Werkcollege "rekenen" met irrationale grootheden bij Euclides. Een voorbeeld van een hopeloze theorie.

1. Lees de tekst van propositie 11 van boek 13 over de regelmatige vijfhoek globaal door, en probeer de meetkundige redeneringen (over congruente driehoeken, verhoudingen enz.) te begrijpen.

Opmerkingen:

* Euclides stelt dat de diameter rationaal is. Dit komt neer op de keuze van een eenheidssegment; alle andere segmenten worden hiermee vergeleken.

* "minor" is een naam voor een soort irrationale grootheid (we komen hier op terug).

* In een verhouding $a : b$ heet a de antecedent en b de consequent.

* "Componendo" is de naam van de volgende operatie met verhoudingen:
als $a : b = c : d$ dan $(a + b) : b = (c + d) : d$.

* "Verdelen volgens middenste en uiterste reden" betekent: snijden volgens (modern) de gulden snede. Een segment a heet (sinds de 19e eeuw) verdeeld volgens de gulden snede in x en y verdeeld wordt, als geldt $a : x = x : y$, $a = x+y$. Je kunt nu zelf x en y uitdrukken in a en afleiden dat $(x+\frac{a}{2})^2 = 5(\frac{a}{2}^2)$.

* Euclides kiest een segment r dat hij "rationaal" noemt. Segmenten s met $r^2 : s^2 = k : l$, met k, l natuurlijke getallen noemt hij (in tegenstelling tot het moderne taalgebruik) ook rationaal.

* Een apotoom, en een "vierde apotoom" zijn namen voor een bepaald soort irrationale grootheid in de klassificatie van Euclides in Boek 10 van de *Elementen*. Modern gezien is een apotoom een uitdrukking van de vorm $r\sqrt{k} - r\sqrt{\ell}$ of $rk - r\sqrt{\ell}$ of $r\sqrt{k} - r\ell$, met k, ℓ rationale getallen, De uitdrukking moet niet tot iets eenvoudigers gereduceerd kunnen worden en daarom stellen we in het eerste geval bijvoorbeeld $k \neq n^2 l$ voor alle rationale getallen n. De (modern gezien) tweede term die eraf getrokken is, heet bij Euclides "wat erbij past".

2. Om er achter te komen wat achter deze hele klassificatie zit, stellen we de straal AZ=r.

Druk achtereenvolgens uit in r: KZ, MZ, MK, BK, BM, AB.

Je krijgt een uitdrukking van AB als de wortel van een uitdrukking waar al een of twee wortels inzitten. Vanuit een modern algebraísch standpunt gezien heeft Euclides' klassificatie van irrationale grootheden te maken met de vraag of we dit soort wortels van wortels mooier kunnen schrijven. (Soms kan dat, bijvoorbeeld $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$, en vaak kan dat niet.)

Euclides wil segmenten zoals AB altijd proberen te schrijven als het verschil van twee segmenten l_1-l_2 die liefst zo eenvoudig mogelijk zijn.

Wanneer geldt $\sqrt{p - q} = (l_1 - l_2)$, dan $p - q = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2$ en hieruit kunnen we (onder bepaalde aannamen) concluderen $p = l_1^2 + l_2^2$ en $q = 2l_1 l_2$. Je kan l_1 en l_2 dan oplossen met behulp van de formule voor oplossen van kwadratische vergelijkingen.

Nu zijn er twee gevallen:
1. De discriminant is een kwadraat, dan zijn l_1 en l_2 "mooi".
2. De discriminant is geen kwadraat, dan zijn l_1 en l_2 minder "mooi"
(Euclides klassificeert al deze gevallen apart.)
Vind l_1 en l_2 voor AB.

3. Ga na dat N in de tekst te maken heeft met de discriminant in de kwadratische vergelijking.

Laat zien dat de uitdrukking voor AB die je nu vindt inderdaad aan de definitie van "minor" in Euclides, *Elementen* Boek 10, prop. 76 voldoet (zie hieronder; gebruik de l_1 en l_2 die je uitgerekend hebt.)

Zie de definities hieronder:

Definitie van minor: Euclides, *Elementen*, Boek 10, prop. 76:

"Als van een rechte lijn een rechte lijn wordt afgetrokken die onderling onmeetbaar is in vierkant met de hele (lijn), en die samen met de hele lijn de (som van de) vierkanten samen rationaal maakt, maar de rechthoek die door hen beiden bevat is, mediaal, dan is de rest irrationaal, en laat deze (rest) *minor* genoemd worden."

Definitie van "mediaal": Euclides, *Elementen*, Boek 10, prop. 21:

De rechthoek bevat door rationale rechte lijnen die alleen onderling meetbaar in vierkant zijn, is irrationaal, en de zijde van het vierkant die er gelijk aan is, is irrationaal. Laat die zijde mediaal genoemd worden (en de rechthoek ook).