

Uit David Hilbert, *Grondslagen van de Meetkunde*, derde druk (Leipzig en Berlijn, 1909).

Hoofdstuk 1. De vijf groepen axioma's.

§1. *De elementen van de meetkunde, en de vijf groepen axioma's.*

Definitie. We denken ons drie verschillende systemen van dingen: de dingen van het eerste systeem noemen we *punten*, en we geven ze aan met $A, B, C \dots$; de dingen van het tweede systeem noemen we *rechten* en we geven ze aan met $a, b, c \dots$; de dingen van het derde systeem noemen we *vlakken* en we geven ze aan met $\alpha, \beta, \gamma \dots$. De punten heten ook de *elementen van de lineaire meetkunde*, de punten en rechten heten de *elementen van de vlakke meetkunde*, en de punten, rechten en vlakken heten de *elementen van de ruimtelijke meetkunde* of *van de ruimte*.

We denken de punten, rechten en vlakken in bepaalde betrekkingen tot elkaar, en we geven deze betrekkingen aan door woorden als “liggen”, “tussen”, “evenwijdig”, “congruent”, “continu”; de nauwkeurige en volledige beschrijving van deze betrekkingen gebeurt in de *axiomas van de meetkunde*.

De axioma's van de meetkunde worden in vijf groepen onderverdeeld; ieder van deze groepen drukt bepaalde samenhangende basisfeiten van onze aanschouwing uit. Wij geven deze groepen van axioma's aan met de volgende namen:

- I 1-8 Relatieaxioma's
- II 1-4 Ordeningsaxioma's
- III 1-6 Congruentieaxioma's
- IV Het parallelenaxioma
- V 1-2 Continuïteitsaxioma's.

2. Axiomagroep I: Relatieaxiomas.

De axioma's van deze groep leggen tussen de hierboven uiteengezette begrippen punten, rechten en vlakken een relatie, en ze luiden als volgt:

I 1. *Twee van elkaar verschillende punten A, B bepalen steeds een rechte α .*

In plaats van “bepalen” zullen we ook andere uitdrukkingen gebruiken, bijvoorbeeld a “gaat door” A en “door” B ; a “verbindt” A “en” of “met” B . Als A een punt is dat met een ander punt een rechte bepaalt, dan gebruiken we ook de uitdrukkingen A “ligt op” a , A “is een punt van” a , “er is een

punt" A "op" a , enzovoort. Als A op de rechte a en bovendien op een andere rechte b ligt dan gebruiken we ook de uitdrukking: "de rechten" a "en" b "hebben het punt A gemeenschappelijk", enz.

I 2. *Elke twee van elkaar verschillende punten van een rechte bepalen deze rechte.*

I 3. *Op een rechte zijn altijd minstens twee punten; in een vlak zijn er altijd minstens drie punten die niet op één rechte liggen.*

I 4. *Drie niet op één en dezelfde rechte liggende punten bepalen steeds een vlak α .*

We gebruiken ook de uitdrukkingen: A, B, C "liggen op" α ; A, B, C "zijn punten van" α ; enz.

I 5. *Elke drie punten van een vlak, die niet op één en dezelfde rechte liggen, bepalen het vlak α .*

I 6. *Als twee punten A en B van een rechte a in een vlak α liggen, dan ligt elk punt van a in het vlak α .*

In dit geval zeggen we: de rechte a ligt in het vlak α , enz.

I 7. *Als twee vlakken α, β een punt A gemeen hebben, dan hebben ze minstens een ander punt B gemeen.*

I 8. *Er zijn minstens vier punten die niet in één vlak liggen.*

Laten we de axioma's I 1-3 de *vlakke axiomas van de groep I* noemen, ter onderscheiding van de axioma's 4-8, die ik de *ruimtelijke axioma's van de groep I* noem.

Van de stellingen die uit de axioma's I 1-8 volgen, noem ik slechts deze twee:

Stelling 1. Twee rechten in een vlak hebben één of geen punt gemeenschappelijk; twee vlakken hebben geen punt of één rechte gemeenschappelijk; een vlak en een rechte die daar niet in ligt hebben geen of één punt gemeenschappelijk.

Stelling 2. Door een rechte en een punt dat daar niet op ligt, en ook door twee verschillende rechten met een gemeenschappelijk punt gaat altijd één en slechts één vlak.