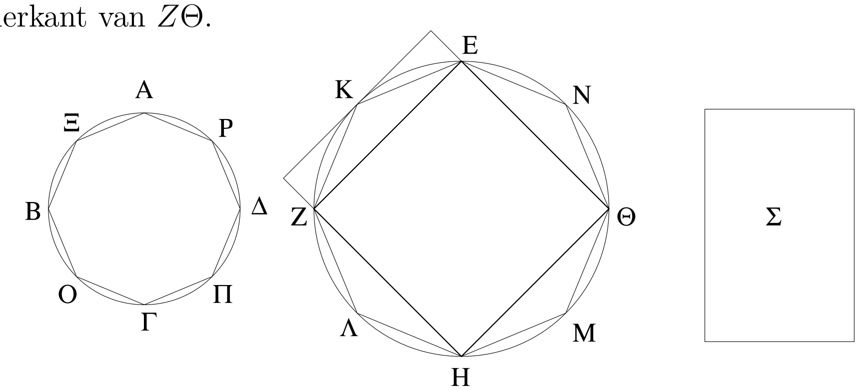
Euclides, *Elementen*, Boek 12, propositie 2

2. Cirkels staan tot elkaar als de vierkanten van de middellijnen.

Laten $AB\Gamma\Delta, EZH\Theta$ cirkels zijn met middellijnen $B\Delta, Z\Theta$. Ik zeg, dat zoals cirkel $AB\Gamma\Delta$ is tot cirkel $EZH\Theta$, zo is het vierkant van $B\Delta$ tot het vierkant van $Z\Theta$.



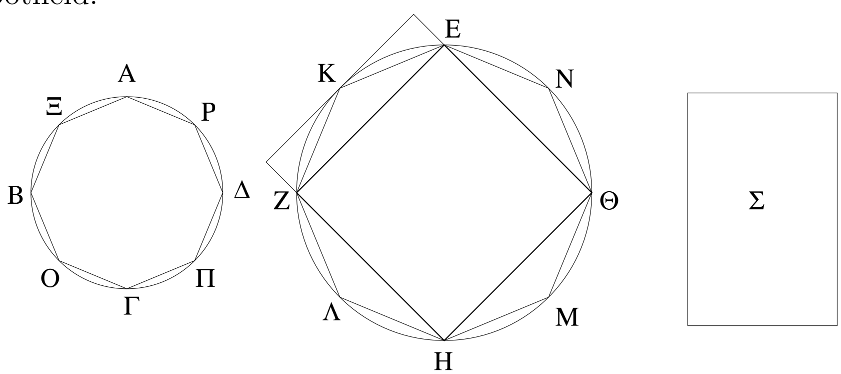
Want als het niet (waar) is dat zoals cirkel $AB\Gamma\Delta$ is tot cirkel $EZH\Theta$, zo is het vierkant van $B\Delta$ tot het vierkant van $Z\Theta$, dan geldt: zoals het vierkant van $B\Delta$ is tot het vierkant van $Z\Theta$, zo is cirkel $AB\Gamma\Delta$ tot een of andere oppervlakte die kleiner of groter is dan cirkel $EZH\Theta$; stel eerst tot een kleinere (oppervlakte) Σ (d.w.z. kleiner dan $EZH\Theta$).

Laat in cirkel $EZH\Theta$ vierkant $EZH\Theta$ ingeschreven zijn. Dan is het ingeschreven vierkant groter dan de helft van cirkel $EZH\Theta$ omdat, als we door E, Z, H, Θ raaklijnen aan de cirkel trekken, vierkant $EZH\Theta$ de helft is van het vierkant dat om de cirkel geschreven is, terwijl de cirkel kleiner is dan het omgeschreven vierkant. Dus is het ingeschreven vierkant groter dan de helft van cirkel $EZH\Theta$.

Laat de bogen $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ in helften gesneden zijn in de punten K, Λ, M, N, en laten $EK, KZ, Z\Lambda, \Lambda H, HM, M\Theta, \Theta N, NE$ verbonden zijn.

Ook elk van de driehoeken $EKZ, Z\Lambda H, HM\Theta, \Theta NE$ is groter dan de helft van het cirkelsegment eromheen, omdat als we door punten K, Λ, M, N raaklijnen aan de cirkel trekken, en de parallelogrammen op $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ voltooien, elk van de driehoeken $EKZ, Z\Lambda H, HM\Theta, \Theta NE$ de helft is van het parallelogram eromheen, maar het (cirkel)segment eromheen is minder dan het parallelogram. Dus elk van de driehoeken $EKZ, Z\Lambda H, HM\Theta, \Theta NE$ is groter dan de helft van het cirkelsegment eromheen.

Als we de overgebleven boogjes in helften snijden, en de rechten verbinden, en daarmee steeds doorgaan, zullen we bepaalde segmenten van de cirkel overhouden die (samen) kleiner zijn dan het overschot, waarmee cirkel $EHZ\Theta$ over het oppervlak Σ overschiet. Want er is in de eerste stelling van het tiende boek (van de *Elementen*) bewezen, dat wanneer twee ongelijke grootheden vastgelegd worden, en wanneer van de grootste meer dan de helft wordt weggenomen, en van de rest meer dan de helft, en dit altijd doorgaat, een of andere grootheid zal overblijven die kleiner is dan de vastgelegde kleinere grootheid.



Laat die dus overgebleven zijn, en laat de segmenten op EK, KZ, $Z\Lambda$, ΛH, HM, $M\Theta$, ΘN, NE van cirkel $EZH\Theta$ kleiner zijn dan het overschot van cirkel $EZH\Theta$ over oppervlak Σ. Dan is de resterende veelhoek $EKZ\Lambda HM\Theta N$ groter dan het oppervlak Σ. En laat in cirkel $AB\Gamma\Delta$ de veelhoek $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$ ingeschreven zijn, gelijkvormig aan de veelhoek $EKZ\Lambda HM\Theta N$. Dan geldt: zoals het vierkant van $B\Delta$ is tot het vierkant van $Z\Theta$, zo is veelhoek $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$ tot veelhoek $EKZ\Lambda HM\Theta N$.[1] Maar zoals het vierkant van $B\Delta$ is tot het vierkant van $Z\Theta$, zo is cirkel $AB\Gamma\Delta$ tot oppervlak Σ, en zoals cirkel $AB\Gamma\Delta$ is tot oppervlak Σ, zo is veelhoek $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$ tot veelhoek $EKZ\Lambda HM\Theta N$. Maar cirkel $AB\Gamma\Delta$ is groter dan de veelhoek die erin beschreven is. Dus oppervlak Σ is groter dan veelhoek $EKZ\Lambda HM\Theta N$. Maar hij is ook kleiner, hetgeen onmogelijk is.

Dus geldt niet: zoals het vierkant van $B\Delta$ is tot het vierkant van $Z\Theta$, zo is cirkel $AB\Gamma\Delta$ tot een of andere oppervlakte kleiner dan cirkel $EZH\Theta$. Op dezelfde manier tonen we aan, dat ook niet geldt: zoals het vierkant van $Z\Theta$ is tot het vierkant van $B\Delta$, zo is cirkel $EZH\Theta$ tot een of andere oppervlakte kleiner dan cirkel $AB\Gamma\Delta$,

[1] Dit is bewezen in Boek 12, propositie 1. Verder gebruikt Euclides ook stellingen over verhoudingen die hij bewezen heeft in het (moeilijke!) Boek 5.

Ik zeg dus, dat niet geldt: zoals het vierkant van $B\Delta$ is tot het vierkant van $Z\Theta$, zo is cirkel $AB\Gamma\Delta$ tot een of andere oppervlakte groter dan cirkel $EZH\Theta$. Want als dit mogelijk is, laat (deze verhouding zijn van $AB\Gamma\Delta$ tot) de grotere oppervlakte Σ. Door te inverteren[2] geldt: zoals het vierkant van $Z\Theta$ is tot het vierkant van $B\Delta$, zo is oppervlakte Σ tot cirkel $AB\Gamma\Delta$, Maar zoals oppervlakte Σ is tot cirkel $AB\Gamma\Delta$, zo is cirkel $EZH\Theta$ tot een of andere oppervlakte kleiner dan cirkel $AB\Gamma\Delta$, en dus zoals het vierkant van $Z\Theta$ is tot het vierkant van $B\Delta$, zo is cirkel $EZH\Theta$ tot een of andere oppervlakte kleiner dan cirkel $AB\Gamma\Delta$. Waarvan bewezen is dat het onmogelijk is. Dus geldt niet: zoals het vierkant van $B\Delta$ is tot het vierkant van $Z\Theta$, zo is cirkel $AB\Gamma\Delta$ tot een of andere oppervlakte groter dan cirkel $EZH\Theta$. Maar er is bewezen dat het ook niet is: tot een oppervlakte kleiner dan cirkel $EZH\Theta$. Dus geldt: zoals het vierkant van $B\Delta$ is tot het vierkant van $Z\Theta$, zo is cirkel $AB\Gamma\Delta$ tot cirkel $EZH\Theta$.

Dus cirkels staan tot elkaar als de vierkanten van de middellijnen. Hetgeen bewezen moest worden.

(Hierop volgt nog een lemma dat volgens mij een later toevoegsel is, van hetzelfde allooi als het laatste deel van het bewijs. Ik laat dit lemma daarom weg.)

Bron: E.S. Stamatis, Eukleidou Stereometria: Stoicheioon Biblia XI. XII. XIII, archaion keimenon, metafrasis - epexègèsis*, Athénai 1957, pp. 84, 86. De oudgriekse tekst in deze versie is dezelfde als in de editie van Heiberg.*

Engelse vertaling: T.L. Heath, Euclid: The Thirteen Books of the Elements*, vol. 3, pp. 371-373.*)

Mogelijke opgave:

Schrijf het eerste gedeelte van deze redenering zoveel mogelijk in moderne notatie, met gebruikmaking van reële getallen. Gebruik de notatie V_n voor de oppervlakte van een regelmatige veelhoek met n zijden ingeschreven in cirkel $EZH\Theta$, en noteer het overschot over de oppervlakte van deze cirkel en S als ε.

Euclides gebruikt in zijn bewijs alleen een achthoek. Waarom? Is zijn bewijs wel algemeen?

[2]Het inverteren van een verhouding $a : b$ levert de verhouding $b : a$. In Boek 5 bewijst Euclides dat als $a : b = c : d$ dan ook $b : a = d : c$.