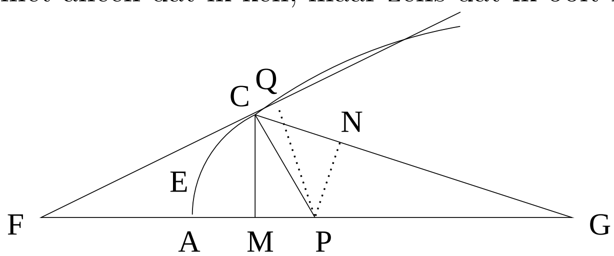
Vertaling van een deel van Boek 2 van de Géométrie *van Descartes over normalen.*

[p. 342]

...

En ik durf te zeggen dat dit het het nuttigste en het algemeenste probleem is, niet alleen dat ik ken, maar zelfs dat ik ooit heb willen kennen.

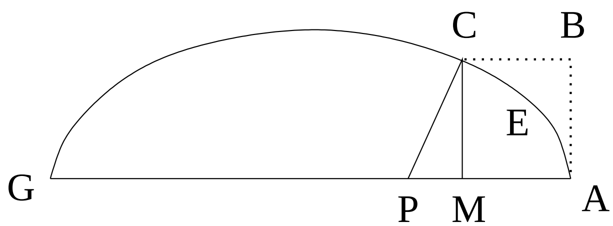
Algemene manier om rechte lijnen te vinden die gegeven lijnen, of hun raaklijnen, in rechte hoeken snijden.



Laat CE de kromme lijn zijn, & we nemen aan dat er een rechte lijn door het punt C getrokken moet worden, die met haar rechte hoeken maakt. Ik neem aan dat dit al gedaan is, & dat de gezochte lijn CP is, die ik verleng tot het punt P waar zij de rechte lijn GA ontmoet, die ik veronderstel de lijn te zijn tot de punten waarvan men alle (punten) van de lijn CE betrekt.[1] Dus als we MA of $CB \propto y$ maken, & CM of $BA \propto x$, heb'k een of andere vergelijking, die de betrekking tussen x en y uitdrukt. Dan maak ik $PC \propto s$, & $PA \propto v$, ofwel $PM \propto v - -y$. & door de rechthoekige driehoek PMC heb'k ss, dat is het kwadraat van de basis, gelijk aan $xx + vv - -2vy + yy$, de kwadraten van de twee zijden. Dat wil zeggen, ik heb $x \propto \sqrt{ss - -vv + 2vy - -yy}$, ofwel $y \propto v + \sqrt{ss - -xx}$, & door middel van deze vergelijking, verwijder ik uit de andere vergelijking die de relatie tussen alle punten van de kromme C met de punten van de rechte GA uitdrukt, een van de onbepaalde grootheden x of y. Dat is gemakkelijk te doen door overal $\sqrt{ss - -vv + 2vy - -yy}$ te zetten in plaats van x, & het kwadraat van die som in plaats van xx, & zijn kubus in plaats van x^3, & en zo de anderen, als het x is die ik wil verwijderen, ofwel als dit y is, door in zijn plaats $x + \sqrt{ss - -xx}$, & het kwadraat, of de kubus, enz. van die som in plaats van yy of y^3 enz. Zodat er daarna altijd een vergelijking overblijft waarin niet meer dan één onbepaalde grootheid voorkomt, x of y. [p. 343]

Zoals wanneer CE een Ellips is, & als MA het segment van zijn diameter is waarop CM geordend getrokken is, & die r als rechte zijde heeft, & q als transverse, dan heeft men door stl. 13 van bk. 1 van Apollonius

[1] Denk hierbij aan een moderne coördinaatas.



$xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$, waaruit, als xx wordt verwijderd, overblijft $ss - -vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q}yy$, ofwel
$yy\frac{+qry--2qvy+qvv--qss}{q--r}$ gelijk aan niets. Want het is op deze plaats beter om zo de hele som samen te nemen, dan één deel gelijk aan het andere te maken.

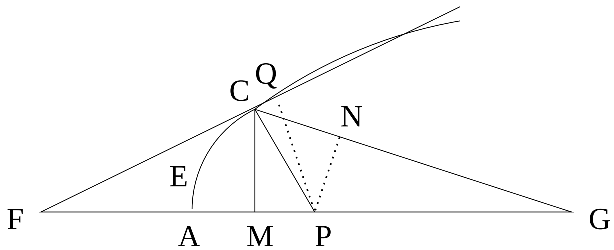
. . .[2] . . . [p. 344]

Zelfs ook, als de punten van de kromme lijn niet op de manier die ik gezegd heb in betrekking staan met de (punten) op een rechte lijn, maar op enig andere (manier) die men zich zou kunnen voorstellen, kan men nog steeds zo'n vergelijking hebben. Zoals wanneer CE een lijn is, die een zodanige betrekking heeft tot de drie punten F, G, A dat de rechte lijnen die van elk van die punten, zoals C, naar F getrokken zijn, groter zijn dan lijn FA met (als verschil) een grootheid, die een zekere gegeven proportie heeft tot een andere grootheid waarmee GA groter is dan de lijnen die van dezelfde punten naar G getrokken worden. Laten we $GA \propto b$, $AF \propto c$, & het punt C op de kromme naar keuze nemen, en (laten we aannemen) dat de grootheid waarmee CF groter is dan FA is tot de grootheid waarmee GA groter is dan GC als d tot e, zodat als die grootheid,[3] die onbepaald is, z heet, FC $c + z$ is, & GC $b - -\frac{e}{d}z$ is. Dan als we $MA \propto y$ stellen, is GM $b - -y$, & FM is $c + y$, & door de rechthoekige driehoek CMG, als we het vierkant van GM afhalen van het vierkant van GC, hebben we het vierkant van CM [p. 345] die is $\frac{ee}{dd}zz - -\frac{2be}{d}z + 2by - -yy$. Dan, als we het vierkant van FM van het vierkant van FC afhalen, hebben we ook het vierkant van CM in andere termen, te weten $zz + 2cz - -2cy - -yy$, en omdat die termen zijn gelijk aan de voorgaande, laten ze y kennen, of MA, die is $\frac{ddzz+2cddz--eezz+2bdez}{2bdd+2cdd}$,
& a;s we die som substitueren in plaats van y in het vierkant van CM, vinden we dat hij uitgedrukt kan worden in deze termen:

$\frac{bddzz+ceezz+2bcddz--2bcdez}{bdd+cdd} - -yy$.

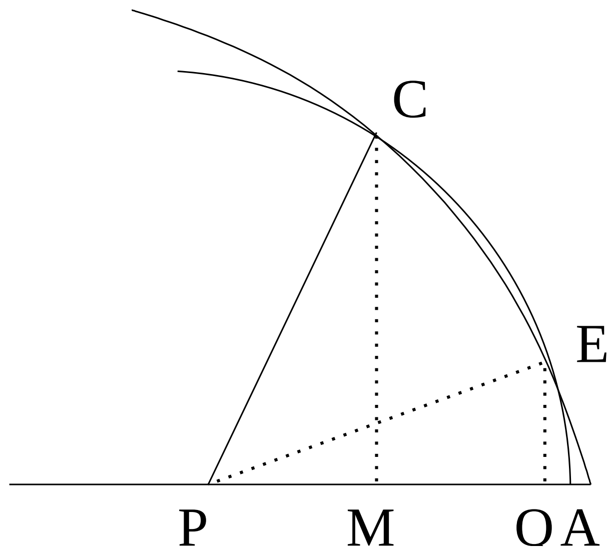
[2] Descartes behandelt nu eerst een ingewikkelder kromme die hij al eerder heeft ingevoerd.

[3] Descartes bedoelt $CF - FA$.



Als we dan veronderstellen dat de rechte lijn PC de kromme in rechte hoeken ontmoet in het punt C, & als we $PC \propto s$ maken en $PA \propto v$ als voorheen, dan is PM $v - -y$, & en door de rechthoekige driehoek PCM heeft men $ss - -vv + 2vy - -yy$ voor het vierkant van CM. Nadat we in plaats van y de som gesubstitueerd hebben die aan hem gelijk is, komt er $zz \frac{+2bcddz--2bcdez--2cddvz--2bdevz--bddss+bddvv--cddss+cddvv}{bdd+cee+eev--ddv} \propto 0$ als vergelijking die we zochten.

Welnu, nadat men zo'n vergelijking gevonden heeft: in plaats van hem te gebruiken om de grootheden x, of y of z te kennen die al gegeven zijn, omdat immers het punt C gegeven is, moet men haar gebruiken om v of s te vinden, die het punt P bepalen dat gevraagd is. Daartoe moet men opmerken dat als het punt P is zoals we het willen, dan de cirkel waarvan het het middelpunt is & die door C gaat, de kromme lijn CE daar zal raken zonder haar te snijden; maar als dat punt P iets dichterbij of iets verderweg van het punt A is, dan het (eigenlijk) moet zijn, deze cirkel de kromme zal snijden, [p. 346]
niet alleen in het punt C maar ook noodzakelijkerwijs in een ander (punt). Daarna moeten we ook opmerken, dat wanneer die cirkel de lijn CE snijdt, de vergelijking waardoor men de x of y of een andere soortgelijke grootheid zoekt, noodzakelijkerwijs twee wortels moet hebben, die ongelijk zijn. Want bijvoorbeeld, als deze cirkel de kromme in punten C & E snijdt, als EQ envenwijdig aan CM getrokken is, dan zullen de namen van de onbepaalde grootheden x en y evengoed bij de lijnen EQ & QA passen als bij CM & MA; verder is PE gelijk aan PC vanwege de cirkel.

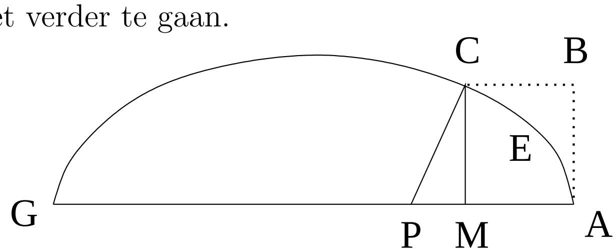


Dus als we de lijnen EQ & QA zoeken met behulp van PE & PA die men als gegeven beschouwt, hebben we dezelfde vergelijking als wanneer we CM & MA zouden zoeken met behulp van PC, PA. Daaruit volgt duidelijk dat de waarde van x of van y, of van elke andere grootheid die we verondersteld hebben, in die vergelijking dubbel zal zijn. Dat wil zeggen dat er twee ongelijke wortels zullen zijn, & de ene daarvan zal CM zijn en de andere EQ als we x zoeken; ofwel de ene zal MA zijn en de andere QA als we y zoeken, en zo ook in de andere gevallen. Het is waar dat als punt E niet aan dezelfde kant van de kromme ligt als punt C, er maar één van deze wortels waar is, en de andere zal omgekeerd zijn, ofwel minder dan niets; maar hoe dichter die twee punten C & E bij elkaar liggen, des te minder verschil zal er tussen die twee wortels zijn; en uiteindelijk zijn de wortels [p. 347]
de helemaal gelijk, als de punten in één verenigd zijn; dat wil zeggen als de cirkel die door C gaat, de kromme raakt zonder hem te snijden.

Verder moeten we opmerken dat als er twee gelijke wortels in één vergelijking zijn, die noodzakelijkerwijs dezelfde vorm moet hebben als wanneer men de grootheid die men veronderstelt onbekend te zijn minus de bekende grootheid die aan hem gelijk is, vermenigvuldigt met zichzelf; & dat daarna, als deze laatste som niet zovel dimensies heeft als de voorgaande, men hem vermenigvuldigt met een andere som die zoveel (dimensies) heeft als aan (de eerdere som) ontbreken, zodat er apart gelijkheid tussen elk van de termen van de ene en elk van de termen van de andere kan zijn.

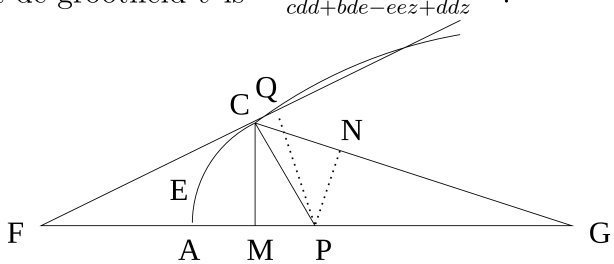
Zoals bijvoorbeeld, ik zeg dat de eerste vergelijking die hierboven gevon-

den is, te weten $yy\frac{+qry--2qvy+qvv--qss}{q--r}$ dezelfde vorm moet hebben als die van het product als we e gelijk aan y maken, & $y--e$ met elkaar vermenigvuldigen, waaruit komt $yy--2ey+ee$, zodat we ieder van hun termen afzonderlijk met elkaar kunnen vergelijken, & zeggen dat: omdat de eerste, die yy is, precies dezelfde in beide is, is de tweede in de ene, $\frac{qry--2qvy}{q--r}$ gelijk aan de tweede in de andere, die is $--2ey$. Hieruit, als we de grootheid v zoeken die de lijn PA is, hebben we $v \propto e--\frac{r}{q}e+\frac{1}{2}r$. Omdat we e gelijk aan y hebben verondersteld, hebben we $v \propto y--\frac{r}{q}y+\frac{1}{2}r$. En zo zouden we [p. 348]
s kunnen vinden door de derde term $ee \propto \frac{qvv--qss}{q--r}$ maar omdat de grootheid v het punt P voldoende bepaalt, dat het enige is dat we zoeken, hoeven we niet verder te gaan.



. . . . . . [p. 349]

En zo ook de derde vergelijking, die is [p. 350]
$zz\frac{+2bcddz--2bcdez--2cddvz--2bdevz--bddss+bddvv--cddss+cddvv}{bdd+cee+eev--ddv}$, heeft dezelfde vorm als $zz--2fz+ff$, als we f gelijk stellen aan z, zodat er weer gelijkheid is tussen $--2f$, ofwel $--2z$, & $\frac{+2bcdd--2bcde--2cddv--2bdev}{bdd+cee+eev--ddv}$, waaruit men weet dat de grootheid v is $\frac{bcdd--bcde+bddz+ceez}{cdd+bde-eez+ddz}$.



Daarom, als we de lijn AP samenstellen uit die som die gelijk is aan v en waarvan alle grootheden bekend zijn, & als we van het punt P dat zo gevonden is, een rechte lijn naar C trekken, zal deze de kromme CE daar in rechte hoeken snijden, hetgeen is dat we moesten doen. En ik zie geen beletsel om dit probleem op dezelfde manier uit te breiden tot alle gekromde lijnen die onder enige Geometrische berekening(smethode) vallen.

Mogelijke opgaven:

1. Hoe zou je modern een normaal trekken in een punt C aan een voldoende nette kromme $y = f(x)$?

2. Kijk of je het verhaal over de ellips [p. 342-343] begrijpt. De technische termen uit Apollonius zijn niet belangrijk; je kunt ze (anachronistisch) opvatten als namen voor constanten r en q. Je kunt er dan vanuit gaan dat de ellips de aangegeven vergelijking in y en x heeft. Welke grootheden zou je als constant (of: gegeven) kunnen opvatten, welke als variabel?

3. Bekijk nu de derde kromme [p. 344-345]. Ga na of je het verhaal over de vergelijking begrijpt, en schets de kromme.

4. Probeer het principe van de normalenmethode [pp. 345-347] te begrijpen en zoveel mogelijk in moderne termen uit te drukken. Als je hierin vastloopt, ga dan eerst verder met vraag 5.

5. Bestudeer de verdere behandeling van de ellips [pp. 347-348]. Ga na dat de formule die Descartes krijgt voor de ellips ook afgeleid kan worden met de moderne formule voor een raaklijn.

6. Zelfde vraag voor de derde kromme [pp. 349-350].