Fragmenten uit L.E. J. Brouwer (1881-1966), Over de Grondslagen der Wiskunde*, (Academisch Proefschrift), Amsterdam 1907. Niet alle voetnoten van Brouwer zijn hier opgenomen en zijn nummering is niet gehandhaafd; voetnoten met de aanduiding JH zijn toegevoegd. Zie de digitale versie op http://www.ru.nl/w-en-s/gmfw/bronnen/brouwer4.html , en ook de wetenschappelijke heruitgave van het proefschrift (in moderne spelling), met vele andere belangrijke documenten, in Dirk van Dalen, L.E.J. Brouwer en de grondslagen van de wiskunde, Utrecht: Epsilon Uitgaven, 2001.*

I
De opbouw der wiskunde

"Een, twee, drie...", de rij dezer klanken (gesproken ordinaalgetallen) [p.3]
kennen we uit ons hoofd als een reeks zonder einde, d. w. z. die zich altijd door voortzet volgens een als vast gekende wet.

Naast deze rij van klankbeelden bezitten we andere volgens een vaste wet voortschrijvende voorstellingsreeksen, zoo de rij der schriftteekens (geschreven ordinaal-getallen) 1, 2, 3 ...

Deze dingen zijn intuïtief duidelijk.

...(*Brouwer definieert nu optelling en vermenigvuldiging*) ...

We kunnen nu de rij der ordinaalgetallen naar links voortzetten met 0, [p.5]
-1, -2 enz., ...

Onder een rationaal getal verstaan we een paar van ordinaalgetallen geschreven $\frac{a}{b}$, waarvan we, door $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$ te stellen, altijd kunnen zorgen, dat het tweede, de "noemer", positief is. We rangschikken ze onderling, door $\frac{a}{b} \overset{\leqq}{>} \frac{c}{d}$ te stellen, zoo $(a \times d) \overset{\leqq}{>} (b \times c)$. We rangschikken ze tusschen de [p.6]
ordinaalgetallen, door $\frac{a}{1} = a$ te stellen. Onder $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ verstaan we $\frac{ad+bc}{bd}$, onder $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ verstaan we $\frac{ac}{bd}$. De commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen zijn nu licht te bewijzen; ook volgt eenvoudig, als we "-" en ":" op de bekende wijze door middel van "+" en "×" definieeren: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ en $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Vervolgens kunnen we stap voor stap de gebruikelijke irrationalen, (in de eerste plaats de vormen met gebroken exponenten) invoeren, door ze als een symbolisch agglomeraat van reeds ingevoerde getallen te schrijven[1] en daarin verder te lezen een verdeeling dier reeds ingevoerde getallen in twee klassen,

[1]Zoo zullen b. v. de wortels van een hoogeremachtsvergelijking worden gelezen als

de tweede waarvan geheel op de eerste volgt, en geen eerste element heeft[2];
de orderelatie (d.w.z. de voorwaarde voor $\substack{\leq \\ = \\ >}$) der nieuwe getallen tusschen
de oude wordt dan op grond van die scheiding vastgesteld, evenzoo de be- [p.7]
werkingen met de nieuwe getallen, die aan weer nieuwe getallen het aanzijn
kunnen geven, en ten slotte worden de reeds vroeger ingevoerde getallen een-
duidig met een gedeelte der nieuwe symbolen in correspondentie gebracht,
n.l. met diegene, die in de oude getallen een laagste klasse met het hoog-
ste element bepaalden. De ingevoerde symbolische agglomeraten kunnen elk
eindig aantal willekeurige reeds ingevoerde getallen bevatten. Daaruit volgt,
dat op elk punt van ontwikkeling der theorie het geheel der bekende getallen
aftelbaar[3] blijft. Immers een aftelbaar aantal aftelbare hoeveelheden is vol-
gens een eenvoudig bewijs van Cantor (Journ. f. Math. 84, p. 243) ook
aftelbaar.

Het geheel der getallen, die men zoo op elk punt van ontwikkeling der
theorie heeft ingevoerd, heeft verder de eigenschap, dat het *in zich overal
dicht* is, d.w.z. dat tusschen elke twee nog verdere elementen liggen. Het
heeft dus volgens Cantor (Math. Annalen 46) het ordetype η der rationale
getallen, d. w. z. is met behoud der orderelaties op het systeem der rationale [p.8]
getallen af te beelden.

...

In de volgende hoofdstukken zullen we nader ingaan op de oer-intuitie der wiskunde (en van alle werking van het intellect) als het van qualiteit ontdane substraat van alle waarneming van verandering, een eenheid van continu en discreet, een mogelijkheid van samendenken van meerdere eenheden, verbonden door een “tusschen”, dat door inschakeling van nieuwe eenheden, zich nooit uitput. Waar dus in die oer-intuitie continu en discreet als onafscheidelijke complementen optreden, beide gelijkgerechtigd en even duidelijk, is het uitgesloten, zich van een van beide als oorspronkelijke entiteit vrij te houden, en dat dan uit het op zichzelf gestelde andere op te bouwen; immers het is al onmogelijk, dat andere op zichzelf te stellen. De continuum-intuitie, het “vloeiende”, dus als oorspronkelijk erkennende, zoo goed als het samenden-

symbolisch agglomeraat van haar coëfficienten, aangevuld met een rangcijfer, dat de verschillende wortels, [gerangschikt b. v. eerst naar den modulus en voor gelijke modulus naar het argument], van elkander onderscheidt.

[2]terwijl daarentegen de eerste dezer klassen somtijds een der reeds ingevoerde getallen als laatste element bezitten kan (zooals 2 bij $4\frac{1}{2}$).

[3]d. w. z. in uniforme correspondentie te brengen met de reeks der ordinaalgetallen.

ken van meerdere dingen in één, die aan elk wiskundig gebouw ten grondslag ligt, kunnen we van het continuum als "matrix van samen te denken punten" eigenschappen noemen.[4] [p.9]

Vooreerst is er geen eerste of laatste punt; een puntrij van het ordetype van alle positieve en negatieve getallen is er gemakkelijk op te bouwen; nemen we vervolgens in elk interval weer een punt, in elk der zoo komende intervallen weer, enz., dan krijgen we het ordetype η op het continuum; dat we op deze wijze het eenvoudigste laten corresponderen met het systeem der eindige duaalbreuken,[5] maar we zouden het even goed kunnen lezen als een der boven ingevoerde in zich overal dichte getallensystemen; we zien dan direct, dat er op het continuum nog punten zijn, die niet na een eindig aantal der genoemde operaties, elk bestaande in de invoeging van een punt in alle intervallen,[6] bereikt worden; immers we kunnen, een bepaald punt P uitkiezend, bij het construeeren der schaal zorgen, dat we buiten dat punt blijven; we kunnen zelfs zorgen, dat de benadering van het punt door een oneindige duaalbreuk volgens een willekeurige denkbare voortschrijdingswet plaats heeft, terwijl dan toch het continuum met schaal, op deze wijze ge- [p.10]
construeerd, in niets zich onderscheidt van een continuum met geheel vrij geconstrueerde schaal; omgekeerd leiden we hieruit af, dat voor een eenmaal op het continuum geconstrueerde schaal voor elke denkbare voortschrijdingswet een punt bestaat.

We kunnen de benaderingsreeks van een *bepaald aangewezen* punt[7] evenwel nooit *af* denken, dus moeten haar als gedeeltelijk onbekend beschouwen.

Uit het voorkomen van elke willekeurige benaderingswet is volgens Cantor (Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung I, pag. 77; vgl. Schoenfliess, Bericht über die Mengenlehre, ibid. VIII, pag. 20) af te leiden, dat niet alle punten van het continuum zijn af te tellen, d. w. z. dat er buiten elke aftelbare hoeveelheid van zulke punten nog andere zijn; (terwijl we hebben gezien, dat het systeem der *opgebouwde* getallen, die eveneens zijn te benaderen door een eindige of oneindige duaalbreuk, in elk stadium der theorie aftelbaar is.)

Als we de duale schaal naar willekeur construeren, is het niet zeker dat

[4]D.w.z. eigenschappen opnoemen, JH

[5]dat wil zeggen de in het tweetallig stelsel geschreven breuken, waarin dus voor en achter de komma geen andere cijfers dan 1 en 0 optreden.

[6]We kunnen die operatie de "tweedeeling" der intervallen noemen.

[7]Dirk van Dalen merkt op dat we hier b.v. aan het getal π zouden kunnen denken, zie p. 44 van de boven geciteerde heruitgave.

ze *overal dicht* wordt, d. w. z. in elk segment van het continuum doordringt. Maar we spreken af, dat we elk segment, waarin de schaal niet doordringt, tot een enkel punt denken samengetrokken, m. a. w. we stellen twee punten alleen dán verschillend, als hun duale benaderingsbreuken na een eindig aantal cijfers gaan verschillen. Nemen we op de geconstrueerde schaal nog [p.11] een willekeurig punt als nulpunt aan, dan heeft de schaal het continuum tot een *meetbaar continuum* gemaakt. Uit de meetbaarheid leiden we af, dat elk aftelbaar oneindig aantal punten, gelegen binnen een door twee punten begrensd segment, minstens één grenspunt heeft, d. w. z. minstens één punt zóo, dat naar minstens een van beide kanten binnen elk er aan grenzend segment, hoe klein ook, nog andere punten liggen. (Immers anders zou er een kortste afstand tusschen puntenparen zijn, en die zou op het eindige segment [p.12] slechts een eindig aantal malen kunnen worden afgepast.) ...

(Uit hoofdstuk III: Wiskunde en logica)

... Van het wiskundig bouwen en redeneeren, en in het bijzonder van het [p.128] logisch redeneeren, dat de menschen bij zichzelf doen, trachten ze door middel van klanken of teekens bij andere mensen copieën te doen oprijzen, of ook hun eigen herinneringsvermogen te hulp te komen. Zoo ontstaat de *wiskundige taal*, en als bijzonder geval hiervan de *taal der logische redeneeringen*

Voor welke wiskundige begrippen men een klankbeeld of schriftteeken zal scheppen, om er aan te laten beantwoorden, deze keuze zal zoo ekonomisch mogelijk rekening houden met de meest gebruikelijke wiskundige systemen en wijzen van redeneering; ze zal dus in't algemeen in elk milieu verschillend zijn. En in het bijzonder: welke gedeelten der wiskunde een taal zullen krijgen [p.129] niet alleen bij de wiskundigen van beroep, maar ook in het dagelijks leven, dit zal voor elk volk weer op nieuw er van af hangen, welke gedeelten der wiskunde als leiding voor het levensgedrag of als middel tot verstandhouding daarover er de meeste toepassing hebben gevonden.

Het is dus zeer goed denkbaar, dat bij dezelfde organisatie van het menselijk intellect, dus bij dezelfde wiskunde, een andere taal van verstandhouding ware ontstaan, waarin voor de ons de bekende taal der logische redeneeringen geen plaats zou zijn. En waarschijnlijk zijn er nog wel buiten het cultuurverband levende volken, waarbij dat werkelijk het geval is. En evenmin is voor de taal der cultuurvolken uitgesloten, dat in een verder ontwikkelingsstadium de logische redeneeringen er hun plaats zullen verliezen. ...

... Dus in geen geval mag men denken, door middel van die taalgebou- [p.132] wen[8] iets van andere wiskunde, dan die direct intuïtief op te bouwen is, te kunnen te weten komen. En nog veel minder mag men meenen, op *die* manier de *grondslagen* der wiskunde te kunnen leggen, m.a.w. de betrouwbaarheid der wiskundige eigenschappen te kunnen verzekeren. [p.133]

We gaan er toe over, op grond van bovenstaande overwegingen achtereenvolgens nader te bespreken:

1. De grondvesting der wiskunde op axioma's
2. De theorie der transfiniete getallen van CANTOR.

...

Ad 1.

Het klassieke voorbeeld is hier de meetkunde van EUCLIDES. Dat het als logisch taalgebouw onvolkomen is, dat n.l. stilzwijgend hier en daar niet genoemde axioma's worden ingevoerd, is door de nieuwere onderzoekingen van PASCH, SCHUR, HILBERT, PEANO, PIERI e.a. overtuigend aangetoond, maar het systeem in dat opzicht te perfectioneeren heeft dezen wiskundigen weinig moeite gekost. Daarnaast hebben zij, en vooral HILBERT, zich onledig gehouden, taalgebouwen van *pathologische geometrieën* te construeren, om aan te toonen, welke eigenschappen (d.w.z. volzinnen, die voor de Euclidische meetkunde meetkundige eigenschappen uitdrukken) wèl, en welke niet behouden blijven, wanneer men een deel der axioma's laat vallen (hierin de voetsporen drukkend van LOBATCHÉFFSKY, die onderzocht, wat van eht logische gebouw van EUCLIDES overblijft, als men zijn parallellen-axioma vallen laat.[9] In het bijzonder stelden zij zich ten doel, voor elk der zoo ge- [p.134] construeerde logische gebouwen de benoodigde axioma's tot een minimum te beperken. Zoo heeft HILBERT voor de meeste in zijn Festschrift opgestelde axioma's aangetoond, dat zij niet kunnen weggelaten worden, zonder dat de meetkunde daardoor een deel van haar eigenschappen verliest.

We moeten echter opmerken, dat het verwijt van onvolledigheid tegen EUCLIDES vervalt, als hij zich zijn wiskundig gebouw der Euclidische meetkunde, reeds *af* voorstelde (als een Cartesiaansche ruimte met een bewegingsgroep), en zijn redeneeringen alleen dienen als begeleiding bij het uit duidelijk geziene relaties (dat zijn ondergeschikte gebouwen) door een reeks van tau- [p.135]

[8] D.w.z. taal der logische redeneeringen, JH

[9] Ook al is uit de berekeningen van LOBATCHEFFSKY, vooral voor het platte vlak op vrij eenvoudige wijze, wel een *bestaansbewijs* aan te brengen, en is het niet onmogelijk, dat hij zelf dat er in heeft willen zien: vgl. b.v. "Pangeometrie", §8.

tologieën overgaan tot nieuwe, niet direct geziene, m.a.w. als begeleiding van een exploratie van een zelf opgebouwd gebouw. Dan is zijn werk zuiver wiskundig, en het niet invoeren van coördinaten en opereeren daarmee, is alleen een methodische onvolkomenheid.

Het is natuurlijk ook mogelijk, dat Euclides het niet zoo heeft ingezien, en in de fout van zoovelen is vervallen, die dachten logisch te kunnen redeneeren over andere dingen dan eigengemaakte wiskundige systemen en voorbijzagen dat, waar de logica het woord *alle* of *elke* gebruikt, deze woorden, om zin te hebben, de beperking van *voor zoover behoorend tot een als vooraf opgebouwd gedacht wiskundig systeem* stilzwijgend insluiten.

In elk geval is het werk van Euclides door de nakomelingschap meest als [p.136]
zulk een logisch gebouw opgevat en Lobatscheffsky misschien en Bolyai zeker construeerden eveneens logische gebouwen, zonder zich om wiskundige systemen, die ze zouden kunnen accompagneeren, te bekommeren. Eerst Riemann heeft voor het onderzoek naar de grondslagen der meetkunde den juisten weg gewezen, door bij zijn redeneeringen ervan uit te gaan, dat de ruimte een *Zahlenmannigfaltigkeit* is, dus een door ons zelf gebouwd systeem. Hij voert dit evenwel met nadruk in als een hypothese, die een willekeurig karakter draagt, en spreekt er niet van, dat we in *elk* geval een wiskundig systeem moeten ten grondslag leggen, en dan als zoodanig uithoofde van doelmatigheid de Zahlenmannigfaltigkeit kiezen. Zoo zijn dus Pasch, Hilbert enz., in zijn aanname iets willekeurigs ziende, weer tot de logische [p.137]
grondvesting der meetkunde teruggekeerd, en hebben getracht Euclides te verbeteren, door, zooals we boven hebben uiteengezet, zich ten doel te stellen taalgebouwen[10] te construeren die uit axioma's zich ontwikkelen, enkel door middel van het formeele syllogisme en verdere logische principes. ... [p.140]
en in dezen zin treden bij hen o.a. niet-Archimedische en niet-Pascalse geometrieën op, ... Deze weinig harmonische, met moeite samengetimmerde systemen krijgen zoo, doordat ze een beperkter stel axioma's representeeren, een prioriteit ten opzichte van de eenvoudige, doorzichtige Euclidische meetkunde. Zoo iets storends is het gevolg, wanneer men de taal, die een, zij het [p.141]
gebrekkig, hulpmiddel is om wiskunde mee te delen, maar met de wiskunde zelf niets uitstaande heeft dan als een begeleiding, als iets essentieels er van gaat bekijken, en de wetten, die de opvolging der volzinnen regeeren, de logische wetten, als het eigenlijk richtende bij daden van wiskundig bouwen in

[10] Hilbert verklaart zelfs uitdrukkelijk, bij woorden als "Punkt," "Gerade", "zwischen", enz. aan geen wiskundige interpretatie te willen denken.

't oog gaat vatten. ...

Ad 2.

We hebben in het eerste hoofdstuk gezien, dat er geen andere verzamelingen bestaan, dan eindige en aftelbaar oneindige, en continua; hetgeen is aangetoond op grond van de intuitieve waarheid, dat wij wiskundig niet anders kunnen scheppen dan eindige rijen, verder op grond van het duidelijk gedachte "en zoo voort" het ordetype[11] ω, doch alleen bestaande uit *gelijke elementen*,[12] zoodat we ons b.v. de *willekeurige* oneindige duaalbreuken nooit af, dus nooit geïndividualiseerd kunnen denken, omdat het aftelbaar oneindige aantal cijfers achter de komma niet is te zien als een aftelbaar aantal *gelijke* dingen), en ten slotte het intuitief continuum (met behulp waarvan we vervolgens het gewone continuum, het *meetbaar continuum*, hebben geconstrueerd). [p.142] [p.143]

Cantor en zijn volgelingen menen echter nog allerlei andere verzamelingen te kennen; hun grondbeginsel is ...

We ... beweren nu ... dat de vele paradoxen der "Mengenlehre", waarvan de oplossing met zooveel ijver wordt gezocht, geen recht van bestaan hebben; dat veelmeer de Cantorianen verplicht waren geweest, een begrip dat tot een contradictie aanleiding geeft, direct, als zeker onwiskundig gevormd, te verwerpen. [p.144]

Gaan we op enkele punten nader in: ...

[11]Met ω bedoelt Brouwer het ordetype van de natuurlijke getallen, JH.

[12]Waar men zegt: "en zo voort", bedoelt men het onbepaald herhalen van *eenzelfde* ding of operatie, ook al is dat ding of die operatie tamelijk complex gedefinieerd.