Euler, Introductio in Analysin Infinitorum, Lausanne 1748, Boek 1.

Hoofdstuk 7

Over het uitdrukken van grootheden van exponenten en logaritmen met behulp van reeksen

114. Omdat $a^0 = 1$, en door een toenemende exponent ook de waarde van de macht van a toeneemt, wanneer a een getal is groter dan 1, volgt dat als de Exponent oneindig weinig groter is dan nul, de Macht zelf ook oneindig weinig groter zal zijn dan de eenheid. Laat ω een oneindig klein getal zijn, ofwel een breuk die zo klein is, dat zij toch niet gelijk is aan nul, dan zal $a^\omega = 1 + \psi$ waarbij ψ ook een oneindig klein getal is. Uit het voorgaande hoofdstuk blijkt dat ψ alleen een oneindig klein getal is als ω dat ook is. Dus is hetzij $\psi = \omega$, ofwel $\psi > \omega$,, ofwel $\psi < \omega$, Deze verhouding zal in elk geval afhangen van de waarde van de letter a. Omdat die tot nu toe onbekend is, stellen we $\psi = k\omega$, zodat $a^\omega = 1 + k\omega$. En als a als grondtal van de logarithmen genomen wordt, geldt $\omega = \ell(1 + k\omega)$.

Voorbeeld

Opdat duidelijker blijkt op welke manier het getal k van de basis a afhangt, stellen we dat $a = 10$. Uit de tafel van de gewone Logarithmen nemen we de Logarithme van een getal dat zo weinig mogelijk groter is dan de eenheid, bijvoorbeeld $a + \frac{1}{1000000}$, zodat $k\omega = \frac{1}{1000000}$. Dan is $\ell(1 + k\omega) = \ell\frac{1000001}{1000000} = 0,00000043429 = \omega$. Hier, omdat $k\omega = 0,00000100000$, geldt $\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}$ en $k = \frac{100000}{43429} = 2,30258$. Hieruit is duidelijk dat k een eindig getal is dat afhangt van de waarde van de basis a.

Als een ander getal als basis van a wordt gesteld, zal de Logaritme van dat getal $1 + k\omega$ tot de eerdere een gegeven verhouding hebben, waaruit tegelijkertijd een andere waarde van de letter k te voorschijn zal komen.

115. Omdat $a^\omega = 1 + k\omega$, geldt $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, voor een willekeurig getal i. Daarom is $a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 +$ & c. Als we dus stellen $i = \frac{z}{\omega}$, en z een of ander eindig getal is, dan zal wegens het oneindig kleine getal ω, i een oneindig groot getal zijn. Hieruit volgt $\omega = \frac{z}{i}$, zodat ω een breuk is met een oneindige noemer, dus oneindig klein, zoals aangenomen is.

ALs we dus $\frac{z}{i}$ voor ω invullen, volgt

$a^z = (1+\frac{kz}{i})^i = 1+\frac{1}{1}kz+\frac{1(i-1)}{1.2i}k^2z^2+\frac{1(i-1)(i-2)}{1.2i.3i}k^3z^3+\frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2i.3i.4i}k^4z^4+$ etc.. Deze vergelijking is geldig als voor i een oneindig groot getal wordt ingevuld. Echter k is een bepaald getal dat van a afhangt, zoals we gezien hebben.

116. Omdat i echter een oneindig groot getal is, geldt $\frac{i-1}{i} = 1$. Want het blijkt dat hoe groter het getal is dat voor i wordt ingevuld, deste dichter zal de waarde van de breuk $\frac{i-1}{i}$ naar de eenheid naderen. Dus als i een getal dat groter is dan alle getallen is die een waarde gegeven kunnen worden, dan is de breuk $\frac{i-1}{i}$ aan de eenheid zelf gelijk zijn. Wegens dezelfde reden is $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i} = 1$; enzovoort. Daaruit volgt

$\frac{i-2}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{i-3}{3i} = \frac{1}{3}$; $\frac{i-4}{4i} = \frac{1}{4}$; enzovoort. Nadat deze waarden ingevuld zijn, krijgen we

$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \frac{k^4z^4}{1.2.3.4} +$ enz. tot in het oneindige. Deze vergelijking geeft tegelijkertijd de relatie tussen de getallen a en k aan. Want als ik $z = 1$ stel, krijgen we $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} +$ enz.. En als $a = 10$, is het noodzakelijk dat k ongeveer $2,30258$ is, zoals we hiervoor gevonden hebben.