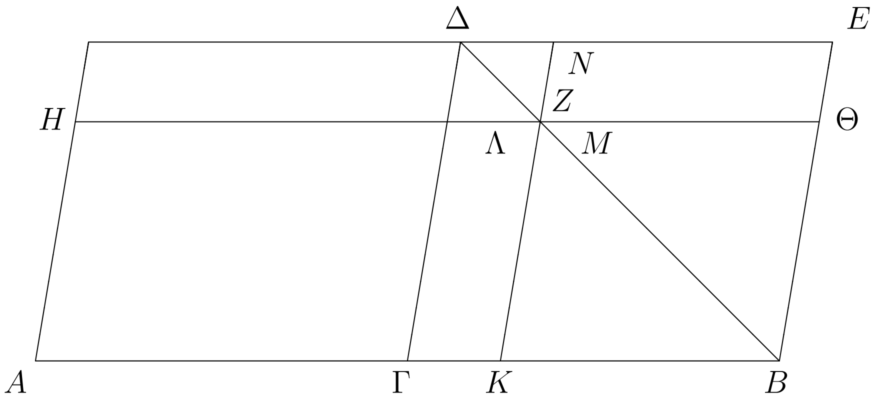
Euclides, *Elementen*, Boek VI, proposities 27-29. *De vertaling is gebaseerd op de Griekse tekst in Heiberg, vol. 2, p. 158-170 en de Engelse vertaling in Heath, vol. 2, pp. 257-266.*

27

[1] Van alle langs eenzelfde rechte aangelegde parallellogrammen waaraan een parallellogrammische figuur ontbreekt die gelijkvormig is en gelijk ligt met een op de helft (van de gegeven rechte) aangelegd parallellogram, is het aan de helft aangelegde parallellogram dat gelijkvormig is met het ontbrekende (parallellogram) het grootste.



[2] Laat AB een rechte zijn, en laat hij in Γ gehalveerd zijn. Laat langs de rechte AB het parallellogram $A\Delta$ aangelegd zijn waaraan een parallellogrammische figuur ΔB ontbreekt die op de helft van AB, dat is ΓB, beschreven is.

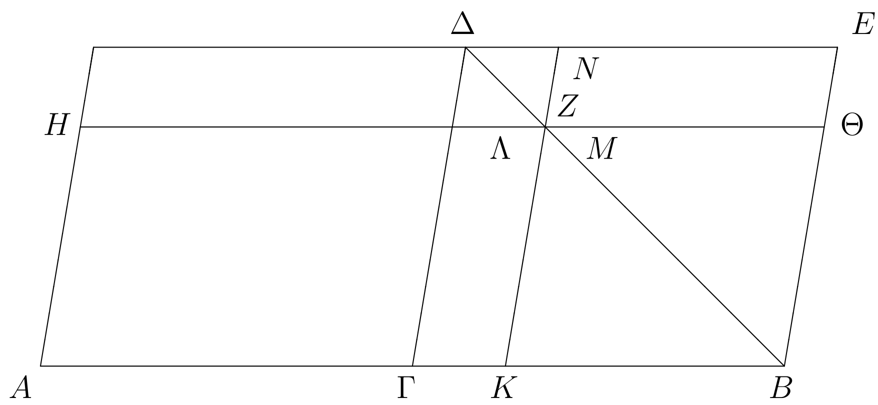
[3] Ik zeg dat $A\Delta$ de grootste is van alle parallellogrammen die langs AB aangelegd zijn, en waaraan een figuur ontbreekt die gelijkvormig is en gelijk gelegen is met ΔB.

[4] Want laat langs de rechte AB het parallellogram AZ aangelegd zijn waaraan een parallellogrammische figuur ZB ontbreekt die gelijkvormig is en gelijk gelegen is met ΔB. Ik zeg dat $A\Delta$ groter is dan AZ.

Want omdat het parallellogram ΔB gelijkvormig is met parallellogram ZB, hebben ze dezelfde diagonaal. Laat dus de diagonaal ΔB getrokken zijn, en laat de figuur beschreven (d.w.z. afgemaakt) zijn.

[5] Omdat nu ΓZ gelijk is aan ZE,[1] en ZB gemeenschappelijk is, is de hele $\Gamma\Theta$ gelijk aan de hele KE. Maar $\Gamma\Theta$ is gelijk aan ΓH, omdat $A\Gamma$ ook gelijk is aan ΓB. Dus is ook $H\Gamma$ gelijk aan EK. Laat ΓZ gemeenschappelijk bijgelegd zijn. Dan is de hele AZ gelijk aan het gnomon[2] ΛMN; zodat het parallellogram ΔB, dat is $A\Delta$, groter is dan het parallellogram AZ.

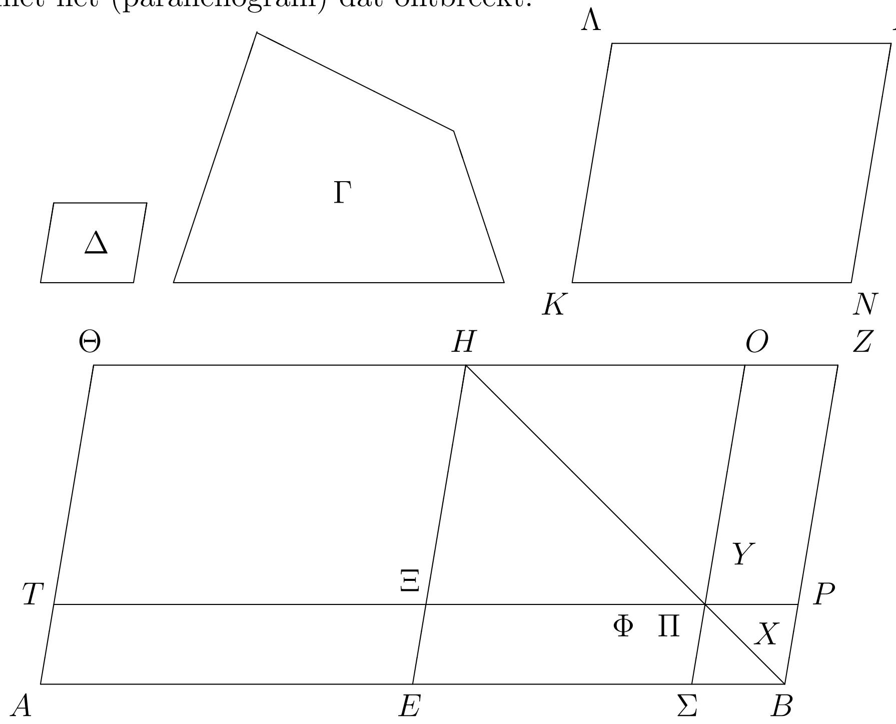
[6] Dus is van alle parallellogrammen die langs dezelfde rechte aangelegd zijn, en waaraan een parallellogrammische figuur ontbreekt die gelijkvormig is en gelijk gelegen is met het aan de helft (van de rechte) beschreven parallellogram, het aan de helft aangelegde (parallellogram) het grootste. Hetgeen aangetoond moest worden.



[1] Hiermee wordt bedoeld dat het parallellogram met hoekpunten Γ en Z even groot is als het parallellogram met hoekpunten Z en E, dat wil zeggen, gelijke oppervlakte hebben. Ze hoeven niet dezelfde vorm te hebben. Dat de parallellogrammen even groot zijn is bewezen in *Elementen* boek 1, propositie 45.

[2] Een gnomon is een parallellogram waaruit een kleiner parallellogram weggenomen is, dat één hoekpunt en de diagonaal met het grote parallellogram gemeenschappelijk heeft. Hier is de gnomon de figuur die ontstaat door uit het grote parallellogram $B\Gamma\Delta E$ het kleine parallellogram met diagonaal ΔZ weg te laten. De tekst geeft dit aan met ΛMN waarbij (vermoedelijk) Λ, M en N alle drie een gebied aangeven dat deel is van de gnomon.

[1] Langs een gegeven rechte een parallellogram aan te leggen dat gelijk is aan een gegeven rechtlijnige (figuur), en waaraan een parallellogrammische figuur ontbreekt[3] die gelijkvormig is aan een gegeven (parallellogram). Het is noodzakelijk dat de gegeven rechtlijnige figuur niet groter is dan het parallellogram dat aan de helft (van de gegeven rechte) beschreven is, gelijkvormig met het (parallellogram) dat ontbreekt.



[2] Laat de gegeven rechte AB zijn, de gegeven rechtlijnige (figuur), waaraan het aan AB aan te leggen (parallellogram) gelijk moet zijn, Γ, niet kleiner dan de op AB beschreven figuur gelijkvormig aan het ontbrekende (parallellogram), en (zij) de figuur waarmee het ontbrekende stuk gelijkvormig moet zijn Δ. Dan moet langs de gegeven rechte AB een aan de gegeven rechtlijnige figuur Γ gelijk parallelogram worden aangelegd waaraan een parallelogrammische figuur ontbreekt die gelijkvormig is aan Δ.

[3] Laat AB in punt E gehalveerd zijn, en laat op EB (parallellogram) $EBZH$ beschreven worden, gelijk aan en gelijkvormig liggend met Δ, en laat het parallellogram AH aangevuld zijn.

[3]Grieks: *elleipon*. Hiervan komt de benaming "elliptische aanlegging."

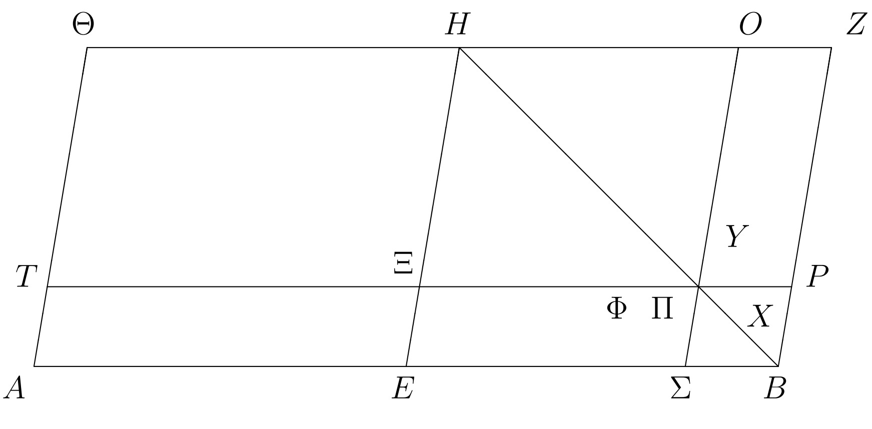
Als nu AH gelijk is aan Γ, is het gevraagde ontstaan. Want langs de gegeven rechte AB is het parallellogram AH aangelegd dat aan de gegeven rechtlijnige figuur gelijk is, en waaraan het parallellogram HB ontbreekt dat gelijkvormig is met Δ.

[4] Als dit niet zo is, laat ΘE groter zijn dan Γ. Maar ΘE is gelijk aan HB, dus HB is groter dan Γ. Zoveel als HB groter is dan Γ, laat $K\Lambda MN$ geconstrueerd worden gelijk aan dat overschot en gelijkvormig en gelijk liggend met Δ. Maar Δ is gelijkvormig met HB, dus KM is gelijkvormig met HB. Laat $K\Lambda$ met HE overeenkomen, en ΛM met HZ.

En omdat HB gelijk is aan Γ en KM (samen), is HB groter dan KM. Dus is HE groter dan $K\Lambda$ en HZ groter dan ΛM. Laat $K\Lambda$ gelijk gemaakt zijn aan $H\Xi$ en ΛM gelijk aan HO, en laat het parallellogram $\Xi HO\Pi$ voltooid zijn. Dan is dit gelijk en gelijkvormig met KM. Dus is $H\Pi$ ook gelijkvormig aan HB. Dus hebben $H\Pi$ en HB dezelfde diagonaal. Laat die diagonaal $H\Pi B$ zijn, en laat de figuur beschreven zijn.

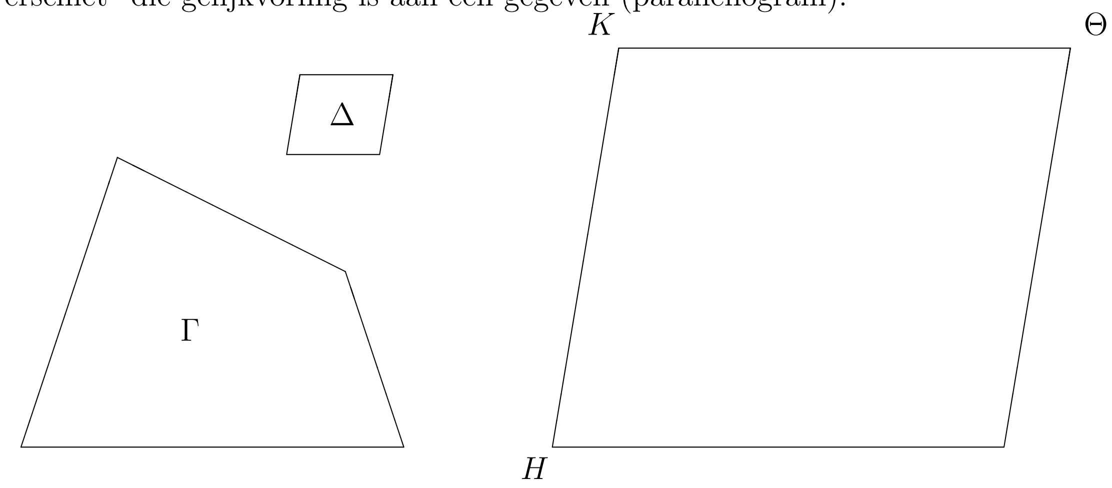
[5] Omdat BH dus gelijk is aan Γ, KM samen, waarvan $H\Pi$ gelijk is aan KM, is dus de rest, het gnomon $YX\Phi$, gelijk aan de rest van Γ. En omdat OP gelijk is aan $\Xi\Sigma$, laat ΠB er gemeenschappelijk bij gelegd zijn. Dan is de hele OB gelijk aan de hele ΞB. Maar ΞB is gelijk aan TE, omdat de zijde AE ook aan de zijde EB gelijk is. Dus is TE ook gelijk aan OB. Laat $\Xi\Sigma$ er gemeenschappelijk bijgelegd zijn. Dan is de hele $T\Sigma$ gelijk aan het hele gnomon ΦXY. Maar het gnomon ΦXY was aangetoond gelijk te zijn aan Γ. Dus is ook $T\Sigma$ gelijk aan Γ.

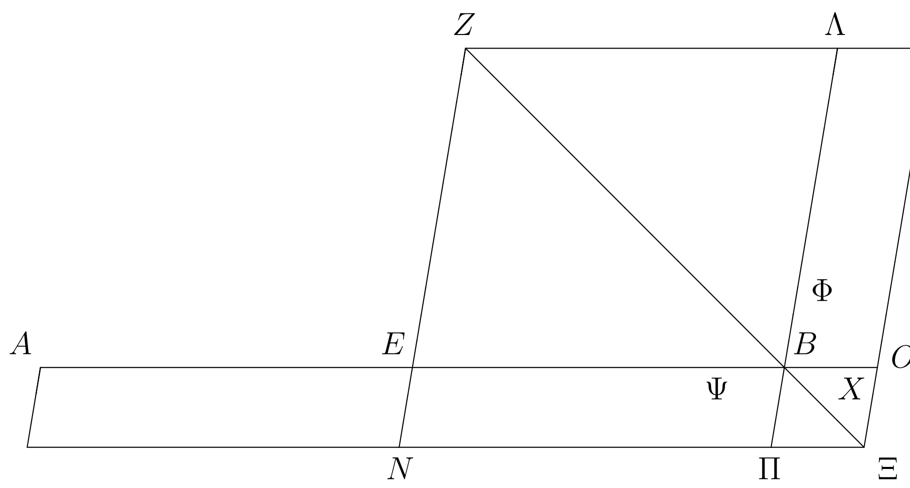
[6] Dus is langs de gegeven rechte AB een parallellogram ΣT gelegd dat gelijk is aan de gegeven rechtlijnige (figuur) Γ en waaraan een parallellogrammische figuur ΠB ontbreekt die gelijkvormig is aan Δ. Hetgeen gedaan moest worden.



29

[1] Langs een gegeven rechte een parallellogram aan te leggen dat gelijk is aan een gegeven rechtlijnige (figuur), en dat een parallellogrammische figuur overschiet[4] die gelijkvormig is aan een gegeven (parallellogram).





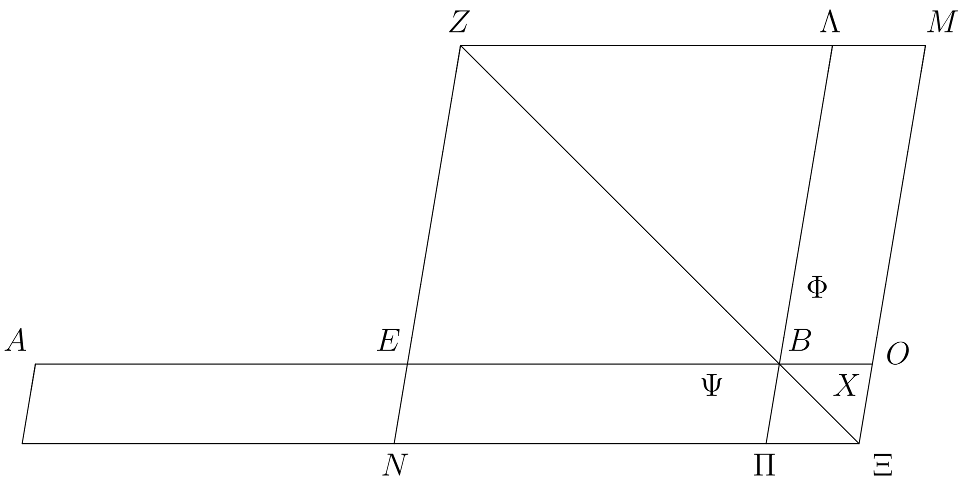
[2] Laat de gegeven rechte AB zijn, de gegeven rechtlijnige (figuur), waaraan het aan AB aan te leggen (parallellogram) gelijk moet zijn, Γ, en (zij) de figuur waarmee het overschietende stuk gelijkvormig moet zijn Δ

[4]Het Griekse woord voor overschieten is hyperballein. Hiervan is de benaming 'hyperbolische aanlegging' voor deze constructie afgeleid.

[3] Laat AB in punt E gehalveerd zijn, en laat op EB (parallellogram) BZ beschreven worden, gelijkvormig aan en gelijk liggend met Δ. Laat (parallelogram) $H\Theta$ geconstrueerd zijn, gelijk aan BZ en Γ samen, en gelijkvormig met en gelijk liggend met Δ. Laat $K\Theta$ overeenkomen met $Z\Lambda$, en KH met ZE. Omdat $H\Theta$ groter is dan ZB, is ook $K\Theta$ groter dan $Z\Lambda$ en KH groter dan ZE. Laten $Z\Lambda, ZE$ verlengd zijn, en laat $Z\Lambda M$ gelijk zijn aan $K\Theta$, en ZEN gelijk aan KH, en laat MN voltooid zijn. Dan is MN gelijk en gelijkvormig aan $H\Theta$, maar $H\Theta$ is gelijkvormig met $E\Lambda$. Dus is MN ook gelijkvormig met $E\Lambda$, dus hebben $E\Lambda$ en MN dezelfde diagonaal. Laat de diagonaal van deze, $Z\Xi$, getrokken zijn, en laat de figuur beschreven (d.w.z. afgemaakt) zijn.

[4] Omdat $H\Theta$ gelijk is aan $E\Lambda$, Γ (samen), maar $H\Theta$ gelijk is aan MN, is MN ook gelijk aan $E\Lambda$, Γ (samen). Laat het gemeenschappelijk (deel) $E\Lambda$ eraf genomen zijn. Dan is de rest, het gnomon $\Psi X\Phi$ gelijk aan Γ. Maar omdat AE gelijk is aan EB, is ook AN gelijk aan NB, dat is ΛO. Laat $E\Xi$ er gemeenschappelijk bijgelegd zijn. dan is de hele $A\Xi$ gelijk aan het gnomon $\Phi X\Psi$. Maar het gnomon $\Phi X\Psi$ is gelijk aan Γ. Dus is $A\Xi$ ook gelijk aan Γ.

[5] Dus is langs de gegeven rechte AB het parallellogram $A\Xi$ gelegd, dat gelijk is aan de gegeven rechtlijnige (figuur) Γ, en dat een parallellogrammische figuur ΠO overschiet die gelijkvormig is met Δ, omdat $E\Lambda$ ook gelijkvormig is met $O\Pi$. Hetgeen gedaan moest worden.



Opmerking bij deze stellingen. Men kan deze in verband brengen met het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Stel in prop. 28 dat het gegeven parallellogram Δ een vierkant is. Dan moeten alle parallellogrammen in de figuur rechthoeken zijn. Als we dan stellen $AB = b$ en $\Gamma = c$ en $B\Sigma = x$ dan is $A\Sigma = b - x$ en verder $\Sigma\Pi = A\Sigma$ (omdat Δ een vierkant is). Daarom is de oppervlakte van rechthoek $A\Sigma\Pi T$ ook gelijk aan $x(b-x)$. De propositie levert dan de oplossing van de vergelijking $x(b-x) = c$ ofwel $x^2 - bx + c = 0$. Deze vergelijking heeft alleen een oplossing als de discriminant positief of nul is, dat wil zeggen $b^2 \geq 4c$. Deze voorwaarde is gelijkwaardig met $c \geq (\frac{b}{2})^2$. Dit wordt in het begin verondersteld, want er staat: "Het is noodzakelijk dat de gegeven rechtlijnige figuur niet groter is dan het parallellogram dat aan de helft (van de gegeven rechte) beschreven is, gelijkvormig met het (parallellogram) dat ontbreekt.".

Deze voorwaarde is bewezen in propositie 27. Uit die propositie kan dan ook afgeleid worden dat de maximale waarde van $x(b-x)$ voor $0 < x < b$ gelijk is aan $(\frac{b}{2})^2$. Tenslotte kan ook propositie 29 worden "vertaald" in de oplossing van de kwadratische vergelijking van de vorm $x(b+x) = c$. We moeten ons wel realiseren dat de proposities 27-29 niet geformuleerd worden als een kwadratische vergelijking; het is daarom te kort door de bocht te zeggen dat Euclides in deze proposities "de kwadratische vergelijking oplost".