Selecties uit de Elementen van Euclides, Boek 5

(*Woorden tussen haakjes en voetnoten zijn door de vertaler J.P.H. toegevoegd, en ook enkele Griekse worden die in het hedendaagse Engels voortleven.*)

5.
Definities

1. Een grootheid is een deel van een andere grootheid, (dat wil zeggen) de kleinere (is een deel) van de grotere, als hij de grotere meet.[1]

2. De grotere is een veelvoud van de kleinere wanneer hij door de kleinere gemeten wordt.

3. Een verhouding is een bepaalde relatie van twee grootheden van dezelfde soort, die met hoeveelheid te maken heeft.

4. Van grootheden wordt gezegd dat ze een verhouding hebben, wanneer ze, als ze verveelvoudigd worden, elkaar kunnen overtreffen.

5. Grootheden worden gezegd in dezelfde verhouding te zijn, een eerste tot een tweede, en een derde tot een vierde, wanneer willekeurige zelfde veelvouden van de eerste en de derde (genomen worden) en willekeurige zelfde veelvouden van de tweede en de vierde, en ieder van deze (veelvouden van de eerste en de derde) ofwel tegelijk groter is dan, ofwel tegelijk gelijk is aan, ofwel tegelijk kleiner is dan ieder van (deze veelvouden van de tweede en de vierde), in overeenkomstige volgorde genomen.

6. Laaat grootheden die dezelfde verhouding hebben, evenredig (*analogon*) genoemd worden.

7. Wanneer van de zelfde veelvouden, het (d.w.z., een) veelvoud van de eerste groter is dan het (d.w.z. een) veelvoud van de tweede, maar het veelvoud van de derde niet groter is dan het veelvoud van de vierde, dan wordt gezegd dat de eerste tot de tweede een grotere verhouding heeft dan de derde tot de vierde.

Enkele proposities

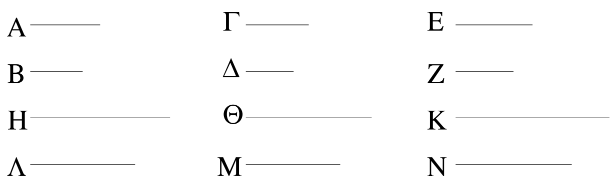
11. (Verhoudingen) die gelijk zijn aan dezelfde verhouding zijn ook gelijk aan elkaar.

Want laat gelden dat A staat tot B als G staat tot Δ, en dat Γ staat tot Δ, als E staat tot Z. Ik zeg dat A staat tot B als E staat tot Z.

[1] Hiermee wordt bedoeld dat de grotere een geheel veelvoud is van de kleinere.

Want laat van A, Γ, E gelijke veelvouden H, Θ, K genomen worden, en van B, Δ, Z andere, zoals het toevallig uitkomt, gelijke veelvouden Λ, M, N.

Omdat geldt: A staat tot B als Γ staat tot Δ, en van A, Γ dezelfde veelvouden H, Θ genomen zijn, en van B, Δ andere, willekeurige, zelfde veelvouden Λ, M. Dan geldt: als H groter is dan Λ, is Θ ook groter dan M, en als (H) gelijk (aan Λ), dan (Θ) gelijk (aan M), en als kleiner, dan kleiner. Wederom: omdat geldt: Γ staat tot Δ als E staat tot Z, en van Γ, E dezelfde veelvouden Θ, K genomen zijn, en van Δ, Z andere, willekeurige, zelfde veelvouden M, N. Dan geldt: als Θ groter is dan M, is K ook groter dan N, en als gelijk, dan gelijk, en als kleiner, dan kleiner. Maar als Θ groter is dan M, is H ook groter dan Λ, en als gelijk, dan gelijk, en als kleiner, dan kleiner. Dus ook, als H groter is dan Λ, is K groter dan N, en als gelijk, dan gelijk, en als kleiner, dan kleiner. En H, K zijn dezelfde veelvouden van A, E, maar Λ, N zijn andere, willekeurige, zelfde veelvouden van B, Z. Dus A staat tot B als E staat tot Z.



16. Als vier grootheden evenredig zijn, zijn ze ook verwisseld evenredig.

Laten A, B, Γ, Δ vier evenredige grootheden zijn, zodat A staat tot B als Γ staat tot Δ. Ik zeg dat ook verwisseld geldt; A staat tot Γ als B staat tot Δ.

Want laat van A, B dezelfde veelvouden E, Z genomen worden, en van Γ, Δ andere willekeurige zelfde veelvouden H, Θ.

Omdat E hetzelfde veelvoud is van A als Z van B, en de delen van hetzelfde veelvoud dezelfde verhouding hebben,[2] staat A tot B als E tot Z. Maar A staat tot B als Γ staat tot Δ. Dus is ook Γ tot Δ als E tot Z.[3] Wederom, omdat H en Θ dezelfde veelvouden zijn van Γ en Δ, staat Γ tot Δ als H tot Θ. Maar Γ staat tot Δ als E tot Z. Dus E staat tot Z als H tot Θ.

ALs vier grootheden evenredig zijn, en de eerste groter is dan de derde, dan is de tweede ook groter dan de vierde, en als gelijk, dan gelijk, en als

[2] Euclides bewijst dit in Boek 5, propositie 15.

[3] Dit is bewezen in Boek 5, propositie 11.

kleiner, dan kleiner. Dus als E groter is dan H, is Z groter dan Θ, en als gelijk, dan gelijk, en als kleiner, dan kleiner. Maar E, Z zijn dezelfde veelvouden van A, B, en H, Θ zijn andere, willekeurige, zelfde veelvouden van Γ, Δ. Dus A staat tot Γ als B staat tot Δ.