Handout bij kaleidoscoopcollege: $x^n + y^n = z^n$ voor $n = 2, 3, 4$: historische verrassingen.

Jan P. Hogendijk

Euclides (ca. 300 v.Chr.), *Elementen*, Boek 10, Propositie 28, Lemma 1, vertaling JPH.

Lemma

Te vinden: twee vierkante getallen, zodat ook het uit hen samengestelde (getal) vierkant is.

Laat gegeven zijn de twee getallen $AB, B\Gamma$, en laten ze allebei hetzij even, hetzij oneven zijn. En omdat, als van een even (getal) een even (getal) afgetrokken wordt, of van een oneven (getal) een oneven (getal), de rest even is, [1] is de rest $A\Gamma$ even. Laat $A\Gamma$ in tweeën gesneden worden in Δ. En laten de (getallen) $AB, B\Gamma$ ook hetzij gelijkvormige vlakke (getallen) zijn, hetzij vierkanten, die ook gelijkvormige vlakke (getallen) zijn. Nu is de (rechthoek) uit $AB, B\Gamma$ samen met het vierkant van $\Gamma\Delta$ gelijk aan het vierkant van $B\Delta$.[2] En vierkant is de (rechthoek) uit van $AB, B\Gamma$, omdat bewezen is dat als twee gelijkvormige vlakke getallen met elkaar vermenigvuldigd een of ander (getal) voortbrengen, het resultaat een vierkant is.[3] Nu zijn twee vierkante getallen gevonden, namelijk de (rechthoek) uit $AB, B\Gamma$ en het (vierkant) van $\Gamma\Delta$, die, als ze worden samengesteld, het vierkant van $B\Delta$ maken.

[1]Bewezen in Boek 9, Proposities 24, 26.

[2]Bewezen in Boek 2, Propositie 6.

[3]Bewezen in Boek 9, prop.1

Diophantus (ca. 250 na Chr.), *Arithmetica*, Boek 2, propositie 8, vertaling JPH.

Een opgegeven vierkant in twee vierkanten te verdelen.

Laat dus opgegeven zijn, 16 in twee vierkanten te verdelen.

Laat het 1e getal (gelijk) gesteld zijn (aan) 1 vierkant (van het *getal*). Dan is het andere getal 16 eenheden minus 1 vierkant (van het *getal*). Dus moet 16 eenheden minus 1 vierkant (van het *getal*) gelijk zijn aan een vierkant.

Ik vorm het vierkant van een willekeurig aantal *getallen* min zoveel eenheden als er de zijde (d.w.z. wortel) van 16 eenheden is. Laat dit 2 *getallen* minus 4 eenheden zijn. Het vierkant zelf is dus 4 vierkanten van *getallen* plus 16 eenheden min 16 *getallen*. Dit is gelijk aan 16 eenheden minus 1 vierkant van het *getal*. Laten we de missende termen aan beide kanten aanvullen, en gelijkvormige termen van gelijkvormige termen (aftrekken). Dus zijn 5 vierkanten van het *getal* gelijk aan 16 *getallen*, en het *getal* wordt 16 vijfden. Dus is het ene (getal) 256/25 en het andere 144/25, en deze twee samengesteld maken 400/25, dat is 16 eenheden, en elk van beiden is een vierkant.[4]

[4]Een dertiende eeuws handschrift van de *Arithmetica* bevat de volgende opmerking in de marge: De duivel hebbe de ziel van jou, Diophantus, vanwege de moelijkheid van je andere stellingen en vooral van deze stelling.

Pierre de Fermat (1601-1665) schreef hier in de marge van de editie van de *Arithmetica* van Diophantus van Bachet (1581-1638): "Aan de andere kant is het onmogelijk dat een kubus als de som van twee kubussen geschreven kan worden, of een vierde macht als de som van twee vierde machten, of in het algemeen, dat een hogere macht dan de tweede geschreven kan worden als de som van twee zulke machten. Ik heb een echt prachtig bewijs van deze propositie gevonden, maar deze marge is te klein is om het te bevatten.

Babylon, ca. 2000 v. Chr, tablet in New York, Columbia University Library, Plimpton 322.

bovenste twee regels	tekst	onleesbaar	
......15	1 59	2 49	ki-1
......58 14 50 6 15	56 7	3 12 1	ki-2
......1 15 33 45	1 16 41	1 50 49	ki-3
......29 32 52 16	3 31 49	5 9 1	ki-4
48 54 1 40	1 5	1 37	ki-...
47 6 41 40	5 19	8 1	...
43 11 56 28 26 40	38 11	59 1	ki-7
41 33 59 3 45	13 19	20 49	ki-8
38 33 36 36	9 1	12 49	ki-9
35 10 2 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 1	ki-10
33 45	45	1 15	ki-11
29 21 54 2 15	27 59	48 49	ki-12
27 (0) 3 45	7 12 1	4 49	ki-13
25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	ki-14
23 13 46 40	56	53	ki- ...

Fermat's bewijs voor $n = 4$? Puzzel voor de liefhebbers!

Dit bewijs (?) staat als "opmerking 45" van Fermat bij Bachet's editie van de *Arithmetica* van Diophantus. Vertaling JPH (uit het Engels, het Latijn was niet beschikbaar). Woorden tussen haakjes zijn JPH's toevoegingen.

Als de oppervlakte van een rechthoekige driehoek (met zijden natuurlijke getallen) een kwadraat zou zijn, dan zouden er twee vierde machten bestaan, waarvan het verschil een kwadraat zou zijn. Dan zouden er twee kwadraten bestaan waarvan de som en het verschil kwadraten zijn. Dus zouden we een kwadraat hebben dat gelijk zou zijn aan een kwadraat en het dubbele van een ander kwadraat, terwijl de (twee) kwadraten waaruit deze som bestaat zelf ook een kwadraat als som zouden hebben. Maar als een kwadraat de som is van een kwadraat en het dubbele van een ander kwadraat, dan is de zijde ervan (dwz van het eerste kwadraat), zoals ik heel gemakkelijk kan bewijzen, ook de som van een kwadraat en het dubbele van een ander kwadraat. Hieruit concluderen we dat de genoemde zijde de som is van de (twee) zijden om de rechte hoek in een rechthoekige driehoek, en dat het enkelvoudige kwadraat in de som de basis is, en het dubbele van het andere kwadraat de hoogte.

Deze rechthoekige driehoek zal dus uit twee kwadraten gevormd zijn, waarvan de som en het verschil ook kwadraten zijn. Maar aangetoond kan worden dat beide kwadraten kleiner zijn dan de kwadraten waarvan oorspronkelijk aangenomen was dat hun som en verschil allebei een kwadraat zijn. Dus als er twee kwadraten bestaan zodat hun som en verschil beide kwadraten zijn, dan zijn er ook twee andere kwadraten van natuurlijke getallen, welke (kwadraten) dezelfde eigenschap hebben maar een kleinere som hebben. Met dezelfde redenering vinden we een nog kleinere som dan deze laatste die we gevonden hebben, en zo kunnen we oneindig lang doorgaan met het vinden van steeds kleinere kwadraten van natuurlijke getallen, die dezelfde eigenschap hebben. Dit is echter onmogelijk omdat er niet een oneindige rij (natuurlijke) getallen kan bestaan die kleiner zijn dan een gekozen getal. De marge is te klein om me in staat te stellen het bewijs helemaal en in alle details te geven."

(Dezelfde stelling wordt duidelijker bewezen door Leonhard Euler (1707-1783) in zijn Vollständige Anleitung zur Algebra *(St. Petersburg 1770) (in het Engels vertaald als* Elements of Algebra*), deel 2, Hoofdstuk 13, paragraaf 206-207. Een bewijs (?) voor de onmogelijkheid van* $x^n + y^n = z^n$ *voor gehele getallen* x, y, z *met* $xyz \neq 0$, $n = 3$ *is ook te vinden in hetzelfde werk van Euler, deel 2, hoofdstuk 15, paragraaf 243.)*