Selecties uit de Elementen van Euclides, Boek 1

(*Woorden tussen haakjes en voetnoten zijn door de vertaler J.P.H. toegevoegd, en ook enkele Griekse worden die in het hedendaagse Engels voortleven.*)

1.
Definities (letterlijk "grenzen" of "grenspalen")

1. Een punt is, wat geen deel heeft.
2. Een lijn is lengte zonder breedte.
3. De uiteinden van een lijn zijn punten.
4. Een rechte lijn is een lijn die gelijk ligt met de punten erop.
5. Een (opper)vlak is, wat alleen lengte en breedte heeft.
6. De uiteinden van een vlak zijn lijnen.
7. Een plat vlak is (een vlak) dat gelijk ligt met de rechten (d.w.z. rechte lijnen) erop.
8. Een vlakke hoek is de helling van twee lijnen die in één vlak liggen, elkaar raken, en niet in één rechte lijn liggen.
9. Als de (lijnen) die de hoek omvatten, rechten zijn, heet de hoek rechtlijnig.
10. Wanneer een rechte (lijn) op een andere rechte (lijn) staat, en de aangrenzende hoeken aan beide kanten gelijk aan elkaar maakt, is elk van de gelijke hoeken een rechte (hoek), en de opstaande lijn heet loodlijn (*kathetos*) op (de lijn) waarop hij staat.
11. Een stompe hoek is groter dan een rechte.
12. Een scherpe hoek is kleiner dan een rechte.
13. Een grens is, wat het eind van iets is.
14. Een figuur is hetgeen door een of meer grenzen wordt omvat.
15. Een cirkel is de platte figuur die door één lijn omvat wordt, zodat alle lijnen die vanuit één van de punten in het inwendige van de figuur er naar toevallen, gelijk aan elkaar zijn.
16. Het punt heet middelpunt (*kentron*) van de cirkel.
17. Een middellijn (*diametros*) van de cirkel is een lijn, getrokken door het middelpunt, en aan beide kanten beeindigd door de omtrek van de cirkel; welke ook de cirkel in twee gelijke helften deelt.
18. Een halve cirkel is de figuur omvat door de middellijn en de daardoor afgesneden omtrek. Het middelpunt van de halve cirkel is hetzelfde punt, dat ook (middelpunt) van de cirkel is.

19. Rechtlijnige figuren zijn de (figuren) bevat door rechte lijnen; driezijdige (figuren) zijn (figuren) bevat door drie, vierzijdige door vier, en veelzijdige door meer dan vier lijnen.
20. Van de driezijdige figuren is een gelijkzijdige driehoek een (figuur) die drie gelijke zijden heeft, een gelijkbenige (*isoskeles*) een (figuur) die slechts twee gelijke zijden heeft, en een ongelijkbenige (*skalènos*) een die drie ongelijke zijden heeft.
21. Verder, van de driezijdige figuren is een rechthoekige driehoek een driehoek die een rechte hoek heeft, een stomphoekige een (driehoek) die een stompe hoek heeft, en een scherphoekige een (driehoek) die drie scherpe hoeken heeft.[1]
22. Van de vierzijdige figuren is een vierkant (een figuur) die gelijkzijdig en rechthoekig is, een rechthoek, een (figuur) die rechthoekig is, maar niet gelijkzijdig, een ruit (*rhombos*) een (figuur) die gelijkzijdig is maar niet rechthoekig, een ruitachtige (*rhomboïdes*) een figuur waarvan de tegenoverliggende zijden en hoeken gelijk zijn, maar die niet gelijkzijdig is[2] en ook niet rechthoekig. Laat de overige vierzijden trapezia genoemd worden.
23. Evenwijdige (*parallelos*, “naast elkaar”) lijnen zijn alle lijnen die in hetzelfde platte vlak zijn, en, aan beide zijden in het onbegrensde verlengd, elkaar aan geen van beide zijden ontmoeten.

Postulaten (Letterlijk: “eisen”)

1. Laat geëist worden: van elk punt naar elk punt een lijn te trekken;
2. en een begrensde lijn samenhangend in een rechte lijn te verlengen;
3. en dat met elk middelpunt en elke afstand[3] een cirkel beschreven wordt;
4. en dat alle rechte hoeken gelijk aan elkaar zijn;
5. en dat, als tussen twee rechten een rechte (lijn) valt, die de twee binnenhoeken aan dezelfde kant minder dan twee rechten maakt, de twee rechten, wanneer ze in het onbegrendse worden verlengd, elkaar treffen aan de kant waar de (hoeken) minder dan twee rechten zijn.

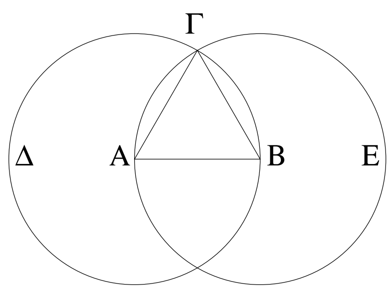
[1] Dat er geen andere mogelijkheden zijn blijkt pas in propositie 31 van Boek 1.
[2] Euclides gebruikt het woord “ruitachtige” verder nergens. Hij gebruikt wel het woord “parallellogram”, en hij bewijst in prop. 32 van Boek 1dat in een parallellogram de overstaande zijden en hoeken gelijk zijn.
[3] Dit is een lijnsegment met een beginpunt in het middelpunt.

Algemene inzichten

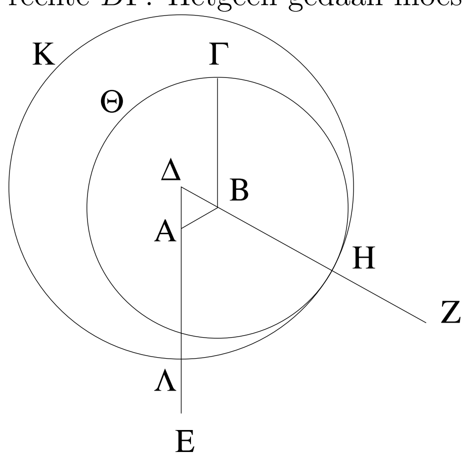
1. (Dingen) die gelijk zijn aan hetzelfde, zijn gelijk aan elkaar.
2. En als aan gelijken gelijken worden toegevoegd, zijn de gehelen gelijk.
3. En als van gelijken gelijken worden afgenomen, zijn de resten gelijk.
4. En als aan ongelijken gelijken worden toegevoegd, zijn de gehelen ongelijk.
5. En de dubbelen van hetzelfde zijn gelijk aan elkaar.
6. En de helften van hetzelfde zijn gelijk aan elkaar.
7. En dingen die op elkaar passen, zijn gelijk aan elkaar.
8. En het geheel is groter dan het deel.
9. En twee rechten omvatten geen ruimte.

(Proposities)

1. Op de gegeven begrensde rechte een gelijkzijdige driehoek te construeren (letterlijk; "samenstellen").
Laat de gegeven begrensde rechte AB zijn.
Men moet dus op de rechte AB een gelijkzijdige driehoek construeren.
Met het middelpunt A en de afstand AB laat de cirkel $B\Gamma\Delta$ beschreven zijn, en wederom, met het middelpunt B en de afstand BA laat de cirkel $A\Gamma E$ beschreven zijn. Vanaf het punt, waar de cirkels elkaar snijden, naar de punten A, B laat de rechten ΓA, ΓB verbonden zijn.
En omdat het punt A middelpunt is van de cirkel $\Gamma\Delta B$, is $A\Gamma$ gelijk aan AB. Wederom, omdat het punt B middelpunt is van de cirkel ΓAE, is $B\Gamma$ gelijk aan BA. Er is echter aangetoond dat ook ΓA gelijk is aan AB. Elk van beiden $\Gamma A, \Gamma B$ is dus gelijk aan AB. Echter, dingen die aan hetzelfde gelijk zijn zijn ook gelijk aan elkaar. Dus is ook ΓA gelijk aan ΓB. De drie (rechten) ΓA, AB, $B\Gamma$ zijn dus gelijk aan elkaar.
Dus is driehoek $AB\Gamma$ gelijkzijdig, en hij is geconstrueerd op de gegeven begrensde lijn AB.

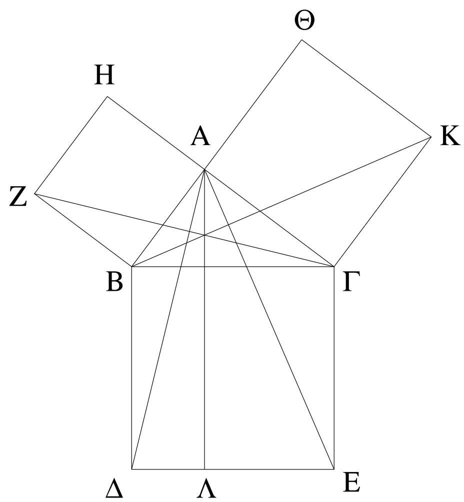


2. Aan het gegeven punt een rechte te plaatsen gelijk aan de gegeven rechte. Laat het gegeven punt A zijn en de gegeven rechte $B\Gamma$. Men moet dus aan het punt A een rechte plaatsen gelijk aan de gegeven rechte $B\Gamma$.
Laat van het punt A naar het punt B de rechte AB verbonden zijn. Laat daarop de gelijkzijdige driehoek ΔAB geconstrueerd zijn. Laat aan de rechten ΔA, ΔB de rechten AE, BZ verlengd worden. En met het middelpunt B en de afstand $B\Gamma$ laat de cirkel $\Gamma H\Theta$ beschreven zijn, en wederom, met het middelpunt Δ en de afstand ΔH laat de cirkel $HK\Lambda$ beschreven zijn.
Omdat het punt B middelpunt is van $\Gamma H\Theta$, is $B\Gamma$ gelijk aan BH. Wederom, omdat het punt Δ middelpunt is van de cirkel $HK\Lambda$ is $\Delta\Lambda$ gelijk aan ΔH, waarvan ΔA gelijk is aan ΔB. De rest $A\Lambda$ is dus gelijk aan de rest BH. Maar er is aangetoond dat ook $B\Gamma$ gelijk is aan BH. Dus $A\Lambda$, $B\Gamma$ zijn elk van beide gelijk aan BH. Dingen die gelijk zijn aan hetzelfde zijn gelijk aan elkaar. Dus ook $A\Lambda$ is gelijk aan $B\Gamma$.
Aan het gegeven punt A is de rechte $A\Lambda$ geplaatst gelijk aan de gegeven rechte $B\Gamma$. Hetgeen gedaan moest worden.



(**Stelling van Pythagoras**)

47. In rechthoekige driehoeken is het vierkant op de opspannende (*hypothenousa*) zijde van de rechte hoek gelijk aan de vierkanten van de zijden die de rechte hoek omvatten.
Laat er een rechthoekige driehoek $AB\Gamma$ zijn die rechte hoek $BA\Gamma$ heeft. Ik zeg, dat het vierkant op $B\Gamma$ gelijk is aan de vierkanten op $BA, A\Gamma$.



Laat op $B\Gamma$ het vierkant $B\Delta E\Gamma$ beschreven zijn,[4] en op de zijden BA, $A\Gamma$ de (vierkanten) HB, $\Theta\Gamma$. Door het (punt) A laat $A\Lambda$ getrokken worden evenwijdig aan elk van beide (rechten) $B\Delta$, ΓE.[5] Omdat de beide hoeken $BA\Gamma$, BAH rechte (hoeken) zijn, maken de twee rechten $A\Gamma$, AH die aan een rechte BA aan hetzelfde punt A maar niet aan dezelfde kant liggen, de (d.w.z. som van de) aangrenzende hoeken gelijk aan twee rechte hoeken.[6] Dus is ΓA met AH op een rechte. Wegens dezelfde (argumenten) is dus ook BA met $A\Theta$ op een rechte. En omdat de hoek $\Delta B\Gamma$ gelijk is aan de hoek ZBA, want ze zijn allebei recht, laat de hoek $AB\Gamma$ aan beide toegevoegd worden, dan is de hele (hoek) ΔBA gelijk aan de hele (hoek) $ZB\Gamma$.

Omdat ΔB gelijk is aan $B\Gamma$, en ZB aan BA, zijn elk van de twee (rechten) ΔB, BA gelijk aan elk van de twee rechten ZB, $B\Gamma$, en de hoek ΔBA is gelijk aan de hoek $ZB\Gamma$. De basis $A\Delta$ is dus gelijk aan de basis $Z\Gamma$, en de driehoek $AB\Delta$ is gelijk aan de driehoek $ZB\Gamma$.[7] En van de driehoek $AB\Delta$ is het parallellogram $B\Lambda$ het dubbele, want ze hebben dezelfde basis $B\Delta$ en ze

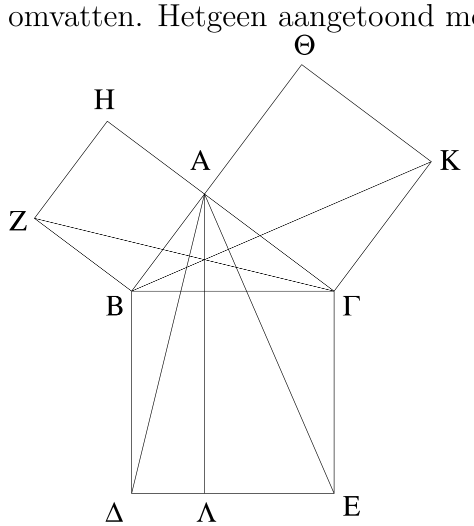
[4] De constructie van een vierkant met gegeven zijde is behandeld in propositie 46.

[5] De constructie van een rechte lijn door een gegeven punt evenwijdig aan een gegeven rechte lijn is behandeld in propositie 31. Als twee rechte lijnen evenwijdig zijn aan een derde, zijn ze ook aan elkaar evenwijdig volgens propositie 30.

[6] Dit zijn de voorwaarden van propositie 14, waarmee Euclides nu concludeert dat ΓA en AH op één rechte liggen.

[7] In propositie 4 bewijst Euclides dat twee zijden en een ingesloten hoek van een driehoek gelijk zijn aan twee zijden en een ingesloten hoek van een andere driehoek, alle corresponderende zijden en hoeken van de twee driehoeken gelijk zijn, en dat ook de driehoeken gelijk zijn (wij zouden zeggen: gelijke oppervlakte hebben). N.B. Dit bewijs is vanuit een tegenwoordig wiskundig standpunt erg onbevredigend

zijn tussen dezelfde evenwijdige lijnen $B\Delta$, $A\Lambda$.[8] En van de driehoek $ZB\Gamma$ is het vierkant HB het dubbele, want zij hebben weer dezelfde basis ZB en ze zijn tussen dezelfde evenwijdige lijnen ZB, $H\Gamma$. Echter, de dubbelen van gelijke dingen zijn gelijk. Dus is ook het parallellogram $B\Lambda$ gelijk aan het vierkant HB. Op dezelfde manier zal, nadat AE, BK verbonden zijn, aangetoond worden dat het parallellogram $\Gamma\Lambda$ gelijk aan het vierkant $\Theta\Gamma$. Het gehele vierkant $B\Delta E\Gamma$ is dus gelijk aan de twee vierkanten HB, $\Theta\Gamma$. Maar het vierkant $B\Delta E\Gamma$ is beschreven op $B\Gamma$, en de vierkanten HB, $\Theta\Gamma$ op BA, $A\Gamma$. Het vierkant op de zijde $B\Gamma$ is dus gelijk aan de vierkanten op de zijden BA, $A\Gamma$.
Dus in rechthoekige driehoeken is het vierkant op de opspannende zijde van de rechte hoek gelijk aan de vierkanten van de zijden die de rechte (hoek) omvatten. Hetgeen aangetoond moest worden.



Literatuur over de Elementen van Euclides

- E.J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*, Groningen: Noordhoff, 1930-1932, 2 delen. (goed commentaar)

- A. Grootendorst, Over de geometrische algebra van de Grieken en de oorsprong van de woorden parabool, ellips en hyperbool, In: A. Grootendorst, *Grepen uit de geschiedenis van de wiskunde.* Delft 1988, pp. 49-63.

- T.L. Heath, *Euclid: The Thirteen Books of the Elements*, second edition, Cambridge: University Press, 1925, New York: Dover Reprint

[8] Hier gebruikt Euclides propositie 41.

1956. (Engelse vertaling met commentaar)

- E.S. Stamatis, *Eucleidou Geometria. Stoicheioon Biblia I. II. III. IV. Eisagogè - Archaion Keimenon, - Metafrasis*, Athenai 1952. Een editie van de Griekse tekst. Onze vertaling is gebaseerd op pp. pp. 36, 38, 40, 82, 84 en geïnspireerd door het hierboven genoemde boek van Dijksterhuis, deel 1, pp. 111-114.

- B. Vitrac, *Euclide, Les Éléments*, Paris, Presses Universitaires de France, 199. (tot dusver twee delen verschenen, d.w.z. de vertalingen van de boeken 1 tot en met 9. Zeer grondig en up-to-date.)

Mogelijke opgaven: (1) Definities: Vraag je af welke de basisbegrippen Euclides gebruikt, en welke begrippen hij helemaal met behulp van eerder gedefinieerde begrippen invoert. (2) Algemene inzichten: Ga na welke van de algemene inzichten uit elkaar kunnen worden afgeleid; welke zou men op grond hiervan als onecht (d.w.z. latere toevoeging) kunnen beschouwen? (3) Postulaat 5: Teken een plaatje. Bewijs nu dat er door een gegeven punt niet meer dan één rechte gaat die evenwijdig is met een gegeven rechte. (4) Proposities 1 en 2: Ga na welke definities, algemene inzichten en postulaten waar gebruikt worden. Zijn er stappen in de redenering die niet uit de algemene inzichten en postulaten volgen? (5) Propositie 47: Het bewijs van Euclides is nogal ingewikkeld omdat hij in Boek 1 nog geen verhoudingen gebruikt. Kun je een eenvoudiger bewijzen van de stelling van Pythagoras vinden dat wel verhoudingen gebruikt? (6) Bewijs in prop. 47, eventueel met moderne methoden, dat de rechten ΓZ, BK en $A\Lambda$ door één punt gaan. (dit werd o.a. bewezen door Heron van Alexandrië in de eerste eeuw na Christus).