Fragmenten uit René Descartes, la Géométrie *(De Meetkunde), (Leiden 1637). Een facsimile van de oorspronkelijke Franse tekst van* la Géométrie*, met een Engelse vertaling, is verschenen in D.E. Smith en M.L. Latham,* The Geometry of Rene Descartes*, New York: Dover Publications, 1954. Paginanummers in de marge verwijzen naar de Franse tekst in bovengenoemde facsimile-editie. De paginering begint met p. 297 omdat de* Géométrie *verschenen is als een van de drie aanhangsels bij Descartes' filosofisch werk* Discours de la Méthode*. Woorden tussen haakjes in de tekst zijn door de vertaler (J.P.H.) toegevoegd ter verduidelijking. De notatie is zoveel mogelijk als in het origineel, zodat de vertaling gemakkelijk met de facsimile vergeleken kan worden.*

[p. 297]

De MEETKUNDE BOEK 1

Over de problemen die geconstrueerd kunnen worden zonder er iets anders voor te gebruiken dan cirkels en rechte lijnen.

Alle Problemen in de Meetkunde kunnen gemakkelijk tot zodanige termen worden teruggebracht, dat men daarna alleen de lengte van een paar rechte lijnen (d.w.z. lijnsegmenten) hoeft te kennen om ze (die problemen) te construeren.

De hele Rekenkunde bestaat slechts uit vier of vijf operaties, namelijk (1) Optelling, (2) Aftrekking, (3) Vermenigvuldiging, (4) Deling en (5) Worteltrekking, die men als een soort Deling kan opvatten.[1] Op dezelfde manier hoeft men in de Meetkunde met de gezochte lijnen, om ze bekend te maken, niets anders te doen dan er andere lijnen (1) aan toe te voegen, of (2) ervan af te trekken; Ofwel, (3) als je er een hebt (gekozen), die ik de eenheid zal noemen om hem beter met getallen in verbinding te brengen, & die in de meeste gevallen willekeurig gekozen kan worden, dan als je nog twee (lijnen) hebt, er een vierde bij vinden die tot één van de twee staat als de andere staat tot de eenheid; dit is hetzelfde als Vermenigvuldiging. Ofwel (4) een vierde te vinden, die tot een van de twee staat als de eenheid tot de andere, [p. 298] wat hetzelfde is als Deling; Ofwel tenslotte (5) één, of twee, of meer middelevenredigen tussen de eenheid en een andere lijn te vinden, wat hetzelfde is als het trekken de vierkantswortel, of de kubische wortel, enz. En ik zal er niet voor terugschrikken om deze termen uit de Rekenkunde in de Meetkunde te gebruiken, om me begrijpelijker uit te drukken.

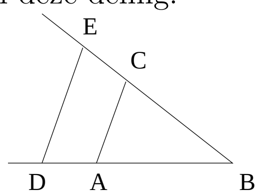
De Vermenigvuldiging

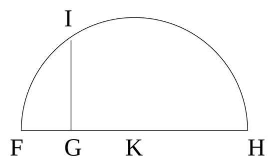
[1] Het is niet duidelijk waarom Descarts hier worteltrekking als een soort deling opvat. Numerieke worteltrekking kan worden uitgevoerd door allerlei delingen uit te voeren, maar men krijgt daardoor slechts een benadering van de wortel.

Laat bijvoorbeeld AB de eenheid zijn, & stel dat men BD met BC moet vermenigvuldigen; dan hoef ik alleen de punten A & C te verbinden, en dan DE evenwijdig aan CA te trekken, & BE is (dan) het resultaat van deze vermenigvuldiging.

De Deling

Of als men BE door BC moet delen: nadat ik de punten E en D verbonden heb, trek ik AC evenwijdig aan DE, & BC is (dan) het resultaat van deze deling.





Het Trekken van de vierkantswortel

Of als men de vierkantswortel uit GH moet trekken, voeg ik er in een rechte lijn aan toe (het segment) FG, dat de eenheid is. & nadat ik FH in twee gelijke delen in K verdeeld heb, trek ik met middelpunt K de cirkel FIH. Daarna trek ik van het punt G een lijn naar I loodrecht op FH. Dan is GI de gezochte wortel. Ik zeg hier niets over de kubische en andere wortels omdat ik er hieronder gemakkelijker over zal spreken.

Maar vaak heeft men het niet nodig die lijnen zo op het papier te trekken, [p. 299] & is het voldoende ze met een paar letters aan te geven, ieder met een enkele letter. Bijvoorbeeld, om de lijn BD bij GH op te tellen, noem ik de ene a & de andere b, & schrijf ik $a + b$. En $a - b$ om b van a af te trekken. En ab om ze met elkaar te vermenigvuldigen, en $\frac{a}{b}$ om a door b te delen. En aa of a^2 om a met zichzelf te vermenigvuldigen. En a^3 om hem nog een keer met a met te vermenigvuldigen, en zo tot in het oneindige. En $\sqrt{a^2 + b^2}$ om de vierkantswortel van $a^2 + b^2$ te trekken. En $\sqrt{Ca^3 - b^2 + abb}$ om de kubische wortel te trekken van $a^3 - b^2 + abb$, & zo ook de anderen.

Waarbij opgemerkt moet worden dat ik met a^2 of b^3 of soortgelijke (uitdrukkingen) gewoonlijk alleen rechte lijnen beschouw. Maar om de gewone namen uit de Algebra te (kunnen) gebruiken, noem ik ze vierkanten, kubussen enz.

Er moet ook opgemerkt worden dat alle stukken van eenzelfde lijn gewoonlijk met hetzelfde aantal dimensies uitgedrukt moeten worden wanneer de eenheid niet is gekozen in het probleem. Zoals hier a^3 er evenveel bevat als abb of b^3, waaruit de lijn wordt samengesteld die ik hier $\sqrt{Ca^3 - b^2 + abb}$ heb genoemd. Maar dit is niet hetzelfde als de eenheid bepaald is, omdat die altijd kan worden verondersteld wanneer er teveel of te weinig dimensies zijn. Zoals wanneer men de kubische wortel uit $aabb - b$ moet trekken, dan moet men denken dat de grootheid *aabb* één keer door de eenheid gedeeld is, & dat de andere grootheid b twee keer met dezelfde (eenheid) is vermenigvuldigd. [p. 300]

Verder, om de namen van deze lijnen niet te vergeten, moet men altijd een aparte lijst maken, wanneer men ze stelt of verandert. Men kan bijvoorbeeld schrijven

$AB \mathrel{\supset\!\!\!o} 1$, dat wil zeggen AB gelijk aan 1.

$GH \mathrel{\supset\!\!\!o} a$

$BD \mathrel{\supset\!\!\!o} b$, enz.

Hoe men aan de vergelijkingen moet komen die dienen om problemen op te lossen.

Als men zo een probleem wil oplossen, moet men allereerst aannemen dat het al opgelost is, & namen geven aan alle lijnen die noodzakelijk lijken om het te construeren, zowel aan bekende als aan onbekende. Daarna moeten we, zonder acht te slaan op verschillen tussen deze bekende en onbekende lijnen, de moeilijkheid doorlopen, op de manier die het meest natuurlijk toont hoe ze (die lijnen) van elkaar afhangen, totdat men een manier gevonden heeft om eenzelfde grootheid op twee manieren uit te drukken: dit heet een Vergelijking, want de termen van de ene van die manieren zijn gelijk aan de (termen) van de andere. En men moet net zoveel vergelijkingen vinden als men onbekende lijnen aangenomen heeft. Of als dit niet zo uitkomt, & men desondanks niets weglaat van hetgeen in het probleem gewenst is, dan laat dat zien dat zij (het probleem) niet helemaal bepaald is.

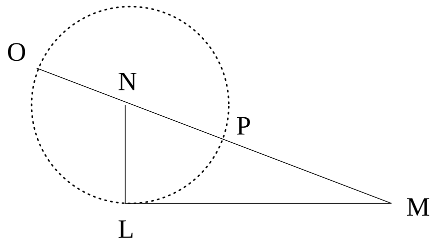
... [p. 301]

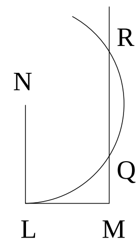
En men kan zo altijd alle onbekende grootheden tot één enkele terugbrengen, wanneer het Probleem geconstrueerd kan worden met cirkels en rechte lijnen, of ook met kegelsneden, of zelfs met een andere rechte lijn die maar één of twee graden gecompliceerder is. Maar ik zal niet stoppen om dit in meer detail uit te leggen, omdat ik dan u het plezier zou afnemen om dit zelf uit te zoeken, en ook het nut van uw geest te cultiveren door u erin te oefenen, hetgeen volgens mij het belangrijkste nut is dat men uit deze [p. 302] wetenschap kan trekken.

...

En dan kan deze wortel, of onbekende lijn, gemakkelijk gevonden worden. Want als ik bijvoorbeeld heb

$z^2 \mathrel{\supset\!\!\!o} az + bb$





maak ik de rechthoekige driehoek NLM waarvan de zijde LM gelijk is aan b, de vierkantswortel van de bekende grootheid bb, & de andere LN is $\frac{1}{2}a$, de helft van de andere bekende grootheid die vermenigvuldigd was met z, die ik hier als onbekende lijn veronderstel. Dan als we de basis MN van de driehoek verlengen ... tot O zodat NO gelijk is aan NL, de hele OM is [p. 303]
de gezochte lijn z. En die wordt zo uitgedrukt:

$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Als ik heb $yy \propto -ay + bb$, & als y de grootheid is die men moet vinden, maak ik dezelfde rechthoekige driehoek NLM & van de basis MN trek ik NP gelijk aan NL af, & de rest PM is y, de gezochte wortel. En net zo, als ik had $x^4 \propto -ax^2 + b^2$, zou PM x^2 zijn, & ik zou hebben

$x \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$, & zo ook andere.

Als ik tenslotte heb $z^2 \propto az - bb$: dan maak ik NL gelijk aan $\frac{1}{2}a$, & LM gelijk aan b als hiervoor, maar in plaats van de punten MN te verbinden, trek ik MQR evenwijdig aan LN. En als met middelpunt N door L een cirkel getrokken wordt, die haar (de lijn) in Q en R snijdt, is de gezochte lijn z MQ ofwel MR, want in dit geval kan zij op twee manieren worden uitgedrukt, te weten $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. En als de cirkel met middelpunt N die door L gaat. de rechte lijn MQR niet snijdt en ook niet raakt, is er geen wortel voor de Vergelijking, zodat men er zeker van kan zijn dat de constructie van het gestelde probleem onmogelijk is. [p. 304]

Deze wortels kunnen trouwens op oneindig veel andere manieren gevonden worden, & ik heb alleen deze heel simpele (manieren) willen aangeven, om te laten zien dat men alle Problemen van de gewone meetkunde kan construeren met niets anders dan wat bevat is in de vier figuren die ik hier heb uitgelegd. Ik geloof niet dat de ouden (d.w.z. de Grieken) dit hebben gezien. Want anders hadden zij niet de moeite genomen om zoveel dikke boeken te schrijven. De volgorde van de proposities daarin laat ons zien dat zij niet de ware methode hadden om ze allemaal te vinden; ze hebben alleen die (proposities) verzameld die ze toevallig zijn tegengekomen.[2] Voorbeeld van Pappus

En men kan dit ook heel duidelijk zien aan wat Pappus aan het begin van zijn zevende boek gezegd heeft. Nadat hij zich enige tijd heeft bezig gehouden met het opsommen van alles wat zijn voorgangers over Meetkunde geschreven hadden, bespreekt hij tenslotte een probleem, waarvan hij zegt dat noch Euclides, noch Apollonius, noch iemand anders het helemaal opgelost heeft. Hier zijn zijn woorden:

. . . Descartes citeert nu de passage over het probleem over de "locus van drie en vier lijnen" uit Pappus. Hij vervolgt . . .

[p.307]

Dit probleem kan zich tot elk aantal lijnen uitstrekken. En omdat er altijd een oneindig veel verschillende punten zijn die kunnen voldoen aan hetgeen hier gevraagd is, wordt ook geëist de lijn te kennen en te trekken waarop zij zich allemaal moeten bevinden. & Pappus zegt dat wanneer er maar drie of vier gegeven lijnen zijn, zij (de gevraagde lijn) één van de kegelsneden is, maar hij onderneemt niet haar te bepalen of te beschrijven. En ook legt hij niet uit op welke (kromme) lijnen al deze punten zich moeten bevinden als het probleem gesteld wordt voor een groter aantal (rechte) lijnen. Hij voegt slechts toe dat de Ouden (d.w.z. de Grieken) zich één zo'n (kromme lijn) hadden voorgesteld, en aangetoond hadden dat deze ervoor nuttig was, maar deze scheen de meest voor de hand liggende te zijn, & echter toch niet altijd de eerste was.[3] Dit is voor mij de aanleiding geweest om te proberen of men met de methode die ik gebruik net zover kan gaan als zij.

. . . [p.308]

Daarna heb ik ook gevonden dat wanner er maar drie of vier gegeven (rechte) lijnen zijn, de gezochte punten zich (kunnen) bevinden[4], niet alleen op een van de drie kegelsneden, maar soms ook op de omtrek van een cirkel of op een rechte lijn. En dat, wanneer er vijf, of zes, of zeven, of acht lijnen zijn, alle punten zich bevinden op één van de lijnen die één graad gecompliceerder zijn dan de kegelsneden, & dat het niet mogelijk is dat men zich van deze lijnen er één kan voorstellen die niet nuttig is in dit probleem. Maar opnieuw kunnen zij (die punten) zich (in sommige gevallen) ook bevinden op een kegelsnede of een cirkel, of een rechte lijn. En als er negen, of 10, of 11, of 12

[2]Dit is erg kort door de bocht.

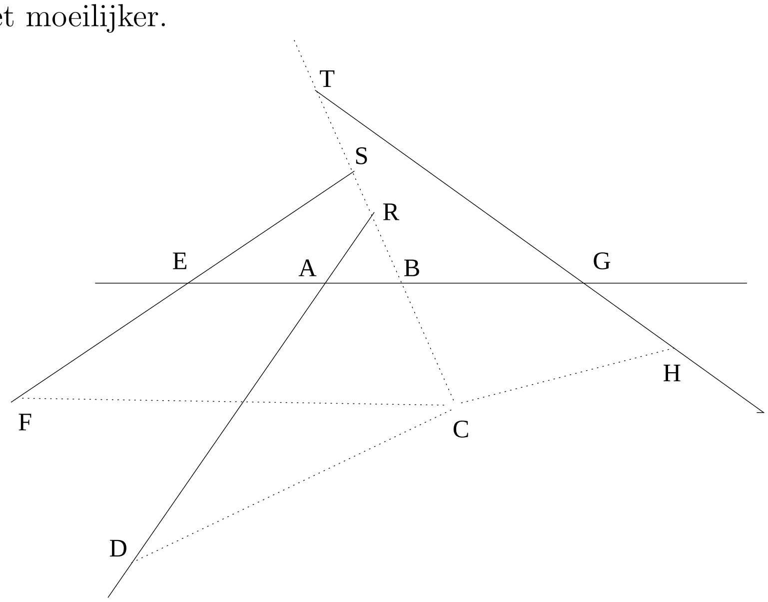
[3]De verwarring in deze passage van Pappus komt doordat Descartes een foutieve Latijnse vertaling gebruikte. Het origineel van Pappus is ook niet al te helder.

[4]Letterlijk: elkaar ontmoeten

zijn, dan bevinden die punten zich op een lijn, die niet meer dan één graad gecompliceerder kan zijn dan de voorgaaande; maar (ook) alle (lijnen) die [p.309] één graad gecompliceerder zijn kunnen ervoor gebruikt worden, & zo verder tot in het oneindige.

Verder is de eerste, en de simpelste van alle (krommen) na de kegelsneden de (kromme) die men kan beschrijven met de doorsnijding van een Parabool en een rechte lijn, op de manier die weldra zal worden uitgelegd. Op die manier denk ik dat ik helemaal heb voldaan aan datgene wat volgens Pappus door de Ouden (d.w.z. de Grieken) hierin hebben gezocht. & ik zal proberen het bewijs hiervan in weinig woorden te geven, want het verveelt me al er zoveel over te (moeten) schrijven.

Laten AB, AD, EF, GH enz. verschillende (rechte) lijnen zijn die gegeven zijn in positie, en & (stel) dat we een punt moeten vinden zoals C waarvan we andere rechte lijnen naar de gegeven lijnen moeten trekken, zoals $CB, CD, CF \& CH$, zodat de hoeken CBA, CDA, CFE, CHG enz. gegeven zijn, & (stel) dat het resultaat van de vermenigvuldiging van een deel van die [p.310] lijnen gelijk is aan het resultaat van de vermenigvuldiging van de anderen, of dat ze een andere gegeven verhouding hebben[5], want dit maakt het probleem niet moeilijker.



Hoe men de termen moet stellen om de Vergelijking in dit voorbeeld te krijgen

Eerst veronderstel ik dat dit al gedaan is, & om me te ontdoen van de verwarring van al die lijnen, beschouw ik één van de gegeven (lijnen) en

[5] D.w.z. een andere verhouding dan 1:1

één van de lijnen die gevonden moeten worden, bijvoorbeeld AB & CB, als de voornaamste, & waarmee ik zo zal proberen alle anderen in verband te brengen. Laat het segment van de lijn AB tussen de punten A & B x genoemd worden, en laat BC y genoemd worden. & Laat alle andere gegeven lijnen verlengd worden tot ze die twee snijden, (waarbij die twee) ook verlengd (worden) indien nodig. Als ze niet evenwijdig zijn, zoals u hier ziet, laten zij dan AB snijden in de punten A, E, G, & BC in de punten R, S, T. Dan, omdat alle hoeken van driehoek ARB gegeven zijn, is de verhouding tussen de zijden AB & BR ook gegeven, & ik stel deze (de verhouding) van z tot b. Dus omdat AB x is, zal RB $\frac{bx}{z}$ zijn, & de hele CR zal $y + \frac{bx}{z}$ zijn, omdat het punt B tussen C & R valt; want als R tussen C & B zou vallen, zou CR $y - \frac{bx}{z}$ zijn, & als C tussen B & R zou vallen, zou CR $-y + \frac{bx}{z}$ zijn. Op dezelfde manier zijn de drie hoeken van driehoek DRC gegeven, & als gevolg daarvan ook de verhouding tussen de zijden CR & CD, die ik de (verhouding) van z tot c stel. Dus omdat CR $y + \frac{bx}{z}$ is, zal CD $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$ zijn. Vervolgens, [p.311] omdat de lijnen AB, AD & EF gegeven zijn in positie, is de afstand tussen de punten A & E ook gegeven, & als men deze k noemt,[6] heeft men EB gelijk aan $k + x$, maar het zou $k - x$ zijn als het punt B tussen E & A zou vallen, & $-k + x$ als E tussen A & B zou vallen. En omdat de hoeken van driehoek ESB allemaal gegeven zijn, is de verhouding van BE tot BS ook gegeven, & ik stel die als (de verhouding van) z tot d. Dan is BS $\frac{dk+dx}{z}$ & de hele CS is $\frac{zy+dk+dx}{z}$, maar het zou $\frac{zy-dk-dx}{z}$ zijn als het punt S tussen B & C zou vallen, & het zou $\frac{-zy+dk+dx}{z}$ zijn als C tussen B & S zou vallen. Verder zijn de drie hoeken van de driehoek FSC gegeven, en daardoor de verhouding van CS tot CF, laat die als z tot e zijn. & de hele CF zal zijn [p.312] $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$. En op dezelfde manier is AG, die ik ℓ noem, gegeven, & BG is $\ell - x$, & vanwege de driehoek BGT is de verhouding van BG tot BT ook gegeven, laat die (de verhouding) van z tot f zijn. & BT zal zijn $\frac{f\ell-fx}{z}$, & $CT \propto \frac{zy+f\ell-fx}{z}$. Dan opnieuw, de verhouding van TC tot CH is gegeven vanwege de driehoek TCH, en als we die stellen als (de verhouding) van z tot g, heeft men $CH \propto \frac{+gzy+fg\ell-fgx}{zz}$.

En zo ziet u dat, ongeacht het aantal lijnen die gegeven in positie zijn, alle lijnen die vanaf het punt C onder gegeven hoeken getrokken worden op de manier van het probleem, elk altijd door drie termen kan worden uitgedrukt. Één ervan is samengesteld uit de onbekende grootheid y, maal of gedeeld door een andere bekende grootheid; & de andere uit de onbekende grootheid

[6] In de facsimile staat de drukfout K.

x, ook maal of gedeeld door een andere bekende grootheid, & de derde uit een grootheid die helemaal bekend is. Behalve wanneer ze (de lijnen) evenwijdig zijn, ofwel aan de lijn AB, dan is de term met de grootheid x nul, of aan de lijn CB, dan is de term met de grootheid y nul. Dit is zó duidelijk dat ik niet zal pauzeren om het uit te leggen. En de tekens + en - van die termen kunnen op alle voorstelbare manieren veranderen.

Verder ziet u ook dat als we verschillende van die lijnen met elkaar vermenigvuldigen, de grootheden x & y in het product elk niet meer dimensies kan hebben dan er lijnen geweest zijn waarvoor zij (x, y) gebruikt zijn om ze uit te drukken, en die zo vermenigvuldigd zijn. Daarom zullen er nooit meer [p. 313] dan twee dimensies zijn in het product van twee lijnen, en niet meer dan drie in het product van drie (lijnen), en zo tot in het oneindige.