wortel bestaan zal.

2°. Neem den naast kleineren cubus-wortel uit het eerste of voorste vak (waartoe dit tafeltje

wortels	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9
cuben	1, 4, 27, 64, 125, 216, 343, 512 en 729

dienen kan,) trek den naast kleineren cubus van het voorste vak af, en voeg achter het verschil de cijfers van het tweede vak. Het getal dat men als dan verkrijgt, noemen wij kortheidshalve het getal (*).

3°. Neem het drievoudig vierkant van het gevondene gedeelte des wortels, als deeler, en onderzoek, door divisie, hoe veelmaal die deeler op het getal (*), echter altijd met weglating van de twee achterste cijfers, begrepen zij? vermenigvuldigd het komende quotient met het drievoud van het

(8) Hoe is de cubus van eenig getal, dat uit de som van drie of meer getallen bestaat, zamengesteld?

eerste gedeelte des wortels. Tel nu het drievoudig vierkant van het eerste deel met dit product, en het vierkant van het quotient bij elkander, latende het tweede en het derde dezer getallen elk één cijfer achter uit springen: deze som vermenigvuldige men nogmaals met het gevondene quotient, en trekke het product van het getal (*) af.

4°. Achter het verkregene verschil plaatze men de drie cijfers van het derde vak, dan verkrijgt men een nieuw getal (*), en men herhale, om het derde, vierde en de volgende cijfers des wortels te vinden, dezelfde bewerking. (9)

855. VOORBEELD. Om den cubus-wortel te vinden uit 565211329689614616? (Zie de bewerking op de volgende bladzijde.)

Verklaring. Men verdeelt het gegevene getal van achter af van drie tot drie cijfers, en vraagt: welke is de naaste cubus wortel uit 565? deze is 8. Men trekt den cubus van $8 = 8 \times 8 \times 8 = 512$ van 565 rest 53: naast deze 53 stelle men de cijfers van het tweede vak 211, dan heeft men in p het getal 53211.

Het eerste deel van den wortel is $a = 8$. Om nu het getal B te vinden, vermenigvuldige men $a^2 = 64$ en $a = 8$ beide met 3, komt $3a^2 = 192$ en $3a = 24$: nu vraagt men: hoe veel is 192, begrepen op 532? komt voor b het getal 2; nu vermenigvuldige men $3a^2 = 24$ met $b = 2$; komt $3ab = 48$, en $b^2 = 4$ zijnde, stelle men $3a^2 = 192$; $3ab = 48$ en $b^2 = 4 = 04$ zoodanig onder elkander, dat elk volgend getal een cijfer achteruit springe (het geen daarom geschiedt, omdat het cijfer 8 een tiental in vergelijking van het cijfer 2 zijnde, $3a^2$ in vergelijking van b^2 een honderdtal, en $3ab$ in vergelijking van b^2 een tiental is,) de som dezer getallen $3a^2 + 3ab + b^2 = 19684$ vermenigvuldige men met $b = 2$, komt voor het getal B, dat is, voor $(3a^2 + 3ab + b^2) \times b$ het getal 38168. Dit getal trekke men van p of van 53211, rest 13843, naast dit getal stelle men de cijfers van het derde vak, namelijk 329, dan heeft men het getal q of 13843329.

Om nu verder het volgend cijfer van den wortel of c te vinden, brenge men het reeds gevondene deel des wortels of $a + b = 82$ in het vierkant, dan is $(a + b)^2 = 6724$, en nu vermenigvuldige men $(a + b)^2 = 6724$ en $a + b = 82$ elk met 3, komt $3(a + b)^2 = 20172$ en $3(a + b) = 246$. Men late van het getal q de twee achterste cijfers weg, en vrage: hoe veel maal is 20172 of 138433 begrepen? komt 6 maal of $c = 6$. Men vermenigvuldige $3(a + b) = 246$ met $c = 6$, komt $3(a + b) \times c = 1476$; en daar $c^2 = 36$ is, stelle men telkens een cijfer achteruit springende, $3(a + b)^2 = 20172$, $3(a + b)c = 1476$ en $c^2 = 36$ onder elkander, en dan is de som $3(a + b)^2 + 3(a + b)c + c^2 = 2031996$; deze som vermenigvuldige men met $c = 6$, komt eindelijk het getal C, dat is $[3(a + b)^2 + 3(a + b)c + c^2] \times c = 12191976$. Dit

(Vervolg. Bladz. 160.)

BEWERKING van het VOORBEELD van art. 855 bl. 158.

Cubus 565 | 211 | 329 | 689 | 614 | 616 } wortel 826806
512 . . . A
abc def

$p \dots 53211$
39368 . . . B
 $q \dots 13843329$
12191976 . . . C
 $r \dots 1651353689$
1639048832 . . . D
 $s \dots 12304857614616$
12304857614616 . . E
rest 0

Om het getal C te vinden.

82
82 verm.
6724 82
20172 246
 $c = 6 \dots 36$
20172 . . . 1476
36
2031996
6
12191976 = het getal C.

NB. Bij de volgende bewerking zal men vinden: dat het volgende cijfer een nul moet zijn.

Om het getal E te vinden.

82680
82680
6835982400 82680
20507947200 248040
 $f = 6 \dots 36$
20507947200 . . . 1488240 36
1488240
36
2050809603436
6
12304857614616 = het getal E.

Om het getal B te vinden.

$a^2 \dots 64$
64 8
3
192 24
 $b = 2 \dots 4$
192 48 4
48
04
19684
 $c = 2$
38368 = het getal B.

Om het getal D te vinden.

826
826
682276 826
2046828 2478
 $d = 8 \dots 64$
2046828 . . . 19824 64
19324
04
204881104
8
1639048832 = het getal D.

(9) Welke is de regel om den cubus-wortel uit eenig getal te trekken?

getal trekke men af van q rest 1651353; achter deze rest stelle men de cijfers van het vierde vak, namelijk 689, en dan heeft men het getal r of 1651353689, hetwelk voor het vinden van het volgende cijfer van den wortel dienen moet, wordende, zoo als breeder in de uitgewerkte schets kan gezien worden, elk volgend cijfer van den wortel op dezelfde wijze met behulp van de formule van art. 85 gevonden. (10) Na het einde der bewerking blijkt: dat de som der getallen A, B, C, D en E aan het gegeven getal gelijk zijn, en dat derhalve de gevraagde wortel = 826806 is. (11).

856. Op dezelfde wijze worden de volgende voorbeelden berekend.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{39304} &= 34; \sqrt[3]{704969} = 89; \sqrt[3]{78953589} = 429; \\ \sqrt[3]{167284151} &= 551; \sqrt[3]{225866529} = 609; \sqrt[3]{3673650007} = 1543; \\ \sqrt[3]{51497400832} &= 3768; \sqrt[3]{39791521944} = 3414; \\ \sqrt[3]{23076099423} &= 2847; \sqrt[3]{220239487319} = 6039; \\ \sqrt[3]{19880486829} &= 2709; \sqrt[3]{8084294343} = 2007, \\ \sqrt[3]{253452325273412980702635} &= 63284705; \\ \sqrt[3]{2276260963735440852831} &= 28340511; \\ \sqrt[3]{32769256464059044417929} &= 32000409.\end{aligned}$$

857. Men onderscheidt de getallen in *volkomene* en *onvolkomene cubieke getallen*. (12) Volkomen cubieke getallen zijn 1, 8, 27, 64, 125 enz. welke uit de derde magten of de cuben der natuurlijke getallen ontstaan. (13) Onvolkomene als 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 enz. welke tusschen de volkomene cubieke getallen invallen. (14) Uit de onvolkomene cubieke getallen kunnen de wortels niet volkomen, doch alleen bij benadering, echter zoo naauwkeurig als men verkiest gevonden worden. (15) Men volgt dezen

858. REGEL. Wanneer men tot het laatste perk gekomen is, stelt men achter het gevondene gedeelte van den wortel het decimaal-punt, en stelt achter het overschot van

de laatste bewerking drie nullen, en gaat op deze wijze voort, tot dat men een genoegzaam aantal cijfers der tiendeelige breuk gevonden hebbe. (16)

VOORBEELDEN.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} &= 1,2599210; \sqrt[3]{3} = 1,4422496; \sqrt[3]{4} = 1,5574011; \\ \sqrt[3]{5} &= 1,7099759; \sqrt[3]{6} = 1,8171206; \sqrt[3]{7} = 1,9129312; \\ \sqrt[3]{9} &= 2,0800837; \sqrt[3]{10} = 2,1544347 \text{ enz.}\end{aligned}$$

859. Om den cubus-wortel uit eene tiendeelige breuk te trekken, deele men, van het decimaal-punt af, de geheelen, van achter naar voren, van drie tot drie cijfers, en de tiendeeligen, van voren naar achteren, van drie tot drie cijfers, en trekke den wortel als naar gewoonte, mits plaatsende het decimaal-punt in den wortel op zijne behorelijke plaats. (17)

VOORBEELDEN.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{390778,221231} &= 73,11; \sqrt[3]{0,027818127} = 0,303; \\ \sqrt[3]{0,000016003008} &= 0,0252; \sqrt[3]{0,065} = 0,40107257; \\ \sqrt[3]{1,6} &= 1,16960709.\end{aligned}$$

$$860. \text{ Om dat } \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a b^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a b^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{1}{b} \sqrt[3]{a b^2}$$

is, volgt hier uit, dat men den cubus wortel uit een gebroken vinden zal, wanneer men den cubus-wortel trekt uit het product, dat men verkrijgt, wanneer men den teller met de tweede magt van den noemer vermenigvuldigt en dien wortel door den noemer deelt. (18)

$$\text{VOORBEELDEN. } \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{4} = 0,7937005; \sqrt[3]{\frac{1}{18}} = \frac{1}{18} \sqrt[3]{18};$$

$$\sqrt[3]{1\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{12} = 1,417143$$

NB. In den eersten Cursus onzer Wiskundige Lesfen vindt men meer bijzonderheden, aangaande het trekken van den quadrats- en cubus-wortels uit geveene getallen.

- (16) Hoe benadert men den wortel uit onvolkomen cubieke getallen?
(17) Hoe trekt men den cubus-wortel uit eene tiendeelige breuk?
(18) Hoe trekt men den wortel uit een gewoon gebroken?

(10) Verklaar het bijgevoegde voorbeeld?

(11) Wat is de grond dezer bewerking?

(12) Hoe onderscheidt men de getallen?

(13) Wat zijn volkomen cubieke getallen?

(14) Wat zijn onvolkomene cubieke getallen?

(15) Kan men uit onvolkomen cubieke getallen den wortel wel trekken?

X HOOFDEEL. Over de Reken- en Meetkundige Reeksen en de Logarithmen.

LIII LES. Over de Rekenkundige Reeksen.

861. Eene Rekenkundige Reeks is eene rij van getallen, welke met een gelijk verschil opklimmen of afdalen. (1) Bij voorbeeld

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, enz.
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, enz.
100, 98, 96, 94, 92, 90, 88, 86, 84, enz. (2)

862. Men kan ook zeggen: eene rekenkundige reeks is eene reeks, waarvan twee op elkander volgende termen hetzelfde verschil hebben. (3)

863. Men onderscheidt de rekenkundige reeksen in opklimmende en afdalende. (4) Eene reeks is opklimmend, wanneer elke volgende term grooter dan de voorgaande is; gelijk 7, 11, 15, 19, 23, 27, enz. (5): en afdalend, wanneer elke volgende term kleiner dan de voorgaande is; gelijk 33, 29, 25, 21, 17, 13, enz. (6)

864. Het verschil van eene rekenkundige reeks is het verschil van twee op elkander volgende termen (7)

865. Laat de eerste term van eene rekenkundige reeks $= a$; het verschil der reeks $= v$ gesteld worden; dan is de opklimmende reeks:

$a, a+v, a+2v, a+3v, a+4v, a+5v$, enz.

en de afdalende reeks:

$a, a-v, a-2v, a-3v, a-4v, a-5v$, enz.

en deze twee algemeene reeksen, in welke voor a en v alle geheele en gebrokene getallen kunnen gesteld worden, stellen alle mogelijke rekenkundige reeksen in getallen voor. (8)

866. Men noemt a den eersten, $a+v$ den tweeden,

- (1) Wat is eene rekenkundige reeks?
- (2) Geef voorbeelden?
- (3) Hoe kan men de rekenkundige reeks nog anders bepalen?
- (4) Hoe vele soorten van rekenkundige reeksen zijn 'er?
- (5) Wat is eene opklimmende reeks?
- (6) Wat is eene afdalende reeks?
- (7) Wat verstaat men door het verschil eener rekenkundige reeks?
- (8) Op welk eene wijze kan men zoo wel eene opklimmende als afdalende reeks algemeen uitdrukken?

$a+2v$ den derden term enz.: hieruit volgt, dat de n de term door $a+(n-1)v$ wordt uitgedrukt. (9)

867. Hieruit volgen voor eene opklimmende en afdalende reeks de volgende formules:

	opklimmende reeks	afdalende reeks
eerste term	a	a
tweede term	$a+v$	$a-v$
derde term	$a+2v$	$a-3v$
n de term	$a+(n-1)v$	$a-(n-1)v$ (10)

868. Wanneer dus de eerste term, het verschil en het aantal termen eener rekenkundige reeks gegeven zijn, zal men den laatsten term vinden door het verschil te vermenigvuldigen met een getal dat één minder is dan het aantal der termen en dit product bij den eersten term op te tellen, indien de reeks opklimmend, maar van den eersten term af te trekken, indien de reeks afdalend is. (11)

869. 1 VOORBEELD. Eene rekenkundige reeks 9, 13, 17 enz. bestaat uit 96 termen, welke is de laatste term? BEREKENING. $96-1=95$ het verschil is $=4$; $95 \times 4 = 380$; de eerste term is $=9$; derhalve is de laatste term $=9+380=389$.

870. 2 VOORBEELD. De rekenkundige reeks 2093, 2057, enz. bestaat uit 65 termen, welke is de laatste term? BEREKENING. De eerste term is $=2093$, het verschil $=2093-2057=36$; het getal der termen $=65$; $65-1=64$; $64 \times 36 = 2304$; derhalve de laatste term $=2093-2304=789$.

871. I EIGENSCHAP. De som der uiterste termen van eene rekenkundige reeks is gelijk aan de som van twee van derzelver termen, welke even ver van de uiterste termen afstaan. (12)

Opheldering. Bij voorbeeld, in de rekenkundige reeks 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 is $4+25=7+19=10+16=13+13$; en wanneer het getal der termen oneven is, dan is de som der uiterste termen gelijk aan het dubbeld van den middelsten term. (13)

Betoog. Laat de reeks zijn $a, a+v, a+2v, a+3v$, enz. en het getal der termen $= n$; dan zijn de laatste termen $a+(n-5)v, a+(n-4)v, a+(n-3)v, a+(n-2)v$ en $a+(n-1)v$; nu is

- (9) Hoe wordt de n de term eener rekenkundige reeks algemeen uitgedrukt?
- (10) Wat volgt hier uit?
- (11) Hoe vindt men den laatsten term eener rekenkundige reeks?
- (12) Wat is de eerste eigenschap eener rekenkundige reeks?
- (13) Helder dezelve door een voorbeeld op?

$$\begin{aligned}
 a + a + (n-1)v &= 2a + (n-1)v \\
 a + v + a + (n-2)v &= 2a + (n-1)v \\
 a + 2v + a + (n-3)v &= 2a + (n-1)v \\
 a + 3v + a + (n-4)v &= 2a + (n-1)v, \text{ enz. (14)}
 \end{aligned}$$

872. II EIGENSCHAP. De som van alle de termen van eene rekenkundige reeks is gelijk aan de som der uiterste termen, vermenigvuldigd met de helft van het aantal van derzelver termen. (15)

Opheldering. Gegeven zijnde de rekenkundige reeks 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35 welke uit acht termen bestaat; dan zal $7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 31 + 35 = (7 + 35) \times \frac{8}{2} = 42 \times 4 = 168$ zijn. (16)

Betoog. Wanneer a de eerste term, v het verschil, en n het aantal termen is, en men stelt eerst alle de termen van de reeks van voren naar achteren op, en daar onder alle de termen van die zelfde reeks van achter naar voren; aldus

$$\begin{array}{ccccccc}
 a & , & a + v & , & a + 2v & & \\
 a + (n-1)v & , & a + (n-2)v & , & a + (n-3)v & : & : & : & : & : & :
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 a + (n-3)v & , & a + (n-2)v & , & a + (n-1)v & & \\
 a + 2v & , & a + v & , & a & &
 \end{array}$$

en men telt dan de overeenkomstige termen dezer twee reeksen bij elkander, dan verkrijgt men, volgens de eerste eigenschap, eene reeks van n getallen, die elk gelijk zijn aan $2a + (n-1)v$, de som van al die getallen is dus gelijk aan n maal $(2a + (n-1)v)$, dat is gelijk aan n maal de som der uiterste termen; maar de som dezer getallen is klaarblijkelijk, en wel, om dat elke term der reeks tweemaal genomen is, gelijk aan de dubbele som van de termen der reeks; gevolglijk is die som gelijk aan de som der uitersten, vermenigvuldigd met de helft van het aantal der termen. (17)

873. Men kan dan, zonder dadelijk op te tellen, de som van de termen eener rekenkundige reeks vinden.

1 VOORBEELD. De som te vinden van de natuurlijke getallen van 1 tot 1000 ingesloten? Deze maken eene rekenkundige reeks met een opklimmende en uit 1000 termen bestaande; de som der uiterste termen is 1001, de helft van het aantal der termen = 500; derhalve is de som van $1 + 2 + 3 + \text{enz.} + 999 + 1000 = 1001 \times 500 = 500500$.

2 VOORBEELD. Hoe groot is de som van de termen eener rekenkundige reeks, welke twee eerste termen 17, 23 zijn, en die uit 100

termen bestaat? Het verschil dezer opklimmende reeks is 4; de laatste term is dan volgens art. 863, $= 17 + 4(100-1) = 17 + 4 \times 99 = 413$; de som der uiterste termen is derhalve $17 + 413 = 430$; en de som van al de termen $= 430 \times 50 = 21500$.

874. AANMERKING. Wanneer men de som der uiterste termen van de algemeene reeks $a, a + v, a + 2v$ enz. $a + (n-1)v$; namelijk $2a + (n-1)v$ vermenigvuldigt met het halve aantal der termen; dat is met $\frac{1}{2}n$; dan verkrijgt men [om dat $\frac{1}{2}n \times 2a = \frac{1}{2} \times 2 \times n \times a = an$ is en $\frac{1}{2}n$ verm. met $\frac{1}{2}(n-1)v = \frac{1}{2}n(n-1)v$ is] indien men de som der termen $= s$ stelt,

$$s = an + \frac{n(n-1)}{2} \times v$$

en deze is de bekende formule om de som der termen te vinden, wanneer de eerste term, het verschil en het getal der termen gegeven is. Voor eene afdalende reeks $a, a-v, a-2v$ en $a-(n-1)v$ is

$$S = an - \frac{n(n-1)}{2} \times v. (18)$$

875. Toepassing dezer formule. Zij gegeven om te sommeren de reeks 719, 715 tot 30 termen, dan is $a = 719, v = -4$ afdalend $n = 30$; derhalve

$$\begin{aligned}
 s &= 719 \times 30 - \frac{30 \times 29}{2} \times 4 = 719 \times 30 - 15 \times 29 \times 4 = \\
 &= 21570 - 1740 = 19830 \quad (19)
 \end{aligned}$$

876. III EIGENSCHAP. Wanneer men uit de termen van eene rekenkundige reeks, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57 enz. met overspringing van een gelijk aantal anderen, eenige termen neemt, bij voorbeeld, met overspringing van éenen term, 7, 17, 27, 37, 47, 57 enz.; of met overspringing van twee termen, 7, 22, 37, 52 enz.; dan verkrijgt men altijd eene nieuwe rekenkundige reeks. (20)

Betoog. Want het verschil van de uiterste van drie termen 7, 12, 17 of 12, 17, 22 is altijd het dubbeld verschil; het verschil van de uitersten van vier termen driemaal het verschil der reeks, enz. Wanneer men derhalve in de reeks $a, a + v, a + 2v, a + 3v, a + 4v$, enz. van de eerste te beginnen, telkens eenen term overspringt, dan is het verschil der nieuwe reeks $= 2v$; springt men twee termen over, dan is het verschil der nieuwe reeks $= 3v$; springt men telkens n termen over, dan is het verschil der nieuwe reeks $(n+1)v$, en zij in dit geval algemeen $a, a + (n+1)v, a + 2(n+1)v$, zijnde de i de term $a + (i-1)(n+1)v$. (21)

877. Men noemt de middelste $a + v$ van drie op elkander volgende termen, $a, a + v, a + 2v$ eener rekenkundige reeks, de rekenkundige

(14) Hoe bewijst men dezelve?

(15) Welke is de tweede eigenschap?

(16) Halder dezelve op?

(17) Hoe bewijst gij de tweede eigenschap?

(18) Hoe kan men de som eener rekenkundige reeks anders uitdrukken?

(19) Past deze formule op een voorbeeld toe?

(20) Wat zegt de derde eigenschap?

(21) Hoe bewijst gij deze eigenschap?

midden-evenredige tusſchen de uiterſte termen a , en $a + 2v$ (22); alzo $a + v$, $a + 2v$ de twee midden-evenredige tusſchen a en $a + 3v$; en hier uit verſtaat men wat drie, vier, vijf enz. en n midden-evenredigen zijn. (23)

876. IV EIGENSCHAP. Men kan tusſchen elke twee getallen, die naar welgevallen aangenomen zijn, zoo veel getallen plaatsen, als men goedvindt, welke met die twee getallen een rekenkunſtige reeks aſmaken. (24) Laten a en b die twee getallen zijn, tusſchen welke men n midden-evenredigen ſtellen wil. Wanneer men nu deze midden-evenredigen tusſchen a en b geſteld heeft, dan heeft men eene rekenkunſtige reeks, welker verſchil nog onbekend is, ſtellen wij dit verſchil $= v$, dan is de reeks a , $a + v$, $a + 2v$ enz., en omdat er tusſchen a en b , n termen geïnterpoleerd of ingevoegd worden, is b de $(n + 2)$ ſte term, en derhalve is, zie art. 872, $b = (n + 1)v + a$; $(n + 1)v = b - a$

en $v = \frac{b - a}{n + 1}$ geheel bekend, en de midden-evenredigen worden $a +$

$$\frac{b - a}{n + 1}, a + 2 \times \frac{b - a}{n + 1}, a + 3 \times \frac{b - a}{n + 1}, a + 4 \times \frac{b - a}{n + 1}, \text{ enz. (25)}$$

Nemen wij, bij voorbeeld, dat tusſchen de getallen 7 en 57 negen termen zullen geïnterpoleerd worden, dan is $a = 7$, $b = 57$ en $n + 1 = 10$,

$$\text{derhalve } v = \frac{b - a}{n + 1} = \frac{57 - 7}{10} = 5 \text{ en de geïnterpoleerde termen zijn } 7 + 5 = 12; 7 + 2 \times 5 = 17 \text{ enz. (26)}$$

877. Wanneer tusſchen elke twee op elkander volgende termen eener rekenkunſtige reeks, bij voorbeeld 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 enz. hetzelfde aantal van n termen interpoleert, dan verkrijgt men eene nieuwe rekenkunſtige reeks. (27) Want voor de termen, welke tusſchen 0 en 1

$$\text{vallen, heeft men } v = \frac{1 - 0}{n + 1} = \frac{1}{n + 1}; \text{ voor de termen, welke tus-}$$

$$\text{ſchen 1 en 2 vallen, is ingelijks } v = \frac{2 - 1}{n + 1} = \frac{1}{n + 1}, \text{ en voor de ter-}$$

$$\text{men, welke in het algemeen tusſchen } p \text{ en } p + 1 \text{ vallen, is } v = \frac{p + 1 - p}{n + 1} = \frac{1}{n + 1}; \text{ de nieuwe reeks wordt derhalve}$$

(22) Wat is eene rekenkunſtige midden-evenredige tusſchen twee getallen?

(23) Wat verſtaat men door n rekenkunſtige evenredigen tusſchen twee getallen?

(24) Wat zegt de vierde eigenschap?

(25) Hoe worden de rekenkunſtige midden-evenredigen tusſchen twee getallen gevonden?

(26) Geef een voorbeeld in getallen?

(27) Wat volgt hier uit?

$$0, \frac{1}{n + 1}, \frac{2}{n + 2}, \frac{3}{n + 3} \text{ enz. } \dots \frac{n}{n + 1}, \frac{n + 1}{n + 1} \text{ of } 1,$$

$$1 + \frac{1}{n + 1} = \frac{n + 2}{n + 1}, 1 + \frac{2}{n + 1} = \frac{n + 3}{n + 1}, \text{ enz. (28)}$$

LIV LES. Over de Meetkunſtige reekſen.

878. Eene Meetkunſtige reeks is eene rij van getallen, in welke twee op elkander volgende termen, overal, de geheele rij door, dezelfde reden of verhouding tot elkander hebben. (1)

879. Bij voorbeeld: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, enz. 1, 3, 9, 27, 81, 243, enz. 1, 10, 100, 1000, 10000, enz. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, enz. zijn zulke reekſen, want $1:2 = 2:4 = 4:8$, enz. (2)

880. Men onderscheidt dezelve in opklimmende en afdalende. (3) Eene Meetkunſtige is opklimmend, wanneer elke volgende term grooter dan de onmiddellijk voorgaande is. (4) Zij is afdalende, wanneer elke volgende term kleiner dan de voorgaande is. (5)

881. De reden van twee getallen a tot b is $\frac{a}{b}$; wanneer men nu de voorgaande term a met het omgekeerde of tegengeſtelde van die reden, dat is met $\frac{b}{a}$ vermenigvuldigt, dan

verkrijgt men den tweeden term, want $a \times \frac{b}{a}$ is gelijk b .

Bij aldien men dan a en b als de twee eerſte termen eener meetkunſtige reeks aanneemt, dan zal, gelijk gezegd is, $b = a \times \frac{b}{a}$ zijn: en om den derden term te vinden, zal men den tweeden term b met $\frac{b}{a}$ vermenigvuldigen, en dan is de derde

(28) Helder dit nader op?

(1) Wat verſtaat men door eene Meetkunſtige reeks?

(2) Geef voorbeelden van Meetkunſtige reekſen?

(3) Hoe onderscheidt men dezelve?

(4) Wat verſtaat men door eene opklimmende Meetkunſtige reeks?

(5) Wat verſtaat men door eene afdalende Meetkunſtige reeks?

term $= b \times \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a}$; en alzo voortgaande, door elken voorgaanden term met $\frac{b}{a}$ te vermenigvuldigen, zal men de volgende termen der reeks vinden, te weten:

$a, b, \frac{b^2}{a}, \frac{b^3}{a^2}, \frac{b^4}{a^3}, \frac{b^5}{a^4}, \frac{b^6}{a^5}, \frac{b^7}{a^6}$ enz. (6)

Stellen wij nu $\frac{b}{a} = r$; dan is $b = ar$, $\frac{b^2}{a} = b \times \frac{b}{a} = ar \times r = ar^2$, $\frac{b^3}{a^2} = b \times \frac{b^2}{a^2} = b \times r^2 \times ar = ar^3$, enz en het blijkt hier uit: dat elke meetkundige reeks door $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, ar^6$, enz. ar^{n-1} kan worden uitgedrukt, in welke uitdrukking, voor a en r alle geheele en gebrokene getallen kunnen genomen worden. Zijnde de reeks opklimmend of afdalend, naar dat r grooter of kleiner dan één is. (7)

882. Eene meetkundige reeks kan in eene aaneengeschaelde evenredigheid ontbonden worden; want men heet:

$a, ar = ar:ar^2 = ar^2:ar^3 = ar^3:ar^4$ enz. (8)

883. Drie op elkander volgende termen van eene meetkundige reeks maken eene gedurige evenredigheid. (9) Eene gedurige evenredigheid bestaat uit drie getallen, van welke het eerste staat tot het tweede gelijk het tweede tot het derde: het derde van die getallen noemt men de derde evenredige, en het tweede getal de midden evenredige. (10)

884. Ten aanzien van eene gedurige evenredigheid kan men zich de volgende vragen voorstellen: 1°. Tot twee gegeven getallen eene derde evenredige te vinden? 2°. tusschen twee getallen eene midden evenredige te vinden? (11)

(6) Hoe vindt men, wanneer de twee eerste termen eener Meetkundige reeks gegeven zijn, de volgende termen?

(7) Hoe kan men alle Meetkundige reeksen algemeen voorstellen?

(8) Wat merkt gij aangaande eene Meetkundige reeks op?

(9) Hoe noemt men drie op elkander volgende termen van eene Meetkundige reeks?

(10) Wat verstaat men dan door eene gedurige evenredigheid?

(11) Welke vragen doen zich bij de beschouwing eener gedurige evenredigheid op?

885. Men stelle, om tot twee getallen a en b eene derde evenredige te vinden, deze derde evenredige $= x$, dan is $a:b = b:x$ en $x = \frac{bb}{a} = \frac{b^2}{a}$. Men vindt derhalve de derde evenredige door het vierkant of de tweede magt des tweeden getals door het eerste te deelen: (12) aldus is de derde evenredige tot 2 en 3 gelijk 4½ enz.

886. Wanneer men tusschen twee getallen a en b eene midden-evenredige wil zoeken, zoo stelle men die midden-evenredige $= x$; dan is $a:x = x:b$ en $xx = ab$ en $x = \sqrt{ab}$: dat wil zeggen: de midden evenredige tusschen twee getallen is gelijk aan den vierkants-wortel uit het product van die twee getallen. Aldus is de midden-evenredige tusschen 4 en 9 gelijk aan $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$. (13)

887. Men kan, in de algemeene meetkundige, reeks a, ar, ar^2, ar^3 , enz. gemakkelijk de n^{de} term vinden; want, daar de exponent van r altijd één minder is dan het getal, dat het nommer of den rang van dien term uitdrukt, zal de n^{de} term zijn ar^{n-1} . (14)

888. Hier uit volgt, dat de eerste en laatste termen van eene meetkundige reeks van n termen aldus worden uitgedrukt:

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, ar^6, \text{ enz.}$$

$$ar^{n-6}, ar^{n-5}, ar^{n-4}, ar^{n-3}, ar^{n-2}, ar^{n-1} \quad (15).$$

889. I HOOFD-EIGENSCHAP. Het product der uiterste termen eener meetkundige reeks is gelijk aan het product van twee termen, die even ver van de uitersten afstaan. (16)

Opheldering. In de reeks 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, is $1 \times 64 = 2 \times 32 = 4 \times 16 = 8 \times 8$. (17)

Betoog. Het product van den eersten term met den laatste is $a \times ar^{n-1} = a^2 r^{n-1}$; het product van den tweeden term van voren met den tweeden term van achteren is $ar \times ar^{n-2} = a^2 r^{n-1}$, en zoo voort-

(12) Hoe vindt men tot twee getallen eene derde evenredige?

(13) Hoe vindt men tusschen twee getallen eene meetkundige midden-evenredige?

(14) Wat volgt hier uit?

(15) Welke is de hoofd-eigenschap eener meetkundige reeks?

(16) Helder deze eigenschap door een voorbeeld op?

gaande, vindt men, dat de producten der termen, welke even ver van de uitersten afstaan, alle gelijk zijn aan $a^2 r^{n-1}$ (18)

890. VRAAGSTUK. De som van de termen eener meetkundige reeks te vinden?

Oplossing. Zij de meetkundige reeks a, ar, ar^2 enz. ar^{n-1} en de som der termen $= s$; dan is, zie art. 832, $a : ar = ar : ar^2 = ar^2 : ar^3 = ar^3 : ar^4 = ar^4 : ar^5$ enz. enz. $= ar^{n-3} : ar^{n-2} = ar^{n-2} : ar^{n-1}$; maar in elke aaneengeschaakte evenredigheid is de som van al de voorgaande tot de som van al de volgende termen, gelijk den voorgaande term van eenige reden tot den volgende term van die zelfde reden: (zie art. 620) men heeft derhalve, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \text{enz.} + ar^{n-2} : ar + ar^2 + ar^3 + \text{enz.} + ar^{n-1} = a : ar$; maar de eerste term dezer evenredigheid is gelijk aan de som van al de termen der reeks min de laatste, en de tweede term gelijk aan de som van alle de termen min de eerste term; derhalve is

$$s - ar^{n-1} : s - a = a : ar$$

of wel, wanneer men de termen der laatste reden door a deelt,

$$s - ar^{n-1} : s - a = 1 : r$$

en nemende de producten der uitersten en middelsten

$$rs - ar^n = s - a$$

hier bijtellende $+ ar^n - s = + ar^n - s$,

$$\text{komt } rs - s = ar^n - a$$

$$\text{of } (r-1)s = a \times (r^n - 1)$$

en deelsende door $r-1$

$$s = a \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

hier uit volgt dan dezen regel, om de som van de termen eener meetkundige reeks te vinden: verhaf den exponent der reeks (welke gegeven wordt, indien men den tweeden term door den eersten deelt,) tot een magt, wiens exponent gelijk is aan het getal der termen: verminder deze magt met de éénheid, en deel het verschil door den exponent min de éénheid: (AANMERKING) doch bijaldien de exponent der reeks minder dan één is, moeten de verschillen natuurlijk anders om genomen worden: het quotiënt der deeling moet met den eersten term der reeks worden vermenigvuldigd, en het product zal gelijk aan de som zijn. (19)

891. 1 VOORBEELD. De som te vinden van twaalf termen der reeks 1, 2, 4, 8, enz.? Hier is $a=1$, $r=2$, $n=12$, $r^2=4$,

(18) Hoe bewijst gij deze eigenschap?

(19) Hoe vindt men de som van de termen eener meetkundige reeks?

(20) Verklaar het eerste voorbeeld?

$$r^3=8, r^6=64, r^{12}=4096, r^{12}-1=4095; r-1=1 \quad s=a \times \frac{r^{12}-1}{r-1} = 4095. (20)$$

2 VOORBEELD. Te vinden zeyen termen der reeks 7, 21, 63 enz.? Hier is $a=7$, $r=3$, $n=7$, $r^2=9$, $r^3=27$; $r^6=729$; $r^7=2187$, $r^7-1=2186$ $r-1=2$ $\frac{r^7-1}{r-1} = \frac{2186}{2} = 1093$ en $a \times \frac{r^7-1}{r-1} = 7 \times 1093 = 7651 = s. (21)$

3 VOORBEELD. Te vinden de som van zes termen van 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ enz.? Hier is $a=1$, $r=\frac{1}{3}$, $n=6$, $r^3=\frac{1}{27}$, $r^6=\frac{1}{729}$, $1-r^6=1-\frac{1}{729} = \frac{728}{729}$ en $1-r=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$; derhalve $\frac{1-r^6}{1-r} = \frac{665}{729} \times \frac{3}{2} = \frac{665}{486}$ en $a \times \frac{1-r^6}{1-r} = \frac{665}{243} = \frac{179}{255} = s. (22)$

892. II EIGENSCHAP. Elke meetkundige reeks heeft met de rekenkundige die eigenschap gemeen, dat, wanneer men uit dezelve, telkens, met overspringing van een gelijk aantal termen, eenige termen neemt, die afgenomen termen alsijd eenen nieuwe meetkundige reeks zullen uitmaken. (23) Wanneer men in de reeks a, ar, ar^2, ar^3, ar^4 , enz., telkens één term overspringt, dan heeft men:

$$a, ar^2, ar^4, ar^6, ar^8, ar^{10}, ar^{12}, \text{enz.}$$

welke is eene meetkundige reeks, hebbende tot exponent r^2 . Springt men telkens twee termen over, dan heeft men:

$$a, ar^3, ar^6, ar^9, ar^{12}, ar^{15}, ar^{18}, \text{enz.}$$

welke getallen insgelijks eene meetkundige reeks uitmaken. (24)

893. III EIGENSCHAP. Men kan ook (vergelijk art. 876) tusschen twee getallen, die naar welgevallen aangenomen worden, zoo veel getallen als men goedvindt, interpoleren, welke met die twee getallen eenen onafgebrokenen meetkundigen reeks uitmaken. (25) Laten a en b die twee getallen zijn, tusschen welken men n midden-evenredigen moet interpoleren. Stellen wij den exponent van de reeks $= r$, dan heeft men:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, b$$

maar daar 'er tusschen a en b een aantal van n termen staan, zoo is, indien men a voor den eersten term stelt, b de $n+2^{\text{de}}$ term; maar, wanneer de n^{de} term is ar^{n-1} , dan is de $n+2^{\text{de}}$ term ar^{n+1} , en men heeft derhalve:

$$ar^{n+1} = b \text{ en } r = \frac{n+1}{n} \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

(21) Verklaar het tweede voorbeeld?

(22) Verklaar het derde voorbeeld?

(23) Welke is de tweede eigenschap der meetkundige reeks?

(24) Hoe bewijst gij deze eigenschap?

(25) Welke is de derde eigenschap?

en hier uit leert men: dat de exponent der reeks gevonden wordt, indien men de $(n+1)^e$ magts-wortel trekt uit het quotiens van het tweede der gegeven getallen, gedeeld door het eerste. Nu is $r^2 = \frac{n+1}{\sqrt{a^2}}$;

$r^3 = \frac{n+1}{\sqrt[3]{a^3}}$, enz. en de gevraagde reeks wordt derhalve:

$$a, a \sqrt{\frac{n+1}{a}}, a \sqrt[3]{\frac{n+1}{a^2}}, a \sqrt[4]{\frac{n+1}{a^3}} \text{ enz. } \dots \dots$$

$$\dots \dots a \sqrt[n]{\frac{n+1}{a^{n-1}}}, a \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{a^n}} \text{ en } a \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{a^{n+1}}} \quad (26)$$

894. IV EIGENSCHAP. Wanneer men tusschen elke twee op elkander volgende termen eener meetkundige reeks, als, bij voorbeeld 1, 2, 4, 8, 16 enz. of 1, 10, 100, 1000 enz. hetzelfde aantal termen, bij voorbeeld, n termen, interpoleert, verkrijgt men eene onafgebrokene meetkundige reeks. (27) Nemen wij, bij voorbeeld, de reeks 1, 10, 100, 1000, 10000, enz. en stellen wij: dat, tusschen elke twee termen, n termen geïnterpoleerd worden; dan is voor de n termen, tusschen

1 en 10, $r = \sqrt[n+1]{\frac{10}{1}} = \sqrt[n+1]{10}$; voor de n termen, tusschen 10 en 100

vallende, is $r = \sqrt[n+1]{\frac{100}{10}} = \sqrt[n+1]{10}$; voor de n termen tusschen 100

en 100 vallende, is $r = \sqrt[n+1]{\frac{1000}{100}} = \sqrt[n+1]{10}$, enz. De geïnterpoleerde

de term, welke op 10 volgt, is $r \sqrt[n+1]{10}$; maar wij hebben gezien: dat

$10 = \sqrt[n+1]{10}^{n+1}$; en de term, welke hier op volgt, is $\sqrt[n+1]{10}^{n+2}$ en

deze is $= 10 \sqrt[n+1]{10}$; zoo dat de term, op welken 10, en de term,

welke op 10 volgt, een onafgebroken vervolg van de reeks 1, $\sqrt[n+1]{10}$,

$\sqrt[n+1]{10^2}$, $\sqrt[n+1]{10^3}$, enz. is, terwijl de verdere beschouwing der geïnterpoleerde termen, tusschen 100 en 1000, tusschen 1000 en 10000, enz.

zullen doen zien: dat alle deze interpolaten, tusschen elke twee elkander volgende termen, eene onafgebrokene meetkundige reeks uitmaken. (28)

(26) Hoe bewijst gij deze derde eigenschap?

(27) Welke is de vierde eigenschap?

(28) Hoe bewijst gij deze vierde eigenschap?

LV LES. Over de Logarithmen en derzelver eigenschappen.

895. De Logarithmen zijn kunstgetallen, welke begrepen kunnen worden uit de overeenkomst van de rekenkundige reeks 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 enz. met eene opklimmende meetkundige reeks, welke eerste term de éénheid is, te ontstaan, en, onder anderen, strekken, om de vermenigvuldigingen en deelingen der getallen, met behulp der Logarithmische tafels, door eene optelling en afrekening van twee getallen, uit te voeren. (1)

896. Stellen wij (zie nevensgaande tafel je.) in de kolom B, tegen over de rekenkundige reeks: 0, 1, 2, 3, 4, 5, enz. die in de kolom A staat, de meetkundige reeks, 1, 2, 4, 8, 16, enz. en noemen wij de termen van de rekenkundige reeks de Logarithmen van de termen der meetkundige, zoo dat 0 is de Logarithmus van 1; 1 de Log. van 2; 2 de Log. van 4; 3 de Log. van 8, 4 de Log. van 16; 5 de Log. van 32; dan zullen de Logarithmen de volgende eigenschappen hebben. (2)

897. I EIGENSCHAP. De som van de Logarithmen van twee, drie of meer getallen is de Logarithmus van derzelver product. (3)

Opheldering. Wanneer ik de Logarithmen der getallen 16 en 32, dat is de getallen 4 en 5 optel, dan is de som 9, en 9 is nu de Logarithmus van 512; derhalve is 512 het product van 16 en 32. Tel ik de Logarithmen der getallen 32, 128 en 1024 bij elkander, dat is 5, 7 en 10, dan is de som 22 de Logarithmus van 4194304, en dit getal is het gezamenlijk product der getallen $32 \times 128 \times 1024$ (4)

898. II EIGENSCHAP. Het verschil van de Logarithmen van twee getallen is de Logarithmus van derzelver quotient. (5)

Opheldering. Indien ik van de Logarithmus van 8388608, dat is van 23, aftrek de Logarithmus van 16384, dat is 14; dan zal het verschil 9 de Logarithmus van 512 zijn; nu is 512 het quotient van 8388608 gedeeld door 16384. (6)

(1) Wat zijn Logarithmen?

(2) Helder deze bepaling op?

(3) Welke is de eerste eigenschap der Logarithmen?

(4) Helder deze eerste eigenschap op?

(5) Welke is de tweede eigenschap?

(6) Helder deze tweede eigenschap op?

A	B
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824

899. III EIGENSCHAP. *Het dubbeld, drievoud, viervoud, vijfvoud en n voud van de Logarithmus van een getal is de Logarithmus van het vierkant, de cubus, de vierde, de vijfde en de n^{de} magt van dit getal.* (7)

Opheldering. De Log. van 8 is 3; het dubbeld van 3 is 6, en 6 is de Log. van 64; zijnde $64 = 8 \times 8$, het vierkant van 8. Het drievoud van 3 is 9, en 9 is de Log. van 512, de cubus van 8. Het viervoud van 3 is 12, en 12 is de Log. van 4096, de vierde magt van 8. Het vijfvoud van 3 is 15, en 15 is de Log. van 32768, de vijfde magt van 8, enz. (8).

900. IV EIGENSCHAP. *De helft, een derde, een vierde, een vijfde, en, in het algemeen, een n^{de} gedeelte van de Logarithmus van een getal is de Logarithmus, van de quadrats, de cubus, de vierde, de vijfde, en in het algemeen van de n^{de} magts-wortel van dit getal.* (9)

Opheldering. De Log. van 1073741824 is 30; de helft van 30 is 15, en 15 is de Log. van 32768, welk getal de vierkants-wortel is uit 1073741824. Een derde van 30 is 10, en 10 is de Log. van 1024, en dit getal is de cubus wortel uit 1073741824. De Log. van 1048576 is 20, een vierde van 20 is 5, en 5 is de Log. van 32, welk getal alzoo de vierde magts-wortel is uit 1048576. Een vijfde van 20 is 4, en 4 is de Log. van 16; 16 is alzoo de vijfde magts-wortel uit 1048576. (10)

NB. De Onderwijzer moet deze eigenschap door meer voorbeelden uit de tafel ophelderen. (Zie verder I C. §. 847, enz.)

901. I AANMERKING. Wanneer men met de rekenkundige reeks 0, 1, 2, 3, 4 enz. eene andere meetkundige reeks, als 1, 3, 9, 27, 81, enz. laat overeenstemmen, en voorts de termen der rekenkundige reeks 0, 1, 2, 3, 4, enz., de Logarithmen van de overeenkomstige termen der meetkundige reeks noemt, zal dit nieuwe stelsel van Logarithmen, dezelfde eigenschappen als het eerste hebben. Ja ook, wanneer men met de rekenkundige reeks 0, 1, 2, 3, 4, enz. de meetkundige reeks 1, r , r^2 , r^3 , enz. doet overeenstemmen, op deze wijze:

Rek. reeks 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Meetk. reeks 1, r , r^2 , r^3 , r^4 , r^5 , r^6 , r^7 , r^8 , r^9 , r^{10} .

.....
11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 enz.
 r^{11} , r^{12} , r^{13} , r^{14} , r^{15} , r^{16} , r^{17} , r^{18} , r^{19} , r^{20} enz.

- (7) Welke is de derde eigenschap?
(8) Helder deze derde eigenschap op?
(9) Welke is de vierde eigenschap?
(10) Helder dezelve op?

dan zal, in het algemeen, o de Logarithmus van 1; 1 de Log. van r ; 2 de Log. van r^2 ; 3 de Log. van r^3 ; 4 de Log. van r^4 , enz. zijn; en dan zal dit algemeene stelsel van Logarithmen dezelfde eigenschappen als het eerste hebben. Want 1^o. de som van de Logarithmen van r^3 , r^2 en r^1 is $5 + 6 + 4 = 15$ en 15 is de Log. van r^{15} en r^{15} is gelijk aan $rrrrr \times rrrrrr \times rrrrr = r^{15}$. 2^o. Het verschil van de Logarithmen van r^{11} en r^6 is het verschil van de getallen 11

min 5 = 6 en 6 is de Log. van r^6 ; maar $r^6 = rrrrrr$

$rrrrr = r^6$. 3^o. De Log. van r^3 is 3 en tweemaal 3 is 6; 6 is de Log. van r^6 ; en r^6 is het vierkant of de tweede magt van r^3 . Voorts is 3 maal 3 of 3 maal de Log. van $r^3 = 9$, en 9 is de Log. van r^9 enz. 4^o. De helft van de Log. van r^{10} of de helft van 10 is 5 en 5 is de Log. van r^5 en r^5 is de vierkantswortel uit r^{10} . (11)

902. II AANMERKING. Naar mate men nu in de algemeene meetkundige reeks voor r een ander getal neemt, verkrijgt men een ander stelsel van Logarithmen, en daar men dan aan r onnoemelijk vele waarden geven kan, is het getal van mogelijke stelsels van Logarithmen-tafelen onnoemelijk groot. (12) Men noemt het getal r (dat een geheel of een gebroken zijn kan,) de basis of het grondtal van het algemeene stelsel van Logarithmen, (13) en de reeks 1, r , r^2 , r^3 enz. de grondreks van dit stelsel. (14) In elk bijzonder stelsel van Logarithmen IS NUL DE LOGARITHMUS VAN EEN, EN DE LOGARITHMUS VAN HET GRONDTAL VAN DAT STELSEL GELIJK AAN DE EENHEID (15)

903. III AANMERKING. Onder alle mogelijke stelsels van Logarithmen is het stelsel, hetwelk het getal tien tot grondtal heeft, in het gebruik het eenvoudigste en gemakkelijkste. (16) Men noemt dit stelsel van Logarithmen het BRIGGIAANSCH STELSEL (naar den uitvinder BRIGGS

(11) Wat zegt de eerste aanmerking?

(12) Hoe vele stelsels van Logarithmen zijn 'er?

(13) Wat is de basis of het grondtal van het algemeene stelsel van Logarithmen?

(14) En welke is de grondreks?

(15) Wat getal is in elk stelsel van Logarithmen, de Logarithmus van één?

(16) Welk stelsel van Logarithmen is in het gebruik het gemakkelijkst?

een Schotsch Edelman,) om deze Logarithmen van de NEPERIAANSCHEN, welke in de hoogere deelen der Wiskunst gebruikt worden, te onderscheiden. (17)

904. In dit Briggsiaansche stelsel is

0 de Log. van 1

1 de Log. van 10

2 de Log. van 10^2 of 100

3 de Log. van 10^3 of 1000

4 de Log. van 10^4 of 10000

5 de Log. van 10^5 of 100000

6 de Log. van 10^6 of 1000000

7 de Log. van 10^7 of 10000000

enz. enz.

n de Log. van 10^n (18)

905. Maar om nu, met behulp van deze grond-tafel, de multiplicatiën en divisien tot eene enkele additie en subtractie te kunnen brengen, moet men de Logarithmen der getallen, welke tusschen 1 en 10, tusschen 10 en 100, tusschen 100 en 1000, tusschen 1000 en 10000, enz. vallen, (19) kennen. Dan, daar het voor deze eerste beginselen te zwaar is, om te verklaren, hoe zulks geschieden kan, (men zie I C. §. 865. en verv.) zal het voor het tegenwoordige genoeg zijn, de mogelijkheid van het aanvullen dezer grond-tafel te doen gevoelen.

906. NADERE OPHELDING. Stellen wij: dat tusschen elke twee termen der grondreeks 1, 10, 10^2 , 10^3 , 10^4 , enz. een zeer groot, maar echter hetzelfde aantal termen geïnterpoleerd worde, dan zullen deze midden-evenredigen met de termen, tusschen welke zij geïnterpoleerd zijn, eene onafgebrokene meetkundige reeks maken, welker index zijn $\frac{n+1}{n}$: indien namelijk n beteekent het aantal midden-evenredigen, geïnterpoleerd tusschen elke twee termen; wanneer men nu tusschen elke twee termen der rekenkundige reeks 0, 1, 2, 3, 4 enz. n termen interpoleert, dan zullen die geïnterpoleerde termen eene nieuwe rekenkundige reeks maken, welker verschil (zie art. 877.) zal zijn $\frac{1}{n+1}$. Wij

(17) Wat naam draagt dit stelsel?

(18) Verklaar dit stelsel nader?

(19) Wat wordt 'er nu bij dit stelsel van grondtallen verder vereischt?

zullen dus hebben

rek. reeks 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, enz.

meetk. reeks 1, p , p^2 , p^3 , p^4 , p^5 , p^6 , p^7 , enz.

in welke $u = \frac{1}{n+1}$ en $p = \sqrt[n+1]{10}$ is, en welke reeksen nu de eigenschappen van de grondreeks zullen hebben: te weten dat u de Log. van p , $2u$ de Log. van p^2 , $3u$ de Log. van p^3 enz. zal zijn.

Laat nu voor n een zeer groot getal genomen worden, bij voorbeeld, zoo als BRIGGS deed,

$$n = 1152921504606846975;$$

dan vallen 'er in de meetkundige reeks tusschen 1 en 10, tusschen 10 en 100, 100 en 1000, enz. een aantal van 1152921504606846975 termen, onder welke 'er noodzakelijk zijn, die zeer na met 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 enz. met 11, 12, 13, enz. met 97, 98, 99 en 101, 102, 103 enz. met 997, 998, 999, 1001, 1002 enz. overeenstemmen: doch met de termen der meetk. reeks, welke nagenoeg met 2, 3, 4, 5, 6 enz. overeenkomen, stemmen in de rekenkundige reeks termen overeen, welke nagenoeg de Logarithmen van 2, 3, 4, 5, 6 enz. zijn: en hieruit wordt nu blijkbaar, hoe het mogelijk is geweest, om de Logarithmen der natuurlijke getallen te berekenen en in eene tafel te verzamelen. (20)

LVI LES. Verklaring van de inrigting der Logarithmen-Tafelen.

907. Om met de Logarithmen handig te leeren omgaan, moet men het tafeltje van de grondreeks der gewone of Briggsiaansche Logarithmen; namelijk $\text{Log. } 1 = 0$, $\text{Log. } 10 = 1$, $\text{Log. } 100 = 2$, $\text{Log. } 1000 = 3$, $\text{Log. } 10000 = 4$, enz. vast in het geheugen prenteu. (1) Uit dit tafeltje volgt: dat de Logarithmen der getallen, welke kleiner dan 10 zijn, ook kleiner dan 1 zullen zijn, en bij gevolg nul geheelen, gevolgd van eene tiendeelige breuk; dat de Logarithmen der getallen, welke grooter dan 10 en kleiner dan 100 zijn, bestaan zullen

(20) Verklaar dit alles nader?

(1) Welke is de eerste en voornaamste zaak, welke bij het gebruik der Logarithmen-tafelen in aanmerking komt?

uit één geheel, met nog eene tiendeelige breuk; de Logarithmen der getallen grooter dan 100 en kleiner dan 1000, uit twee geheelen met eene tiendeelige breuk, enz (2)

908. Gewoonlijk neemt men voor de tiendeelige breuk, bij de geheelen van een' Logarithmus voorkomende, zeven cijfers; in ligte berekeningen slechts vijf; in berekeningen, waarin eene groote naauwkeurigheid vereischt wordt, tien of meer cijfers: doch zeven cijfers zijn in het werkdadige meest altijd voldoende. (3)

909. Het geheel getal van een Logarithmus noemt men de mantissa of wijzer, omdat het aanwijst, uit hoe veel cijfers een getal bestaat, hetwelk tot dien Logarithmus behoort. (4)

Wanneer ik dus vindt staan de volgende Logarithmen:

0,3876481; 1,2192346; 5 8600000:

4,5012379; 2,8968196; 3,1246809;

43012379; 2,8968196; 3,1246809;
 bestaat het getal tot den eersten Logarithmus behoorende uit één, het ge-
 tal tot den tweeden Log. behoorende uit twee, het getal tot den derde-
 den Log. behoorende uit zes, het getal tot den vierden, vijftien en zesden
 Log. behoorende, uit vijf, drie en vier cijfers. Het veritaat zich van zelve:
 dat men hiermede bedoelt het aantal cijfers, behoorende tot de geheelen
 van het getal, waarvan de Logarithmus gegeven is, en niet de riendeelge
 cijfers, welke meestal boven en behalve de geheelen in dit getal gevonden
 worden. (5)

910. Daar men dan, met eenen opslag van het oog, uit de mantissa of wijzer kan onderscheiden, uit hoe veel cijfers de geheelen van het getal, dat tot dien Logarithmus behoort, moeten bestaan, zoo zal men, ook omgekeerd, wanneer een getal gegeven is, de mantissa of wijzer van dit getal kunnen uitschrijven, zoo als men hier onder ziet. (6)

[illegible]

dus in die tafel onmiddellijk de Logarithmen der getallen van 1 tot 107500, en door het optellen van een klein getal, uit de tafeltjes der verschillen te nemen, de Logarithmen van 1 tot 1075000, en door het optellen van een nog kleiner getal de Logarithmen van 1 tot 10750000, enz. (11) Ofschoon men nu door de kleinere tafels nagenoeg hetzelfde verkrijgt als door de grootere, moet men wel de grootere tafelen gebruiken, wanneer men veel rekenen moet, om dat het zoeken der evenredige deelen te veel vermoet en te veel tijds wegneemt. (12) Voor het overige moet het gebruik der tafels door mondeling onderrigt geleerd worden.

Over de Logarithmen der gebruikelijke Breuken.

914. In elk stelsel van Logarithmen, en dus ook in het gewone Brig-giaansche, is de Logarithmus van de éénheid gelijk nul: en van de éénheid af, groeijen de Logarithmen aan; maar welke zullen nu de Logarithmen der gebruikelijke breuken of der grootheden minder dan één, zijn? Om dit te beantwoorden, zoo zoeken wij, bij voorbeeld, den Logarithmus van $\frac{2}{3}$; deze wordt aldus gevonden:

$$\text{Log. } 2 = 0,3010300$$

$$\text{Log. } 3 = 0,4771213$$

$$\text{Log. } \frac{2}{3} = -0,1760913$$

Om dat de Log. 3 grooter dan de Log. 2 is, kan de Log. 3 niet van Log. 2 worden afgetrokken: men trekke dan Log. 2 van Log. 3 af, en men vindt 0,1760913 voor het verschil; *doch, om aan te wijzen, dat dit verschil in eenen met den algemeenen regel strijdige orde is bepaald geworden, zet men 'er het negatieve teken voor, en de Logarithmus van $\frac{2}{3}$ is dan negatief, gelijk ook de Logarithmen van alle gebruikelijke breuken negatief zijn.* (13) Doch op deze wijze stelt men de Logarithmen der breuken gemeenlijk niet voor: men bepaalt dezelve zoodanig, dat alleen de wijzers negatief en de breuken positief zijn; (14) het geen in dezer voegen geschieden kan. Laat, bij voorbeeld, $-4,5679897$ een geheel negatieve Logarithmus zijn, trek dan de breuk 0,5679897 van de éénheid af, dan is het verschil 0,4320103, en nu is klaarblijkelijk:

$$-5 + 0,4320103 = -4,5679897.$$

In plaats van $-5 + 0,4320103$ schrijft men $-5,04320103$, in welke alleen de wijzer als negatief, maar de tiendeelsige breuk, als positief, moet gedacht worden, moettende deze uitdrukking met eenen geheel negatief genomen Logarithmus niet worden verward, waarvoor echter geene zwagrigheid is, omdat zij, die met negatieve Logarithmen werken, alleen de wijzers negatief en de tiendeelsigen positief nemen. (15)

915. In de daad is dit laatste ook natuurlijker; want, voor zoo ver men

(11) Hoe vindt men, door groote tafelen, de Logarithmen van groote getallen?

(12) Waarom zijn de groote tafelen beter dan de kleine?

(13) Hoe bepaalt men de Logarithmen der gebruikelijke breuken?

(14) Hoe bepaalt men anders de Logarithmen der gebruikelijke breuken?

(15) Hoe kan dit geschieden?

eenig denkbeeld van de negatieve getallen heeft, gevoelt men, dat wanneer $3 = \text{Log. } 1000$, $2 = \text{Log. } 100$, $1 = \text{Log. } 10$, en $0 = \text{Log. } 1$ is; dan ook $-1 = \text{Log. } 0,1$; $-2 = \text{Log. } 0,01$; $-3 = \text{Log. } 0,001$; $-4 = \text{Log. } 0,0001$; $-5 = \text{Log. } 0,00001$ enz. zal moeten zijn. (16)

916. Zults dan tot grondslag aangenomen hebbende, bepaalt zich alles tot de wijzers; indien dan gegeven is Log. 85359 $= 4,9312493$, zal men men, (dit getal 85359 telkens door 10 deelende,) omdat Log. 10 $= 1$ is, mogen besluiten, dat:

Log. 85359	=	4,9312493	=	4 +	0,9312493
Log. 8535,9	=	3,9312493	=	3 +	0,9312493
Log. 853,59	=	2,9312493	=	2 +	0,9312493
Log. 85,559	=	1,9312493	=	1 +	0,9312493
Log. 8,559	=	0,9312493	=	0 +	0,9312493
Log. 0,85359	=	-1,9312493	=	-1 +	0,9312493
Log. 0,085359	=	-2,9312493	=	-2 +	0,9312493
Log. 0,0085359	=	-3,9312493	=	-3 +	0,9312493
Log. 0,00085359	=	-4,9312493	=	-4 +	0,9312493
enz.		enz.		enz.	

Waar uit blijkt: dat de wijzers van de Logarithmen der getallen, kleiner dan één zijnde, alleen als negatief, maar de breuken, tot die Logarithmen behorende, als positief genomen worden. (17)

917. Wie nu met de positieve en negatieve getallen kan omgaan, gebruikt de Logarithmen met negatieve wijzers even gemakkelijk, als die met positieve; doch daar velen, die de Logarithmen moeten gebruiken, in het geval zijn van de negatieve getallen niet te kunnen behandelen, zoo is 'er een ander hulpmiddel, hetwelk, in korthed en beknoptheid, voor het gebruik der negatieve wijzers niet behoeft te wijken, en dit middel bestaat hier in: dat men de wijzers van de Logarithmen der getallen, die kleiner dan één zijn, met 10 verhoogt; maar dan achter dien verhoogden Logarithmus -10 schrijft, om daardoor de plaats gehad hebbende verhooging aan te duiden. En in de daad is

-1	=	9 - 10		-5	=	5 - 10
-2	=	8 - 10		-6	=	4 - 10
-3	=	7 - 10		-7	=	3 - 10
-4	=	6 - 10		-8	=	2 - 10 enz.

Men heeft dan, zie bovenstaande tafeltje:

-1 +	0,9312493	=	9,9312493	- 10
-2 +	0,9312493	=	8,9312493	- 10
-3 +	0,9312493	=	7,9312493	- 10 enz. (18)

(16) Strookt nu ook deze schrijfwijze met de aangenomen Logarithmen-schaal?

(17) Helder het gebruik der negatieve wijzers door voorbeelden op?

(18) Hoe kan men de negatieve wijzers ontwijken?

918. Het blijkt hier uit, dat, wanneer, in eene tiendeelge breuk, het hoogste cijfer tiende, honderdste, duizendste, tienduizendste, honderd-duizendste, millioenste deelen, enz. zijn, voor de wijzers de positieve getallen 9, 8, 7, 6, 5, 4 enz. kunnen genomen worden; mits dat men altijd achter de Logarithmen van zulke breuken — 10 schrijve, om daar door te kennen te geven, dat die Logarithmus tot eene tiendeelge, en niet tot een geheel getal behoort. (19) Hoe men nu met deze af te trekken getallen — 10, bij het gebruik der Logarithmen te handelen hebbe, zal uit de volgende Les blijken.

919. Wanneer echter de tiendeelge breuk zoo klein mogte zijn, dat de negatieve wijzer van derzelver Logarithmus grooter dan 10 ware, zou men deze negatieve wijzers met 100 verhoogen, en achter de Logarithmen — 100 schrijven, welke handelwijze op dezelfde gronden berust. (20)

920. Men zoekte nu, om zich met het opzoeken in de Logarithmen-tafel gemeenzaam te maken, de Logarithmen van de volgende getallen.

Log. 317	=	2,4937368
Log. 7381	=	3,8681152
Log. 8507	=	4,9320017
Log. 542067	=	5,7340531
Log. 8459652	=	6,5590325
Log. 67925317	=	7,8320316
Log. 37,8753	=	1,5783560
Log. 77,26988	=	1,8880101
Log. 8,531297	=	0,9310151
Log. 0,381257	=	9,5812179 — 10
Log. 0,855093	=	9,920144 — 10
Log. 0,038275	=	8,5829152 — 10
Log. 0,0032853	=	7,5165750 — 10
Log. 0,0008375	=	6,922984 — 10
Log. 0,0000897	=	5,9527924 — 10

En omgekeerd, de getallen tot de onderstaande Logarithmen behoorende:

3,2621000	=	Log. van 1828,5208
0,7160009	=	Log. van 5,19997
4,8318503	=	Log. van 67896,946
6,90007	=	Log. van 247385,43
5,8120127	=	Log. van 6,8653,444

(19) Welken vasten regel moet men bij het ontwijken der negatieve wijzers in het oog houden?

(20) Hoe moet men te werk gaan, wanneer de negatieve wijzer grooter dan tien zou zijn?

9,8709623	— 10	=	Log. van 0,7429545
8,3890033	— 10	=	Log. van 0,02449082
7,8609037	— 10	=	Log. van 0,00725945
6,7300000	— 10	=	Log. van 0,000537032

Hier in moet de Onderwijzer den Leerling mondeling onderrigt geven.

LVII LES. Over het gebruik der Logarithmen.

921. Het gebruik der tafelen steunt op de eigenschappen der Logarithmen, in art. 897—900. verklaard.

A. Bekorting der Vermenigvuldiging.

922. REGEL. De som van de Logarithmen van twee of meer getallen, is de Logarithmus van het product dezer getallen. Zie art. 897. (1)

1 VOORBEELD. Het product der getallen 739 en 317 te vinden?

$$\begin{aligned}\text{Log. } 739 &= 2,8686444 \\ \text{Log. } 317 &= 2,5010593\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Log. } 234263 &= 5,3697037 \\ \text{Aldus is } 739 \times 317 &= 234263.\end{aligned}$$

2 VOORBEELD. Het product der getallen 23,73, 769,3 en 0,738 te vinden?

$$\begin{aligned}\text{Log. } 23,73 &= 1,3752977 \\ \text{Log. } 769,3 &= 2,8860957 \\ \text{Log. } 0,738 &= 9,8680564 - 10\end{aligned}$$

$$\text{Log. } 13472,5465 = 4,1294498$$

Merkt op: dat, aangezien de wijzer van de Logar. van 0,738 met 10 vermindert is, de wijzer van de som der Logarithmen, die 14 is, insgelijks 10 minder zal moeten zijn, zoo dat men voor dien wijzer 4 in plaats van 14 nemen moet.

3 VOORBEELD. Het product 0,083 × 0,7853 door Logarithmen te vinden?

$$\begin{aligned}\text{Log. } 0,083 &= 8,9190781 - 10 \\ \text{Log. } 0,7853 &= 9,8950365 - 10\end{aligned}$$

$$\text{Log. } 0,06518003 = 8,8141146 - 10$$

(1) Welke is de regel om het product van twee of meer getallen door de Logarithmen te vinden?

Verklaring. Hier is de wijzer van de som 18; deze som moet met 10 en nog eens 10 verminderd worden: men verminderd dan, om dat 18 kleiner dan 20 is, deze som slechts met 10, en schrijft achter de som der Logarithmen — 10, om aan te duiden, dat die som nog met tien moet verminderd worden, en dat de wijzer 8 tot eene tiendeelige breuk behoort.

4 VOORBEELD. *Het product $73,859 \times 0,973 \times 0,0763 \times 0,00823$ te vinden?*

$$\begin{aligned}\text{Log. } 73,859 &= 1,8684034 \\ \text{Log. } 0,973 &= 9,9881128 - 10 \\ \text{Log. } 0,0763 &= 8,8825245 - 10 \\ \text{Log. } 0,00823 &= 7,9153998 - 10\end{aligned}$$

$$\text{Log. van } 0,04512741 = 8,6544405 - 10$$

Verklaring. Hier is de wijzer van de som der Logarithmen 28; deze som moet met driemaal tien verminderd worden: men verminderd dan dezelve met tweemaal tien, en schrijve achter de som der Logarithmen min tien; ten blijke, dat de wijzer acht tot de Logarithmus van eene tiendeelige breuk behoort.

923. *Aanmerking.* Wanneer men zeer groote getallen met elkander moet vermenigvuldigen, zouden de Logarithmen der gewone tafel tot dat einde niet toereikend zijn; omdat in de gewone Logarithmen-tafel de tiendeeligen niet verder dan tot in het zeverde cijfer zijn voortgezet, waarom men dan niet verwachten kan, dat het getal, tot eenen gegeven Logarithmus behoorende, in de tafel verder dan in het achterste cijfer nauwkeurig zal kunnen gevonden worden. Ter verkrijging van eene grootere nauwkeurigheid, zouden Logarithmen, die tot meer cijfers benaderd waren, moeten gebruikt worden. Nogtans vindt men altijd de eerste cijfers van een product door de Logarithmen, en zulks is meestal voor het werkdadige voldoende, en altijd bij de vermenigvuldiging der tiendeelige breuken voldoende toereikend.

B. Bekorting der Deeling.

924. **REGEL.** *De Logarithmus van het deeltal min de Logarithmus van den deeler, is de Logarithmus van het quotient.* Zie art. 898. (2)

1 VOORBEELD. *Het getal 79837 door 563 te deelen?*

$$\begin{aligned}\text{Log. } 79837 &= 4,9022042 \\ \text{af Log. } 563 &= 2,7505084\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Log. } 141,8064 &= 2,1516958 \\ \text{Bij gevolg is } 141,8064\end{aligned}$$

(2) Welke is de regel om het quotient van twee getallen door Logarithmen te vinden?

2 VOORBEELD. *Het getal 875 door het getal 3139 te deelen, of de breuk $\frac{875}{3139}$ in eene tiendeelige breuk te ontwikkelen?*

$$\begin{aligned}\text{Log. } 875 &= 2,9420081 \\ \text{Log. } 3139 &= 3,4967913\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Log. } 0,2787512 &= 9,4452168 - 10 \\ \text{Men heeft dan } \frac{875}{3139} &= 0,2787512\end{aligned}$$

Verklaring. Hier is de af te trekken Logarithmus groter dan de Logarithmus, waarvan hij agetrokken wordt; echter volbragt men de afrekking op de gewone wijze, en wanneer men tot de wijzers gekomen is, zegt men: 3 van 2 kan niet; maar dan verhoogt men den wijzer 2 met 10, en zegt 3 van 12 blijft 9, welke dan voor den wijzer van het quotient gehouden wordt; dan, daar op deze wijze de Logarithmus van het quotient 10 te groot wordt, schrijft men achter het gevonden verschil — 10, het welk dan aanduidt, dat de Logarithmus van het quotient tot eene tiendeelige breuk behoort. Zie art. 917.

3 VOORBEELD. *Het gewoon gebroken $\frac{89}{93137}$ in eene tiendeelige breuk te ontwikkelen?*

$$\begin{aligned}\text{Log. } 89 &= 1,9493900 \\ \text{Log. } 93137 &= 4,9690756\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Log. } 0,000955684 &= 6,9803144 - 10 \\ \text{Derhalve } \frac{89}{93137} &= 0,000955684\end{aligned}$$

4 VOORBEELD. *Om met behulp der Logarithmen 38,78 door 0,379 te deelen?*

$$\begin{aligned}\text{Log. } 38,78 &= 1,5886078 \\ \text{Log. } 0,379 &= 9,5786392 - 10\end{aligned}$$

$$\text{Log. } 102,32143 = 2,0099686$$

$$\text{Derhalve is } \frac{38,78}{0,379} = 102,32143$$

Verklaring. Hier kan bij de afrekking de wijzer 9 van den wijzer 1 niet afgetrokken worden: men verhoogt dan den wijzer 1 met 10, en trekt 9 van 10 + 1 of 11; hier door zou nu het verschil 10 te groot zijn, indien het af te trekken getal insgelijks niet met 10 ware verhoogd geworden; maar, daar nu beide wijzers gelijkelijk verhoogd zijn, komt het verschil in zijn natuurlijke toestand, en is dienvolgens de Logarithmus van een getal, dat grooter dan één is.

5 VOORBEELD. *Het quotient te vinden van 0,8769, gedeeld door 12,637?*

$$\text{Log. } 0,8769 = 9,9429501 - 10$$

$$\text{Log. } 12,637 = 1,1016440$$

$$\text{Log. } 0,0693915 = 8,8413061 - 10$$

Verklaring. Daar alleen de Logarithmus, waar van wordt afgetrokken, met 10 verhoogd is, zoo moet ook het verschil gehouden worden als met 10 verhoogd te zijn; het verschil wordt derhalve de Logarithmus van eene tiendeelige breuk.

6 VOORBEELD. Om 0,96789 door 0,23685 te deelen?

$$\text{Log. } 0,96789 = 9,9858260 - 10$$

$$\text{Log. } 0,23685 = 9,3744734 - 10$$

$$\text{Log. } 4,08651 = 0,6113526$$

$$\text{Derhalve } \frac{0,96789}{0,23685} = 4,08651$$

Verklaring. Daar, in dit voorbeeld, beide de van elkander af te rekken Logarithmen met 10, en dus even veel zijn verhoogd geworden, komt, bij de aftrekking, het verschil der Logarithmen in zijnen natuurlijke staat, zoo als het behoort.

7 VOORBEELD. Men begeert 0,08634 door 0,38794 te deelen?

$$\text{Log. } 0,08634 = 8,9362120 - 10$$

$$\text{Log. } 0,38794 = 9,5887646 - 10$$

$$\text{Log. } 0,2225605 = 9,3474474 - 10$$

$$\text{Derhalve } \frac{0,08634}{0,38794} = 0,2225605.$$

Verklaring. Alhoewel beide de Logarithmen van deeler en deeltal met 10 verhoogd zijn, moet echter de Logarithmus van het deeltal nog met 10 verhoogd worden, om de wijzers van elkander te kunnen aftrekken, en het verschil moet dus met 10 verminderd worden: de wijzer 9 van dit verschil behoort derhalve tot eene tiendeelige breuk.

C. Over het Arithmetisch Complement.

925. Sommigen maken, bij het aftrekken der Logarithmen van het Arithmetisch Complement, gebruik. Men verstaat door het Arithmetisch Complement van een getal het getal, dat men verkrijgt, wanneer men het achterste cijfer van dit getal van tien, en al de andere cijfers van negen afrekt. Aldus is 549673 het Arithmetisch complement van 450327.

926. Laat 760945 van 39086793 moeten afgetrokken worden:

	39086793
	00760945
neem het Arithmetisch complement van het onderste getal, dan heeft men	99239555
tel bij	39086793
komt	36305848

en dit getal 198305848, verminderd met 10000000, is het verschil der twee gegevene getallen. (3)

927. De reden hier van is klaar. Wanneer ik 00760945 van 100000000 aftrek, dan is het verschil 99239055, en dit verschil wordt, blijkens de regel van de aftrekking, gevouden, door alle de cijfers van 00760945, behalve het laatste, van negen en het laatste cijfer van tien af te trekken. Noem nu het kleinste der gegevene getallen B, en het grootste A: laat dit laatste getal uit n cijfers bestaan; dan is één gevolgd van n nullen $= 10^n$, en indien men B van 10^n aftrekt, is het verschil $10^n - B$; dit verschil bij A opgeteld, geeft $A + 10^n - B$; trekt men hier van af 10^n , dan houdt men $A - B$, het verschil der gegevene getallen, over. (4)

928. Door dit aftrekken, met behulp van het arithmetisch complement, wordt de aftrekking eenigermate in eene optelling verandert. Nemen wij het eerste voorbeeld van art. 924.

$$\text{Log. } 79837 = 4,9022042$$

$$\text{Arithm. comp. Log. } 563 = 7,2494916 \text{ tel bij}$$

$$\text{Log. } 141,8064 = \times 2,1516958. (5)$$

Wanneer men echter in aanmerking neemt, dat men, om het arithmetisch complement te vinden, eene aftrekking moet uitwerken, welke, wel is waar, lichter is dan de gewone aftrekking, en daarna moet optellen, is 'er geene reden, om deze werkwijze voor korter dan de gewone te houden.

D. Over het vinden van het product van eenige getallen, gedeeld door het product van twee of meer andere getallen.

929. Om de waarde van eene uitdrukking van den vorm

$$\frac{a \times b \times c \times d \times e \times f}{p \times q \times r \times s \times t}$$

door middel van de Logarithmen te vinden, trekke men van de som van de Logarithmen der factoren van den teller af de som van de Logarithmen der factoren van den noemer, en het verschil zal de Logarithmus van de waarde dezer uitdrukking zijn. (6)

VOORBEELD. De waarde van

$$\frac{7,36 \times 0,7984 \times 0,00967 \times 3,096}{0,0097 \times 0,0837 \times 0,0968}$$

te vinden?

(3) Hoe vindt men het verschil van twee getallen door het arithmetisch complement?

(4) Op welke gronden steunt die regel?

(5) Hoe geschiedt het aftrekken van Logarithmen door het arithmetisch complement?

(6) Hoe vindt men de waarde van het product van eenige getallen, welke door het product van eenige andere getallen gedeeld zijn?

$$\begin{array}{l} \text{Log. } 7,36 = 0,8668778 \\ \text{Log. } 0,7984 = 9,902205 - 10 \\ \text{Log. } 0,0096 = 7,9854265 - 10 \\ \text{Log. } 3,096 = 0,4908010 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Log. } 0,0097 = 7,9867717 - 10 \\ \text{Log. } 0,0837 = 8,9227255 - 10 \\ \text{Log. } 0,0968 = 8,958754 - 10 \\ \text{B... } 25,8953726 - 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 19,2453258 - 20...A \\ \text{af } 25,8953726 - 30...B \end{array}$$

$$3,3499532 = \text{Log. } 2238,48 = \text{de waarde van het gegeven gebroken.}$$

Verklaring. In A vindt men de som van de Logarithmen van de factoren des tellers; in B de som van de Logarithmen van de factoren des noemers. Om nu naar behooren B van A af te trekken: verhoog men den wijzer van A met 10, dan wordt A 29,2453258 - 30; en daar nu van A en B elk 30 af te trekken zijn, geeft het verschil den eigenlijken Logarithmus van de waarde van het gegeven gebroken.

E. Magts-verheffing door Logarithmen.

930. **REGEL.** De Logarithmus van de magt van een getal is gelijk aan den Logarithmus van de wortel van die magt, vermenigvuldigd met dierzelfer exponent. Zie art. 899. (7)

1 **VOORBEELD.** Men begeert het getal 3,78195 tot de tweede, derde, vierde en vijfde magt te verheffen?

$$\begin{array}{l} \text{Log. } 3,78195 = 0,5777158 \\ 2. \text{ Log. } 3,78195 = 1,1554316 = \text{Log. van } 14,30315 \\ 3. \text{ Log. } 3,78195 = 1,7331474 = \text{Log. van } 54,09379 \\ 4. \text{ Log. } 3,78195 = 2,3108632 = \text{Log. van } 204,58000 \\ 5. \text{ Log. } 3,78195 = 2,8885790 = \text{Log. van } 773,7115 \end{array}$$

Derhalve is

$$\begin{array}{l} (3,78195)^2 = 14,30315 \\ (3,78195)^3 = 54,09379 \\ (3,78195)^4 = 204,58000 \\ (3,78195)^5 = 773,7115 \end{array}$$

2 **VOORBEELD.** De tiendeelige breuk 0,7839 tot de derdende magt te verheffen?

$$\text{Log. } 0,7839 = 9,8931512 - 10$$

$$\begin{array}{r} \hline 128,6109656 - 130 \\ \hline \end{array} \quad (13 \text{ verm.})$$

$$\text{of } 8,6109656 - 10 = \text{Logar. van } 0,040802865 = (0,7839)^{13}$$

Verklaring. Men vermenigvuldige de Logarithmus van het gegeven getal, zijnde 9,8941512 - 30, met 13: het product is 128,6109656 - 130; men verminderde 128 en 130 elk met 120, dan verkrijgt men 8,6109656 - 10,

(7) Hoe vindt men de magt van een getal door de Logarithmen?

en deze heeft dezelfde waarde als 128,6109656 - 130, omdat het verschil van twee getallen onveranderd blijft, wanneer men beide getallen met hetzelfde getal verhoogt of verlaagt. Het getal, tot den Logarithmus 8,6109656 - 10 behorende, is 0,040802865, en dit getal is de dertiende magt van 0,7839, zoo als ook, door dadelijke vermenigvuldiging, zal gevonden worden.

F. Worteltrekking door Logarithmen.

931. **REGEL.** De Logarithmus van de tweede, derde, vierde, vijfde, en, in het algemeen, van de n^{de} magts-wortel van een getal is gelijk aan de helft, een derde, een vierde, een vijfde, een n^{de} van den Logarithmus van dit getal. Zie art. 900. (8)

1 **VOORBEELD.** Den cubus-wortel uit 78,9631 te trekken?

$$\text{Log. } 78,9631 = 1,8974242$$

$$\begin{array}{r} 3) \\ \hline \text{Log. } 4,290162 = 0,6324747 = \text{Log. } \sqrt[3]{78,9631} \end{array}$$

$$\text{derh. } \sqrt[3]{78,9631} = 4,290162.$$

2 **VOORBEELD.** De tiende magts-wortel uit het getal tien te vinden?

$$\text{Log. } 10 = 1,0000000$$

$$\begin{array}{r} 10) \\ \hline \text{Log. } 1,258925 = 0,1000000 = \text{Log. } \sqrt[10]{10} \end{array}$$

$$\text{derh. } \sqrt[10]{10} = 1,258925.$$

3 **VOORBEELD.** De vierkants wortel uit 0,738 te trekken?

$$\text{Log. } 0,738 = 9,8680564 - 10$$

$$\begin{array}{r} 2) \\ \hline 4,9340282 - 5 \end{array}$$

$$\text{af } \dots 5,0000000$$

$$\text{Log. } 0,9350692 = 9,9340282 - 10$$

$$\text{derh. } \sqrt{0,738} = 0,860692$$

4 **VOORBEELD.** Den cubus-wortel uit 0,789152 te trekken?

$$\text{Log. } 0,789152 = 9,8971624 - 10$$

$$\begin{array}{r} 3) \\ \hline 3,2990541 - 3\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{af } 3,3333333$$

$$\text{Log. } 0,924104 = 9,9657208 - 10$$

$$\text{derh. } \sqrt[3]{0,789152} = 0,924104.$$

5 **VOORBEELD.** De zevende magts-wortel uit de tiendeelige breuk 0,09873 te trekken?

(8) Hoe vindt men de wortels der getallen door Logarithmen?

$$\text{Log. } 0,09873 = 8,9529377 - 10$$

$$7) \quad 1,2789911 - 11$$

$$\text{af } 11 = 1,4285714$$

$$\text{Log. } 0,7086303 = 9,8504197 - 10$$

$$\text{derh. } \sqrt{0,09873} = 0,7086303$$

Verklaring. De verklaring van dit laatste voorbeeld zal tevens tot eene verklaring der voorgaande kunnen strekken. De *Log.* van het gegeven getal 0,09873 is 8,9529377 verminderd met 10; een zevende deel van dien Logarithmus is een zevende deel van 8,9529377 min een zevende van 10, dat is gelijk aan 1,2789911 min 11; men make dan 11 tot eene tiendeelige breuk, en men vindt $1,2789911 - 11 = 1,4285714$, men trekke derhalve 1,4285714 van 1,2789911, en daar deze aftrekking niet gefchieden kan, zonder den wijzer van 1,2779911 met 10 te verhoogen, moet men het verschil 9,8504197 met 10 verminderen; waaruit blijkt, dat 9,8504197 — 10 de Logarithmus eener tiendeelige breuk is.

G. Regel van Drien door Logarithmen.

932. Daar men in eenen Regel van Drien de vierde evenredige vindt, door het product der middelste termen door den voorsten term te deelen, zal men eenen Regel van Drien door Logarithmen oplossen, wanneer men van de som der Logarithmen van de middelste termen den Logarithmus van den voorsten term afrekt. (9) Echter wanneer de gegevens kleine en tegen elkander verkleinbare getallen zijn, haalt het gebruik der Logarithmen niet in tijd uit. Ook is het gebruik der Logarithmen, wanneer men in de oude maten en gewigten rekent, min of meer lastig, daar men de deelen en onderdeelen eerst tot tiendeeligen behoort te herleiden, eer men de Logarithmen kan toepassen: doch rekent men in het metrieke Stelsel komen de zwaarste berekeningen op eene enkele additie en subtractie neder, en het is in alle die gevallen genoeg slechts vijf cijfers van de tiendeeligen der Logarithmen te nemen.

1 VOORBEELD. Hoe veel kosten 378,17 Kilogrammes, de Kilogramme tot 23,17 Francs?

$$\text{Log. } 23,17 \text{ Francs} = 1,3649260$$

$$\text{Log. } 378,17 \text{ Kilog.} = 2,5776871$$

$$3,9426131 \text{ Log. van}$$

$$8762,20 \text{ Francs.}$$

2 VOORBEELD. Indien 378,8 Kilogrammes kosten 4096,23 Francs, hoe veel kosten dan 19,386 Kilogrammes?

(9) Hoe lost men eenen Regel van Drien door Logarithmen op?

$$378,8 \text{ Kil.} : 19,386 \text{ Kil.} = 4096,23 \text{ Francs} : x \text{ Francs}$$

$$\text{Log. } 4096,23 \text{ Fr} = 3,6123939$$

$$\text{Log. } 19,386 \text{ Kil.} = 1,2874882 \text{ ops.}$$

$$\text{Log. } 378,8 = 4,8998821$$

$$2,5784100$$

$$\text{Log. } x = 2,3214721$$

$$\text{derhalve } x = 209,64 \text{ Francs.}$$

H. Gebruik der Logarithmen in de berekening van Interest op Interest.

933. Welk een bijzonder gemak het gebruik der Logarithmen in deze berekening aanbrengt, zal uit de volgende voorbeelden blijken.

934. I VRAAGSTUK. Een zeker kapitaal is op interest van interest, tegen eenen bepaalden interest ten 100 in het jaar uitgezet: men begeert het beloop van kapitaal en interest, na het einde van eenige jaren, te vinden?

Oplossing. Een kapitaal staat op interest van interest, wanneer, na het einde van elk jaar, den vervallen interest bij het kapitaal gevoegd wordt, en dit vermeerderde kapitaal, tegen denzelfden interest ten honderd, in het tweede jaar rente opbrengt, en men op deze wijze, na het einde van elk jaar, den verloopen interest bij het kapitaal voegt.

Stel het kapitaal k , de interest van 1 gl. of 1 Fr. in een jaar $= r$; dan is het beloop van kapitaal en interest van éene éenheid in één jaar $1 + r$, men stelle dan:

$$1 : k = 1 + r ? \text{ komt } (1 + r) \times k$$

het beloop van kapitaal en interest is dan op het einde van het eerste en het begin van het tweede jaar $= (1 + r) \times k$.

Om nu het beloop van kapitaal en interest op het einde van het tweede en het begin van het derde jaar te vinden, stelt men:

$$1 : (1 + r) \times k = (1 + r) ? \text{ komt } (1 + r)^2 \times k$$

voor het beloop van kapitaal en interest op het einde van het derde jaar. Op deze wijze voortredenerende, zal men zien: dat het beloop van kapitaal en interest zal zijn op het einde van

$$\text{het derde jaar} \dots (1 + r)^3 \times k$$

$$\text{het vierde jaar} \dots (1 + r)^4 \times k$$

$$\text{het vijfde jaar} \dots (1 + r)^5 \times k$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\text{het } n^{\text{de}} \text{ jaar} \dots (1 + r)^n \times k$$

Stellen wij nu dit beloop $= x$, dan is

$$x = (1 + r)^n \times k$$

dat is, in Logarithmen,

$$\text{Log. } x = n \times \text{Log. } (1 + r) + \text{Log. } k$$

935. Stellen wij nu $k = 12560$ g's den interest ten 100 gelijk $4\frac{1}{2}$, dan

is de interest van éénen gulden $= 0,045 = r$ en $1 + r = 1,045$ en $n = 18$. Nu is

$$\text{Log. } (1 + r) = \text{Log. } 1,045 = 0,0191:629$$

$$\text{verm. met } n = 18$$

$$\text{komt Log. } (1 + r)^n = 0,344:932$$

$$\text{Log. } k = 4,989896 \text{ opt.}$$

$$\text{komt Log. } x = 4,430828$$

$$\text{en } x = 27738,49 \text{ gl. voor het be-}$$

loop van kapitaal en interest in 18 jaren.

936. Wil men uit de gevonden vergelijking $\text{Log. } x = n \times \text{Log. } (1 + r)$ + $\text{Log. } k$ elke grootheid afzonderen, dan zal men vinden:

$$\text{Log. } k = \text{Log. } x - n \times \text{Log. } (1 + r)$$

$$\text{Log. } (1 + r) = \frac{\text{Log. } x - \text{Log. } k}{n}$$

$$n = \frac{\text{Log. } x - \text{Log. } k}{\text{Log. } (1 + r)}$$

en men zal door deze vergelijkingen alle vragen, de interest van interest-rekening betreffende, door de Logarithmen kunnen oplossen.

937. II VRAAGSTUK. Iemand is aan een ander, na verloop van n jaren, schuldig te betalen a gulden; maar nu komt men overén, om die som terstond af te doen, mits kortende r van elken gulden, voor elk jaar, dat men dien gulden te vroeg betaalt; men vraagt naar de contante waarde?

Oplossing. Volgens de betaling zijn $1 + r$ gulden over een jaar betaalbaar kontant waard éénen gulden. Wij stellen dan

$$(1 + r) : a = 1 : \text{komt } \frac{a}{1 + r}$$

de tegenwoordige waarde van een kapitaal a , dat over een jaar betaalbaar is. Wanneer men aldus voortredeneert, zal men vinden: dat

$\frac{a}{(1 + r)^1}$, $\frac{a}{(1 + r)^2}$, $\frac{a}{(1 + r)^3}$ en $\frac{a}{(1 + r)^n}$ zijn de tegenwoordige waarden

van a gulden, betaalbaar na verloop van 2, 3, 4 en n jaren; stel die tegenwoordige waarde $= x$; dan is

$$x = \frac{a}{(1 + r)^n}$$

en in Logarithmen

$$\text{Log. } x = \text{Log. } a - n \times \text{Log. } (1 + r).$$

938. Zij $a = 5864$; $r = 0,03$; $1 + r = 1,03$ en $n = 10$

$$\text{Log. } (1 + r) = 0,0211893$$

$$\text{verm. met } n = 10$$

$$\text{Log. } (1 + r)^n = 0,2118930 \text{ dit af van}$$

$$\text{Log. } a = 3,6681040$$

$$\text{komt Log. } x = 3,5563010$$

$$x = 3600 \text{ gl.}$$