Continuïteit en irrationale getallen

Door Richard Dedekind

Professor in de wiskunde aan de technische hogeschool te Braunschweig

opgedragen
aan zijn geliefde vader
de
Geh. Hofrath, Prof. Dr. jur.
Julius Levin Ulrich Dedekind
in
Braunschweig
ter
gelegenheid van zijn vijftigjarig ambtsjubileum
op 26 april 1872

Continuïteit en irrationale getallen

De beschouwingen, die het onderwerp van dit kleine geschrift vormen, stammen uit de herfst van het jaar 1858. Ik bevond mij toen als Professor aan de Eidgenössische Polytechnische Hogeschool in de situatie, dat ik over de grondbeginselen van de differentiaalrekening college moest geven, en daarbij voelde ik duidelijker dan voorheen het gebrek aan een werkelijk wetenschappelijke fundering van de rekenkunde. Bij het begrip van het naderen van een veranderlijke grootheid naar een vaste limiet, en in het bijzonder bij het bewijs van de stelling, dat elke grootte die standvastig maar niet over alle grenzen groeit, zeker naar een een limiet moet naderen, nam ik mijn toevlucht tot dingen die meetkundig duidelijk zijn. Ook nu nog beschouw ik dit erbij halen van de meetkundige aanschouwing bij het eerste onderwijs in de differentiaalrekening uit een didaktisch standpunt voor buitengewoon nuttig, ja zelfs onmisbaar, wanneer men niet teveel tijd wil verliezen. Maar dat deze manier van invoeren van de differentiaalrekening geen aanspraak op wetenschappelijkheid kan maken, zal wel door niemand bestreden worden. Voor mij was destijds dit gevoel van onbevrediging zo overweldigend, dat ik het besluit nam, zo lang na te denken tot ik een zuiver rekenkundige en helemaal strenge fundering van de principes van de infinitesimaalanalyse gevonden zou hebben. Men zegt zo vaak, dat de differentiaalrekening zich bezighoudt met continue grootheden, maar toch wordt nergens een verklaring van deze continuïteit gegeven, en ook de strengste behandelingen van de differentiaalrekening baseren hun bewijzen niet op de continuïteit, maar zij doen op meer of minder bewuste manier een beroep op meetkundige, of door de meetkunde ingegeven begrippen, ofwel ze baseren zich op stellingen die zelf niet zuiver rekenkundig bewezen zijn. Daartoe behoort bijvoorbeeld de hierboven genoemde stelling, en een nauwkeuriger onderzoek overtuigde mij van het feit, dat deze (stelling) of elke hiermee equivalente stelling in zekere zin als een voldoend fundament van de infinitesimaalanalyse beschouwd kan worden. Het ging er alleen nog om, de eigenlijke oorsprong ervan in de beginselen van de rekenkunde te ontdekken, en daardoor tegelijk een werkelijke definitie van het wezen van de continuïteit te verkrijgen. Dit lukte mij op 24 November 1858, en slechts enkele dagen daarna deelde ik het resultaat van mijn nadenken aan mijn dierbare vriend Durège mee, hetgeen tot een lang en levendig gesprek leidde. Later heb ik waarschijnlijk nog wel aan de ene of andere student deze gedachten over een wetenschappelijk fundament van de rekenkunde meegedeeld, en ook hier in Braunschweig heb ik in de wetenschappelijke vereniging van professoren een voordracht over dit onderwerp gehouden, maar tot een echte publicatie kon ik niet besluiten, omdat ten eerste het uitleggen hiervan niet gemakkelijk is, en omdat bovendien de hele kwestie zo weinig vruchtbaar is. Ondertussen had ik er toch wel half en half aan gedacht, dit thema tot onderwerp van dit geschrift voor deze speciale gelegenheid te maken, toen ik enkele dagen geleden, op 14 maart, het artikel “De beginselen der functieleer” van E. Heine (Crelle’s Journal, deel 14) door de goedheid van de hooggeëerde auteur van dit artikel in handen kreeg, en dit mij in mijn besluit bevestigde. In wezen ben ik het weliswaar helemaal met de inhoud van dit artikel eens, en dat kan immers ook niet anders, maar ik moet eerlijk toegeven, dat mijn uitleg eenvoudiger van vorm is, en het eigenlijke kernpunt preciezer naar voren schijnt te halen. En terwijl ik dit voorwoord schrijf (20 Maart 1872), krijg ik net het interessante artikel: "Over de uitbreiding van een stelling uit de theorie van de trigonometrische rijen" van G. Cantor (Mathematische Annalen van Clebsch en Neumann, deel 5), waarvoor ik de scherpzinnige auteur van harte bedank. Bij vlug doorkijken van het artikel vind ik dat het axioma in paragraaf 2 van dit artikel, afgezien van de uiterlijke vorm van de inkleding, helemaal met datgene overeen komt, wat ik hieronder in paragraaf 3 als het wezen van de continuïteit beschrijf. Wat voor nut de alleen begripsmatige onderscheiding van reële getalgrootten van hogere orde kan opleveren, kan ik nog niet inzien, juist als gevolg van mijn eigen opvatting over het in zichzelf volledige reële getalgebied.

1. Eigenschappen van de rationale getallen.

De ontwikkeling van de rekenkunde van de rationale getallen wordt hier bekend verondersteld, maar toch lijkt het me goed, enkele hoofdpunten zonder discussie naar voren te halen, alleen om van te voren het standpunt aan te geven, dat ik in het volgende inneem. Ik zie de hele rekenkunde als een noodzakelijk, of tenminste natuurlijk gevolg van de eenvoudigste rekenkundige handeling, het tellen, en het tellen zelf is niets anders dan de successieve schepping van de oneindige rij van de positieve getallen, waarin ieder individu door het direct daaraan voorafgaande gedefinieerd wordt. De eenvoudigste handeling is de overgang van een reeds verkregen individu naar het daaropvolgende nieuw te scheppen individu. De keten van deze getallen is op zichzelf reeds een zeer nuttig hulpmiddel voor de menselijke geest, en zij biedt een onuitputtelijke rijkdom aan merkwaardige wetmatigheden, waaraan men komt door de invoering van vier rekenkundige basisoperaties. De optelling is de samenvatting van een willekeurige herhaling van de hierboven genoemde eenvoudigste handeling tot één enkele handeling, en hieruit ontstaat op dezelfde manier de vermenigvuldiging. Terwijl deze operaties steeds uitvoerbaar zijn, vertonen de omgekeerde operaties, het aftrekken en de deling, slechts een beperkte toelaatbaarheid. Welke de directe aanleiding geweest kan zijn, welke vergelijkingen of analogieën met ervaringen of opvattingen tot (de volgende uitbreiding) gevoerd kunnen hebben, laten we nu in het midden; kortom, juist deze beperking in de uitvoerbaarheid van de indirecte operaties is steeds de eigenlijke oorzaak voor een nieuwe scheppingsdaad geworden. Zo zijn de negatieve en gebroken getallen door de menselijke geest geschapen, en zo is met het systeem van alle rationale getallen een instrument van oneindig veel grotere volmaaktheid verkregen. Dit systeem, dat ik met R wil aaduiden, bezit in de eerste plaats een compleetheid en afgeslotenheid, die ik op een andere plaats[1] als kenmerk van een *getallichaam* aangeduid heb, en die daaruit bestaat dat de vier basisoperaties met iedere twee individuen uit R uitvoerbaar zijn, d.w.z. dat het resultaat altijd weer een individu in R is, als men alleen het geval van delen door het getal nul uitzondert.

Voor ons volgende doel is nog belangrijker een andere eigenschap van het systeem R, die men zo uitspreken kan, dat het systeem R een welgeordend,[2] in twee tegengestelde richtingen oneindig gebied van één dimensie vormt. Wat daarmee bedoeld moet worden is door het aantal uitdrukkingen die aan meetkundige begrippen ontleend zijn, voldoende duidelijk gemaakt. Des te noodzakelijker is het, de overeenkomstige zuiver rekenkundige eigenschappen aan te geven, zodat niet de schijn blijft bestaan, dat de rekenkunde deze (meetkundige) aan haar vreemde begrippen nodig heeft.

Om uit te drukken dat de symbolen a en b één en hetzelfde rationale getal aanduiden, schrijft men zowel $a = b$ als $b = a$. De ongelijkheid van twee rationale getallen a en b vertoont zich daarin, dat het verschil $a - b$ een positieve danwel negatieve waarde heeft. In het eerste geval heet a *groter* dan b, in het tweede a *kleiner* dan b, wat ook door de symbolen $a > b$, $a < b$ uitgedrukt wordt.[3] Omdat in het tweede geval $b - a$ een positieve waarde heeft, is dus $b > a$, $a < b$. Wat betreft deze dubbele mogelijkheid in de manier van verschillend zijn gelden de volgende wetten:

I. Zijn $a > b$ en $b > c$, dan is ook $a > c$. Iedere keer wanneer a en c twee verschillende (of ongelijke) getallen zijn, en b groter is dan het ene en kleiner dan het andere, is dit, zonder angst

[1] Vorlesungen über Zahlentheorie door P. G. Lejeune Dirichlet, tweede druk, paragraaf 159.

[2] Dedekind bedoelt hier in moderne termen dat R totaal geordend is, niet dat R welgeordend is in verzamelingstheoretische zin.

[3] Hieronder wordt dus altijd het zogenaamde "algebraische" groter en kleiner bedoeld, tenzij het woord "absoluut" toegevoegd wordt.

voor de overeenstemming met meetkundige begrippen, kortweg zo uit te drukken als: b ligt tussen de beide getallen a en c.

II. Zijn a en c twee verschillende getallen, dan zijn er altijd oneindig veel verschillende getallen b die tussen a en c liggen.

III. Is a een bepaald getal, dan vallen alle getallen uit het systeem R uiteen in twee klassen, A_1 en A_2, waarvan elke oneindig vele individuen bevat. De eerste klasse A_1 bevat alle getallen a_1, die $< a$ zijn, de tweede klasse A_2 bevat alle getallen a_2, die $> a$ zijn. Het getal a zelf kan naar believen in de eerste or de tweede klasse ingedeeld worden, en is dan respectievelijk het grootste getal van de eerste of het kleinste getal van de tweede klasse. In ieder geval is de verdeling van het systeem R in de beide klassen zodanig, dat ieder getal in de eerste klasse A_1 kleiner is dan ieder getal in de tweede klasse A_2.

2. Vergelijking van de rationale getallen met de punten van een rechte lijn

De hierboven aangegeven eigenschappen van de rationale getallen doen denken aan de relaties tussen de posities van punten van een rechte lijn L ten opzichte van elkaar. Worden de twee erin (in die lijn) bestaande tegengestelde richtingen door "rechts" en "links" onderscheiden en zijn p en q twee verschillende punten, dan ligt ofwel p rechts van q, en tegelijk q links van p, of omgekeerd q ligt rechts van p, en tegelijkertijd p links van q. Een derde geval is onmogelijk, als p en q werkelijk verschillende punten zijn. Ten aanzien van dit verschil in positie gelden de volgende wetten:

I. Ligt p rechts van q en q weer rechts van r, dan ligt ook p rechts van r, en men zegt dat q tussen de punten p en r ligt.

II. Zijn p en r twee verschillende punten, dan zijn er oneindig veel punten q, die tussen p en r liggen.

III. Is p een bepaald punt op L, dan vallen alle punten van L uiteen in twee klassen, P_1 en P_2, waarvan elke oneindig veel individuen bevat. De eerste klasse P_1 bevat alle punten p_1, die links van p liggen, en de tweede klasse P_2 bevat alle punten p_2, die rechts van p liggen. Het punt p zelf kan naar believen in de eerste or de tweede klasse ingedeeld worden, In ieder geval is de verdeling van de rechte L in de beide klassen of stukken P_1 en P_2 zodanig, dat ieder punt in de eerste klasse P_1 links van alle punten in de tweede klasse P_2 ligt.

Deze analogie tussen de rationale getallen en de punten van een rechte lijn wordt zoals bekend tot een werkelijke samenhang, wanneer op de rechte een bepaald beginpunt of nulpunt o en een bepaalde lengte-eenheid voor het meten van lijnstukken wordt gekozen. Met behulp van de laatste kan voor elk rationaal getal a een overeenkomstige lengte geconstrueerd worden, en als men die van het punt o naar rechts of links afzet, al naar gelang a positief of negatief is, dan krijgt men een bepaald eindpunt p, dat als het met het getal a overeenkomende punt aangeduid kan worden; met het rationale getal 0 komt het punt o overeen. Op deze manier komt met elk rationaal getal a, d.w.z. met elk individu in R, één en slechts één punt p overeen, d.w.z. één individu in L. Komen met de beide getallen a, b, de punten p, q overeen, en is $a > b$, dan ligt p rechts van q. De wetten I, II en III uit de vorige paragraaf komen helemaal overeen met de wetten I, II en III uit deze paragraaf.

3. Continuïteit van de rechte lijn

Van het grootste belang is echter het feit, dat de rechte lijn L oneindig veel punten bevat die met geen enkel rationaal getal overeenkomen. Komt namelijk het punt p met het rationale getal a overeen, dan is de lengte op onderling meetbaar met de bij de constructie gebruikte onverandelijke lengte-eenheid, d.w.z. er bestaat een derde lengte, een zogenaamde gemeenschappelijke maat, waarvan deze beide lengten gehele veelvouden zijn. Echter, de oude Grieken hebben al geweten en bewezen, dat er lengten zijn, die met een gegeven lengte-eenheid onderling onmeetbaar zijn, bijv. de diagonaal van een vierkant waarvan de zijde de lengte-eenheid is. Als men zo'n lengte vanaf het punt o op de rechte ab afzet, dan krijgt men een eindpunt dat met geen rationaal getal overeenkomt. Omdat er verder gemakkelijk bewezen kan worden dat er oneindig veel lengten zijn, die met de lengte-eenheid onderling onmeetbaar zijn, kunnen we zeggen: de rechte lijn L is oneindig veel rijker aan punt-individuen dan het gebied R van de rationale getallen aan getal-individuen.

Wil men nu, wat toch de wens is, alle verschijnselen in de rechte lijn ook rekenkundig kunnen volgen, dan zijn daarvoor de rationale getallen niet voldoende, en het is daarom absoluut noodzakelijk, het instrument R, dat door de schepping van de rationale getallen geconstrueerd was, wezenlijk te verfijnen door de schepping van nieuwe getallen op een zodanige manier, dat het gebied van de getallen dezelfde volledigheid of, zoals we meteen willen zeggen, dezelfde *continuïteit* krijgt als de rechte lijn.

Tot dit punt zijn de beschouwingen aan allen zo bekend en gangbaar, dat velen het als overbodig zullen beschouwen dat ze hier herhaald worden. Toch beschouw ik deze herhaling als noodzakelijk, om de kernvraag fatsoenlijk voor te bereiden. De tot nu toe gebruikelijke invoering van de irrationale getallen knoopt namelijk juist aan bij het begrip van de uitgebreide grootheden – hetgeen zelf nergens streng gedefinieerd wordt – en verklaart het getal als het resultaat van de meting van zo'n grootheid door een tweede van dezelfde soort.[4] In plaats daarvan eis ik, dat de rekenkunde zich uit zichzelf ontwikkelen moet. Dat zulke aanknopingspunten met niet-rekenkundige begrippen de eerste aanleiding geweest zijn voor de uitbreiding van het getalbegrip kan ik in het algemeen toegeven (alhoewel dit bij de invoering van de complexe getallen zeker niet het geval geweest is); maar hierin ligt heel zeker geen reden, om deze beschouwingen van heel andere soort zelf in de rekenkunde, in de wetenschap van de getallen, op te nemen. Net zoals de negatieve en gebroken rationale getallen door een vrije schepping vervaardigd zijn, en zoals de wetten voor het rekenen met deze getallen op de wetten voor het rekenen met gehele positieve getallen teruggevoerd moeten en kunnen worden, zo heeft men er ook naar te streven, dat de irrationale getallen enkel en alleen door de rationale getallen volledig gedefinieerd worden. Alleen het Hoe? blijft de vraag.

De bovenstaande vergelijking van het gebied R van de rationale getallen met een rechte lijn heeft geleid tot het besef van het bestaan van leemten, onvolledigheid, en niet-continuïteit van de eerste, terwijl wij aan de rechte volledigheid, doorlopendheid en continuïteit toeschrijven. Waarin bestaat nu eigenlijk deze continuïteit? In het antwoord op die vraag moet alles bevat zijn, en alleen daardoor zal men een wetenschappelijke fundering voor het onderzoek van alle continue gebieden verkrijgen. Met vaag gepraat over de ononderbroken samenhang in de kleinste delen wordt natuurlijk niets bereikt; het gaat erom, een precies kenmerk van de continuïteit aan te geven, hetgeen als basis voor werkelijke (logische) afleidingen gebruikt kan worden. Lange tijd heb ik hier tevergeefs over nagedacht, maar eindelijk vond ik, wat ik zocht. Deze vondst zal door verschillende personen misschien verschillend beoordeeld worden, maar ik geloof dat de meesten de inhoud ervan heel triviaal zullen vinden. Hij bestaat uit het volgende. In de vorige paragrafen is de aandacht gevestigd op het feit dat elk punt p van de rechte een verdeling van de rechte in twee klassen voortbrengt, zodanig dat elk punt van de ene klasse links van elk punt van de andere klasse ligt. Ik vind nu het wezen van de continuïteit in de omkering, dus in het volgende principe:

“Vallen alle punten van de rechte uiteen in twee klassen, zodanig dat ieder punt van de eerste klasse links van ieder punt van de tweede klasse ligt, dan bestaat er één en slechts één punt, dat deze indeling van alle punten in twee klassen, dit doorsnijden van de rechte in twee stukken, voortbrengt.”

Zoals al gezegd, geloof ik me niet te vergissen, als ik aanneem dat iedereen het terstond met de waarheid van deze bewering eens zal zijn; maar de meeste van mijn lezers zullen zeer teleurgesteld zijn te horen dat door deze trivialiteit het geheim van de continuïteit onthuld moet worden. Daarbij merk ik het volgende op. Ik vind het heel fijn dat iedereen het bovengenoemde principe zo inzichtelijk vindt, en zo overeenkomend met zijn ideeën over een lijn; want ik ben niet in staat, een of ander bewijs voor de juistheid ervan te geven, en niemand is daartoe in staat. De aanname van deze eigenschap van de lijn is niets anders dan een axioma, waardoor we nu pas de lijn haar continuïteit toekennen, waardoor wij de continuïteit in de lijn indenken. Als de ruimte al echt bestaat, dan hoeft hij nog niet noodzakelijk continu te zijn is; enorm veel van zijn eigenschappen zouden hetzelfde blijven, ook al was hij discontinu. En als we zeker zouden weten dat de ruimte

[4] Het schijnbare voordeel van de algemeenheid van deze definitie van het getal verdwijnt onmiddellijk, zodra men aan de complexe getallen denkt. Volgens mijn mening kan omgekeerd het begrip van de verhouding van twee grootheden van gelijke soort pas dan ontwikkeld worden, wanneer de irrationale getallen al ingevoerd zijn.

discontinu was, dan kon toch niets ons weer beletten, als dat ons zou bevallen, hem door het opvullen van zijn leemten in gedachten tot een continue ruimte te maken. Deze opvulling zou echter uit een schepping van nieuwe punt-individuen bestaan en volgens bovenstaand principe uitgevoerd kunnen worden.

4. Schepping van de irrationale getallen

Door de laatste woorden is al voldoende aangeduid, op welke manier het niet-continue gebied R van de rationale getallen tot een continu gebied vervolmaakt moet worden. In paragraaf 1 is aangegeven (III) dat ieder rationaal a getal een zodanige verdeling van het systeem R in twee klassen A_1 en A_2 voortbrengt, dat elk getal a_1 uit A_1 kleiner is dan ieder getal a_2 uit A_2; het getal a is dan ofwel het grootste getal van de klasse A_1 of het kleinste getal van de klasse A_2. Als nu een of andere verdeling van het systeem R in twee klassen A_1 en A_2 is gegeven, die alleen de karakteristieke eigenschap bezit dat elk getal a_1 uit A_1 kleiner is dan ieder getal a_2 uit A_2, dan willen wij zo'n indeling kortweg een *snede* (Schnitt) noemen en als (A_1, A_2) noteren. We kunnen dan zeggen, dat elk rationaal getal a één snede voortbrengt, of strict gesproken twee sneden, die we niet als wezenlijk verschillend willen beschouwen; deze snede heeft bovendien de eigenschap, dat ofwel onder de getallen van de eerste klasse een grootste, of in de tweede klasse een kleinste getal bestaat. Omgekeerd, als een snede ook deze eigenschap, bezit dan wordt deze snede door dit grootste danwel kleinste getal voortgebracht.

Maar men overtuigt zich eenvoudig van het feit, dat er ook oneindig veel sneden bestaan, die niet door rationale getallen worden voortgebracht. Het meest voor de hand liggende voorbeeld is het volgende.

Zij D een positief geheel getal, dat geen kwadraat is van een geheel getal, dan is er een positief geheel getal λ zodanig dat

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$$

Als we in de tweede klasse A_2 elk positief rationaal getallen opnemen waarvan het kwadraat $> D$ is, en in de eerste klasse alle overige rationale getallen, dan vormt deze indeling een snede (A_1, A_2), d.w.z. elk getal a_1 is kleiner dan elk getal a_2. Want als $a_1 = 0$ of negatief, dan is a_1 alleen om deze reden al kleiner dan elk getal a_2, omdat deze als gevolg van de definitie positief is; als echter a_1 positief is, dan is het kwadraat ervan $\leq D$, en daarom is a_1 kleiner dan elk positief getal a_2 waarvan het kwadraat $> D$ is.

Deze snede wordt echter door geen enkel rationaal getal voortgebracht. Om dit te bewijzen moet voor alles aangetoond worden, dat er geen rationaal getal bestaat, waarvan het kwadraat $= D$ is. Hoewel dit uit de eerste beginselen van de getaltheorie bekend is, moge het volgende indirecte bewijs hier een plaatsje vinden. Als er een rationaal getal bestaat waarvan het kwadraat $= D$ is, dan zijn er ook twee positieve gehele getallen t, u die aan de vergelijking $t^2 - Du^2 = 0$ voldoen, en met mag aannemen dat u het *kleinste* positieve gehele getal is, dat de eigenschap bezit, dat het kwadraat ervan door vermenigvuldiging met D in het kwadraat van een geheel getal overgaat. Omdat nu kennelijk

$$\lambda u < t < (\lambda + 1)u$$

wordt het getal

$$u' = t - \lambda u$$

een positief getal, en wel *kleiner* dan u. Stellen we verder

$$t' = Du - \lambda t$$

dan is t' eveneens een positief geheel getal, en er blijkt

$$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0,$$

hetgeen in tegenspraak is met de aanname over u.

Derhalve is het kwadraat van elk rationaal getal x ofwel $< D$ ofwel $> D$. Hieruit volgt nu gemakkelijk, dat er noch in de klasse A_1 een grootste, noch in de klasse A_2 een kleinste getal is. Stelt men namelijk

$$y = \frac{x(x^2+3D)}{3x^2+D}$$

dan is

$$y - x = \frac{2x(D-x^2)}{3x^2+D}$$

en

$$y^2 - D = \frac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2}.$$

Als we hierin voor x een positief getal uit A_1 nemen, dan is $x^2 < D$, en dus wordt $y > x$, en $y^2 < D$, dus behoort y ook tot de klasse A_1. Stellen we dat x een getal uit de klasse A_2 is, dan is $x^2 > D$, en dus wordt $y < x$, $y > 0$ en $y^2 > D$, dus behoort y ook tot de klasse A_2.

In deze eigenschap, dat niet alle sneden door rationale getallen worden voortgebracht, bestaat de onvolledigheid of discontinuïteit van het gebied R van alle rationale getallen.

Iedere keer wanneer er een snede (A_1, A_2) is, die door geen enkel rationaal getal wordt voorgebracht, *scheppen* wij een nieuw, een *irrationaal* getal α, dat we als volledig bepaald door deze snede (A_1, A_2) beschouwen; we zullen zeggen dat het getal α met deze snede overeen komt, of dat het deze snede voortbrengt. Iedere bepaalde snede komt dus van nu af aan met precies één bepaald rationaal of irrationaal getal overeen, en we beschouwen twee getallen steeds en alleen dan als verschillend of ongelijk als ze met wezenlijk verschillende sneden overeenkomen.

Om nu een basis voor de ordening van alle *reële*, d.w.z. alle rationale en irrationale getallen te verkrijgen, moeten we om te beginnen de relatie tussen twee willekeurige sneden (A_1, A_2) en (B_1, B_2) onderzoeken, die voortgebracht worden door twee getallen α en β. Het is duidelijk dat een snede (A_1, A_2) al volledig gegeven is, wanneer één van beide klassen, bijvoorbeeld de eerste A_1 bekend is, omdat A_2 uit alle rationale getallen bestaat die niet in A_1 bevat zijn, en de karakteristieke eigenschap van A_1 bestaat erin, dat hij, wanneer het getal a_1 erin bevat is, ook alle getallen kleiner dan a_1 bevat. Vergelijkt men nu twee van deze eerste klassen A_1, B_1 met elkaar, dan kan het (1) voorkomen, dat ze volkomen identiek zijn, d.w.z. dat elk in A_1 bevat getal a_1 ook in B_1 bevat is, en dat elk in B_1 bevat getal b_1 ook in A_1 bevat is. In dit geval is dan noodzakelijkerwijs ook A_2 identiek aan B_2, de beide sneden zijn volkomen identiek, hetgeen wij symbolisch met $\alpha = \beta$ of $\beta = \alpha$ aangeven.

Als de beide klassen A_1, B_1 niet identiek zijn, dan is er in de ene, bijv. A_1, een getal $a_1' = b_2'$, dat niet in de andere B_1 bevat is, en dat zich daarom in B_2 bevindt; daarom zijn zeker alle in B_1 bevatte getallen b_1 kleiner dan dit getal $a_1' = b_2'$, en daarom zijn alle getallen b_1 ook in A_1 bevat.

Als nu 2) dit getal a_1' het enige getal in A_1 is dat niet in B_1 bevat is, dan is elk ander in A_1 bevat getal a_1 in B_1 bevat, en daarom kleiner dan a_1', d.w.z. a_1' is het grootste van alle getallen a_1, dus wordt de snede (A_1, A_2) door een rationaal getal $\alpha = a_1' = b_2'$ voortgebracht. Van de andere snede (B_1, B_2) weten we al, dat alle getallen b_1 in B_1 ook in A_1 bevat zijn, en kleiner zijn dan het getal $a_1' = b_2'$, dat in B_2 bevat is; elk ander in B_2 bevat getal b_2 moet groter zijn dan b_2' omdat het anders ook kleiner dan a_1' zou zijn, dus in A_1 en daarom ook in B_1 bevat zou zijn; dus is b_2' het kleinste van alle in B_2 bevatte getallen, en daarom wordt de snede (B_1, B_2) door hetzelfde rationale getal $\beta = b_2' = a_1' = \alpha$ voortgebracht. De beide snedes zijn dus niet wezenlijk verschillend.

Als er echter 3) tenminste twee verschillende getallen $a_1' = b_2'$ en $a_1'' = b_2''$ zijn die niet in B_1 bevat zijn, dan zijn er ook oneindig veel van zulke getallen, omdat alle oneindig veel tussen a_1' en b_2'' liggende getallen (paragraaf 1, II) kennelijk in A_1 maar niet in B_1 bevat zijn. In dit geval noemen we de met deze beide wezenlijk verschillende sneden (A_1, A_2) en (B_1, B_2) overeenkomende getallen α en β eveneens verschillend van elkaar, en we zeggen dat α groter is dan β en β kleiner is dan α, hetgeen we symbolisch zowel door $\alpha > \beta$ en door $\beta < \alpha$ uitdrukken. Daarbij moen opgemerkt worden dat deze definitie volkomen met de vroegere definitie (van groter en kleiner) overeenkomt als de getallen rationaal zijn.

De nu nog overblijvende mogelijke gevallen zijn de volgende. Als er 4) in B_1 een en slechts één getal $b'_1 = a'_2$ is dat niet in A_1 bevat is, zijn de beide sneden (A_1, A_2) en (B_1, B_2) niet wezenlijk verschillend, en ze worden door hetzelfde rationale getal $\alpha = a'_1 = b'_2 = \beta$ voortgebracht. Zijn er echter 5) in B_1 minstens twee getallen die niet in A_1 bevat zijn, dan is $\beta > \alpha$, $\alpha < \beta$.

Daar hiermee alle gevallen uitgeput zijn, blijkt dat van twee verschillende getallen noodzakelijkerwijs de ene de grotere en de andere de kleinere moet zijn, wat twee mogelijkheden toelaat. Een derde geval is onmogelijk. Dit lag weliswaar al (verborgen) in de keuze van de vergrotende trap (groter, kleiner) om de betrekking tussen α, β aan te geven; maar deze keuze is pas nu achteraf gerechtvaardigd. Juist bij de volgende onderzoekingen moet men zich er zo zorgvuldig mogelijk voor waken, dat men zelfs bij de beste intentie om eerlijk te zijn, door te snelle keuze van uitdrukkingen die aan andere reeds ontwikkelde begrippen ontleend zijn, zich er niet toe laat verleiden, onterechte conclusies over het ene gebied naar het andere over te dragen.

Beschouwt men nu nog eens precies het geval $\alpha > \beta$, dan blijkt, dat het kleinere getal β, wanneer het rationaal is, zeker tot de klasse A_1 behoort; omdat er namelijk in A_1 een getal $a'_1 = b'_2$ is, dat tot de klasse B_2 behoort, is het getal β, of het nu het grootste getal in B_1 of het kleinste getal in B_2 is, zeker $\leq a'_1$, en daarom in A_1 bevat. Net zo blijkt uit $\alpha > \beta$, dat het grotere getal α, als het rationaal is, zeker tot de klasse B_2 behoort, omdat $\alpha \geq a'_1$ is. Als men deze twee beschouwingen verenigt, dan krijgt men het volgende resultaat: Wordt een snede (A_1, A_2) door het getal α voortgebracht, dan hoort een of ander rationaal getal a tot A_1 of tot de klasse A_2 al naar gelang het kleiner of groter is dan α; is het getal α zelf rationaal, dan kan het tot de ene of de andere klasse behoren.

Tot slot volgt hieruit nog het volgende. Als $\alpha > \beta$, dan zijn er oneindig veel getallen in A_1 die niet in B_1 bevat zijn, dus zijn er ook oneindig veel van zulke getallen die zowel van α als van β verschillend zijn; elk zulk rationaal getal c is $< \alpha$, omdat het in A_1 bevat is, en het is tegelijk $> \beta$, omdat het in B_2 bevat is.

5. Continuïteit van het gebied van de reële getallen.

Als gevolg van de zojuist vastgelegde onderscheidingen van gevallen vormt nu het systeem $\mathbb{R}$ van alle reële getallen een welgeordend gebied van een dimensie; hiermee wordt niets anders bedoeld dan dat volgende wetten gelden:

I. Geldt $\alpha > \beta$ en $\beta > \gamma$, dan is ook $\alpha > \gamma$. We zullen zeggen, dat het getal β tussen de beide getallen α en γ ligt

II. Zijn α en γ twee verschillende getallen, dan zijn er oneindig veel verschillende getallen β die tussen α en γ liggen.

III. Is α een bepaald getal, dan vallen alle getallen uit het systeem $\mathbb{R}$ uiteen in twee klassen, $\mathbb{A}_1$ en $\mathbb{A}_2$, die elk oneindig veel individuen bevatten; de eerste klasse $\mathbb{A}_1$ bevat alle getallen α_1, die $< \alpha$ zijn; de tweede klasse $\mathbb{A}_2$ bevat alle getallen α_2, die $> \alpha$ zijn. Het getal α zelf kan naar believen in de eerste of de tweede klasse ingedeeld worden, en is dan dienovereenkomstig het grootste getal van de eerste of het kleinste getal van de tweede klasse. In elk geval is de verdeling van het systeem $\mathbb{R}$ in de beide klassen $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ zodanig, dat ieder getal in de eerste klasse $\mathbb{A}_1$ kleiner is dan ieder getal in de tweede klasse $\mathbb{A}_2$, en we zeggen dat deze verdeling door het getal α wordt voortgebracht.

Kortheidshalve, en om de lezer niet te vermoeien, laat ik de bewijzen van deze stellingen weg, die onmiddellijk uit de definities van de vorige paragrafen volgen.

Buiten deze eigenschappen bezit het gebied $\mathbb{R}$ ook continuïteit, d.w.z. er geldt de voldende stelling:

IV. Valt het systeem $\mathbb{R}$ van alle reële getallen uiteen in twee klassen $\mathbb{A}_1$ en $\mathbb{A}_2$ op een zodanige manier dat elk getal α_1 uit de klasse $\mathbb{A}_1$ kleiner is dan ieder getal α_2 uit de klasse $\mathbb{A}_2$, dan bestaat er één en slechts één getal α, waardoor deze verdeling tot stand wordt gebracht.

Bewijs. Door de verdeling of de snede van $\mathbb{R}$ in $\mathbb{A}_1$ en $\mathbb{A}_2$ is tegelijk een snede (A_1, A_2) van het systeem R van de rationale getallen gegeven, die daardoor gedefinieerd wordt, dat A_1 alle rationale getallen uit de klasse $\mathbb{A}_1$, en A_2 alle overige rationale getallen, d.w.z. alle rationale getallen uit de klasse $\mathbb{A}_2$ bevat. Zij α het volledig bepaalde getal dat door deze snede (A_1, A_2) wordt voortgebracht. Is β een van α verschillend getal, dan zijn er altijd oneindig veel rationale getallen c, die tussen α en β liggen. Is $\beta < \alpha$, dan is $c < \alpha$, dus behoort c tot de klasse A_1, en dus ook tot de klasse $\mathbb{A}_1$, en omdat tegelijk $\beta < c$ is, behoort ook β tot dezelfde klasse $\mathbb{A}_1$, omdat elk getal in $\mathbb{A}_2$ groter is dan elk getal in $\mathbb{A}_1$. Is echter $\beta > \alpha$, dan is $c > \alpha$; daarom behoort c tot de klasse A_2 en daarom ook tot de klasse $\mathbb{A}_2$, en omdat tegelijk $\beta > c$ is, behoort ook β tot dezelfde klasse $\mathbb{A}_2$, omdat elk getal in $\mathbb{A}_1$ kleiner is dan elk getal c in $\mathbb{A}_2$. Daarom behoort elk van α verschillend getal β tot de klasse $\mathbb{A}_1$ of de klasse $\mathbb{A}_2$, al naar gelang $\beta < \alpha$ of $\beta > \alpha$ is; daarom is α zelf ofwel het grootste getal in $\mathbb{A}_1$ of het kleinste getal in $\mathbb{A}_2$, d.w.z het is een en duidelijk het enige getal is, waardoor de verdeling van $\mathbb{R}$ in de klassen $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ wordt voortgebracht, hetgeen te bewijzen was.

6. Rekenen met reële getallen

Om een of andere berekening met twee reële getallen α, β op berekeningen met rationale getallen terug te voeren, komt het er alleen op aan, uit de sneden (A_1, A_2) en (B_1, B_2), die door de getallen α, β in het systeem R worden voortgebracht, de snede (C_1, C_2) te definiëren, die met het resultaat van de berekening overeenstemmen moet. Ik beperk me hier tot het uitwerken van het eenvoudigste voorbeeld, de optelling.

Is c een rationaal getal, dan moet men het in de klasse C_1 opnemen als er een getal a_1 in A_1 en een getal b_1 in B_1 is, zodat $a_1 + b_1 \geq c$; alle andere rationale getallen moeten in de klasse C_2 worden opgenomen. Deze indeling van de rationale getallen in de klassen C_1 en C_2 vormt blijkbaar een snede, omdat ieder getal c_1 in C_1 kleiner is dan ieder getal c_2 in C_2. Zijn nu beide getallen α en β rationaal, dan is ieder in C_1 bevat getal $c_1 \leq \alpha + \beta$, omdat $a_1 \leq \alpha$ en $b_1 \leq \beta$, dus ook $a_1 + b_1 \leq \alpha + \beta$ is; als een in C_2 bevat getal $c_2 < \alpha + \beta$, zou zijn, dus $\alpha + \beta = c_2 + p$, waarbij p een positief rationaal getal betekent, dan zou

$$c_2 = (\alpha - \frac{1}{2}p) + (\beta - \frac{1}{2}p),$$

in tegenspraak met de definitie van het getal c_2, omdat $(\alpha - \frac{1}{2}p)$ een getal uit A_1 en $(\beta - \frac{1}{2}p)$ een getal uit B_1 is; als gevolg daarvan is ieder in C_2 bevat getal $c_2 \geq \alpha + \beta$. Daarom wordt in dit geval de snede (C_1, C_2) door de som $\alpha + \beta$ voortgebracht. We gaan daarom niet in tegen de in de rekenkunde van de rationale getallen geldende definitie, als we in alle gevallen onder de *som* $\alpha + \beta$ van twee willekeurige reële getallen α, β dat getal γ verstaan, waardoor de snede (C_1, C_2) wordt voortgebracht. Is verder slechts één van beide getallen α, β rationaal, bijvoorbeeld α, dan overtuigt men zich gemakkelijk van het feit, dat het geen invloed op de som $\gamma = \alpha + \beta$ heeft, of men het getal α in de klasse A_1 of in de klasse A_2 opneemt.

Net zo als de optelling kunnen ook de overige operaties van de zogenaamde elementaire rekenkunde worden gedefinieerd, namelijk de vorming van verschillen, producten, quotiënten, machten, wortels, logarithmes, en op deze manier komt men uit bij werkelijke bewijzen van stellingen (zoals b.v. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$), die voorzover ik weet tot nu toe nooit bewezen zijn.

R. Dedekind, 1872, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*
(vierde onveranderde druk: 1912, Vieweg, Braunschweig)