De
MEETKUNDE
BOEK 2
Over de natuur van de kromme lijnen.

[p. 315]

De ouden (d.w.z. de Grieken) hebben zeer juist opgemerkt dat sommige meetkundige problemen *vlak* zijn, andere *lichamelijk* & weer andere *lijnachtig*, dat wil zeggen dat sommige geconstrueerd kunnen worden door alleen rechten en cirkels te trekken, en andere alleen met tenminste een kegelsnede; en de rest alleen als men een nog gecompliceerdere (kromme) lijn gebruikt. Maar ik verbaas me erover dat zij niet verschillende graden onderscheiden hebben in die meer gecompliceerde (kromme) lijnen, & ik kan niet begrijpen waarom zij deze (meer gecompliceerde) lijnen "mechanisch" genoemd hebben in plaats van "geometrisch". Want als de reden was dat ze een of andere machine nodig hadden om ze te beschrijven, dan zou men om dezelfde reden de cirkels en de rechte lijnen moeten verwerpen. Immers men kan deze alleen op het papier beschrijven met een passer & en een lineaal, die men ook machines kan noemen. Het komt ook niet omdat de instrumenten die nodig zijn om ze te trekken, en die gecompliceerder zijn dan de lineaal en de passer, niet net zo nauwkeurig zijn. Want om die reden zou men ze (juist) uit de Mechanica moeten verwijderen, waarin men waarde legt op nauwkeurigheid van de werkstukken die tot stand komen. (Men zou ze) niet uit de Meetkunde (moeten verwijderen), waar men alleen de juistheid van de redenering zoekt, & die [p. 316] zonder twijfel voor deze (kromme) lijnen even perfect kan zijn als voor de andere (d.w.z. lijnen en cirkels). ...

... Maar het volgende schijnt mij zeer helder te zijn: Als we als Meetkundig aannemen wat precies en exact is, en als Mechanisch wat dat niet is, en als we de Meetkunde opvatten als een wetenschap die algemeen onderwijst het kennen van de afmetingen van alle lichamen, dan mag men meer gecompliceerde lijnen net zo min uitsluiten als eenvoudige lijnen, op voorwaarde dat men zich (die meer gecompliceerde lijnen) kan voorstellen als beschreven door een continue beweging, of door verschillende continue bewegingen die elkaar opvolgen en waarvan de latere geheel bepaald worden door degenen die eraan vooraf gaan. Want op deze manier kan men altijd een precieze kennis van hun afmeting hebben.

...

Descartes behandelt nu eerst allerlei instrumenten en dan het eenvoudigste geval van het probleem van de locus van 3 en 4 lijnen *van Pappus*

Maar het is nu in het bijzonder nodig dat ik de gezochte (kromme) lijn [p. 324]
bepaal, en de manier geef om haar te vinden, in alle gevallen wanneer er slechts 3 of 4 rechte lijnen (in het locus-probleem) gegeven zijn, & men zal hierdoor [p. 325]
zien dat de eerste soort[1] van kromme lijnen alleen de drie kegelsneden en de cirkel bevat.

Laten we de 4 (rechte) lijnen $AB, AD, EF, \& GH$ herhalen die hiervoor gegeven waren, en laat gevraagd zijn een andere (kromme) lijn te vinden, waarop een oneindigheid van punten zoals C liggen, zodat wanneer 4 lijnen $CB, CD, CF, \& CH$ onder gegeven hoeken getrokken zijn, CB vermenigvuldigd met CF een totaal (d.w.z. product) produceert dat gelijk aan CD vermenigvuldigd met CH.

Dat wil zeggen, nadat we $CB \propto y$, $CD \propto \frac{czy+bcx}{zz}$, $CF \propto \frac{ezy+dek+dex}{zz}$ & $CH \propto \frac{gzy+fgl-fgx}{zz}$ gesteld hebben, is de vergelijking

$$yy \propto \frac{\left.\begin{array}{l} -dekzz \\ +cfglz \end{array}\right\} y \; \left.\begin{array}{l} -dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{array}\right\} y \; \left.\begin{array}{l} +bcfglx \\ -bcfgxx \end{array}\right\}}{ezzz-cgzz},$$ [p. 326]

tenminste als we ez groter dan eg veronderstellen. Want als hij minder is, moeten we alle tekens $+$ en $-$ verwisselen. En als de grootheid y nul zou zijn, of minder dan niets in deze vergelijking, wanneer men het punt C in de hoek DAG veronderstelt, dan zou men het ook in de hoek DAE moeten veronderstellen, of EAR of RAG, en de tekens[2] veranderen zoals daarvoor noodzakelijk is. En als de waarde van y nul zou zijn in al deze 4 posities, zou het probleem onmogelijk zijn in het gestelde geval. Maar laten we het hier mogelijk veronderstellen, & om de termen ervan af te korten, laten we in plaats van de grootheden $\frac{cfglz-dekzz}{ez^3-cgzz}$ schrijven $2m$, & in plaats van $\frac{dezz+cfgz-bcgz}{ez^3-cgzz}$ schrijven $\frac{2n}{z}$; & zo zullen we hebben

$yy \propto 2my - \frac{2n}{z}xy \; \frac{+bcfglx-bcfgxx}{ez^3-cgzz}$, waarvan de wortel is

$y \propto m - \frac{nx}{2} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} \; \frac{+bcfglz-bcfgxx}{ez^3-cgzz}}$.

Opnieuw, om af te korten, in plaats van $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3-cgzz}$ schrijven we o,

[1] Descartes heeft eerder een klassificatie van krommen gegeven naar de graad van hun vergelijkingen. De eerste soort zijn de krommen met vergelijkingen tot graad 2.

[2] Drukfout: *lignes* moet zijn *signes*.

& in plaats van[3] $\frac{nn}{zz}\ \frac{-bcfg}{ez^3-cgzz}$ schrijven we $\frac{p}{m}$, want omdat die grootheden alle gegeven zijn, kunnen we ze noemen zoals we willen.

& zo hebben we

$y \supset\!\!\circ\ m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$, die de lengte van de lijn BC moet zijn, als we AB, oftewel x, onbepaald laten. En het is duidelijk dat als [p. 327]
het probleem slechts voor drie of vier lijnen gesteld wordt, men altijd zulke termen kan hebben, behalve dat sommigen ervan nul kunnen zijn, & dat de tekens $+$ en $-$ op verschillende manieren kunnen worden veranderd.

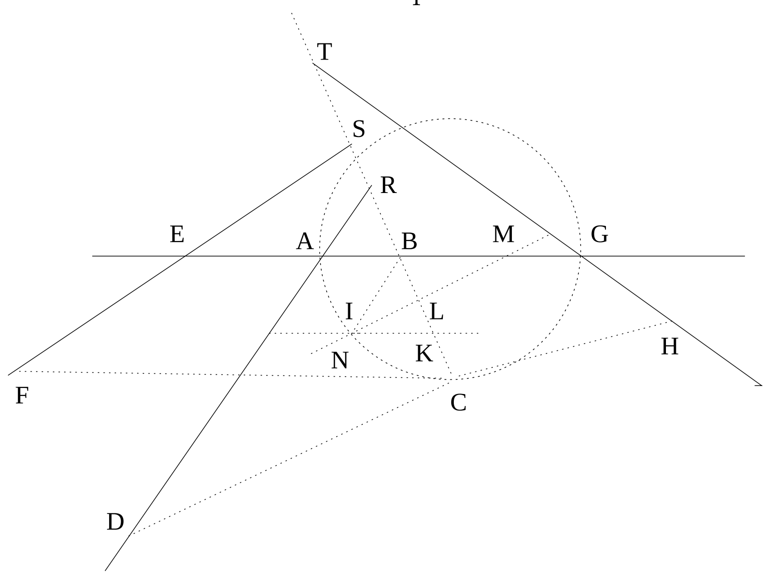
Daarna maak ik KI gelijk en evenwijdig aan BA, zodat zij van BC het gedeelte BK gelijk aan m afsnijdt, omdat ik hier $+m$ heb; & ik had hem eraf gehaald door de lijn IK aan de andere kant (te trekken), als ik $-m$ had gehad; & ik had hem helemaal niet getrokken als m nul was geweest. Daarna trek ik ook IL zodat dat de lijn IK staat tot KL als Z tot n, dat wil zeggen dat omdat IK is x, KL is $\frac{n}{z}x$. En op deze manier ken ik ook de verhouding tussen KL en IL, die ik stel (de verhouding) tussen n en a, zodat omdat KL [p. 328]
is $\frac{n}{z}x$, IL is $\frac{a}{z}x$. En ik maak dat het punt K tussen L & C ligt, omdat ik hier $-\frac{n}{z}x$ heb; terwijl ik L tussen K & C gezet zou hebben als ik $+\frac{n}{z}x$ gehad zou hebben; & ik had die lijn helemaal niet getrokken als $\frac{n}{z}x$ nul geweest was.

Nu dit gedaan is, blijven er voor mij voor de lijn LC alleen deze termen over: $LC \supset\!\!\circ \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. Waaruit ik zie, dat als ze nul zijn, dit punt C zich op de rechte lijn IL bevindt; & als ze zodanig zijn dat de wortel eruit getrokken kan worden, dat wil zeggen dat mm & $\frac{p}{m}xx$ met hetzelfde teken $+$ of $-$ gemarkeerd zijn en oo gelijk is aan $4pm$, ofwel dat de termen mm & ox, of ox & $\frac{p}{m}xx$ nul zijn, dit punt C zich op een andere rechte lijn zal bevinden die niet moeilijker te vinden zal zijn dan IL. Maar wanneer dit niet zo is, is dit punt C alleen op één van de drie kegelsneden of op een cirkel, waarvan een van de middellijnen de lijn IL is, & de lijn LC is een van de ordinaten voor die middellijn; of LC is evenwijdig aan een middellijn, waarvoor het (segment?) in IL een ordinaat is.[4] Dat wil zeggen dat, als de term $\frac{p}{m}xx$ nul is, deze kegelsnede een parabool is, & als hij gemarkeerd is met het teken $+$ is het een Hyperbool, en tenslotte als hij met met teken $-$ gemarkeerd is, is het een Ellips. Alleen behalve wanneer de grootheid aam gelijk is aan pzz en de hoek ILC recht is, dan heeft men een cirkel in plaats van een Ellips. [p. 329]
En dat, als deze snede een Parabool is, is zijn "rechte zijde" gelijk aan $\frac{oz}{a}$,

[3]Drukfout in de tekst: $\frac{nn}{zz}\ \frac{-bcfg}{e^3-cgzz}$

[4]Deze termen horen tot de leer van kegelsneden van Apollonius.

en zijn middellijn altijd in de lijn IL. & om het punt N te vinden, die de top is, moet men IN gelijk aan $\frac{amm}{oz}$ maken, & dat het punt I is tussen L & N als de termen zijn $+mm+ox$, ofwel dat het punt L is tussen I & N, als ze $+mm-ox$ zijn, ofwel N moet tussen I & l zijn als het $-mm+ox$ zou zijn. Maar men kan nooit $-mm$ hebben op de manier waarop de termen hier gesteld zijn. Tenslotte is het punt N hetzelfde als het punt I als de grootheid mm nul is. Hiermee is het gemakkelijk de Parabool te vinden door het 1e Probleem van het 1e Boek van Apollonius. [p. 330]



... ... [p. 333]

En als men alle gegeven grootheden in getallen wil uitdrukken, en bijvoorbeeld maakt $EA \propto 3$, $AG \propto 5$, $AB \propto BR$, $BS \propto \frac{1}{2}BE$, $GB \propto BT$, $CD \propto \frac{3}{2}CR$, $CF \propto 2CS$, $CH \propto \frac{2}{3}CT$, & dat hoek ABR 60 graden is, en tenslotte dat de rechthoek van de twee CB, & CF gelijk moet zijn aan de rechthoek van de twee anderen CD, & CH, want je moet alle dingen hebben opdat het probleem helemaal bepaald is. Met dit alles, als men $AB \propto x$ stelt en $CB \propto y$, vindt men op de manier die hierboven uitgelegd is

$yy \propto 2y - xy + 5x - xx$ & $y \propto 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$; Omdat $BK = 1$ & KL de helft van KI moet zijn, en omdat de hoek IKL of ABR 60 graden is, & KIL, die de helft van KIB of IKL, 30 (graden) is, is ILK recht. En omdat IK of AB x genoemd is, KL is $\frac{1}{2}x$, & IL is $x\sqrt{\frac{3}{4}}$, & de grootheid die daarna z genoemd was, is 1, degene die a was, is $\sqrt{\frac{3}{4}}$, degene die m was is 1, degene die o was is 4, & degene die p was is $\frac{3}{4}$, zodat men heeft $\sqrt{\frac{16}{3}}$

voor IM, & $\sqrt{\frac{19}{3}}$ voor NM, en omdat aam die $\frac{3}{4}$ is, hier gelijk is dan pzz, [p. 334]
en hoek ILC recht is, vindt men dat de kromme NC een cirkel is. En men kan gemakkelijk alle andere gevallen op dezelfde manier onderzoeken.

...

Wanneer het probleem uit de oudheid wordt gesteld voor vijf lijnen, die alle evenwijdig zijn, is het duidelijk dat het gezochte punt altijd op een rechte lijn zal liggen. Maar als het gesteld wordt voor vijf lijnen, waarvan vier evenwijdig zijn, & en de vijfde deze loodrecht snijdt, & en zodat alle lijnen door het gezochte punt ze ook in rechte hoeken ontmoeten, & tenslotte zodat [p. 336]
het parallelepipedum samengesteld uit drie van de lijnen, getrokken naar drie van de evenwijdige lijnen, gelijk is aan het parallelepipedum samengesteld uit twee van de getrokken lijnen, namelijk de ene naar de vierde evenwijdige lijn, en de andere naar de lijn die al die (vier) lijnen loodrecht snijdt, - hetgeen het eenvoudigste geval is dat men zich na het voorgaande[5] kan voorstellen, - zal het gezochte punt op een kromme lijn liggen die beschreven wordt door de beweging van een parabool, op de manier die hieronder wordt uitgelegd. [p. 337]

Laten bijvoorbeeld de gegeven [6] lijnen $AB, IH, ED, GF \& GA$ zijn, & dat men het punt C vraagt, zodanig dat als we $CB, CF, CD, CH \& CM$ trekken loodrecht op de gegeven lijnen, het parallelepipedum van de drie $CF, CD, \& CH$ gelijk is aan dat van de 2 anderen $CB \& CM$, & een derde, laat die AI zijn. Ik stel $CB \propto y$. CM x. AI. ofwel AE, ofwel GE a, zodat, als het punt C tussen de lijnen AB en DE is, 'k heb $CF \propto 2a - y$, $CD \propto a - y$, & $CH \propto y + a$. & als ik die drie met elkaar vermenigvuldig heb'k $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$ gelijk aan het product van de drie anderen, dat axy is. Daarna beschouw ik de kromme lijn CEG, die ik mij voorstel beschreven te zijn door de doorsnijding van de parabool CKN, die men laat bewegen op zo'n manier dat zijn middellijn (d.w.z. as) KL altijd op de rechte lijn AB is, & de lineaal GL die om het punt G draait op zo'n manier dat hij in het vlak van de parabool altijd door het punt L gaat. En ik maak $KL \propto a$, & de voornaamste parameter[7] dat is degene die betrekking heeft op de as van die parabool, ook gelijk aan $4a$, & $GA \propto 2a$, & CB oftewel $MA \propto y$, &

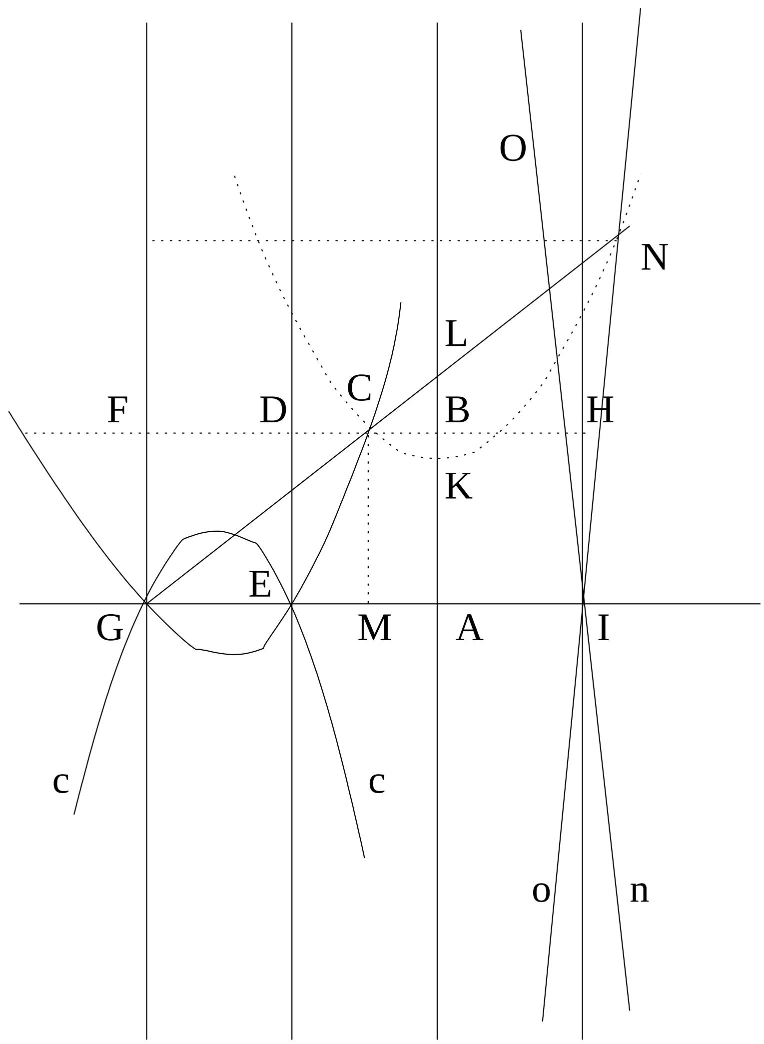
[5]Dit is het geval waarbij de vijf lijnen evenwijdig zijn.

[6]Drukfout: er staat "gezochte".

[7]Letterlijk: rechte zijde; Dit is de grootheid uit de theorie van kegelsneden van Apollonius, die overeenkomt met p in de moderne vergelijking van de parabool $y^2 = px$ in een rechthoekig coördinatensysteem.

CM oftewel $AB \propto x$. Dan, vanwege de gelijkvormige driehoeken GMC & CBL, staat GM, die $2a - y$ is, tot MC, die x is, als CB, die y is, tot BL, die daarom $\frac{xy}{2a-y}$ is. En omdat LK a is, is BK $a\frac{-xy}{2a-y}$, oftewel $\frac{2aa-ay-xy}{2a-y}$. En omdat diezelfde BK, een segment van de middellijn van de Parabool, staat tot de ordinaat[8] BC, als die (BC) tot de rechte zijde a, laat de berekening zien dat $y^3 - 2ayy - aay + 2a$ gelijk is aan axy. & daarom is het punt C [p. 338] het punt dat gevraagd is. En het kan op elke willekeurige plaats op de lijn CEG gekozen worden, of ook op zijn toegevoegde (kromme) $cEGc$ die op dezelfde manier beschreven wordt behalve dat de top van de parabool naar de andere kant gericht is, en tenslotte ook op hun tegengestelden NIo, nIO die beschreven worden door de doorsnijding van de lijn GL met de andere kant van de parabool KN.

[8] Letterlijk: die aan hem geordend is aangepast



. . . [p. 413]

Ik hoop dat het nageslacht mij dankbaar zal zijn, niet alleen voor de dingen die ik hier heb uitgelegd, maar ook voor de dingen die ik met opzet heb weggelaten om hen het plezier te gunnen ze zelf uit te vinden.