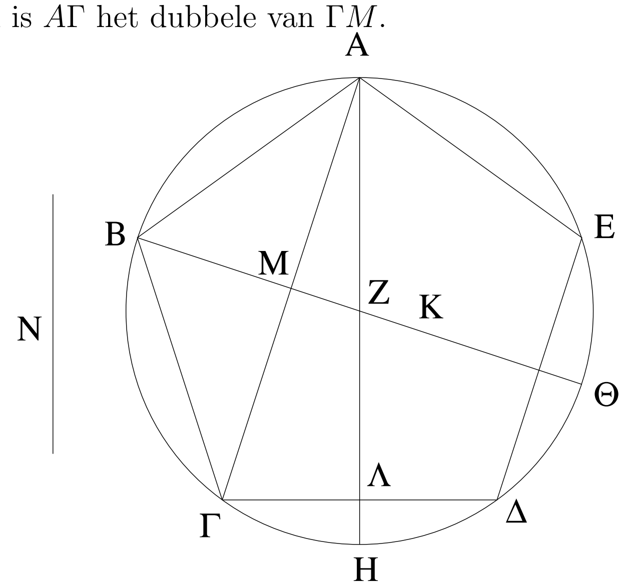
Vertaling van propositie 11 van boek 13 van de *Elementen* van Euclides

11. Als in een cirkel met rationale diameter een gelijkzijdige vijfhoek wordt ingeschreven, dan is de zijde van de vijfhoek het irrationale (segment) dat "minor" heet.

Want laat in de cirkel met diameter $AB\Gamma\Delta E$ met rationale diameter de gelijkzijdige[1] vijfhoek $AB\Gamma\Delta E$ ingeschreven zijn. Ik zeg dat de zijde van de vijfhoek het irrationale (segment) is dat "minor" heet.

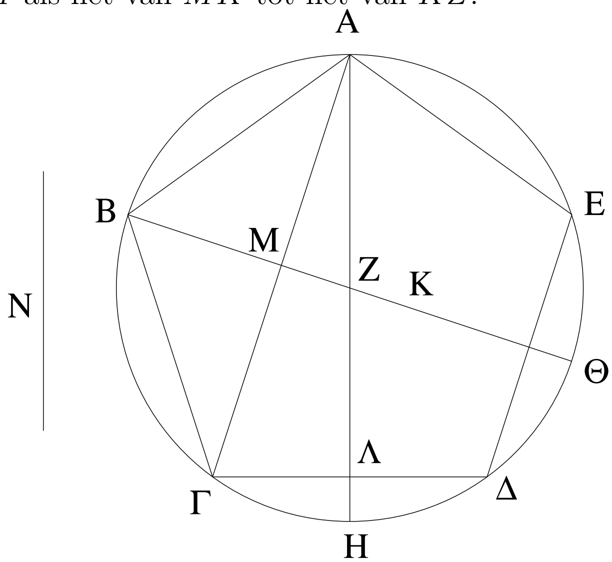
Laat het middelpunt van de cirkel als punt Z genomen zijn. Laten AZ, ZB verbonden zijn en doorgetrokken tot de punten H, Θ, en laat $A\Gamma$ verbonden zijn, en laat het vierde deel van AZ genomen zijn als ZK. Nu is AZ rationaal, dus ZK is rationaal. Maar ook BZ is rationaal, dus is de hele BK rationaal. En omdat de boog $A\Gamma H$ gelijk is aan de boog $A\Delta H$, waarvan $AB\Gamma$ gelijk is aan $AE\Delta$, is de rest ΓH gelijk aan de rest $H\Delta$. En als we $A\Delta$ zullen verbinden, zal blijken dat de hoeken Λ recht zijn, en dat $\Gamma\Delta$ het dubbele is van $\Gamma\Lambda$. Door dezelfde (argumenten) zijn de hoeken bij M recht, en is $A\Gamma$ het dubbele van ΓM.



Omdat hoek $A\Lambda\Gamma$ dus gelijk is aan hoek AMZ, en (hoek) $\Lambda A\Gamma$ gemeenschappelijk is aan de twee driehoeken $A\Gamma\Lambda$ en AMZ, is de resterende hoek $A\Gamma\Lambda$ gelijk aan de resterende hoek MZA. Dus is driehoek $A\Gamma\Lambda$ gelijkhoekig

[1]Omdat deze gelijkzijdige vijfhoek in een cirkel is ingeschreven, is de vijfhoek regelmatig.

met driehoek AMZ. Dus staat $\Lambda\Gamma$ tot ΓA als MZ tot ZA, in (dezelfde) verhouding. En ook het dubbele van de eerste termen: dus staat het dubbele van $\Lambda\Gamma$ tot ΓA als het dubbele van MZ tot ZA. Maar het dubbele van MZ staat tot ZA als MZ tot de helft van ZA. En dus staat het dubbele van $\Lambda\Gamma$ tot ΓA als MZ tot de helft van ZA. En nu de helft van de tweede termen: het dubbele van $\Lambda\Gamma$ staat tot de helft van ΓA als MZ tot een kwart van ZA. En het dubbele van $\Lambda\Gamma$ is $\Delta\Gamma$, de helft van ΓA is ΓM, een kwart van ZA is ZK. Dus staat $\Delta\Gamma$ tot ΓM als MZ tot ZK. Componendo, allebei $\Delta\Gamma M$[2] staat tot ΓM als MK tot KZ. Dus staat het van[3] allebei $\Delta\Gamma M$ tot het van ΓM als het van MK tot het van KZ.



En wanneer een diagonaal van de vijfhoek, zoals $A\Gamma$, verdeeld is in uiterste en middelste reden, is het grootste segment de zijde van de vijfhoek,[4] dat is $\Delta\Gamma$. En dan is het vierkant van het grootste segment samengenomen met de helft van het geheel, gelijk aan vijf maal het vierkant van de helft van het geheel.[5]

En omdat de helft van $A\Gamma$ gelijk is aan ΓM, is het van $\Delta\Gamma M$ als één geheel

[2] Dit is het lijnsegment met lengte de som van $\Delta\Gamma$ en ΓM.

[3] Met “het van” wordt ”het vierkant (d.w.z. kwadraat) van” bedoeld.

[4] D.w.z. wanneer de diagonaal van de vijfhoek is verdeeld volgens de gulden snede is de grootste term de zijde van de vijfhoek. Euclides heeft dit bewezen in Boek 13, propositie 8. Je kunt het zelf inzien met behulp van gelijkvormige driehoeken, als je alle diagonalen van een regelmatige vijfhoek trekt.

[5] Euclides heeft dit bewezen in Boek 13, propositie 1. Je kunt het zelf eenvoudig algebraïsch bewijzen, zie ook de opdracht.

gelijk aan vijf maal het van ΓM. Maar bewezen was dat het van $\Delta\Gamma M$ als één geheel staat tot het van ΓM als het van MK tot het van KZ. Dus is het van MK vijf maal het van KZ. Maar het van KZ is rationaal, want de diameter is rationaal, dus het van MK is rationaal, dus MK is rationaal.

En omdat BZ vier maal ZK is, is BK vijf maal KZ. Dus is het van BK vijf en twintig maal het van KZ, en het van BK is dan vijf maal het van KM. Dus het van BK heeft tot het van KM niet de verhouding van een vierkant getal tot een vierkant getal. Darom zijn BK en KM onmeetbaar in lengte, en ze zijn allebei rationaal. Dus zijn BK en KM rationaal en alleen onderling meetbaar in vierkant. Maar indien een rationaal (segment) van een rationaal (segment) wordt afgenomen zodat ze alleen in vierkant onderling meetbaar zijn met het geheel, is de rest een irrationaal (segment), (namelijk) een "apotoom". Dus MB is een apotoom en MK is "wat erbij past".

Ik zeg nu, dat het een vierde (apotoom) is. Laat wat het vierkant van BK groter is dan het vierkant van KM gelijk zijn aan het vierkant van N. Omdat KZ en ZB onderling meetbaar zijn, zijn ook *componendo* KB en ZB onderling meetbaar. Maar BZ en $B\Theta$ zijn onderling onmeetbaar. Dus zijn ook BK en $B\Theta$ onderling onmeetbaar. Maar omdat het van BK vijf maal het van KM is, heeft het van BK tot het van KM de verhouding van 5 tot één. Als we aftrekken, heeft het van BK tot het van N een verhouding van 5 tot 4, dus niet de verhouding van een vierkant tot een vierkant. Dus is BK onderling onmeetbaar met N. En dus is het vierkant van BK groter dan het vierkant van KM met als verschil het vierkant van een lijn die onmeetbaar is ermee.

Omdat nu dus het vierkant van de hele BK groter is dan het vierkant van KM die "erbij past", met als verschil het vierkant van een lijn die ermee onmeetbaar is, en de hele BK onderling meetbaar is met $B\Theta$ die als rationaal aangenomen was, is MB een vierde apotoom. Maar de rechthoek bevat door een rationaal (segment) en een vierde apotoom is irrationaal, en de zijde van het vierkant gelijk aan die rechthoek is een irrationaal, die "minor" heet. En de (rechthoek) onder ΘBM[6] is gelijk aan het vierkant van AB, want als $A\Theta$ getrokken is, wordt driehoek $AB\Theta$ gelijkhoekig met driehoek ABM, en ΘB staat tot BA als AB tot BM.

Dus is de zijde AB van de zijfhoek een irrationaal (segment) dat "minor"

[6]Dit is de rechthoek waarvan de zijden gelijk zijn aan $ThetaB$ en BM, modern kan men denken aan het product $\Theta B \cdot BM$.

heet. Hetgeen bewezen moest worden.

Werkcollege "rekenen" met irrationale grootheden bij Euclides. Een voorbeeld van een theorie die later uitgestorven is.

1. Lees de tekst van propositie 11 van boek 13 over de regelmatige vijfhoek globaal door, en probeer de meetkundige redeneringen (over congruente driehoeken, verhoudingen enz.) te begrijpen.

Opmerkingen:

* Euclides noemt twee lijnsegmenten onderling meetbaar als ze allebei gehele veelvouden zijn van een derde lijnsegment. Anders heten de lijnsegmenten onderling onmeetbaar.

* Euclides begint met het kiezen van een lijnsegment (hier de diameter) dat hij rationaal noemt. Dit lijkt op (maar is algemener dan) de keuze van een eenheidssegment. Alle andere segmenten worden met dit "rationale" segment vergeleken.

* "minor" is een naam voor een soort irrationale grootheid (we komen hier op terug).

* In een verhouding $a : b$ heet a de eerste term en b de tweede term.

* "Componendo" is de naam van de volgende operatie met verhoudingen:

als $a : b = c : d$ dan $(a + b) : b = (c + d) : d$. Euclides bewijst in Boek 5 dat deze operatie is toegestaan.

* "Verdelen volgens middenste en uiterste reden" betekent: snijden volgens (modern) de gulden snede. Een segment a heet (sinds de 19e eeuw) verdeeld volgens de gulden snede in x en y, als $a = x + y$ en tevens $a : x = x : y$. Je kunt nu zelf x en y uitdrukken in a en afleiden dat $(x + \frac{a}{2})^2 = 5(\frac{a}{2}^2)$.

* Stel r is het beginsegment dat Euclides "rationaal" noemt. Segmenten s met $r^2 : s^2 = k : l$, met k, l natuurlijke getallen noemt hij (in tegenstelling tot het moderne taalgebruik) ook rationaal.

* Een apotoom, en een "vierde apotoom" zijn namen voor een bepaald soort irrationale grootheid in de klassificatie van Euclides in Boek 10 van de *Elementen*. Modern gezien is een apotoom een uitdrukking van de vorm $r\sqrt{k} - r\sqrt{\ell}$ of $rk - r\sqrt{\ell}$ of $r\sqrt{k} - r\ell$, met k, ℓ rationale getallen, en r het rationale beginsegment. De uitdrukking moet niet tot iets eenvoudigers gereduceerd kunnen worden en daarom stellen we in het eerste geval bijvoorbeeld

$k \neq n^2 l$ voor alle rationale getallen n. De (modern gezien) tweede term die eraf getrokken is, heet bij Euclides "wat erbij past".

2. Om propositie 11 van boek 13 in verband te brengen met moderne notaties, stellen we de straal $AZ=r$.

Druk achtereenvolgens uit in r: BZ, KZ, BK, MK, BM, AB.

Je krijgt een uitdrukking van AB als de wortel van een uitdrukking waar al een wortels inzit, namelijk $AB = r\sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{5}}$. Vanuit een modern algebraísch standpunt gezien heeft Euclides' klassificatie van irrationale grootheden te maken met de vraag of we dit soort wortels van wortels "mooier" kunnen schrijven. (Soms kan dat, bijvoorbeeld $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$, en vaak kan dat niet.)

Euclides wil moeilijke segmenten zoals AB graag proberen te schrijven als de som of het verschil van twee segmenten l_1, l_2 die liefst zo eenvoudig mogelijk zijn.

Wanneer geldt $\sqrt{p - a\sqrt{q}} = (l_1 - l_2\sqrt{q})$, dan $p - a\sqrt{q} = l_1^2 + ql_2^2 - 2l_1l_2\sqrt{q}$ en hieruit kunnen we (onder bepaalde aannamen) concluderen $p = l_1^2 + ql_2^2$ en $a = 2l_1l_2$. Je kan dan kandidaten voor l_1 en l_2 vinden met behulp van de formule voor oplossen van kwadratische vergelijkingen.

Nu zijn er twee gevallen:

1. De discriminant is een kwadraat, dan zijn l_1 en l_2 "mooi".
2. De discriminant is geen kwadraat, dan zijn l_1 en l_2 minder "mooi"

(Euclides klassificeert al deze gevallen apart.)

Opdracht: vind l_1 en l_2 voor AB.

Laat zien dat de uitdrukking voor AB die je nu vindt inderdaad aan de definitie van "minor" in Euclides, *Elementen* Boek 10, prop. 76 voldoet (zie hieronder; gebruik de l_1 en l_2 die je uitgerekend hebt.)

Zie de definities hieronder:

Definitie van minor: Euclides, *Elementen*, Boek 10, prop. 76:

"Als van een rechte lijn een rechte lijn wordt afgetrokken die onderling onmeetbaar is in vierkant met de hele (lijn), en die samen met de hele lijn de (som van de) vierkanten samen rationaal maakt, maar de rechthoek die door hen beiden bevat is, mediaal, dan is de rest irrationaal, en laat deze (rest) *minor* genoemd worden."

Definitie van "mediaal": Euclides, *Elementen*, Boek 10, prop. 21:

De rechthoek bevat door rationale rechte lijnen die alleen onderling meetbaar in vierkant zijn, is irrationaal, en de zijde van het vierkant die er gelijk aan is, is irrationaal. Laat die zijde mediaal genoemd worden (en de rechthoek ook).