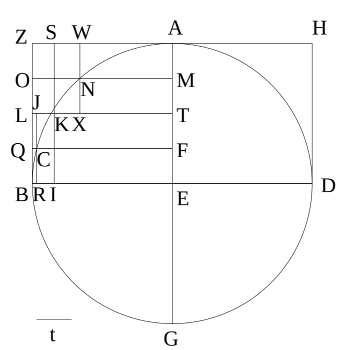
Uit: Ibn al-Haytham (965-1041), Verhandeling over de inhoud van de bol.

Toelichting: Vertaling door Jan P. Hogendijk gebaseerd op de Arabische editie van R. Rashed, zie de bibliografie aan het eind van het stuk. Over het probleem in de tekst: In zijn boek Over de Bol en de Cylinder *leidt Archimedes (ca. 250 v. Chr.) de inhoud van de bol op een gecompliceerde manier af. Zijn redenering is zo gecompliceerd doordat hij eerst de oppervlakte van de bol behandelt en daarna de inhoud van de bol op de oppervlakte baseert. In het hieronder vertaalde stuk laat Ibn al-Haytham zien dat de inhoud van de bol op eenvoudiger manier kan worden afgeleid door de oppervlakte er niet bij te betrekken. In moderne termen berekent hij eerst de inhoud van geschikte ingeschreven en omgeschreven lichamen, die zich gemakkelijk laten afleiden doordat hij de kwadraten van de eerste n natuurlijke getallen kon optellen (zie hiervoor de Engelse vertaling). Op basis hiervan vindt hij de inhoud van de bol op grond van een argument in de stijl van Archimedes.*

In deze Nederlandse vertaling zijn alleen de belangrijkste stukken van de tekst van Ibn al-Haytham weergegeven. Ik heb ook een Engelse vertaling gemaakt van een groter deel van de tekst, die op dezelfde website staat, met wat commentaar in de voetnoten. Voor de gebruikte bron zie het eind van de Nederlandse en de Engelse tekst.

[307] Elke bol is twee derde van de cylinder met basis de grootste cirkel die in de bol valt, en hoogte de middellijn van de bol.

Voorbeeld hiervan: bol $ABGD$ met middelpunt E. Dan zeg ik: deze is twee derde maal de cylinder met basis de grootste cirkel die in de bol valt, en hoogte de middellijn van de bol.



(Bewijs): We laten door het middelpunt E van de bol een vlak gaan dat de bol snijdt, en dan snijdt het de bol in een van de grootste cirkels die in de bol vallen. Laat dit cirkel $ABGD$ zijn. We trekken in deze cirkel twee middellijnen die elkaar loodrecht snijden, laten het middellijnen AEG en BED zijn. We trekken door B de lijn BZ evenwijdig aan lijn EA. We trekken door punt A lijn AZ evenwijdig aan lijn EB. Dan is $AEBZ$ een rechthoek. Als lijn AE wordt vastgezet en rechthoek $AEBZ$ om lijn AE rondgedraaid wordt totdat hij in zijn uitgangspositie terug is, dan brengt rechthoek $AEBZ$ een ronde cylinder voort met basis de cirkel met straal BE die ook de straal van de bol is, en hoogte lijn EA die ook de straal van de bol is. De cirkel [309] met straal de straal van de bol is een grootste cirkel in de bol. Dus de cylinder die wordt voortgebracht door het ronddraaien van rechthoek BA om lijn EA heeft als basis een grootcirkel van de bol en hoogte de straal van de bol. Laat deze cylinder BH zijn. Als rechthoek BA om lijn EA ronddraait, dan draait sector ABE ook om lijn EA, en als sector ABE om lijn EA ronddraait, ontstaat uit het ronddraaien een halve bol met basis de cirkel met straal BE - omdat wanneer de helft van de cirkel $ABGD$, waarop ABG en de middellijn AG liggen, om de middellijn AG ronddraait, totdat hij terug is in de uitgangspositie, er door de draaiing de bol $ABGD$ ontstaat, en door het ronddraaien van lijn EB een cirkel ontstaat die de bol in twee gelijke helften verdeelt. Dus als rechthoek BA om de lijn EA draait, ontstaat uit het ronddraaien een cylinder met basis de grootste cirkel die in de bol $ABGD$ valt, en hoogte lijn EA, die de straal van bol $ABGD$ is. Uit het ronddraaien van sector ABE ontstaat de helft van de bol $ABGD$.

Dan zeg ik: De halve bol die voortgebracht wordt door het ronddraaien van sector ABE is (gelijk aan) twee derde van de cylinder BH die voortgehracht wordt door het ronddraaien van rechthoek BA.

Bewijs hiervan: Dit kan niet anders zijn. Want als het wel anders was, laat de halve bol dan niet gelijk zijn aan twee derde van de cylinder BH. Omdat de halve bol niet gelijk is aan twee derde van cylinder BH, is hij ofwel groter dan twee derde van de cylinder ofwel kleiner.

Dus laat de halve bol eerst groter zijn dan twee derde van de cylinder, en laat het overschot van de halve bol over twee derde van de cylinder gelijk zijn aan de grootheid t.

We halveren AE in het punt T, en we trekken door T lijn TK evenwijdig aan lijn EB, dan is TK loodrecht op lijn AE. We verlengen TK tot L, dan is TL gelijk aan lijn EB. We trekken door punt K een lijn SKI evenwijdig aan de twee lijnen EA, BZ. Dan is SK gelijk aan KI, omdat AT gelijk is aan TE. Dus rechthoek KE is gelijk aan rechthoek KA, en rechthoek KB is gelijk aan rechthoek KZ. Als rechthoek BA om lijn EA ronddraait, ontstaan uit de rechthoeken EK, KA twee [311] gelijke cylinders, en uit de twee figuren KB, KZ twee gelijke ronde lichamen die de gelijke cylinders omhullen. Dus zijn de cylinder die ontstaat uit het ronddraaien van rechthoek KE en het ronde lichaam dat ontstaat uit het ronddraaien van rechthoek KZ samen de helft van de cylinder BH

Hierna halveren we AT in het punt M, en we trekken door punt M lijn MN evenwijdig aan lijn EB. Dan is MN loodrecht op lijn AE. We verlengen MN tot O. Dan is MO gelijk aan EB. We trekken door punt N lijn WNX evenwijdig aan de lijnen KS, LZ. Dan is WN gelijk aan NX, en rechthoek NT is gelijk aan rechthoek NA, en rechthoek NK is gelijk aan rechthoek NS. Als rechthoek BA om lijn EA draait, draait rechthoek KA (ook), en uit de rechthoeken NT, NA ontstaan twee gelijke cylinders, en uit rechthoeken NK, NS ontstaan twee ronde lichamen. De cylinder die ontstaat uit het ronddraaien van rechthoek NT samen met het ronde lichaam dat ontstaat uit het ronddraaien van rechthoek NS zijn samen gelijk aan de helft van de cylinder die ontstaat uit het ronddraaien van rechthoek KA.

Hierna halveren we lijn TE in het punt F. We trekken door F lijn FC evenwijdig aan lijn EB. Dan is FC loodrecht op AE. We trekken FC door naar Q. Dan is FQ gelijk aan lijn EB. We trekken door punt C lijn JCR^* evenwijdig aan de lijnen ET, BL. Dan is JC gelijk aan CR^*, en rechthoek CK is gelijk aan rechthoek CI, en rechthoek CB is gelijk aan rechthoek CL. Als rechthoek BA om lijn EA draait, draait rechthoek BK (mee), en uit het ronddraaien ervan ontstaat een rond lichaam, en uit het ronddraaien van rechthoeken CK, CI ontstaan twee ronde lichamen, en uit het ronddraaien van rechthoeken CB, CL ontstaan twee ronde lichamen. Dan is het ronde lichaam dat ontstaat uit het [313] ronddraaien van rechthoek CI samen met het ronde lichaam dat ontstaat uit het ronddraaien van rechthoek CL, gelijk aan de helft van het ronde lichaam dat ontstaat uit het ronddraaien van rechthoek KB.

Dus is de cylinder die ontstaat uit het ronddraaien van rechthoek NT samen met het ronde lichaam dat ontstaat uit het rondraaien van rechthoek NS samen met de twee ronde lichamen die ontstaan uit het ronddraaien van de twee rechthoeken CI, CL de helft van de cylinder die ontstaat uit het ronddraaien van rechthoek KA samen met de helft van het ronde lichaam dat onstaat uit het ronddraaien van rechthoek KB. En er was bewezen dat de cylinder die ontstaat uit het ronddraaien van rechthoek KE samen met het ronde lichaam dat onstaat uit het ronddraaien van rechthoek KZ gelijk zijn aan de helft van cylinder BH.

Omdat dit zo is, is van cylinder BH de helft afgehaald, en van de rest is (nu) ook de helft afgehaald. En als we alle lijnen AM, MT, TF, FE halveren, en uit de deelpunten lijnen trekken evenwijdig aan lijn BE, en uit de snijpunten met boog AB lijnen trekken evenwijdig aan lijn AE, worden de rechthoeken BC, CK, KN, NA alle in vier delen verdeeld, en elk paar overstaande rechthoeken zijn gelijk aan de helft van de rechthoek waaruit ze voortgekomen zijn. En de ronde lichamen die voortgebracht worden door het ronddraaien van die twee rechthoeken zijn de helft van de ronde lichamen die voortgebracht worden door het ronddraaien van rechthoeken BC, CK, KN, NA. En als dit steeds wordt herhaald, wordt van cylinder BH de helft afgesneden, en van de rest weer de helft. [formulering is onnauwkeurig, waarschijnlijk fouten in de overlevering of de editie]

Voor elk paar verschillende grootheden geldt: als van de grootste de helft wordt afgesneden, en van de rest de helft ervan, en dit steeds herhaald wordt, dan moet uiteindelijk een grootheid overblijven die kleiner is dan de kleinste grootheid (van de twee). Want omdat van de grootheid de helft is afgesneden, en van de rest de helft daarvan, is van de grootheid meer dan de helft afgesneden. Dus als we van een grootheid de helft afsnijden, en van de rest de helft, en dit veel malen doen, snijden we elke twee keren totaal meer dan de helft af. Voor elk paar verschillende grootheden geldt: als van de grootste $<$ meer dan $>$ de helft wordt afgesneden, en van de rest $<$ meer dan $>$ de helft, en dat steeds herhaald wordt, dan blijft uiteindelijk een grootheid over die kleiner is dan de kleinste grootheid (van de twee). [dit is bewezen door Euclides]

De cylinder BH en de grootheid t zijn twee verschillende grootheden, en de grootste ervan is de cylinder BH. Dis als van de cylinder BH de helft wordt afgesneden, en van de rest de helft, en van de rest de helft, op de manier die wij uitgelegd hebben, en dat steeds herhaald wordt, moet uiteindelijk een grootheid overblijven die kleiner is dan grootheid t. [315] En als van de cylinder BH de helft wordt afgesneden, en van de rest de helft, en van de rest de helft, op de manier die wij hebben uitgelegd, dan bestaat hetgeen van de cylinder overblijft, uit de ronde lichamen (zoals) die ontstaan uit de rechthoeken BC, CK, KN, NA en degenen die daarmee corresponderen, (dat wil zeggen de lichamen) zodanig dat het boloppervlak door het inwendige ervan gaat.

Laat de delen waarbij de verdeling van de cylinder op de manier die wij uitgelegd hebben, eindigt, en dat zijn de delen die (samen) kleiner zijn dan t, de ronde lichamen zijn die ontstaan uit het ronddraaien van de rechthoeken BC, CK, KN, NA. Dan zijn de gedeelten van deze ronde lichamen die binnen de bol liggen samen veel kleiner dan grootheid t. Maar de halve bol is de grootheid t groter dan twee derde van de cylinder BH. Dus is het gedeelte van de halve bol dat achterblijft, nadat deze stukken van de ronde lichamen in het inwendige ervan (d.w.z. van de bol) eraf gehaald zijn, groter dan twee derde van de cylinder BH. Maar wat van de halve bol overblijft na (het wegnemen van) de stukken van de ronde lichamen in het inwendige, is het trapvormige (letterlijk: afgezaagde) lichaam in het inwendige, waarvan de basis de cirkel met straal RE^* is, en de top de cirkel met straal MN. Dus dit trapvormige lichaam is groter dan twee derde van de cylinder BH.

(We beginnen nu) opnieuw: de lijnen AM, MT, TF, FE zijn gelijk, dus elk van de lijnen EF, ET, EM, EA is lijn EF groter dan zijn voorganger. Dus de verhouding van de lijnen EF, ET, EM, EA tot elkaar is de verhouding van de opeenvolgende (natuurlijke) getallen, beginnend met één, en steeds met één toenemend. Dus zijn de vierkanten van de lijnen EF, ET, EM, EA samen groter dan een derde van de gelijke vierkanten die gelijk zijn aan het vierkant van EA, en waarvan het aantal gelijk is aan het aantal van de lijnen EF, ET, EM, EA; en het overschot is kleiner dan twee derde van het vierkant van EA, zoals we in de voorafgaande (stelling) bewezen hebben [deze stelling is hier niet vertaald].

Het aantal van de lijnen EF, ET, EM, EA is het aantal van de verdeelpunten F, T, M, A, en het aantal van de verdeelpunten F, T, M, A is gelijk aan het aantal verdeelpunten E, F, T, M als we E nemen in plaats van A. En het aantal verdeelpunten E, F, T, M is gelijk aan het aantal lijnen EB, FQ, TL, MO. De lijnen EB, FQ, TL, MO zijn gelijk aan elkaar en elke ervan is gelijk aan lijn EB, en EB is gelijk aan lijn EA. Dus de vierkanten van lijnen EF, ET, EM, EA zijn groter dan de vierkenten van lijnen EB, FQ, TL, MO, en het overschot is kleiner dan twee derde van het vierkant van EA. Het vierkant van EF [317] samen met het product GF maal FA is het vierkant van EA. [Modern volgt dit uit $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ met $EA = EG = a$ en $EF = b$.] Maar het product GF maal FA is het vierkant van FC. [Dit is een eigenschap van de cirkel.] Dus het vierkant van EF samen met het vierkant van FC is gelijk aan het vierkant van EA [dit had hij sneller kunnen zien met de stelling van Pythagoras], dat gelijk is aan het vierkant van FQ. Op dezelfde manier is het vierkant van ET samen met het vierkant van TK gelijk aan het vierkant van EA, dat gelijk is aan het vierkant van TL. Op dezelfde manier is het vierkant van EM samen met het vierkant van MN gelijk aan het vierkant van EA, dat gelijk is aan het vierkant van MO. En het vierkant van EA is gelijk aan het vierkant van EB. Dus de vierkanten van EF, ET, EM, EA samen met de vierkanten van FC, TK, MN zijn samengenomen gelijk aan de vierkanten van EB, FQ, TL, MO. Maar de vierkanten van EF, ET, EM, EA zijn groter dan een derde van de vierkanten van EB, FQ, TL, MO, en het overschot is minder dan twee derde maal het vierkant van EA. Dus de vierkanten FC, TK, MN zijn minder dan twee derde van de vierkanten van EB, FQ, TL, MO, en het verschil is minder dan twee derde van het vierkant van EA.

Dus de cirkels met stralen de lijnen FC, TK, MN zijn kleiner dan twee derde maal de cirkels met stralen EB, FQ, TL, MO. En de verhouding van de cirkels tot de cirkels is gelijk aan de verhouding van de cylinders tot de cylinders die erop staan, als de hoogten van de cylinders gelijk zijn. Dus de cylinders met als bases de cirkels met stralen FC, TK, MN en hoogten de lijnen EF, FT, TM zijn kleiner dan twee derde van de cylinders met bases de cirkels met stralen EB, FQ, TL, MO en hoogten de gelijke lijnen EF, FT, TM, MA. En de cylinders met als bases de cirkels met stralen FC, TK, MN en hoogten de lijnen EF, FT, TM zijn het trapvormige lichaam met als basis de cirkel met straal RE en top de cirkel met straal MN, dat in het inwendige van de halve bol ligt. En de cylinders met bases de cirkels met stralen de lijnen EB, FQ, TL, MO en hoogtes de lijnen EF, FT, TM, MA zijn de cylinder BH. Dus het trapvormige lichaam in de bol is kleiner dan twee derde van de cylinder BH.

Maar er was bewezen dat dat trapvormige lichaam ook groter dan twee derde van cylinder BH is, En dit is onmogelijk. [319] Maar deze onmogelijkheid is het gevolg van onze aanname dat de halve bol groter is dan twee derde van de cylinder BH. Dus de halve bol is niet groter dan twee derde van de cylinder BH.

Ik zeg: de halve bol is ook niet kleiner dan twee derde van de cylinder BH.

Als dat wel mogelijk zou zijn, laat hem kleiner zijn dan twee derde van cylinder BH, en laat het verschil van de halve bol met twee derde van de cylinder de grootheid t zijn. Dan is de grootheid t kleiner dan de cylinder BH.

Als van de cylinder BH de helft wordt afgesneden, en van de rest de helft ervan, en van de rest de helft ervan, op de manier die wij hebben uitgelegd, dan moet er uiteindelijk een rest overblijven die kleiner is dan de grootheid

t. Wat van de cylinder overblijft bij het verdelen ervan, op de manier die wij hebben uitgelegd, zijn de ronde lichamen die ontstaan uit het ronddraaien van de rechthoeken (zoals) BC, CK, KN, NA en de soortgelijke rechthoeken, zodanig dat het boloppervlak door het inwendige ervan gaat. Laat ons de verdeling beeindigen bij een rest kleiner dan de grootheid t, en laat deze (rest) bestaan uit de ronde lichamen die ontstaan uit het ronddraaien van de rechthoeken BC, CK, KN, NA. Dan zijn de stukken van die ronde lichamen die buiten de bol liggen, veel kleiner dan de grootheid t. Maar de halve bol en de grootheid t waren samen gelijk aan twee derde van de cylinder BH. Dus de halve bol plus de stukken van de ronde lichamen die buiten de halve bol liggen zijn veel kleiner dan twee derde van de cylinder BH. Maar de halve bol en de stukken van de ronde lichamen die erbuiten liggen zijn het trapvormige lichaam met basis de cirkel met straal EB en top de cirkel met straal AW, dat de halve bol omhult. Dus dat trapvormige lichaam is kleiner dan twee derde van de cylinder BH.

Er was aangetoond dat de vierkanten van de lijnen FC, TK, MN minder zijn dan twee derde van de vierkanten van de lijnen EB, FQ, TL, MO, en dat het verschil kleiner is dan twee derde het vierkant van EA. Dus als we aan de vierkanten van de lijnen FC, TK, MN het hele vierkant EB toevoegen, dat gelijk is aan vierkant EA, is de som van de vierkanten van de lijnen EB, FC, TK, MN groter dan twee derde van de vierkanten van EB, FQ, TL, MO. Dus de cirkels met stralen de lijnen EB, FC, TK, MN zijn groter dan twee derde van de cirkels met stralen de lijnen EB, [321] FQ, TL, MO. En de cylinders met bases de cirkels met stralen de lijnen EB, FC, TK, MN en hoogten de lijnen EF, FT, TM, MA die gelijk zijn aan elkaar, (die cylinders) zijn groter dan twee derde van de cylinders met bases de cirkels met stralen de lijnen EB, FQ, TL, MO en hoogten de lijnen EF, FT, TM, MA. Maar de cylinders met bases de cirkels met stralen de lijnen EB, FC, TK, MN en hoogtes de lijnen EF, FT, TM, MA vormen het trapvormige lichaam met basis de cirkel met straal EB en top de cirkel met straal AW, dat is het trapvormige lichaam dat de bol omhult. En de cylinders met bases de cirkels met stralen de lijnen EB, FQ, TL, MO en hoogten de lijnen EF, FT, TM, MA vormen de cylinder BH.

Dus het trapvormige lichaam dat de cirkel omhult is groter dan twee derde de cylinder BH. Maar er was aangetoond dat dat trapvormige lichaam kleiner was dan twee derde van de cylinder BH. Dit is onmogelijk.

Deze onmogelijkheid is het gevolg van onze aanname dat de halve bol kleiner is dan twee derde van de cylinder BH. Dus de halve bol is niet kleiner dan twee derde van de cylinder BH. Maar er was aangetoond dat hij ook niet groter was dan twee derde van de cylinder BH. Dus als de halve bol niet groter is dan twee derde van de cylinder BH en ook niet kleiner dan twee derde ervan, is hij twee derde van de cylinder BH. De hele bol is het dubbele van de halve bol, en de cylinder met basis de cirkel met straal lijn BE en hoogte lijn AG, die de middellijn van de bol is, dat is het dubbele van lijn AE, is het dubbele van de cylinder [323] BH. Dus de bol $ABGD$ is twee derde van de cylinder met basis de grootste cirkel die in de bol valt, en hoogte gelijk aan de middellijn van de bol. Dat is wat we wilden bewijzen.

Einde van de verhandeling over de inhoud van de bol.

Bron: R. Rashed, ed. Les Mathématiques infinitesimales*, vol. 2, London: al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1993, pp. 307-323. Enkele fouten in de editie zijn gecorrigeerd, dit is aangegeven door sterretjes * en haken* $< >$*. Verklarende opmerkingen van J.H., die niet tot de tekst van Ibn al-Haytham behoren, staan tussen vierkante haken*