Vertaling van een gedeelte uit het *Korte Boek over het Rekenen met Restauratie en Confrontatie* (al-kitāb al-mukhtaṣar fī'l-jabr wa'l-muqābala) van Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (ca. 830).

De onderstaande fragmenten zijn vertaald op basis van de editie Frederic Rosen (ed. and tr.), *The Algebra of Mohammed ben Musa.* London: Oriental Translation Fund, 1831 (online beschikbaar via googlebooks). Verklarende opmerkingen bij de tekst staan in de voetnoten, en in vierkante haken [ ]. De tekst is door de vertaler (J.H.) in genummerde paragrafen verdeeld, de nummers staan ook in vierkante haken [1], [2] enz.

... [1] De liefde voor cultuur, die God de Imām, Heerser der Gelovigen, al-Ma'mūn naast het kalifaat ... heeft verleend ... en de wens om met mensen van cultuur in contact te komen ... hebben mij ertoe aangezet een kort boek te schrijven over het rekenen met "restauratie en confrontatie", dat subtiele en prachtige rekenmethoden bevat, die de mensen nodig hebben[1] in het erfrecht, bij erfenissen, het verdelen van dingen, rechtszaken, in de handel, en bij alle transacties die te maken hebben met het opmeten van landerijen, het graven van kanalen, en meetkunde, en andere takken en branches. Dit bied ik (de lezer) aan met een goede bedoeling, en in de hoop dat de mensen van cultuur mij als beloning de gunst willen verlenen voor mij de zegeningen van God de Allerhoogste af te smeken ... [Rosen, Ar. p. 2, vert. p. 3-4]

... [2] Ik heb gevonden dat de getallen die nodig zijn in het rekenen met "restauratie [al-jabr] en confrontatie [al-muqābala]" van drie typen zijn, namelijk wortels, kapitalen en losse getallen, die niet gerelateerd zijn aan wortels en kapitalen.

Een wortel is alles wat met zichzelf vermenigvuldigd wordt, dit kan één zijn, of een groter getal, of een kleinere breuk. [Modern: x]

Een kapitaal is dat wat ontstaat door vermenigvuldiging van een wortel met zichzelf. [Modern: x^2]

Een los getal is elk getal dat aangeduid wordt zonder verband met wortel of kapitaal.

Deze drie typen kunnen gelijk zijn aan elkaar, zoals wanneer je zegt: kapitalen zijn gelijk aan wortels; of wortels zijn gelijk aan een getal; of kapitalen

[1] Al-Khwārizmī's leerboek bevat ook hoofdstukken over erfrecht en landmeten, maar hierbij zijn op zijn hoogst lineaire vergelijkingen nodig.

zijn gelijk aan een getal. [Rosen, Ar. p. 3, vert. p. 5-6]

... [*hij behandelt nu eerst deze drie eenvoudige gevallen, modern:* $ax^2 = bx$, $bx = c, ax^2 = c$.]

[3] Ik heb gevonden dat deze drie typen, namelijk wortels, kapitalen en getallen, gecombineerd kunnen worden, zodat er drie gecombineerde soorten ontstaan, namelijk; kapitalen en (=plus) wortels zijn gelijk aan een getal,[2] of kapitalen en een getal zijn gelijk aan wortels,[3] of wortels en een getal zijn gelijk aan kapitalen.[4] [Rosen, Ar. p. 5, vert. p. 8.]

... [*al-Khwārizmī wijdt nu aan elk van deze drie typen een "hoofdstuk". We vertalen de eerste twee van deze hoofdstukken.*]

[4] Wat betreft kapitalen en wortels die gelijk zijn aan het getal, dat is wanneer je zegt: een kapitaal en tien van zijn wortels is gelijk aan negen en dertig dirham. De betekenis daarvan is: voor welk kapitaal geldt, wanneer je er een aantal van tien wortels aan toevoegt, het totaal negen en dertig bedraagt?

De methode hiervoor is dat je de wortels halveert, en dat is in dit probleem vijf, en je vermenigvuldigt dat met zichzelf, dat is vijf en twintig. Die voeg je toe aan de negen en dertig, dat is vier en zestig. Je neemt de wortel daarvan, dat is acht. Dan trek je daarvan de helft van de wortels af, dat is vijf, en er blijft drie over, dat is de wortel van het kapitaal dat je wilt, en het kapitaal is negen.

...

[5] Wat betreft kapitalen en het getal is gelijk aan wortels, dit is wanneer je zegt één kapitaal en een aantal van één en twintig dirham is gelijk aan tien van zijn wortels. Dit betekent: voor welk kapitaal geldt dat als je er één en twintig dirham aan toevoegt, het totaal tien wortels van dit kapitaal bedraagt?

De methode hiervoor is dat je de wortels halveert, dat is vijf, dan vermenigvuldig je dat met zichzelf, dat is vijf en twintig. Trek daar de één en twintig van af, waarvan je gezegd hebt dat ze bij het kapitaal moesten, er

[2] modern: $ax^2 + bx = c$

[3] modern: $ax^2 + c = bx$.

[4] modern: $bx + c = ax^2$.

blijft vier over. Neem de wortel daarvan, dat is twee. Trek deze van de helft van de wortels af, er blijft drie over. Dat is de wortel van het kapitaal wat je wilt, dus het kapitaal is negen. Of als je wilt, tel de wortel bij de helft van (het aantal) wortels op, dat is zeven, en dat is de wortel van het kapitaal dat je wilt, dus het kapitaal is negen en veertig.

Als je een vraag van dit type tegenkomt, probeer dan eerst of het gaat met optellen, als dat niet zo is, gaat het met aftrekken altijd. Dit hoofdstuk werkt met optellen én aftrekken allebei, en dat is niet zo bij de andere twee hoofdstukken[5] waarin je de wortels moet halveren.

Weet dat als je in dit hoofdstuk de wortels halveert en dit met zichzelf vermenigvuldigt en het resultaat is minder dan de dirhams die bij het kapitaal worden opgeteld, dan is het probleem onmogelijk. Als het resultaat gelijk is aan het aantal dirhams, dan is de wortel van het kapitaal gelijk aan de helft van de wortels, zonder aftrekking en optelling. Alles waarin twee kapitalen of meer of minder in voorkomen,[6] moet je terugvoeren naar één kapitaal zoals ik je in het eerste hoofdstuk heb uitgelegd. [Rosen Ar. pp. 7-8, vert. pp. 11-12.]

...

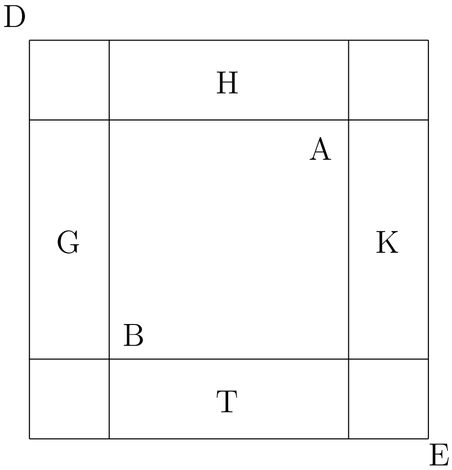
[6] Voor elk van deze drie hoofdstukken[7] heb ik een figuur gemaakt waarmee de reden voor het halveren van de wortels duidelijk wordt gemaakt.

De reden van “kapitaal en tien wortels is negen en dertig dirham”: de figuur daarbij is een vierkant met onbekende zijden, en dat is het kapitaal dat je wilt weten, en je wilt de wortel ervan weten, namelijk van vlak AB, elke zijde ervan is de wortel ervan. Elke zijde vermenigvuldigd met een bepaald getal is dat aantal wortels, en elke wortel is de wortel van dat vlak.

[5] dat wil zeggen: $ax^2 + bx = c$ en $ax^2 = bx + c$.

[6] d.w.z. als in de vergelijking $ax^2 + c = bx$ $a \neq 1$.

[7] D.w.z. voor $ax^2 + bx = c, ax^2 + c = bx, ax^2 = bx + c$.



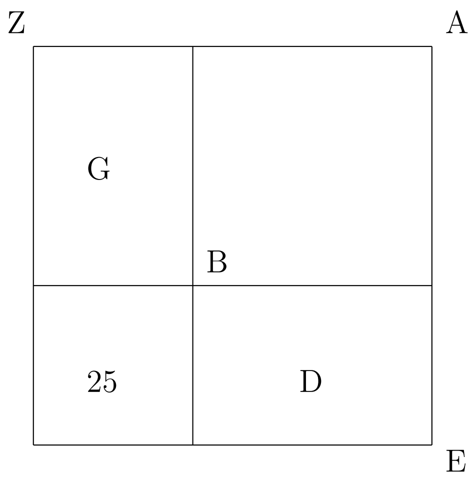
Omdat gezegd werd, dat er tien wortels bij het kapitaal (opgeteld) zijn, nemen we een kwart van de tien, dat is twee en een half, en we combineren elk kwart daarvan met een zijde van het vlak; dan komen er bij het eerste vlak AB (vlakken) met breedte twee en een half bij, namelijk G, T, K, H. Daardoor ontstaat een gelijkzijdige vierhoek die ook onbekend is, waaraan in elk hoekpunt iets ontbreekt, namelijk twee en een half maal zichzelf. Dus moeten we om van het vlak een vierkant te maken vier keer twee en een half maal zichzelf toevoegen, dat is totaal vijf en twintig.

We weten dat het eerste vlak, dat is het vlak van het kapitaal en de vier vlakken eromheen, dat is tien wortels, het getal negen en dertig is. Als we daaraan vijf en twintig toevoegen, dat zijn de vier vierkanten op de hoeken van AB, wordt het grote vlak een vierkant, DE. We weten dat dat samen vier en zestig is. Elke zijde is de wortel daarvan, dat is acht. Als we van acht twee keer één-vierde van tien aftrekken, van de twee uiteinden van de zijde van het grote vlak, dan blijft er van de zijde drie over, dat is het kapitaal. [ed. Rosen p. 8-9, vert. p. 13-14]

...

[7] Hiervoor is ook een andere figuur, die hiertoe leidt, en dat is vlak AB, het kapitaal. We willen er een hoeveelheid gelijk aan tien maal de wortel ervan aan toevoegen. Dan halveren we de tien, dat is vijf, en we maken hen (de tien wortels) twee vlakken aan twee zijden van vlak AB, namelijk vlakken G, D. De lengte van elk van die twee vlakken is vijf el, en dat is de helft van de tien van de wortels, en de breedte ervan is gelijk aan de zijde van AB. Er blijft voor ons een vierkant over van de hoeken (?) van vlak

AB, en dat is vijf maal vijf, en dat is de helft van de tien wortels die we aan de twee kanten van het eerste vlak hebben opgeteld. We weten dus dat het eerste vlak het kapitaal is en de twee vlakken aan de kanten daarvan tien wortels zijn, en het geheel is negen en dertig. Om het grote vlak helemaal compleet te maken blijft een vierkant van vijf maal vijf over, dat is vijf en twintig. Dus we tellen dat bij negen en dertig op, opdat het grote vierkant ZE compleet wordt, en het bedrag van dat alles is vier en zestig. Dus nemen we de wortel daarvan, dat is acht, en dat is één van de zijden van het grote vierkant. Dus als we daarvan aftrekken wat we erbij opgeteld hadden, dat is vijf, blijft er drie over, en dat is de zijde van vlak AB, die het kapitaal is, en ook de wortel ervan. Het kapitaal is negen. Dit is de figuur:



...

[8] Wat betreft één kapitaal en één en twintig dirham is gelijk aan tien van zijn wortels: we maken het kapitaal een vierkant met onbekende zijde, namelijk vierkant AD. Dan voegen we er een parallelogram aan toe, met breedte gelijk aan één van de zijden van het oppervlak AD, namelijk zijde EN, en het oppervlak zelf is EB. Dan wordt de lengte van de twee oppervlakken samen zijde GE. We weten dat de lengte ervan tien is, want de zijde van elk vierkant vermenigvuldigd met één is de wortel van dat oppervlak, en met twee (vermenigvuldigd) is het twee maal de wortel van dat oppervlak. Dus wanneer gezegd is: kapitaal en één en twintig is gelijk aan tien wortels ervan, dan weten we dat de lengte van zijde EG het getal tien is, omdat zijde

GD de wortel van het kapitaal is.

Toen hebben we zijde GE in twee helften verdeeld in punt H. Dan is duidelijk dat lijn EH gelijk is aan lijn HG, en het is duidelijk dat lijn HT gelijk is aan lijn GD. Toen hebben we in het verlengde van lijn HT een stuk toegevoegd gelijk aan het overschot van GH over HT, zodat het oppervlak een vierkant wordt. Dus is lijn TK gelijk geworden aan lijn KM, en er is een vierhoek ontstaan met gelijke zijden en hoeken, namelijk oppervlak MT.

Het was ons duidelijk dat lijn TK vijf is, en de zijden (van het vierkant) zijn daaraan gelijk, dus het oppervlak (van het vierkant) is vijf en twintig. Dat is het resultaat van de vermenigvuldiging van de helft van de wortels met zichzelf, en dat is vijf keer vijf, dat is vijf en twintig.

Maar het was ons al duidelijk dat vlak EB de één en twintig is die bij het kapitaal was opgeteld. Dus hebben we van het oppervlak EB met lijn TK, die één van de zijden van oppervlak MT is, (iets afgehaald), met rest oppervlak TA.

Daarna hebben van lijn KM lijn KL afgenomen, gelijk aan lijn HK. Dan is duidelijk dat lijn TH gelijk is aan lijn ML. Van lijn MK is lijn LK afgehaald, en die is gelijk aan lijn KH. Dus oppervlak MZ[8] is gelijk aan oppervlak TA. Dus is duidelijk dat oppervlak ET met oppervlak MZ daaraan toegevoegd gelijk is aan oppervlak EB, en dat is één en twintig. Maar oppervlak MT was vijf en twintig. Dus wanneer we van oppervlak MT oppervlak ET en oppervlak MZ afhalen, die samen één en twintig zijn, rest ons een klein oppervlak ZK, en dat is het verschil tussen vijf en twintig en één en twintig, dat is vier, en de wortel ervan is lijn ZH, die is gelijk aan lijn HA, en dat is twee.

Als je die beide van lijn HG, die de helft van de wortels is, aftrekt, blijft lijn AG over, en dat is drie, en dat is de wortel van het eerste kapitaal.

Als je hem aan lijn GH, die de helft van de wortels is, toevoegt, wordt dat zeven, en dat is lijn ZG, en dat is de wortel van het grootste van deze kapitalen zodat als je er één en twintig aan toevoegt, dat gelijk wordt aan tien wortels ervan. Dit is de figuur ervan, en dat is wat wij wilden bewijzen.

[8] Rosen heeft hier MR, maar MZ is een meer plausibele interpretatie. Punten in meetkundige figuren werden bij voorkeur aangeduid met letters met zo laag mogelijke numerieke waarde, $A = 1, B = 2, G = 3, D = 4, E = 5, Z = 7, H = 8, T = 9, K = 20, L = 30, M = 40, N = 50$ etc., $\ldots R = 200$. De Arabische letter $W = 6$ werd vaak uitgezonderd vanwege mogelijke verwarring met het woord "en" (ook een w); $I = 10$ was bij sommige wiskundigen niet populair omdat de Grieken de corresponderende letter iota niet vaak gebruikten vanwege de onduidelijke vorm ervan.

[Rosen, Ar. p. 11-13, vert. p. 16-18.]