Hoe een genie dacht.

Van Leibniz zijn een groot aantal wiskundige handschriften bewaard. Leibniz deed wiskunde met de pen in zijn hand, en schreef al zijn gedachten direct op. Daardoor kunnen we zien hoe hij redeneerde. We vertalen hier een paar stukjes uit de handschriften waarin hij voor het eerst de tekens voor integraal $\int$ *en de* dx*-notatie invoerde. De lezer moet hier geen systematische beschouwing verwachten. Leibniz springt van de hak op de tak, en maakt af en toe vreemde fouten.*

Bron: voorlopig de Engelse vertaling in J.M. Child, The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz, *Chicago-London 1920, pp. 70-71, 80-02, 93-96, 100-102, 143. Dit moet nog met de Latijnse editie van Gerhardt vergeleken worden. Enkele voor de hand liggende drukfouten zijn verbeterd, woorden tussen haakjes zijn door de vertaler (J.P.H.) toegevoegd.*

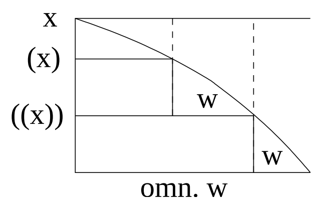
Uit een handschrift gedateerd 26 Oktober 1675

Hier is een andere overweging.

De momenten van de verschillen om een rechte lijn loodrecht op de as zijn gelijk aan het complement van de som van de termen, en de momenten van de termen zijn gelijk aan het complement van de som van de sommen, d.w.z.[1]

$$\text{omn. } \overline{xw} \sqcap \text{ult.}x,\overline{\text{omn.}w},, - \overline{\text{omn.omn.}w}$$

[1]Leibniz leidt hier een formule af die vergeleken kan worden met modern partieel integreren: $\int f(x)g(x)dx = fG(x) - \int f'(x)G(x)dx$ met $f(x) = x, g(x) = w(x), G$ een primitieve van g. Hij denkt hierbij aan de figuur, en stelt zich (kennelijk) een kromme voor met een verticale $x-$as, die in een heleboel stukjes is verdeeld van gelijke lengte. In de figuur maar drie stukjes, maar we moeten ons voorstellen dat het bijna oneindig veel zijn. Nu is ult. x de grootste x, dat wil zeggen is de hoogte van de rechthoek; w zijn de stukjes waarin de horizontale zijde verdeeld is dus omn.w is de breedte van de rechthoek, zodat ult.x, $\overline{\text{omn.}w}$,, de oppervlakte van de rechthoek is. Deze bestaat uit het gedeelte boven en onder de kromme. Het stuk boven de kromme is omn.$\overline{xw}$, alle verticale rechthoekjes. Het stuk onder de kromme is $\overline{\text{omn.omn.}w}$. Merk op dat Leibniz een aparte notatie gebruikt $\sqcap$als gelijkteken. De betekenis van kommatjes , is verwant aan de moderne haakjes. Soms zet Leibniz ook een ononderbroken lijn boven termen die wij tussen haakjes zouden schrijven.



Laat $xw \sqcap az$, dan $w \sqcap \frac{az}{x}$, en er geldt

$$\text{omn.}az \sqcap \text{ult.}x,\ \text{omn.}\frac{az}{x} - \text{omn.omn.}\frac{az}{x};$$

...

Verder, omn.$\frac{a}{x} \sqcap$ult.x, omn.$\frac{a}{x^2}$ - omn.omn.$\frac{a}{x^2}$;

en omn.$a \sqcap$ult.x, omn.$\frac{a}{x}$ - omn.omn.$\frac{a}{x}$;

De laatste stelling drukt de som van de logaritmen uit in termen van de bekende kwadratuur van de hyperbool.[2]

...

Uit een handschrift gedateerd 29 Oktober 1675. De geboorte van de $\int$-notatie.

...

Een andere stelling van dezelfde soort is

$$\text{omn.}x\ell = x\ \text{omn.}\ell - \text{omn.omn.}\ell$$

waar ℓ een term in een rij aangeeft, en x het getal dat de positie of de volgorde van ℓ aangeeft; of x is het rangnummer en ℓ is het ding dat geteld wordt.

N.B. In deze berekening kan een wet worden opgemerkt over dingen van dezelfde soort; want als omn. voor een getal of een verhouding wordt gezet, of voor iets dat oneindig klein is, dan komt er een lijn uit; als het voor een lijn gezet wordt, komt er een oppervlak uit, of als het voor een oppervlak gezet wordt, komt er een lichaam uit; en zo verder tot in het oneindige voor hogere dimensies.

[2]Modern: $f(x) = x, g(x) = \frac{a}{x}$ en we krijgen $\int adx = x\int \frac{a}{x}dx - \int\int_c^x \frac{a}{t}dtdx$. De kromme $y = \frac{a}{x}$ is een hyperbool en "kwadratuur" betekent het vinden van een vierkant met oppervlakte gelijk aan een stuk onder de hyperbool, dus modern gezien komt kwadratuur met integratie overeen. Merk op $\int_c^x \frac{a}{t}dt = a\log x - a\log c$.

Het zal nuttig zijn $\int$ te schrijven voor omn., zodat

$\int \ell =$ omn. ℓ, of de som van de ellen.

Dan[3] $\int \overline{\frac{\ell^2}{2}} = \int \overline{\int \overline{\ell} \frac{\ell}{a}}$, en $\int \overline{xl} = x \int \overline{\ell} - \int \int \ell$.

Hieruit zal duidelijk zijn dat altijd een wet voor dingen van hetzelfde soort kan worden opgemerkt,[4] en dit is nuttig voor het vermijden van rekenfouten.

N.B. Als $\int \ell$ analytisch gegeven is, is ℓ ook gegeven; dus als $\int \int \ell$ gegeven is, dan is ℓ het ook; maar als ℓ gegeven is, is $\int \ell$ niet ook gegeven.

In elk geval is $\int x = \frac{x^2}{2}$.

N.B. Al deze stellingen zijn waar voor reeksen waarin de verhouding van de verschillen tussen de termen tot de termen kleiner is dan elke (positieve) grootheid die we kunnen aangeven.

$\int x^2 = \frac{x^3}{3}$.

. . .

Ik stel voor om naar eerdere overwegingen terug te keren.[5]

Gegeven ℓ en zijn relatie tot x, vind $\int \ell$.

Dit moet uit de tegenovergestelde calculus verkregen worden. Dat wil zeggen: stel dat $\int \ell = ya$. Stel $\ell = \frac{ya}{d}$; net zoals $\int$ de dimensies verhoogt, zal d ze verminderen. Maar $\int$ betekent een som, en d een verschil. Uit de gegeven y kunnen we altijd $\frac{y}{d}$ of ℓ vinden, dat is het verschil van de y's,

. . .

Uit een handschrift gedateerd 11 November 1673.[6] Geboorte van de moderne d-notatie.

Voorbeelden van de inverse methode van raaklijnen.

Een jaar of twee geleden stelde ik mijzelf de vraag, wat als één van de moeilijkste dingen in de meetkunde gezien kan worden; of, in andere woorden, welke problemen er waren waarvoor de gewone methoden niets goeds bijgedragen hadden. Vandaag heb ik het antwoord gevonden, en ik geef er nu de analyse van.

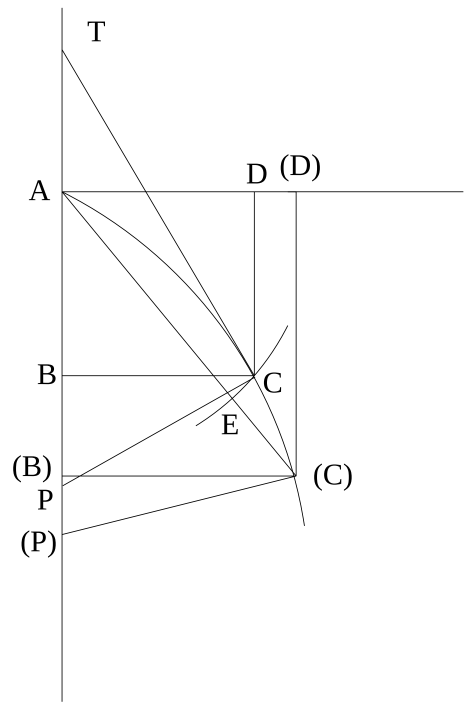
Vind de kromme $C(C)$, waarin het interval BP tussen de ordinaat BC en de normaal PC aan de kromme, en genomen op de as $AB(B)$, omgekeerd evenredig is met de ordinaat BC.

[3] Hier staat een andere stelling die Leibniz eerder heeft afgeleid, waarin ℓ een term van een rekenkundige rij is en a het constante verschil tussen twee opeenvolgende termen.

[4] Bijvoorbeeld, in de laatste formule heeft elke term drie factoren, als $\int$ ook als een factor wordt beschouwd.

[5] Hieronder zien we de $d-$notatie voor het eerst optreden.

[6] Dit moet een schrijffout zijn; het jaar is 1675.



...

Laten we $AB = CD = x$ en $AD = BC = y$ noemen, en laat $BP = w$ en $B(B) = z$. Dan volgt uit wat ik ergens anders bewezen heb, dat

$\int wz = \frac{y^2}{2}$, of $wz = \frac{y^2}{2d}$.

Maar uit de kwadratuur van een driehoek,[7] is is het duidelijk dat $\frac{y^2}{2d} = y$, en daarom $wz = y$. Nu volgt uit de hypothese $w = b/y$.

...[8]

Maar in werkelijkheid is het een veel moeilijker probleem als men de kromme wil zoeken waarin AP omgekeerd evenredig is met de ordinaat BC.

Want dan $x + w = \frac{a^2}{y}$ en $wz = \frac{y^2}{2d}$, en ook $\int z = x$, of

$z = \frac{x}{d}$, dus $w\frac{x}{d} = \frac{y^2}{2d}$ en

$w = \frac{y^2}{2d} \cup \frac{x}{d}$,

[7]Mdern: de oppervlakte van een rechthoekige driehoek met zijden y, dat is het gebied onder de grafiek $t = x$ tussen $t = 0$ en $t = y$ is $\frac{y^2}{2}$

[8]Leibniz bewijst dan dat de oplossing van het probleem een kromme is met vergelijking $x = \frac{y^3}{3ba}$. De a is een extra factor die Leibniz beter had kunnen weglaten, omdat zijn b al de dimensie van een oppervlak heeft. Modern geldt $w = yy'$, en kan het probleem worden geformuleerd als de differentiaalvergelijking $yy' = b/y$.

zodat $x + \frac{y^2}{2d} \cup \frac{x}{d} = \frac{a^2}{y}$.

Als we aannemen dat de x-en een rekenkundige rij vormen, dan zal $x/d = z$ constant zijn, en dan zullen we hebben:

$x + \frac{y^2}{2d} = \frac{a^2}{y}$, of $\int x = \int \frac{a^2}{y} - \frac{y^2}{2}$,

daarom $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \int \overline{\frac{a^2}{2}}$, of[9] $d\overline{x^2 + y^2} = \frac{2a^2}{y}$;

maar als we AC, A(C) verbinden, dan zullen deze gelijk zijn aan $\sqrt{x^2 + y^2}$, en als we met middelpunt A en straal AC een boog CE beschrijven die de rechte lijn AE(C) in E snijdt, dan zal E(C) het verschil zijn tussen AC en A(C), dat is: E(C) = e = $d\overline{x^2 + y^2}$. Dus[10] $e = 2a^2/y$.

…

Laten we nu onderzoeken[11] of $dxdy$ hetzelfde is als $d\overline{xy}$, en of dx/dy hetzelfde is als $d\frac{x}{y}$; het is in te zien dat wanneer $y = z^2 + bz$ en $x = cz + d$, dan[12]

$$dy = z^2 + 2\beta z + \beta^2, + bz + b\beta, -z^2 - bz,$$

en dit wordt $dy = 2z + b\beta$.

Op dezelfde manier $dx = +c\beta$, en dus

$$dxdy = \overline{2z + b}\, c\beta^2.$$

Maar je krijgt hetzelfde als je $d\overline{xy}$ direct uitrekent. Want in elk van de factoren is een apart wegvalproces (van termen), waarbij het ene (proces) het andere niet beinvloedt; en hetzelfde geldt voor delers.

Laat ons nu bekijken of er een verschil is als we de sommen van deze dingen zoeken. We hebben $\int dx = x$, $\int dy = y$ en $\int d\overline{xy} = xy$. Als we dan een vergelijking hebben, zeg $dxdy = x$, dan $\int dxdy = \int x$. Maar $\int x = x^2/2$,

[9]Hier komt plotseling, zonder enige overgang, voor het eerst de d in de teller te staan. Hierna gebruikt Leibniz d nog maar zelden in de noemer, en bijna altijd in de teller.

[10]Deze conclusie klopt niet, maar Leibniz heeft een wortelteken vergeten. Hierna schrijft Leibniz nog een poos door aan het probleem zonder dat dat tot een duidelijke uitkomst leidt. Modern kan men het probleem vertalen naar de differentiaalvergelijking $x + yy' = a^2/y$, die equivalent is met $(x^2 + y^2)' = 2a^2/y$.

[11]Modern gezegd heeft dit te maken met de vraag of voor twee differentieerbare reële functies f en g de afgeleide $(fg)'$ gelijk is aan $f' \cdot g'$, en of $(\frac{f}{g})'$ gelijk is aan $\frac{f'}{g'}$.

[12]Hierna neemt Leibniz twee opvolgende waarden z en $z + \beta$ aan en hij berekent $dy = (z + \beta)^2 + b(z + \beta) - z^2 - bz$.

en dus $xy = x^2/2$, of $x/2 = y$, en dit voldoet aan de vergelijking $dxdy = x$; want als we voor y de waarde invullen, $dx\frac{dx}{2} = x$, of $d\frac{x^2}{2} = x$, en er is bekend dat dit waar is.

Voor sommen kloppen deze resultaten niet, want $\int x \int y$ is niet hetzelfde als $\int xy$; de reden is dat een verschil een enkelvoudige grootheid is, en een som het aggregaat van vele grootheden. De som van de verschillen is de laatste term. Maar, uit de sommen van de factoren kunnen we de sommen van de produkten vinden, nog niet analytisch, maar met een speciale methode van redeneren, zoals Wallis gedaan heeft in dit soort dingen, niet door ze te bewijzen, maar door een gelukkige methode van inductie. Toch zou het een heel belangrijk iets zijn, bewijzen hiervoor te vinden. Stel $\int \overline{zy}$ is de som die we moeten vinden. Stel $\int \overline{zy} = w$, dan $zy = \overline{dw}$, en $y = \frac{\overline{dw}}{z}$, en $\int y = \int \frac{\overline{dw}}{z}$. Op dezelfde manier $\int z = \int \frac{\overline{dw}}{y}$. Stel dat $\int y$ bekend is, $= v$, en dat $\int z$ bekend is, $= \psi$, dan $y = dv = \frac{dw}{z}$ en $z = d\psi = \frac{dw}{y}$, en $\frac{dv}{d\psi} = \frac{z}{y}$. Hieruit schijnt te volgen dat $d\frac{v}{\psi} = \frac{z}{y}$, en daarom $\frac{v}{\psi} = \int \frac{z}{y}$. Daarom $\int \frac{z}{y} = \frac{\int z}{\int y}$, hetgeen duidelijk niet correct is. Daaruit volgt dat $\int \frac{dv}{d\psi}$ niet gelijk kan zijn aan $\frac{v}{\psi}$.

Wat kan het dan wel zijn? We moeten de verschillen van de $v's$, gedeeld door de verschillen van de ψ's, bij elkaar optellen. D.w.z. het is niet zo dat alle verschillen van de v, ofwel de hele v, gedeeld moeten worden door elk individueel verschil van de ψ; dit is niet waar, omdat elk individueel verschil uit de eerste categorie (van de v) gedeeld wordt door elk individueel verschil uit de tweede categorie (van de ψ) dat daarmee correspondeert, en niet bij allemaal (d.w.z. de som). Daarom is $\int \frac{dv}{d\psi}$ niet hetzelfde als $\frac{\int dv}{\int d\psi}$ ofwel $\frac{v}{\psi}$. Zou dan $d\frac{v}{\psi}$ ook niet iets anders zijn dan $\frac{dv}{d\psi}$? Als het hetzelfde zou zijn, dan zou ook $\int d\frac{v}{\psi} = \int \frac{dv}{d\psi}$, dat wil zeggen $\frac{v}{\psi} = \int \frac{dv}{d\psi} = \frac{\int dv}{\int d\psi}$, hetgeen absurd is.

Op dezelfde manier, als we stellen dat $d\overline{v\psi} = dvd\psi$, dan $\int d\overline{v\psi}$, of $v\psi = \int \overline{dvd\psi}$. Nu is $v\psi = \int dv \int d\psi$, dus $\int \overline{dvd\psi} = \int dv \int d\psi$; hetgeen absurd is.

Dus blijkt dat het niet correct is om te zeggen dat $dvd\psi$ hetzelfde is als $dv\psi$, of dat $\frac{dv}{d\psi} = d\frac{v}{\psi}$; hoewel ik hier vlak boven gezegd heb dat dit wel zo is, en het scheen bewezen te zijn. Dit is een moeilijk punt. Maar nu zie ik hoe dit beslist kan worden.

...

bijvoorbeeld $x + \beta, \cap x + \beta, , -, x, x,$ wordt $2\beta x$,
wat heel iets anders is dan
$x + \beta, -x, , \cap x + \beta, -x,$ wat β^2 oplevert.

Dus moet geconcludeerd worden dan $dv\psi$ niet hetzelfde is als $dvd\psi$, en dat $d\frac{v}{\psi}$ niet hetzelfde is als $\frac{dv}{d\psi}$.

...

Uit een ongedateerd manuscript, ca. 1680.

...

Eenvoudige vermenigvuldiging:

Hier: $dxy = xdy + ydx$, of $xy = \int xdy + \int ydx$.

Dit is wat we hierboven gezegd hebben over figuren die samen met hun complementen gelijk zijn aan de omgeschreven rechthoek. Het wordt door de calculus als volgt bewezen:[13]

dxy is het verschil tussen twee opvolgende xy's, laat een ervan xy zijn, en de andere $(x + dx)(y + dy)$, dan hebben we $dxy = \overline{\overline{x + dx} \cdot \overline{y + dy}} - xy = xdy + ydx + dxdy$;

Als we de grootheid $dxdy$ weglaten, die oneindig klein is in vergelijking met de rest, want er wordt verondersteld dat dx en dy oneindig klein is (omdat de lijnen verondersteld worden continu toe te nemen of af te nemen met heel kleine aangroeiïngen, als we de hele reeks waarden doorlopen), dan blijft er $xdy + ydx$ over. De tekens verschillen al naargelang x en y allebei toenemen, of de ene toeneemt en de andere afnemen; op dit punt moet gelet worden.

Eenvoudige deling

Hier[14] hebben we; $d\frac{y}{x} = \frac{xdy - ydx}{xx}$.

...

[13]Vergelijk $(fg)' = fg' + f'g$.

[14]Vergelijk $(\frac{f}{g})' = \frac{fg' - f'g}{g^2}$.